

مشتق

- ۱ آشنایی با مفهوم مشتق
- ۲ مشتق پذیری و پیوستگی
- ۳ آهنگ تغییر



فصل

آشنایی با مفهوم مشتق



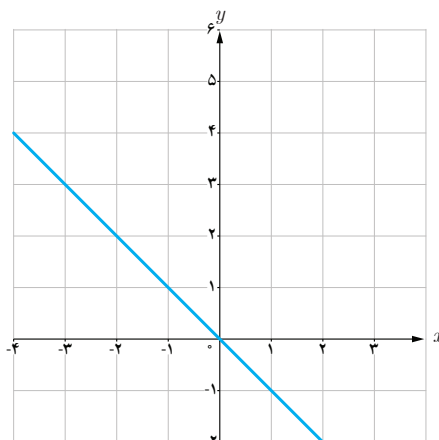
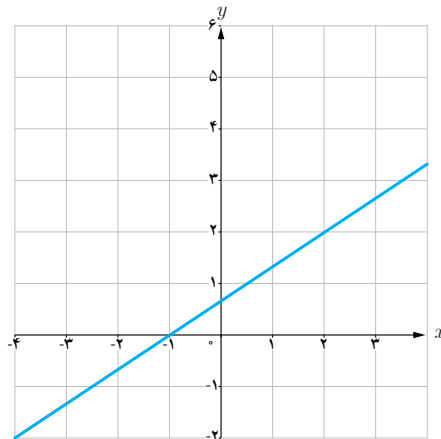
درس

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده‌های اولیه در مورد مفهوم مشتق به شیب یک خط مربوط می‌شود. با شروع از این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

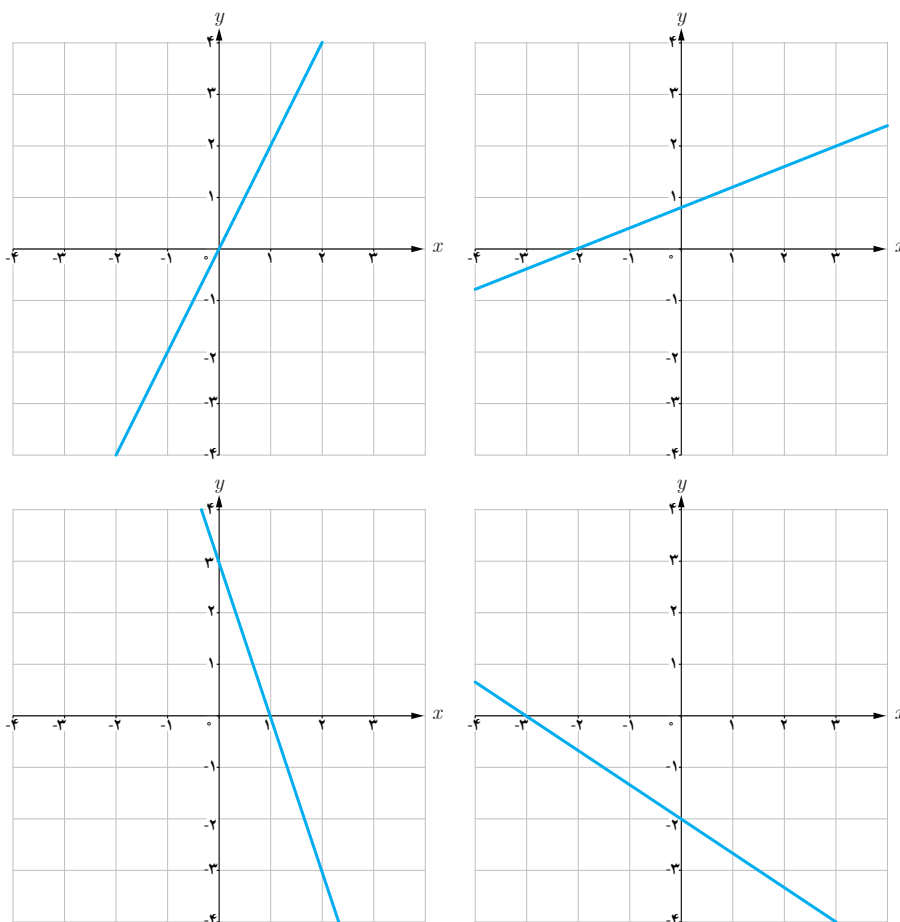
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک

منفی است؟

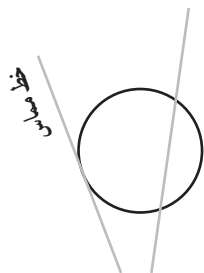


خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-۳	۲	$-\frac{2}{3}$

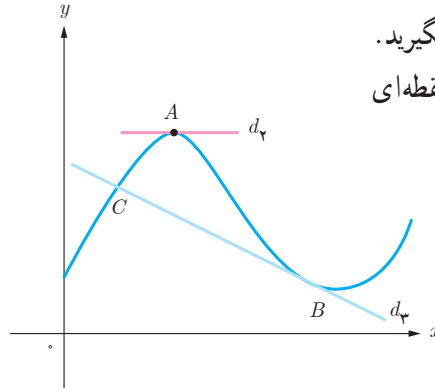
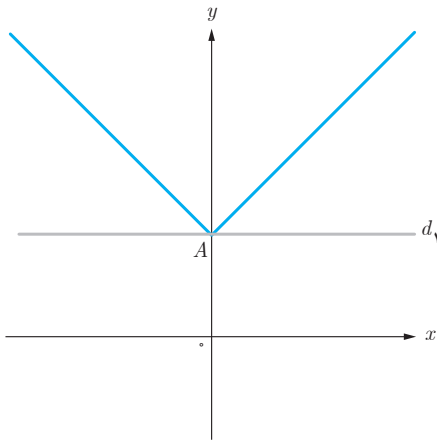
۲ با توجه به جدول خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 را روی شکل مشخص کنید.



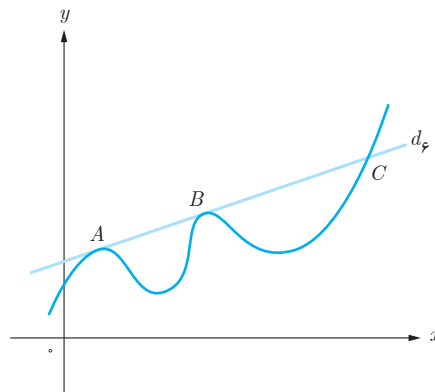
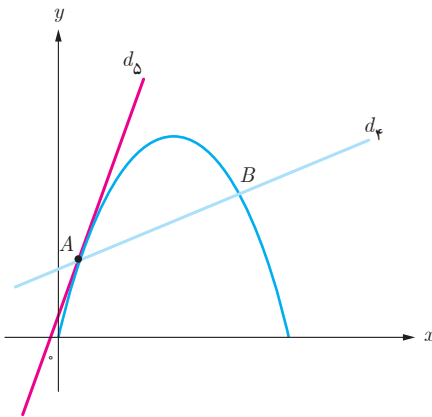
خط مماس بر یک منحنی



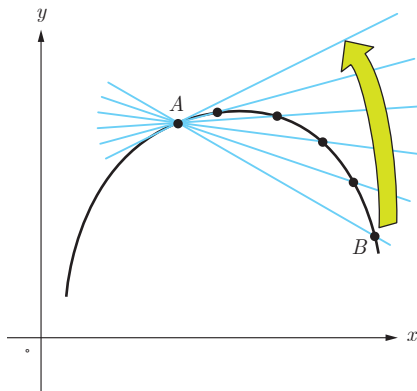
یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که یکی از نقاطش بر دایره و کلیه نقاط دیگرش خارج آن هستند، به عبارت دیگر خط در یک نقطه با دایره تماس دارد. مسئله مهم این است که آیا این تعریف را می‌توان به منحنی‌های دیگر تعمیم داد؟



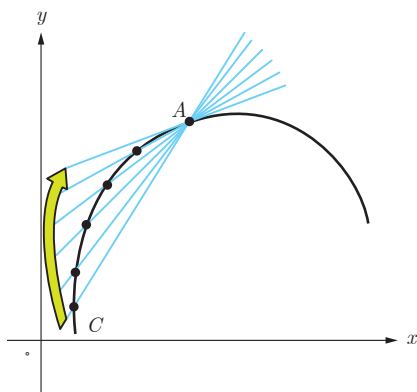
خط‌های d_1 تا d_n را در نظر بگیرید.
مشخص کنید که هر کدام در چه نقطه‌ای
بر منحنی داده شده مماس است.



فعالیت



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی مقابل در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟



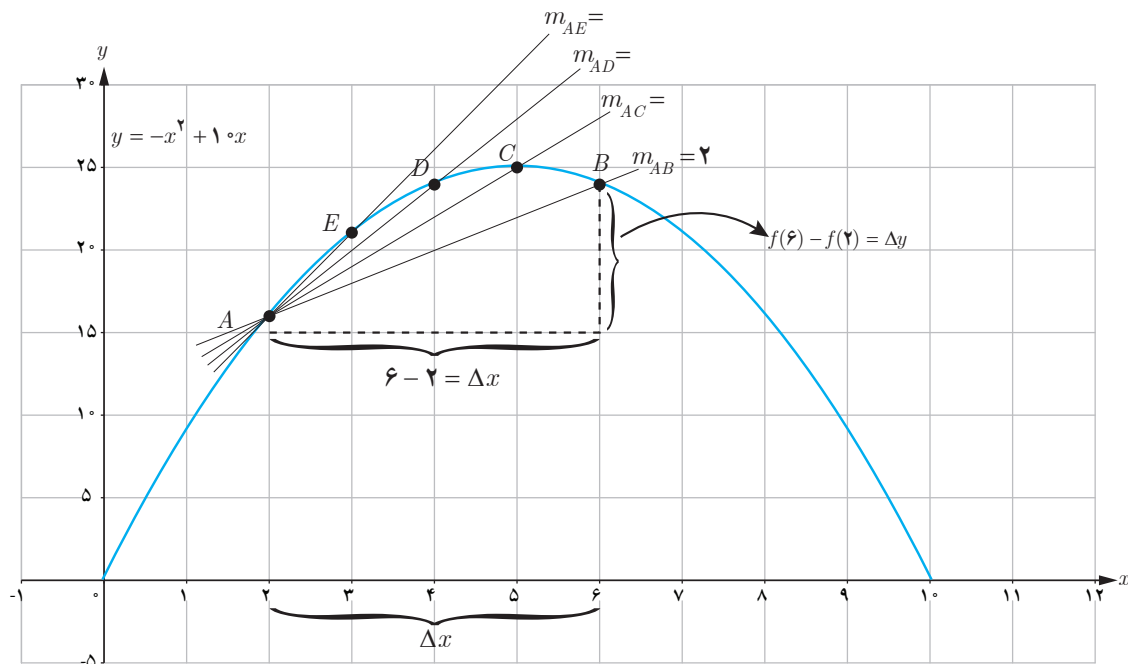
اکنون نقطه C را قبل از نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت:

خط مماس بر منحنی در نقطه A حد خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.
در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

الف تابع $f(x) = -x^2 + 1 \cdot x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$ نقاط $A(2, f(2))$ و $B(6, f(6))$ و $C(5, f(5))$ و $D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت جابه‌جایی (تغییر) عمودی را به جابه‌جایی (تغییر) افقی به دست می‌آوریم. اگر این جابه‌جایی‌ها را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

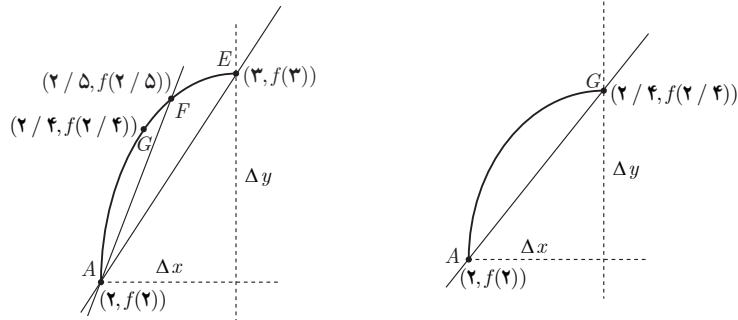
$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δx ‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟

- | | | | | |
|----------|---|-------|---|------------------------|
| $[2, 6]$ | ۲ | _____ | ۶ | $\Delta x = 6 - 2 = 4$ |
| $[2, 5]$ | ۲ | _____ | ۵ | $\Delta x = 5 - 2 = 3$ |
| $[2, 4]$ | ۲ | _____ | ۴ | $\Delta x = 4 - 2 = 2$ |
| $[2, 3]$ | ۲ | _____ | ۳ | $\Delta x = 3 - 2 = 1$ |

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب

خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = x^2 + 1$ در فاصله $[۲, ۳]$ رسم شده است. در ادامه نمودار منحنی در بازه $[۲, ۲/۴]$ رسم شده است.



$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/25 - 16}{0/5}$$

$$= \frac{2/25}{0/5} = 5/5$$

$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{5/4 - 16}{0/4}$$

$$= \frac{5/4 - 16}{0/4} = \frac{5/4 - 16}{0/4}$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، با تکمیل جدول برای هر بازه داده شده، شیب خط‌های قاطع جدید را به دست آورید و شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$[۲, ۲/۴]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{5/4 - 16}{0/4} = \frac{5/4 - 16}{0/4} = 5/6$
$[۲, ۲/۳]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{13/9 - 16}{0/3} = \frac{13/9 - 16}{0/3} = 5/8$
$[۲, ۲/۲]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/4 - 16}{0/2} = \frac{1/4}{0/2} = 5/8$
$[۲, ۲/۱]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/1 - 16}{0/1} = \frac{0/1}{0/1} = 5/9$
$[۲, ۲/0.۱]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.01 - 16}{0.01} = \frac{0.01/0.01}{0.01} = 5/99$
$[۲, ۲/0.0۱]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.0001 - 16}{0.0001} = \frac{0.0001/0.0001}{0.0001} = 5/999$
\vdots	\vdots
$[۲, ۲+h]$ یک عدد خیلی کوچک (تزدیک به صفر)	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \rightarrow ?$

حدس می‌زنید که با ادامه این روند شیب خط‌های قاطع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت)

است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط

بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است مقدار حد بالا را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h - 3 - 18/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h - 3 - 18/h) \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ و $[1/6, 2]$ و $[1/7, 2]$ و $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ و $6/2$ و ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به عدد ۶ به هر میزان که بخواهیم نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از چپ به صفر نزدیک شود.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{یعنی:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{بنابراین به طور کلی داریم:}$$

اگر f یک تابع باشد، شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود باشد. اگر حد بالا موجود نباشد، مماس بر منحنی در نقطه A تعریف نمی‌شود. همچنین حد بالا را گاهی شیب منحنی در a نیز می‌نامیم.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند. یعنی: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

بنابراین $f'(2) = 6$ در ادامه $f'(3)$ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \cdot (3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 + 1 \cdot h - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 4h - 17}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 4) = -4 \end{aligned}$$

❖ **مثال:** معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1$ را در نقطه $A(2, f(2))$ بنویسید.

❖ **حل:** $f'(2) = 6 =$ شیب خط مماس در نقطه A

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

کارد کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = -x^2 + 1$ را در نقطه‌ای به طول ۳ بنویسید.

دستورهایی دیگر برای محاسبه مشتق

با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهایی معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

❖ **مثال:** اگر $f(x) = -x^2 + 1$ ، $f'(2)$ را از دستور بالا به دست آورید:

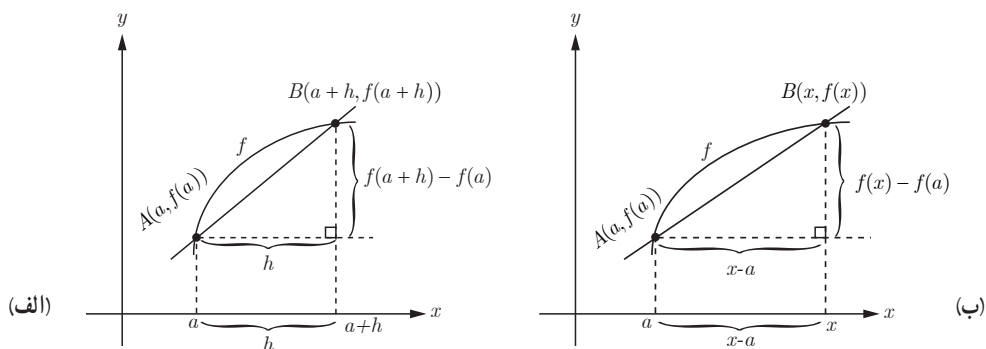
$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 - (-2^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{4} - \Delta x^2 - 4\Delta x + \cancel{4} + 1 \cdot \Delta x - \cancel{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = 6$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف شد: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه a می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



در درس گذشته با نمودارهایی مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a کار کرده‌اید. می‌دانیم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی بر مماس خط شیب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

راه (معادل) دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت در شکل ب داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه حد کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به a به قدر کافی نزدیک شود).

❖ مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

❖ حل:

روش اول:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس ادامه به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کاردر کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد ثابت کنید.

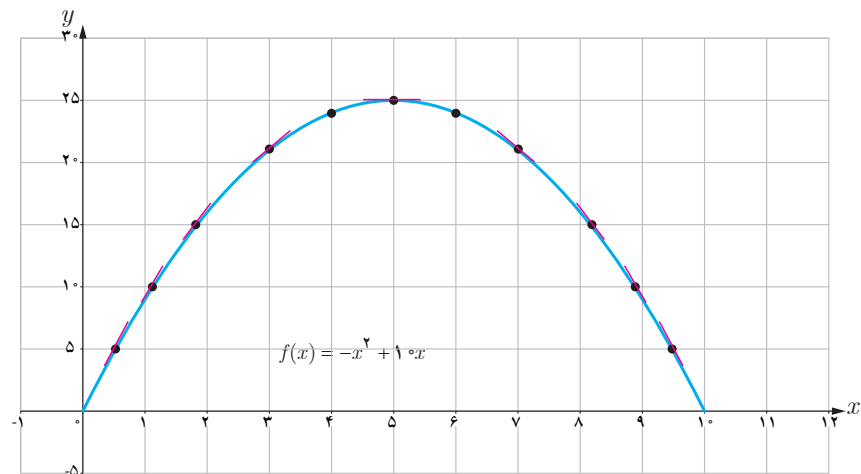
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

❖ راهنمایی: تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.

توجه داریم که وقتی $h \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow a$

کاردر کلاس

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.
 ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.
 پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.



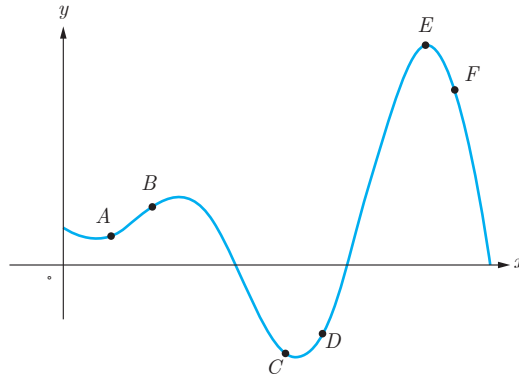
ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. دلیل شما چیست؟

ث) با محاسبه مشتق تابع در نقاط ۳ و ۴ ($f'(3)$ و $f'(4)$) صحت حدس خود را بررسی نمایید.

۱ اگر $f(x)=x^2$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
$\frac{1}{2}$	
۱	
۲	



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر اعداد داده شده را از

کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

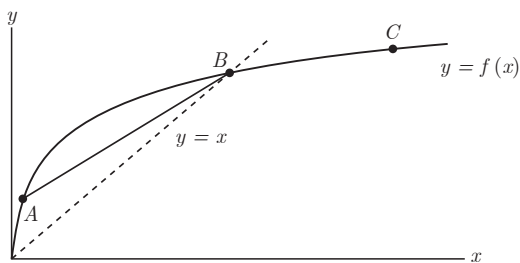
ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, \dots, m_6 و

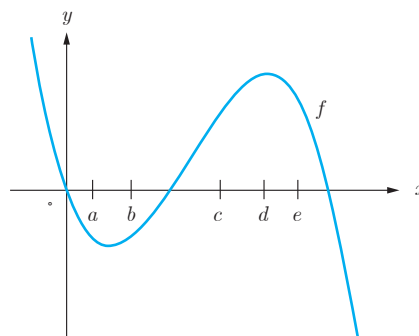
در نظر بگیرید.



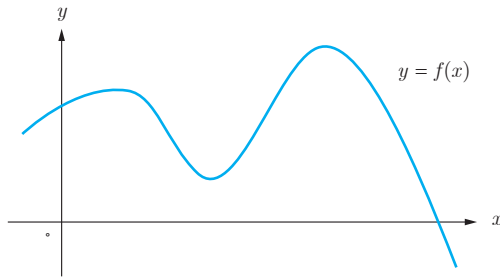
۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط a, b, c, d, e را با مشتق‌های

داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
۲	
-۰/۵	
-۲	



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:



الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب آن منفی است.
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع در آن منفی است.

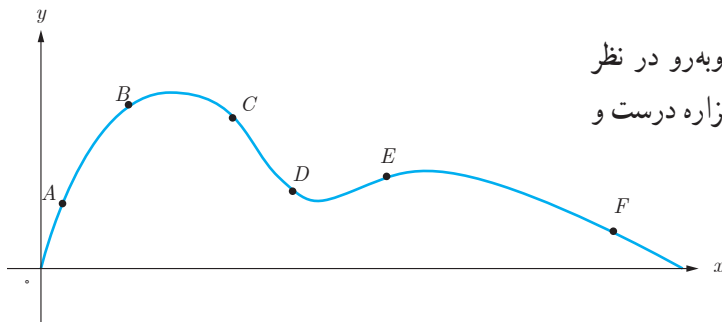
پ) C نقطه‌ای روی نمودار منحنی است که مشتق بزرگ‌ترین مقدار را (در بین بقیه این نقاط) دارد.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۶ اگر $f(x) = -x^3 + 10x$ ، $f'(x)$ را به دست آورید.



۷ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

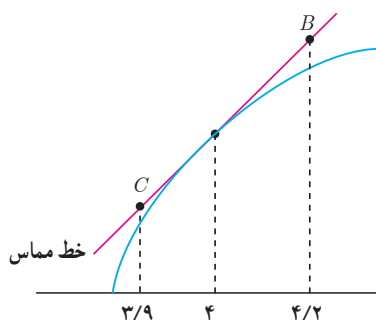
ب) $m_A < m_B$

پ) $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط C و D ، F منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



۸ برای تابع F در شکل زیر داریم: $f(4) = 25$ ، $f'(4) = 1/5$

باتوجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.

۹ اگر برای تابع f داشته باشیم: $f'(5) = 4$ الف) کدام یک از مقادیر زیر به $f'(5)$ نزدیک‌تر است؟

$$\frac{f(7) - f(5)}{7 - 5}$$

$$\frac{f(5/2) - f(5)}{5/2 - 5}$$

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5}$$

ب) اگر بدانیم که علاوه بر این: $f(5) = 7$ مقدار $f(6)$ به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۵ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۸

مشتق پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای مانند x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

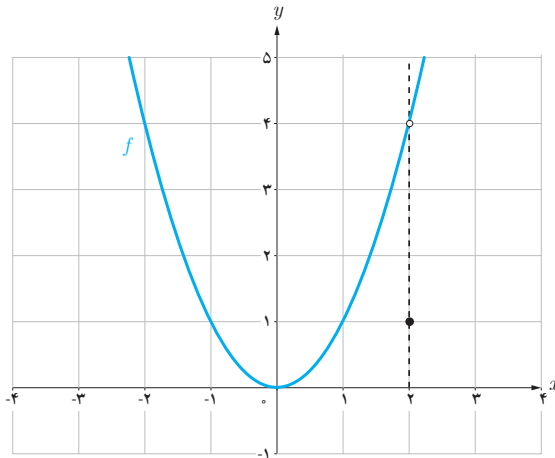
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست هم دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از موقعیت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل زیر) را در نظر می‌گیریم:



برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به کار می‌گیریم.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. اما وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخرج کسر با مقادیر متفاوتی به صفر نزدیک می‌شود، داریم:

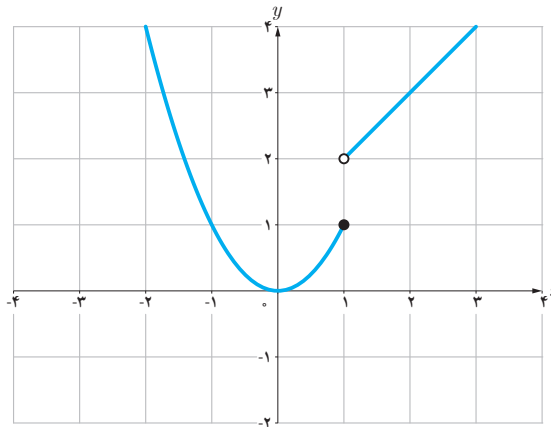
$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

الف) چرا $f'(2)$ موجود نیست؟

ب) نقطه دیگری (به جز $x=2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.

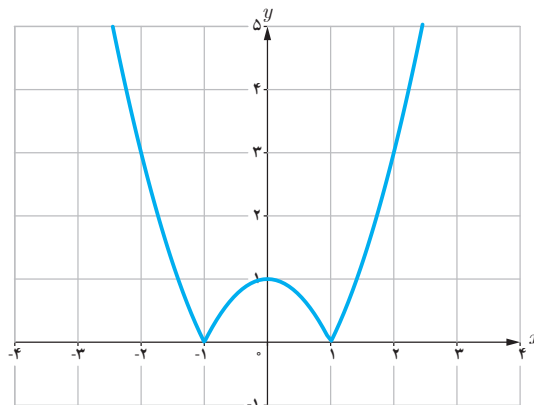
تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(1)$ موجود نیست؟



توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. در ادامه خواهید دید که ناپیوستگی تابع در یک نقطه، یکی از حالت‌هایی است که موجب می‌شود تابع در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. در اینجا یک سؤال مهم مطرح می‌شود: اگر تابعی در یک نقطه پیوسته باشد، آیا در آن نقطه مشتق پذیر است؟

مثال بعد نشان می‌دهد که حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. ❀ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

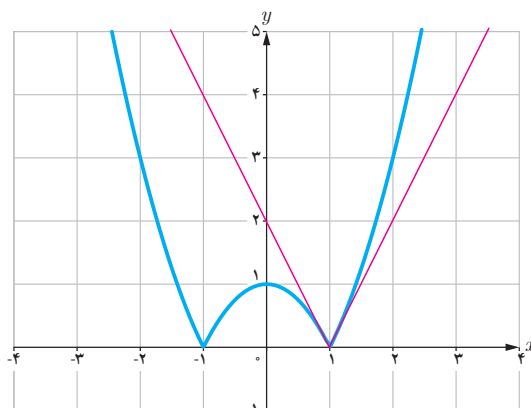


برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.



در مثال فوق f در $x=1$ پیوسته است ولی f در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت: شیب نیم مماس راست $f'_+(1)$ شیب نیم مماس چپ $f'_-(1)$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب

$$y - 0 = 2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2$$

$$y - 0 = -2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2$$

می‌باشند.

کارد کلاس

نشان دهید که مشتق f در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با آنکه پیوستگی یک تابع لزوماً مشتق پذیری آن را نتیجه نمی‌دهد، اما عکس آن همواره درست است، به عبارت دیگر:

❖ **قضیه:** اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

❖ **اشارات:** کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right)) =$$

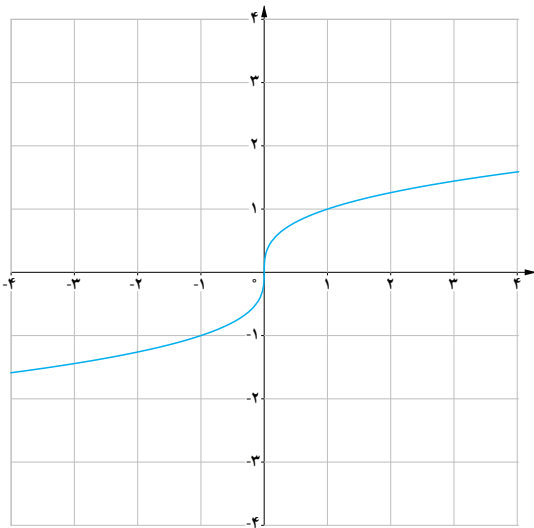
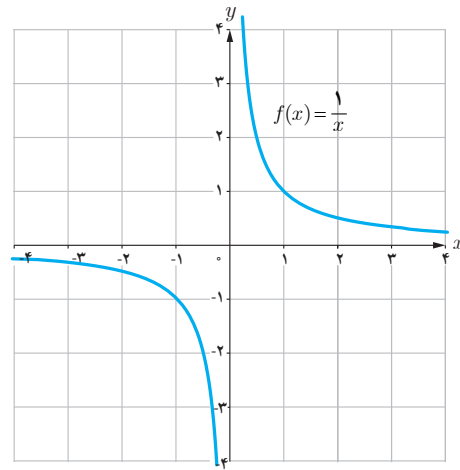
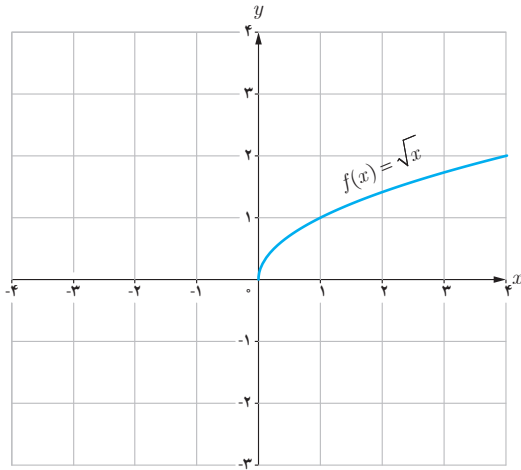
$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

❁ **مثال:** توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیست.

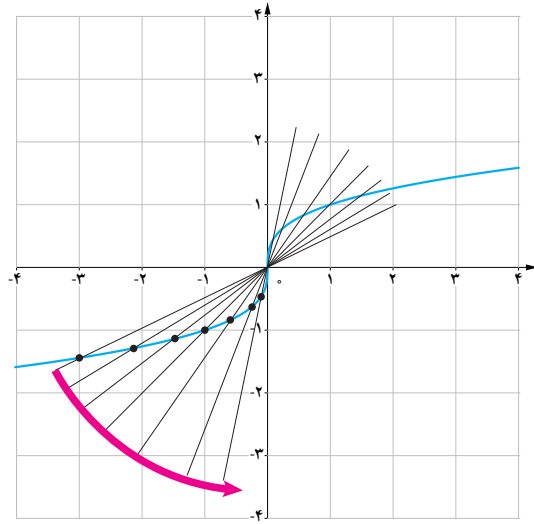
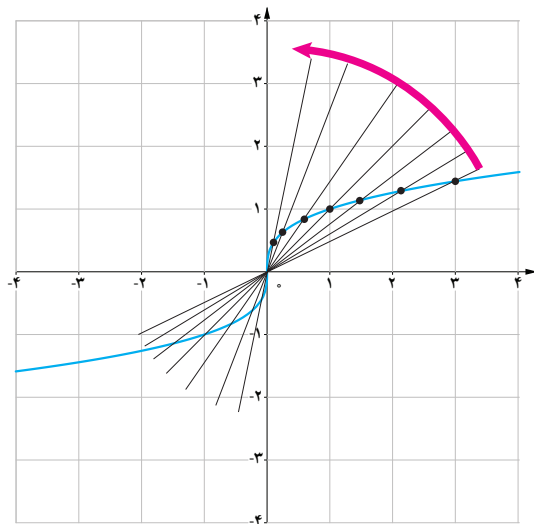


اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.



تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست و خط $x = 0$ را مماس قائم منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را

مماس قائم بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد. به طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱ در a پیوسته نباشد.

۲ در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$.

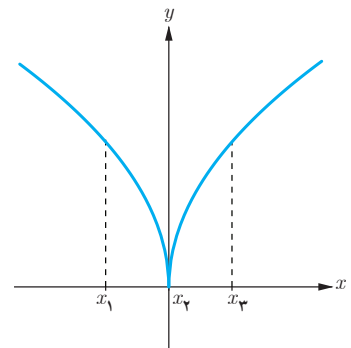
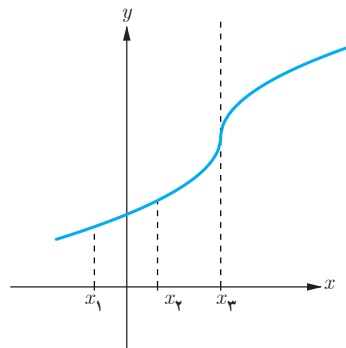
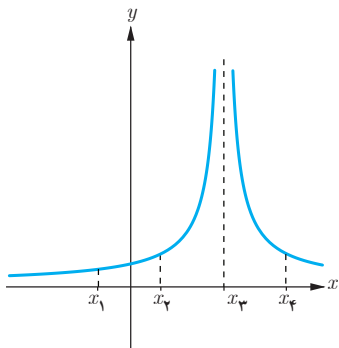
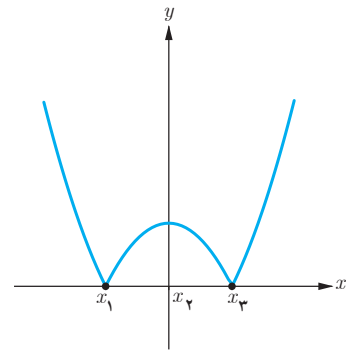
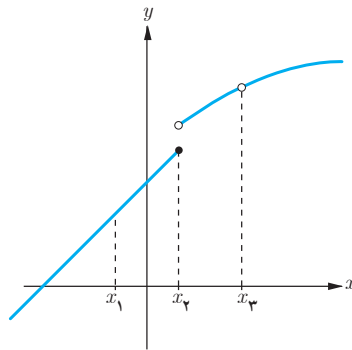
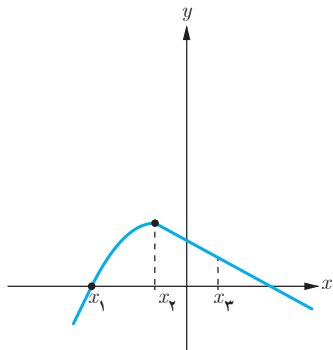
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد.

پ) هر دو نامتناهی باشند (مماس قائم).

کاردرکلاس

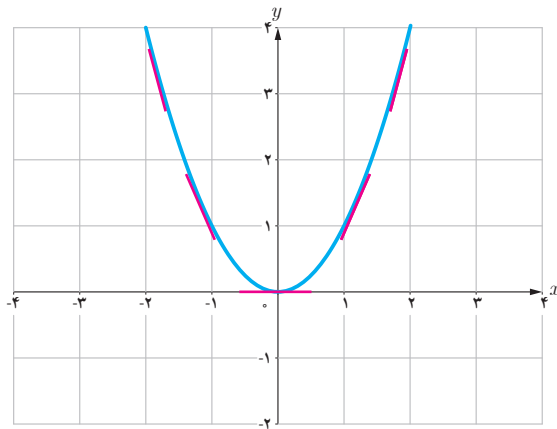
در هر شکل از بین نقاط x_1 و x_2 و x_3 کدام‌ها مشتق پذیر نیستند؟



تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه معین آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین نقاط متعلق به یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید. (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم. به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

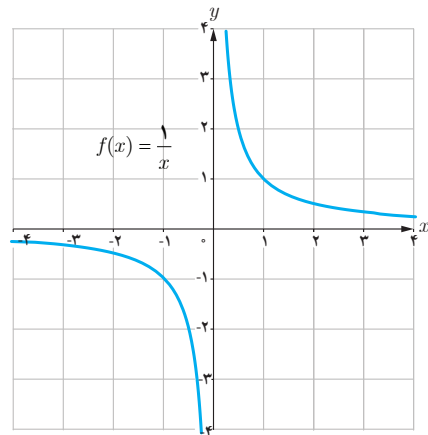
بنابراین $f'(x) = 2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, f'(5^\circ) = 10^\circ$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس به صورت مستقیم.

❖ **حل:** f در صفر ناپیوسته است، بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد و دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان

محاسبه کرد، به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

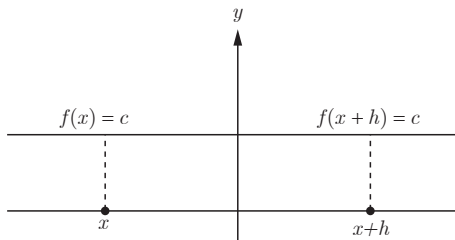
کارد کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید.

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x) = c$ آن‌گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت برابر صفر است.



$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور داریم:

$$f'(x) = 3x^2$$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^2$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} ((x+h)^2 + x(x+h) + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(\cancel{x}+h)^{n-1} + (\cancel{x}+h)^{n-2}x + \dots + (\cancel{x}+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{با } n} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

۳ به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$

$$\text{آن گاه: } f'(x) = nx^{n-1}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. اکنون با استفاده از دستور فوق داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

* ۴ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $y = \sqrt{ax+b}$ و $y = \sqrt{x}$ مورد نظر است، این موضوع باید در ارزشیابی رعایت شود.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(A)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.

❁ مثال: مشتق هر یک از توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

۲ اگر $f(2) = 3$ و $f'(2) = 5$ و $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$

مطلوب است $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

$$f'(x) = \cos x \text{ و } g'(x) = -\sin x$$

❖ **اثبات:** با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

در حسابان (۱) دیدیم که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

بنابراین: $f'(x) = (\sin x)(0) + (\cos x)(1) \Rightarrow f'(x) = \cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x) = \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

$$= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$$

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

❖ **مثال:** مشتق $f(x) = \operatorname{tg} x$ را به دست آورید.

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

کارد کلاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$

ب) $g(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب f با g را با $f \circ g$ نمایش می‌دهیم، در این صورت مشتق تابع مرکب $f \circ g$ در نقطه x از دستور زیر به دست می‌آید:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

❖ **مثال:** اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

❖ **حل:** اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$. آن‌گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) \cdot 4(g(x))^3 = 4(g(x))^3 (2x + 3)$$

اگر $g(x) = u$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) \cdot 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد:

اگر u تابعی از x و f تابعی از u باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

❖ **مثال:** مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را به دست آورید.

❖ **حل:** با فرض $\sin x = u$ داریم: $y = u^2$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2 \sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2(5x - 1)$

ب) $g(x) = \cos^2 x$

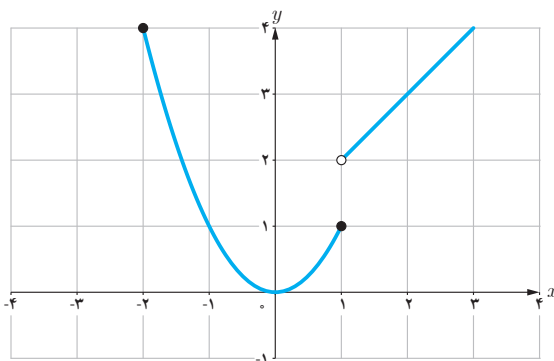
مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه ...

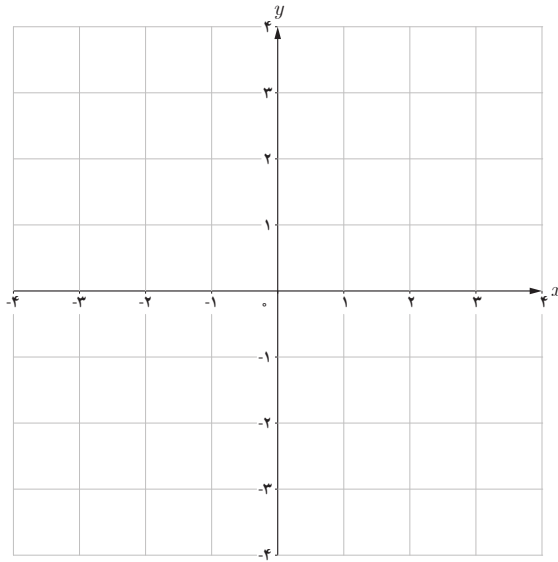


اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد،
گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

❖ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی
 f روی بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$. مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم و سوم

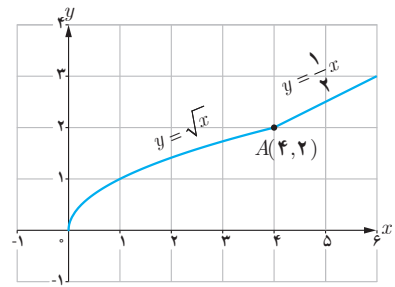
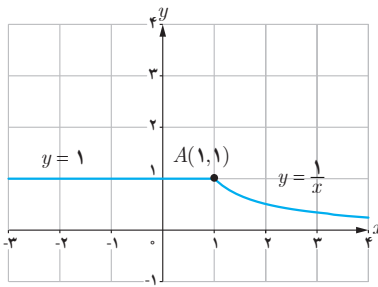
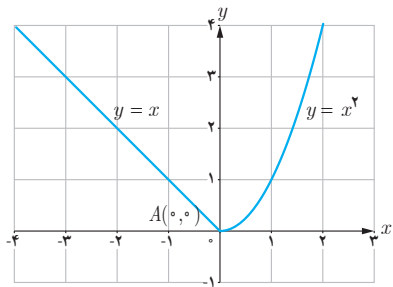
مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم. مشتق مرتبه سوم $y''' = f'''(x)$ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود.

❁ مثال: اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

$$y' = 12x^3 + 4x, y'' = 36x^2 + 4, y''' = 72x$$

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases} \quad \text{اگر } ۳$$

(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

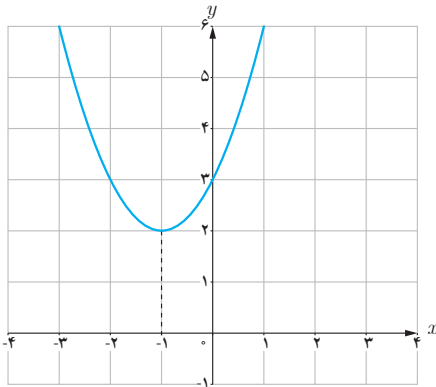
۴

(الف) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود.

(ب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(پ) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط مثبت باشد.

(ت) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن در تمام نقاط یکسان باشد.



۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$
 بررسی کنید.

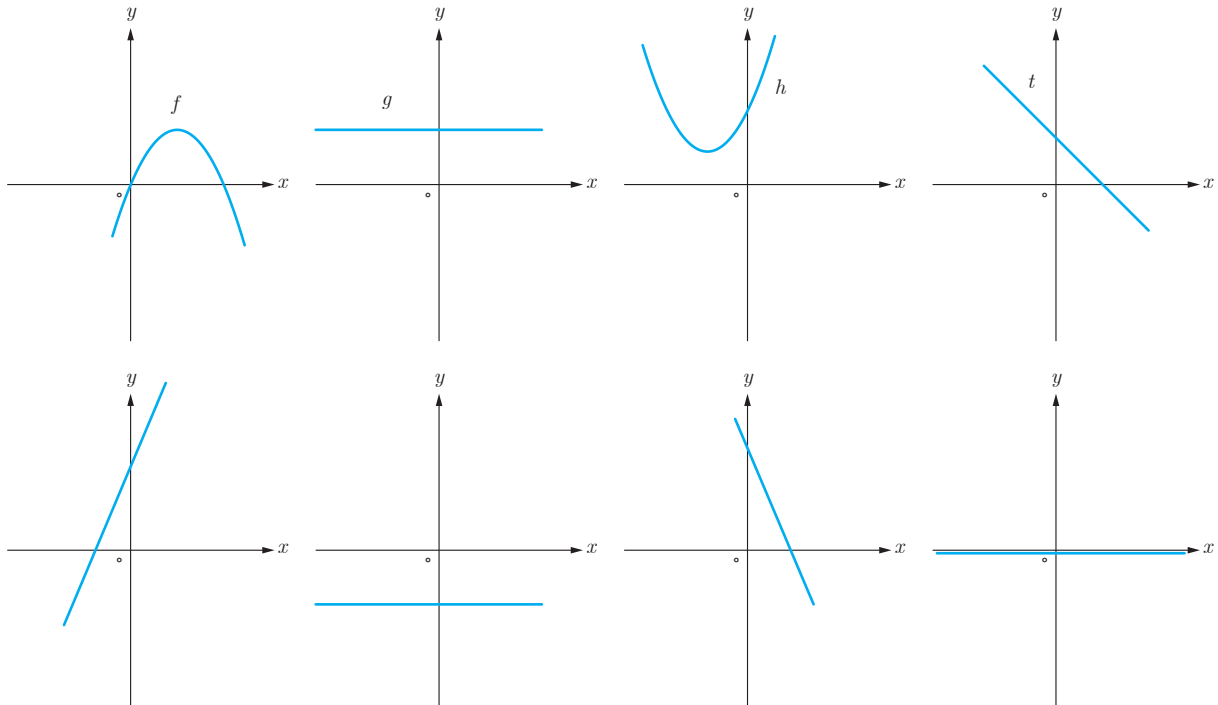
پ) تابع مشتق را رسم کنید.

۶) ثابت کنید که مشتق تابع $y = mx + h$ شیب خط $y = mx + h$ است.

۷) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط ۲ و -۲ بررسی و نمودار f' را رسم کنید.

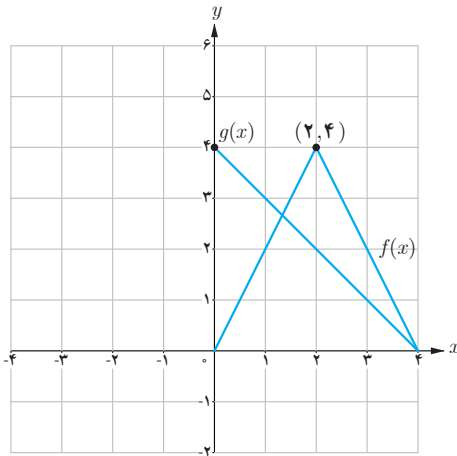
۹) نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



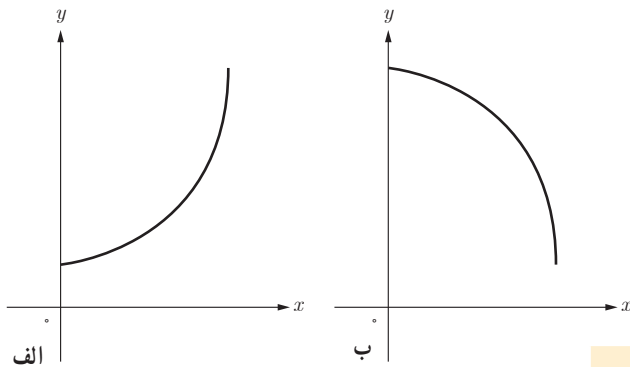
۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$



۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$



۱۲ با استفاده از جدول زیر مشخص کنید که

کدام یک از دو نمودار داده شده، می‌تواند f' را نمایش دهد.

x	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴
$f(x)$	۱۰	۵۵	۹۸	۱۳۹	۱۷۷	۲۱۰	۲۳۷	۲۵۷	۲۶۸

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ت) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

ب) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

پ) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos x$

ت) $f(x) = \sin x \cos^2 x$