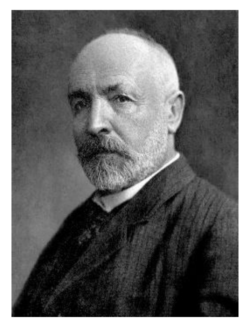
Contents

اهداف

پس از اینکه این فصل را به دقت بخوانی انتظار می‌رود که بتوانی:

- مفهموم مهمی در ریاضیات به نام مجموعه را با ویژگی‌های آن، توضیح دهی.
- هر مجموعه را با نوشتن عضوها و به ویژه با نماد ریاضی، نمایش دهی.
- به کمک نمودار وِن، مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنی.
- با استفاده از عملگرهای اجتماع و اشتراک و تفاضل، مجموعه‌ها را با هم ترکیب کنی.
- برآمد یک آزمایش تصادفی را بشناسی و برای بدست آوردن تعداد برآمدهای مختلف بدون اینکه بشماری، شمارش کنی!
- پیشامد تصادفی را بشناسی و احتمال وقوع یک پیشامد را محاسبه کنی.

مقدمه



(۱۸۴۵ – ۱۹۱۸میلادی) جورج کانتور - Georg Cantor

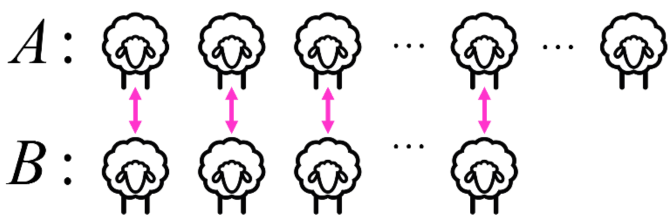
"مجموعه عبارتست از یک فراوانی که به خود اجازه می‌دهد یکی انگاشته شود"

به نظر می‌رسد شمارش حروف یک کلمه کاری آسان است و شمردن گوسفندان یک گله و یا تعداد برگ‌های یک درخت به ترتیب دشوار و دشوارتر می‌شود. ولی این سه شمارش در اینکه کاری شدنی هستند و پایانی دارند، یکسانند. تا اواخر قرن نوزدهم میلادی پیشرفت ریاضی به شمارش چیزهایی مربوط می‌شد که **پایان‌دار** بود و دانشمندان ریاضی در پی کشف روش‌های ساده‌تر و زیرکانه‌تری برای شمارش آنها بودند. با این حال مفهوم **بی‌نهایت** و شمارش‌های **بی‌پایان** همیشه در چند قدمی آنها قرار داشت و ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بود.

بیشتر بدانیم

برای اینکه تعداد گوسفندان دو گله را با هم مقایسه کنیم دو راه وجود دارد. اول اینکه اگر سواد شمارش داشته باشیم کافی است عدد مربوط به تعداد هر گله را با هم مقایسه کنیم. ولی اگر حتی سواد شمارش هم نداشته باشیم راه دوم این است که یکی یکی گوسفندان دو گله را با هم جفت کنیم. یعنی **یک** گوسفند از هر گله فقط با **یک** گوسفند از گلهٔ دیگر جفت شوند. به این روش

شمارش **تناظر یک به یک** می‌گویند. روشن است اگر یک یا چند گوسفند در گلهٔ A بدون جفت باقی بمانند، تعداد گوسفندان گلهٔ A بیشتر از B است.



یکی از تناقض‌ها دربارهٔ بی‌نهایت را گالیله مطرح کرد. او می‌گفت هرچند که همهٔ اعداد طبیعی زوج نیستند؛ با این حال می‌توان ثابت کرد که تعدادشان با هم برابرند! برای اثبات برابری، گالیله هر عدد طبیعی را با دوبرابرش جفت کرد:

اعداد طبیعی : ۱ ۲ ۳ ...

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

اعداد زوج : ۲ ۴ ۶ ...

در اینصورت هیچ عدد طبیعی و هیچ عدد زوجی بدون جفت باقی نمی‌ماند. برای پاسخ به تناقض گالیله باید به این نکته اشاره کرد که شمارش اعداد طبیعی و اعداد زوج **بی‌پایان** هستند و عددی برای تعداد این دو مجموعه وجود ندارد. در واقع ∞ عددی طبیعی نیست و فقط نمادی برای تعداد مجموعه‌های بی‌پایان است. پس تنها راه مقایسهٔ این دو مجموعه همان راه دوم یا تناظر یک به یک است که نشان می‌دهد این دو مجموعهٔ بی‌پایان با هم متناظرند و به تعبیری این دو بی‌نهایت مساویند. سؤالی که در ادامه به ذهن می‌رسد این است که آیا هر دو مجموعهٔ بی‌پایان متناظرند یا بی‌نهایت‌ها می‌توانند متفاوت باشند؟ همین سؤال‌ها باعث شد ریاضیدانان مفهوم مجموعه را به عنوان یک موضوع جدید در ریاضی به طور دقیق‌تری بررسی کنند. نتیجهٔ کار آنها کشف مجموعه‌های بی‌پایانی است که با هم متناظر نیستند. در فصل دوم این کتاب با یکی از این مجموعه‌ها آشنا خواهید شد.

در اواخر قرن نوزدهم میلادی یک ریاضیدان آلمانی به نام **جورج کانتور** اولین کسی بود که فهمید شیوهٔ برخورد با مفهوم بی‌نهایت را باید تغییر داد تا تناقضی وجود نداشته باشد. اولین قدم او این بود که مفهوم مجموعه را به طور دقیق‌تری بررسی کند و با کشف قانونمندی‌های حاکم بر مجموعه‌های بی‌پایان، توانست تناقض‌ها را از بین ببرد. نتیجهٔ کار او و همکارانش به پیدایش نظریهٔ مجموعه‌ها منجر شد و بسیاری از ریاضیدانان معتقدند که مجموعه‌ها پایهٔ ریاضیات مدرن است. در واقع تلاش‌های کانتور نقشی اساسی در پیشرفت منطق ریاضی داشت و امروزه می‌بینیم که منطق ریاضی نیز سرچشمهٔ علوم مهندسی و به ویژه کامپیوتر است.

مجموعه چیست؟

ما انسان‌ها به طور ناخودآگاه همه چیز را در ذهنمان دسته‌بندی می‌کنیم تا به دنیای اطرافمان نظم و ترتیب بدهیم. ذهن ما بدون دسته‌بندی نمی‌تواند مشخصات چیزی را پیدا کند. فرض کنید از شما بپرسند به کدام گروه یا دسته تعلّق دارید. بعضی خود را دانش‌آموز یک مدرسه معرفی می‌کنند و بعضی خود را اهل زادگاهشان می‌دانند و ممکن است در جایی دیگر با گروه خونی‌شان دسته‌بندی شوند. به همین دلیل در گفتگوهای روزانه معمولاً جملاتی به کار می‌بریم که کلماتی مانند **گروه، دسته** یا **خانواده** در آن دیده می‌شوند: مثلاً گروهی از کوهنوردان ایرانی، دستهٔ نادری از پروانه‌های لطیف‌بال و یا خانواده‌ای از گیاهان دارویی. در ریاضیات به جای واژه‌های گروه، دسته یا خانواده از واژهٔ **مجموعه** استفاده می‌کنیم. مثلاً می‌گوییم:

«همهٔ گیاهان دارویی یک **مجموعه** است و رازیانه **عضو** این مجموعه می‌باشد»

شاید ساده لوحانه ترین تعریف برای مجموعه این است: **دسته‌ای از اشیاء متمایز که خاصیتی مشترک دارند**. امّا در این تعریف کلماتی به چشم می‌خورند که ممکن است در ذهن هر یک از ما مفهومی متفاوت داشته باشند:

- آیا **دسته** شامل یک فراوانی زیاد است یا می‌تواند کم باشد؟ آیا یک دسته می‌تواند فقط شامل یک چیز باشد؟ آیا دسته‌ای از هیچ چیز وجود دارد؟
- آیا **اشیاء** حتماً باید قابل لمس باشند؟ آیا صفاتی مثل شجاعت یا نادیدنی‌هایی مثل روح از اشیاء شمرده می‌شوند؟
- مگر می‌شود دو چیز **متمایز** نباشد؟ اگر یکسان باشند که باید یک چیز باشند! پس متمایز بودن اشیاء به چه نکته‌ای اشاره می‌کند؟
- مهمتر از همه اینکه منظور از خاصیت مشترک چیست؟ شاید برای همه قابل قبول باشد که "قرمز، سفید، سبز" خاصیت مشترکی دارند و یک مجموعه است ولی آیا "صدا، خورشید، ۱۳، قهرمان" نمی‌توانند یک مجموعه تشکیل دهند و اگر می‌توانند خاصیت مشترک آنها چیست.

اگر بخواهیم برای رفع این ابهامات دقیق‌تر توضیح دهیم، با کلمات جدیدی روبرو خواهیم شد که هر یک، ابهامات جدیدی به همراه خواهد داشت و روز از نو و روزی از نو! به همین دلیل ریاضیدانان معتقدند مفهومی کلی‌تر از مجموعه وجود ندارد که با استفاده از آن بتوانیم مجموعه را تعریف کنیم. بنابراین سعی می‌کنیم با بررسی چند مثال، راه را برای شناخت بهتر یک مجموعه هموارتر کنیم.

عضویت

فعالیت

نقشهٔ زیر قسمتی از یک محله است که خانه‌ها را با پلاک‌ها نشان می‌دهد. خانهٔ آقای معروف با پلاک ۲ در شکل زیر مشخص است.

https://gnaf.post.ir/portal/#postcodeFinder

آیا می‌توانید پلاک خانه‌هایی را مشخص کنید که **همسایهٔ** آقای معروف هستند؟

برای اینکه همسایه‌های آقای معروف را مشخص کنیم باید **خاصیت همسایه بودن** را برای هر پلاک بررسی کنیم. امّا این خاصیت ما را دچار تردید می‌کند؛ زیرا در اینکه کدام خانه همسایه محسوب می‌شود اتفاق نظری وجود ندارد:

- آیا همسایۀ آقای معروف خانه‌هایی هستند که دیوار مشترکی با خانۀ آقای معروف دارند؟
- یا خانه‌هایی هستند که درب ورودی آنها در کوچۀ مشترکی باز می‌شوند؟
- یا خانه‌هایی هستند که عدد پلاک آنها پشت سر هم قرار دارند؟

چون در همسایه بودن یا همسایه نبودن پلاک‌ها تردید داریم، بنابراین همسایه‌های آقای معروف یک مجموعه تشکیل نمی‌دهند. زیرا پاسخ معینی برای عضو بودن یا عضو نبودن پلاک‌ها نداریم.

فعالیت

پلاک خانه‌هایی را مشخص کنید که **همسایۀ دیوار به دیوار** آقای معروف هستند.

همسایۀ دیوار به دیوار تعریف روشنی دارد و به خانه‌هایی گفته می‌شود که با خانۀ آقای معروف دیوار مشترک دارند. پس بدون تردید می‌دانیم پلاک‌های ۹، ۱۴، ۱۲، ۳ و ۷ همسایۀ دیوار به دیوار آقای معروف هستند و بدون تردید بقیۀ پلاک‌ها نیستند! به همین دلیل پاسخ معینی برای عضو بودن یا عضو نبودن همۀ پلاک‌ها داریم که نشان می‌دهد همسایۀ دیوار به دیوار آقای معروف یک مجموعه تشکیل می‌دهد.

نکته

وقتی مجموعه بودن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در مورد هر چیزی داشتن یا نداشتن یک خاصیت مورد سؤال قرار می‌گیرد. اگر در مورد هر چیز پاسخ معینی برای داشتن آن خاصیت (عضو بودن) یا نداشتن (عضو نبودن) داشته باشیم آنگاه با یک **مجموعه** روبه‌رو هستیم.

مثال

کدام یک از موارد زیر یک مجموعه است؟

الف) پلاک خانه‌هایی در نقشۀ زیر که همسایۀ دیوار به دیوار پلاک ۴ محسوب می‌شوند.

ب) اعدادی طبیعی که فقط ۳ تا مقسوم علیه دارند.

پ) دانش آموزان قدبلندی که همکلاسی شما هستند.

ت) پُرفروش ترین کتاب ایران در سال ۱۴۰۰

ث) زیباترین غزل حافظ

پاسخ:

الف) در نقشه روشن است که فقط پلاک ۱ همسایهٔ دیوار به دیوار پلاک ۴ به حساب می‌آید و پلاک‌های دیگر اینطور نیستند. پس با یک مجموعه روبرو هستیم که فقط یک عضو دارد. به مجموعه‌ای که فقط یک عضو دارد **مجموعهٔ تک عضوی** می‌گوییم.

ب) پیدا کردن مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی کاری شدنی است. ساده‌ترین روش این است که عدد مورد نظر را به اعداد کمترش تقسیم کنیم و ببینیم آیا قابل قسمت است یا خیر. پس با شمردن مقسوم علیه‌ها این سؤال که آیا تعدادشان ۳ تا است یا خیر پاسخ معینی دارد. پس با یک مجموعه روبرو هستیم. مثلاً مقسوم علیه‌های عدد ۲۵ برابر با ۱، ۵ و ۲۵ و برای عدد ۲۶ برابر با ۱، ۲، ۱۳ و ۲۶ است. یعنی ۲۵ عضو این مجموعه است ولی ۲۶ عضو این مجموعه نیست.

نکتهٔ جالب در مورد اعداد بزرگ است و اینکه آیا باید همهٔ اعدادی که ۳ تا مقسوم علیه دارند را پیدا کنیم تا مجموعه بودن آنها مشخص شود؟ مثلاً دانشمندان معتقدند $۲^{۲۵۶}$ از تعداد اتم‌های کل جهان شناخته شده توسط بشر بزرگتر است. پس به نظر می‌رسد پیدا کردن مقسوم علیه‌های $۲^{۲۵۶}+۱$ کاری دشوار است و پاسخ ما برای اینکه آیا ۳ تا مقسوم علیه دارد یا خیر هنوز معین نیست. نگران نباشید؛ زیرا در یک مجموعه لازم نیست پاسخ معین را در مورد عضو بودن یا عضو نبودن هر چیزی پیدا کنیم؛ بلکه لازم است آگاه باشیم فقط یکی از آنها درست است.

پ) آیا دقیقا می‌دانید به چه کسی قد بلند گفته می‌شود و چه کسی قد بلند به حساب نمی‌آید؟ آیا می‌دانستید میانگین قد در اندونزی ۱/۵۸ متر و در هلند ۱/۸۳ متر است؟ یعنی ممکن است از نظر یک شهروند هلندی شما قدکوتاه محسوب شوید ولی در اندونزی به شما قدبلند گفته شود. بنابراین همکلاسی‌های شما که قدبلند هستند یک مجموعه تشکیل نمی‌دهند زیرا در مورد عضو بودن (قد بلند بودن) یا عضو نبودن (قدبلند نبودن) پاسخ معینی وجود ندارد.

ت) مشخص نیست کتاب پُرفروش به چه کتابی گفته می‌شود؛ امّا بدون هیچ تردیدی می‌توانیم تیراژ دو کتاب را با هم مقایسه کنیم. پس بدون هیچ ابهامی می‌توانیم پیدا کنیم چه کتابی پُرفروش‌تر از همه است که به آن پُرفروش ترین می‌گویند. پس با یک مجموعه روبرو هستیم. آیا پُرفروش ترین کتاب ایران در سال ۱۴۰۰ یک مجموعهٔ تک عضوی است؟ نکتهٔ مهم این است که نمی‌دانیم. ممکن است دو کتاب یا بیشتر در صدر پُرفروش ترین کتاب‌ها قرار گرفته باشد.

ث) برای اینکه زیباترین غزل حافظ را پیدا کنیم باید بتوانیم دو غزل حافظ را از نظر زیبایی با هم مقایسه کنیم. این مقایسه به سلیقهٔ هر یک از ما بستگی دارد. بنابراین پاسخ روشنی برای زیباترین غزل حافظ وجود ندارد. پس یک مجموعه تشکیل نمی‌دهند.

نماد عضویت

بیشتر اوقات یک مجموعه را با یک حرف بزرگ لاتین نام گذاری می‌کنیم. مثلاً فرض کنید A یک مجموعه باشد. در این صورت به جای اینکه بگوییم «x عضو مجموعهٔ A است» به طور مختصر می‌نویسیم:

$$x \in A$$

و اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد به اختصار می‌نویسیم:

$$x \notin A$$

مثلاً اگر A برابر با مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ باشد آنگاه هر سه جملهٔ زیر معنی یکسانی دارند:

- ۴ مقسوم علیه ۱۲ است.
- ۴ عضو A است.
- $۴ \in A$

و همچنین:

- ۵ مقسوم علیه ۱۲ نیست.
- ۵ عضو A نیست.
- $۵ \notin A$

در ضمن معنی همهٔ جمله‌های زیر این است که نشان x عضو مجموعهٔ A است:

۱) **مجموعهٔ A شامل x است**. مثال: مجموعه رنگ‌های پرچم ایران شامل رنگ سبز است.

۲) **مجموعهٔ A، x را دارد**. مثال: مجموعه اعداد حسابی صفر را دارد.

۳) **x در مجموعهٔ A قرار دارد**. مثال: گلستان در مجموعه استانهای مرزی ایران قرار دارد.

۴) **x به مجموعهٔ A تعلّق دارد**. مثال: سدیم به مجموعه عناصر شیمیایی تعلق دارد که فلز محسوب می‌شوند.

مجموعهٔ مرجع

این کرم نگران پیدا کردن یک «سیب شیرین» است و نگرانی خود را با بررسی خاصیت **تُرش بودن** یا **تُرش نبودن** سؤال می‌کند. او این سؤال را برای هر چیز گردی حتّی توپ تنیس می‌پرسد. بدون تردید همه می‌دانیم جملهٔ «توپ تنیس یک سیب تُرش است» نادرست است. امّا این کرم آنقدر کم هوش است که تشخیص نمی‌دهد نادرستی این جمله نه به خاطر **خاصیت تُرش بودن** بلکه به خاطر **خاصیت سیب بودن** است. به همین دلیل این کرم به این نتیجه می‌رسد که توپ تنیس باید یک سیب شیرین باشد!

اگر این کرم بخواهد غذای لذیذ خود را پیدا کند باید خاصیت شیرین بودن را نه برای هر چیز گرد بلکه برای سیب‌ها بررسی کند. پس برای ساختن یک مجموعه اول باید معلوم کنیم که در مورد اعضای چه مجموعه‌ای **داشتن** یا **نداشتن** یک خاصیت را می‌خواهیم بررسی کنیم. این مجموعه را **مجموعهٔ مرجع** می‌گوییم.

مثال

برای هر یک از مجموعه‌های زیر یک مجموعهٔ مرجع مثال بزنید.

الف) A: مجموعه استانهای مرزی ایران

ب) B: مجموعه اعداد اول

پ) C: مجموعه لوزی‌ها

پاسخ:

الف) مجموعه استانهای ایران می‌تواند یک مجموعهٔ مرجع باشد و خاصیت "مرزی" بودن مجموعهٔ A را مشخص می‌کند.

ب) مجموعه اعداد طبیعی می‌تواند یک مجموعهٔ مرجع باشد و خاصیت "اول" بودن مجموعهٔ B را مشخص می‌کند.

پ) هر یک از سه مجموعهٔ زیر می‌تواند یک مجموعهٔ مرجع برای لوزی‌ها باشد:

۱. مجموعه چهارضلعی‌ها ۲. مجموعهٔ چهارضلعی‌های محدب ۳. مجموعهٔ متوازی الاضلاع‌ها

و خاصیت "لوزی" بودن مجموعهٔ C را مشخص می‌کند.

بیشتر بدانیم

در دورانی که کانتور و همکارانش پی بردند برای پیشرفت ریاضی نیاز دارند مجموعه و قوانین حاکم برآن را بهتر بشناسند به تناقض‌هایی دست یافتند که نگرانی آنها را بیشتر می‌کرد. آنها زیرکانه دسته‌ای از اشیائی را مثال می‌زدند که با گرد هم آمدن می‌بایست یک مجموعه تشکیل دهند ولی به تناقض می‌رسیدند. به این مثال‌ها پارادوکس می‌گویند که در ادامه با زبان ساده‌تری با یکی از این پارادوکس‌ها آشنا می‌شویم.

فرض کنید حمید سرباز یک پادگان است و به او دستور داده شده فقط پوتین سربازانی از پادگانش را واکس بزند که خودشان این کار را نمی‌کنند. آیا این دسته از سربازان یک مجموعه تشکیل می‌دهند؟

اگر فرض کنیم این دسته از سربازان یک مجموعه تشکیل می‌دهند پس به این فکر کنید که تکلیف حمید با خودش چیست. دو حالت پیش می‌آید:

- اگر حمید بخواهد کفش خودش را واکس بزند پس عضو دسته‌ای از سربازانی است که کفش خودش را واکس می‌زند؛ در حالیکه حق ندارد کفش چنین سربازی (یعنی خودش) را واکس بزند.
- اگر حمید نخواهد کفش خودش را واکس بزند به گروهی از سربازانی تعلق دارد که کفش خودشان را واکس نمی‌زنند و در این صورت وظیفه دارد کفش چنین سربازی (یعنی خودش) را واکس بزند.

پس نتیجه می‌گیریم پاسخ قاطعی برای اینکه آیا حمید باید کفش خودش را واکس بزند یا نزند وجود ندارد. این نشان می‌دهد که فرض ما اشتباه بود و سربازانی که حمید کفش آن‌ها را واکس می‌زند یک مجموعه نیست. برای حل این مشکل کافی است حمید را از مجموعهٔ مرجع (سربازان پادگان) حذف کنیم تا به این تناقض برخورد نکنیم.

مجموعهٔ تهی

به مثال‌های زیر توجه کنید.

- اعدادی مانند x که $x < x$. (هیچ عددی نیست که از خودش کوچکتر باشد!)
- درختانی که پرواز می‌کنند. (هیچ درختی وجود ندارد که پرواز کند!)
- اعداد اولی که مربع کامل هستند. (هیچ عدد اولی، مربع کامل نیست!)
- همسایه‌های دیوار به دیوار خانهٔ پلاک ۹ در نقشهٔ زیر (هیچ خانه‌ای همسایهٔ دیوار به دیوار پلاک ۹ نیست!)

هر یک از جملات بالا خاصیتی را برای اعضای یک مجموعهٔ مرجع بیان می‌کنند که بدون تردید **هیچ‌عضوی** آن خاصیت را ندارد. یعنی در مورد **عضو نبودن** همه چیز مطمئن هستیم. پس ما با یک مجموعه روبه‌رو هستیم و این مجموعه هیچ عضوی ندارد.

تعریف

به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد مجموعهٔ **تُهی** می‌گوییم و آن را با $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

مثال

کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام ناتهی است؟

الف) A: مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویهٔ باز دارند.

ب) B: مجموعهٔ کوچک‌ترین عدد گویای مثبت.

پ) C: مجموعهٔ سبک‌ترین نهنگ دنیا.

ت) D: مجموعهٔ اعداد مربع کاملی که رقم دهگان آنها ۵ است.

پاسخ:

الف) مجموع دو زاویهٔ باز بیشتر از ۱۸۰ درجه است. بنابراین اگر مثلثی دو زاویهٔ باز داشته باشد مجموع زاویه‌های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه می‌شود که امکان ندارد. پس بدون تردید هیچ مثلثی این خاصیت را ندارد. یعنی با یک مجموعه روبرو هستیم که تهی است و می‌نویسیم $A=\varnothing$.

ب) اگر کوچک‌ترین عدد گویای مثبت وجود داشته باشد آن را x می‌نامیم. در اینصورت $\frac{x}{۲}$ نیز هم گویاست هم مثبت است و در ضمن از x کوچک‌تر است! این حقیقت با خاصیت کوچک‌ترین بودن x تناقض دارد. پس فرض ما از ابتدا نادرست بود. یعنی هیچ عدد گویای مثبت خاصیت کوچکترین را ندارد و نتیجه می‌گیریم $B=\varnothing$.

پ) هر نهنگی وزنی دارد. پس می‌توان نهنگ‌ها را بر حسب وزنشان مرتب کرد. چون مجموعه نهنگ‌های دنیا پایان‌دار است پس حتماً یک یا چند نهنگ وجود دارد که وزنشان از همه کمتر است. بنابراین $C\neq\varnothing$. نکتهٔ مهم این است که مهم نیست بدانیم کدام نهنگ از همه سبک‌تر است بلکه مهم این است که این نهنگ وجود دارد.

ت) در بین اعداد دورقمی ۵۰، ۵۱، ... و ۵۹ هیچ مربع کاملی وجود ندارد. امّا در بین اعداد سه رقمی $۱۶^{۲}=۲۵۶$ این خاصیت را دارد که مربع کامل و رقم دهگان آن ۵ است. یعنی $۲۵۶\in D$ و $D\neq\varnothing$. تحقیق کنید که آیا D تک عضوی است یا بیش از یک عضو دارد؟

نمایش یک مجموعه

نوشتن عضوها

اگر با یک مجموعه روبرو باشیم ممکن است بتوانیم همهٔ عضوهای آن را با **نوشتن** مشخص کنیم. روش استاندارد این است که عضوها را بین دو نماد آکلاد می‌نویسیم و با یک نماد جداکننده مانند «,» آنها را از هم جدا می‌کنیم. مثلاً اگر مجموعهٔ عناصر شیمیایی که فلز قلیایی محسوب می‌شوند را A بنامیم آنگاه $A=\{Li, Na, K, Rb, Cs, Fr\}$.

نکته

مجموعهٔ تهی عضوی ندارد. پس مجموعهٔ تهی را می‌توان با $\{\ \}$ نمایش داد. یعنی $\{\ \}=\varnothing$.

مثال

اگر $A=\{a\}$ و $B=\{cat\}$ و $C=\{c,a,t\}$ آنگاه گزاره‌های زیر همگی درست هستند:

الف) $a\in A$ ب) $1\notin A$ پ) $a\notin B$ ت) $cat\in B$

ث) $act\notin B$ ج) $a\in C$ چ) $cat\notin C$

ممکن است در نوشتن عضوهای یک مجموعه بتوانیم آنها طوری مرتب کنیم که یک الگو را مشخص کنند. در این صورت می‌توانیم تعداد دلخواهی از عضوهای این مجموعه را بنویسیم و به جای عضوهای نانوشته علامت سه نقطه (. . .) قرار دهیم که الگوی عضوهای نوشته شده را ادامه می‌دهند. هرچند که استفاده از نماد سه نقطه به جای همهٔ عضوها نمایش ضعیفی برای مشخص کردن یک مجموعه است ولی برای مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها بی‌پایان است زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال

الف) اگر بدانیم A مجموعه حروف فارسی است آنگاه می‌توانیم بنویسیم $A=\{$ الف، ب، پ، ...، ه، ی $\}$.

ب) مجموعه اعداد صحیح را می‌توانیم به صورت $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$ بنویسیم.

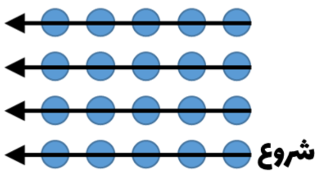
پ) اگر B مجموعه اعداد مربع کامل باشد آنگاه می‌توانیم بنویسیم $B=\{1,4,9,\ldots\}$.

فعالیت

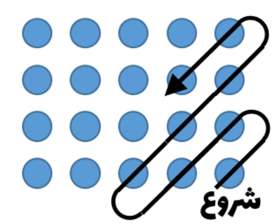
اگر $A=\{2^{1399}+2\ ,\ 2^{1399}+4\ ,\ 2^{1399}+6\ ,\ \ldots\ ,\ 2^{1400}\}$ آنگاه A چند عضو دارد؟

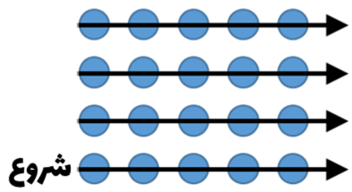
مجموعه و ترتیب اعضا

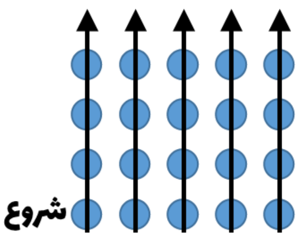
این شکل آرایش نشستن دانش آموزان کلاس A را نشان می‌دهد و سینا در این شکل مشخص است. به نظر شما سینا چندمین عضو این کلاس است؟ اگر با الگوی زیر از ردیف پایین به بالا بشماریم سینا نفر ۷ اُم است:



الگوی شمارش دانش آموزان کلاس A را به صورت زیر تغییر می-دهیم:







با هر یک از این الگوها سینا نفر چندم است؟ آیا می‌توانید الگویی پیشنهاد بدهید که در آن سینا نفر اول باشد؟

در واقع با تغییر الگوی شمارش، ترتیب دانش آموزان تغییر می‌کند؛ درحالیکه **عضویت** سینا در کلاس A تغییر نمی‌کند.

نکته

اگر ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه را تغییر دهیم مجموعهٔ جدیدی بدست نمی‌آید و تغییر نمی‌کند. در واقع اگر با تغییر ترتیب نوشتن عضوها در مجموعهٔ A بتوانیم مجموعهٔ B را بدست آوریم آنگاه این دو مجموعه برابر هستند.

مثال

الف) $\{s,i,l,e,n,t\}=\{l,i,s,t,e,n\}$. زیرا فقط ترتیب نوشتن عضوها تغییر کرده است.

ب) $\{silent\}\neq\{listen\}$. زیرا هر یک از این دو مجموعه شامل یک کلمه‌ای می‌باشند که با هم متفاوت است. یعنی عضوهای این دو مجموعه حروف نیستند که بتوانیم ترتیب نوشتن آنها را تغییر دهیم.

پ) $\{۰,۱,-۱,۲,-۲,۳,-۳,...\}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}=\mathbb{Z}$. زیرا فقط ترتیب عضوها تغییر کرده است.

فعالیت

با توجه به تساوی‌های زیر مقدار a، b و c را به‌دست آورید.

$$\{۱,a,b,۷\}=\{۲,۳,۷,c\}=\{a,۷,۱,۳\}$$

مجموعه و تکرار اعضا

متین پس از اینکه نقاشی خود را با رنگ روغن تمام کرده بود با انگشتان آغشته به رنگ کلمهٔ $banana$ را تایپ کرد. حروفی که متین تایپ کرد مجموعهٔ $\{b,a,n,a,n,a\}$ را تشکیل می‌دهد که آن را W می‌نامیم. دقت کنید که حرفی عضو W است که متین کلید آن حرف را فشار داده باشد و درنتیجه رنگی شده باشد. پس در واقع فقط کلیدهای رنگی شده عضو W است.

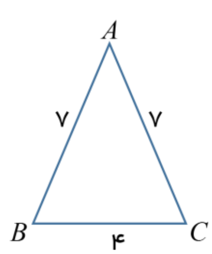
بنابراین فقط کلیدهای b، a و n عضو W هستند و می‌نویسیم $W=\{b,a,n,a,n,a\}=\{b,a,n\}$.

نکته

اگر عضوی را بیش از یک بار بنویسیم تأثیری در عضویت آن ندارد و مجموعهٔ جدیدی بدست نمی‌آید و تغییر نمی‌کند.

مثال

الف) مثلث متساوی الساقین زیر را درنظر بگیرید:



اندازهٔ هر ضلع این مثلث مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که ۲ عضو دارد. زیرا $\{۷,۴\}=\{۷,۷,۴\}$. ولی اضلاع این مثلث ۳ پاره خط متمایز است که مجموعهٔ ۳ عضوی $\{AB, AC, BC\}$ را تشکیل می‌دهند.

فعالیت

فرض کنید مجموعه کلیدهایی که یک کاربر رایانه برای نوشتن جملهٔ «mississippi is necessary» فشار می‌دهد را T بنامیم.

الف) مجموعهٔ T چند عضوی است؟

ب) اولین و آخرین عضو مجموعهٔ T چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

۱) $\{m, y\}$ ۲) $\{m, -\}$ ۳) $\{a, y\}$ ۴) هیچکدام چون مجموعه نیست!

مجموعه در مجموعه

در قاب عکس زیر چه چیزهایی دیده می‌شود؟

- سه نفر به نام‌های سپهر (s)، حامی (h) و رضا (r) که برای گرفتن این عکس حضور دارند.
- دو قاب عکس: اولی قاب عکسی یک نفره با حضور سپهر و دومی قاب عکسی با حضور سپهر و بنیامین (b)

فرض کنید هر قاب عکس یک مجموعه باشد که هر عضو آن یکی از موارد زیر است:

- شخصی که برای گرفتن این عکس **حضور** دارد.
- قاب عکسی که در این عکس دیده می‌شود.

مثلاً قاب عکس بالا مجموعهٔ $A=\{s, h, r, \{s\}, \{s, b\}\}$ را مشخص می‌کند.

به نکات زیر توجه کنید:

۱) روشن است قاب عکس شعور و احساس ندارد و هیچ شخصی با قاب عکسش برابر نیست. پس s و $\{s\}$ دو عضو مختلف برای A به حساب می‌آیند.

۲) بنیامین در عکسی که مجموعهٔ A را مشخص می‌کند حضور ندارد. یعنی $b \notin A$.

۳) قاب عکسی یک نفره از بنیامین هم در A وجود ندارد. یعنی $\{b\} \notin A$.

۴) مجموعهٔ تهی طبق تعریف یک قاب عکس است ولی خالی است؛ یعنی هیچ شخصی یا قاب عکسی در آن دیده نمی‌شود. پس $\{\ \} \notin A$. مثلاً اگر قاب عکس زیر را با مجموعهٔ B نشان دهیم:

$\{\ \} \in B$ ؛ زیرا یک قاب عکس خالی در آن دیده می‌شود. پس $B = \{\varnothing, \{s\}, s, r\}$.

مثال

مجموعه‌های زیر چند عضوی هستند؟

الف) $A = \{۱, ۲, \{۲\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$ ب) $B = \{\{\varnothing, \{۰\}\}, \{۰, \{\ \}\}\}$

پاسخ:

الف) مجموعهٔ A چهار عضو دارد که شامل عدد ۱، عدد ۲، مجموعهٔ $\{۲\}$ و مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$

ب) $\{۰, \{\ \}\} \neq \{\varnothing, \{۰\}\}$ زیرا $۰ \in \{۰, \{\ \}\}$ ولی $۰ \notin \{\varnothing, \{۰\}\}$. پس مجموعهٔ B دو عضو دارد که شامل $\{\varnothing, \{۰\}\}$ و $\{۰, \{\ \}\}$ است.

نمادهای ریاضی

آموزگار از دانش‌آموزان خواست تا روی کاغذ مجموعهٔ A شامل اعداد بزرگتر از -۳ را مشخص کنند. چیزی نگذشت که ساعده اجازه گرفت و پرسید که آیا A اعدادی مثل $-۲/۵$ یا هر عدد گویای دیگری که بزرگتر از -۳ هست را دارد یا اینکه فقط اعداد صحیح بزرگتر از -۳ عضو A هستند؟ آموزگار از دقت ساعده تشکر کرد و گفت که حق با ساعده است و برای مشخص کردن یک مجموعه باید مجموعهٔ مرجع را از قبل تعیین کنیم. سپس از دانش آموزان خواست که مجموعهٔ A شامل اعداد صحیح بزرگتر از -۳ را نشان دهند. هر یک از دانش آموزان به روشی این مجموعه را نشان دادند.

ساعده	$A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$
آیه	$A=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,۳,-۳,۴,۵,۶,...\}$
صبا	$A=\{$ اعداد صحیحی که بزرگتر از ۳− هستند $\}$

آموزگار: همه توانسته‌اید به روش خود این مجموعه را به درستی نشان دهید. ولی روشی برای نمایش یک مجموعه وجود دارد که لازم نیست مثل ساعده و آیه همه یا چند عضو آن را بنویسیم و یا مثل صبا با جملاتی به ذکر خاصیت مشترک اعضا بپردازیم.

در این روش عضوهای مجموعهٔ مرجع را با یک متغیر مثلاً x نشان می‌دهیم تا بتوانیم خاصیت مشترکی را که عضوهای A دارند با یک رابطهٔ یکسان بر حسب x بیان کنیم. در این صورت می‌توانیم بگوییم:

(۱) A برابر است با (۲) مجموعهٔ (۳) xهایی عضو اعداد صحیح (۴) به شرطی که (۵) x بزرگتر از ۳− باشد.

اگر از نماد $|$ به جای **به شرطی که** استفاده کنیم، جملهٔ بالا را اینطور با **نمادهای ریاضی** می‌توان نوشت:

$$\underbrace{A=}_{۱}\overbrace{\{\underbrace{x\in\mathbb{Z}}_{۳}\ \underset{۴}{|}\ \underbrace{-۳<x}_{۵}\}}^{۲}$$

در حالت کلی با تعیین «مجموعهٔ مرجع» و «شرط عضویت» می‌توان یک مجموعه را به صورت زیر با نمادهای ریاضی مشخص کرد:

$$A=\{\ x\in \text{مجموعهٔ مرجع}\ |\ \text{شرط عضویت}\ \}$$

این بار آموزگار از دانش آموزان خواست تا مجموعهٔ $B=\{۳,۶,۹,...\}$ را با نمادهای ریاضی مشخص کنند. آدرینا اجازه گرفت و گفت که اعضای A مضارب طبیعی ۳ هستند و پاسخ او چنین بود:

$$B=\{x\in\mathbb{N}|۳x\}$$

آموزگار: بخش «شرط» باید شامل یک گزاره یا یک رابطهٔ ریاضی باشد تا بتوان درستی یا نادرستی آن را به ازای عضوهای مختلف اعداد طبیعی بررسی کرد. « $۳x$ » نه یک گزاره است و نه یک رابطهٔ ریاضی! قصد آدرینا مشخص کردن «شکل و الگوی» اعدادی است که در A قرار دارد. پس باید بگوییم A شامل $۳x$هایی است به شرطی که x یک عدد طبیعی باشد و چنین می‌نویسیم:

$$B=\{۳x \mid x\in\mathbb{N}\}$$

پس نوع دیگری از روش نمادهای ریاضی به صورت زیر است:

$$B=\{\underset{\text{اعضا}}{\text{شکل و الگوی}} \mid \text{شرط عضویت}\}$$

دقت کنید که در نوع دوم «مجموعهٔ مرجع» خودبخود در قسمت شرط مشخص می‌شود.

مثال

مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی مشخص کنید.

الف) $A=\{۲,۵,۸,۱۱,...\}$ ب) $B=\{۹,۹۹,۹۹۹,۹۹۹۹,...\}$ پ) $C=\{۱۲,۶,۴,۳,۲,۱\}$

پاسخ:

الف) اگر به عدد ۲ سه تا سه تا اضافه شود، اعداد بعدی ساخته می‌شوند:

$۲=۲+۰\times۳$ ، $۵=۲+۱\times۳$ ، $۸=۲+۲\times۳$ ، $۱۱=۲+۳\times۳$ ، ...

پس A شامل اعدادی به شکل $۲+۳n$ است به شرطی که n یک عدد حسابی باشد:

$$A=\{۲+۳n \mid n\in W\}$$

البته با نگاه دیگر هر عضو A یکی کمتر از یک مضرب ۳ است:

$۲=۱\times۳-۱$ ، $۵=۲\times۳-۱$ ، $۸=۳\times۳-۱$ ، $۱۱=۴\times۳-۱$ ، ...

$$A=\{۳n-۱ \mid n\in\mathbb{N}\}$$

ب) B شامل همهٔ اعداد طبیعی است که فقط با رقم «۹» نوشته می‌شوند. این اعداد یکی کمتر از عددهای ...,۱۰۰۰,۱۰۰,۱۰ هستند که همگی توانی از ۱۰ هستند:

$۹=۱۰^۱-۱$ ، $۹۹=۱۰^۲-۱$ ، $۹۹۹=۱۰^۳-۱$ ، ...

پس $B=\left\{ 10^n - 1 \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$.

ت) C شامل همهٔ مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ است. یک مقسوم علیه طبیعی ۱۲ عددی طبیعی است به شرطی که اگر ۱۲ را به آن تقسیم کنیم، حاصل یک عدد طبیعی باشد. پس $C=\left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N} \right\}$. دقت کنید مجموعهٔ زیر با C برابر نیست.

$$D=\left\{ x \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N} \right\}$$

زیرا شرط $\frac{12}{x} \in \mathbb{N}$ مثلاً به ازای $x=\frac{1}{2}$ برقرار است:

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 24 \in \mathbb{N}$$

پس $\frac{1}{2}$ شرط عضویت برای D را دارد؛ یعنی $\frac{1}{2} \in D$ امّا $\frac{1}{2} \notin C$. آیا می‌توانید عضوهای دیگری از مجموعهٔ D پیدا کنید که عضو C نباشند؟

فعالیت

۱- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی مشخص کنید.

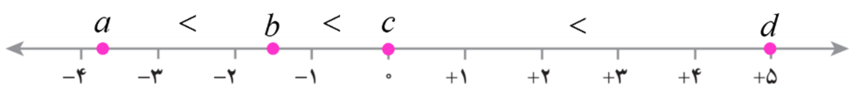
الف) $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \right\}$ ب) $\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots \right\}$

۲- حداکثر ۵ عضو دلخواه از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\left\{ x \in \mathbb{Z} \middle| x^2 \leq 3 \right\}$ ب) $\left\{ x^2 \middle| x \in \mathbb{Z}, x \leq 3 \right\}$

زیرمجموعه

وقتی اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم راه و روش مقایسهٔ آنها را هم می‌آموزیم. قانون مقایسهٔ دو عدد را می‌توان به راحتی روی محور اعداد مطرح کرد. هر عددی متناظر با یک نقطه روی محوری است که جهت‌دار است. با توجه به این جهت، عدد سمت راست بزرگتر از عددی است که سمت چپ قرار گرفته است.



وقتی با مجموعه‌ها آشنا می‌شویم طبیعی است که بخواهیم آنها را با هم مقایسه کنیم. اگر بخواهیم مجموعه‌ها را نسبت به تعداد عضوهایشان مقایسه کنیم آنگاه مجموعه‌هایی که تعداد اعضای برابری دارند باید مساوی باشند. آیا به نظر شما مجموعه عناصر تشکیل دهندهٔ نمک $\{Na, Cl\}$ با مجموعه عناصر آب $\{H, O\}$ برابر است؟ قطعاً این دو مجموعه با هم برابر نیستند و تعداد عضوهای یک مجموعه معیار مناسبی برای مقایسه نیست. در ادامه راه و روش مناسبی برای مقایسهٔ دو مجموعه خواهیم دید.

تعریف

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. اگر هر عضو A متعلق به B نیز باشد آنگاه می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B$$

پس حتی اگر یکی از عضوهای A متعلق به B نباشد آنگاه A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم:

$$A \not\subseteq B$$

مثلاً با فرض اینکه $A=\{p,e,n,c,i,l\}$ ، $B=\{i,c,e\}$ و $C=\{l,i,n,e\}$ می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت.

- $A \subseteq B$. زیرا هر عضو B که حروف i ، c و e هستند به A نیز متعلق هستند.
- $A \subseteq C$. زیرا هر عضو C که حروف l ، i ، n ، e هستند به A نیز متعلق هستند.
- $C \not\subseteq B$. زیرا همین یک دلیل کافی است که $c \in B$ امّا $c \notin C$.

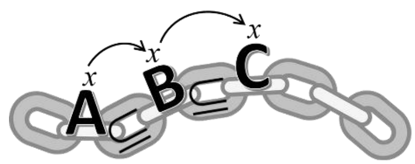
طبق تعریف هر مجموعهٔ دلخواهی مانند A زیرمجموعهٔ خودش است. زیرا هر عضو A متعلق به خود A است. پس باید رابطهٔ $A \subseteq A$ درست باشد.

در ضمن مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. یعنی اگر A یک مجموعه باشد آنگاه رابطهٔ $A \subseteq \varnothing$ همیشه درست است. زیرا اگر $\varnothing$ زیرمجموعهٔ A نباشد باید بتوانیم عضوی در $\varnothing$ پیدا کنیم که متعلق به A نباشد؛ ولی قادر به پیدا کردن این عضو نیستیم. زیرا $\varnothing$ اصلاً عضوی ندارد! پس چون شرط $A \not\subseteq \varnothing$ برقرار نیست باید بپذیریم که رابطهٔ $A \subseteq \varnothing$ برقرار است.

در مورد اعداد اگر بدانیم x کوچکتر از y نیست آنگاه نتیجه می‌گیریم y کوچکتر از (یا مساوی با) x است. این ویژگی به خاطر آن است که هر دو عدد با هم قابل مقایسه هستند. درحالیکه اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم B زیرمجموعهٔ A است. یعنی **ممکن است دو مجموعه با هم قابل مقایسه نباشند** و هر دو رابطهٔ $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ نادرست باشد. مثلاً اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۲,۵\}$ آنگاه هم $A \nsubseteq B$ هم $B \nsubseteq A$!

تعریف

اگر بدانیم دو رابطهٔ $B \subseteq C$ و $A \subseteq B$ برقرار است آنگاه می‌توانیم آن را به شکل $A \subseteq B \subseteq C$ بنویسیم که به آن یک **زنجیر** می‌گوییم.



رابطهٔ زیرمجموعه بودن به طور زنجیروار **انتقال** می‌یابد. در واقع با فرض اینکه $A \subseteq B$ آنگاه هر عضو A مانند x باید عضوی از مجموعهٔ B هم باشد. با توجه به اینکه $B \subseteq C$ آنگاه همین x باید عضو C نیز باشد. پس نتیجه می‌گیریم $A \subseteq C$.

مثال

با فرض اینکه $\{۱,۲x\} \subseteq \left\{(x-۱)^۲-۳, a, b\right\} \subseteq \{۱,۴,۶,۸\}$ مقدار x چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پاسخ: از زنجیر بالا نتیجه می‌گیریم $\{۱,۲x\} \subseteq \{۱,۴,۶,۸\}$. پس حداقل یکی از معادلات زیر باید برقرار باشد:

۱) $۲x = ۱$ که نتیجه می‌دهد $x = \frac{۱}{۲}$. رابطهٔ $\left\{(x-۱)^۲-۳, a, b\right\} \subseteq \{۱,۴,۶,۸\}$ نشان می‌دهد که $(x-۱)^۲-۳$ باید عضوی از $\{۱,۴,۶,۸\}$ باشد. پس حاصل $(x-۱)^۲-۳$ به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ که برابر با $\frac{-۱۱}{۳}$ است باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۴، ۶ یا ۸ باشد که اینطور نیست! پس حالت اول نادرست است.

۲) $۲x = ۴$ که نتیجه می‌دهد $x = ۲$. حاصل $(x-۱)^۲-۳$ به ازای $x = ۲$ که برابر با -۲ است که همانند استدلال قبل باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۴، ۶ یا ۸ باشد که اینطور نیست! پس حالت دوم نیز نادرست است.

۳) $۲x = ۶$ که نتیجه می‌دهد $x = ۳$. در این صورت حاصل $(x-۱)^۲-۳$ به ازای $x = ۳$ برابر با ۱ است. چون $۱ \in \{۱,۴,۶,۸\}$ پس امکان پذیر است.

۴) $۲x=۸$ که نتیجه می‌دهد $x=۴$. در این صورت حاصل $(x-۱)^{۲}-۳$ به ازای $x=۴$ برابر با ۶ است. چون $۶\in\{۱,۴,۶,۸\}$ پس امکان پذیر است.

فعالیت

مجموعه حروف هر یک از کلمات i ، ice ، lip ، $nice$ ، $clip$ و $pencil$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این مجموعه‌ها می‌توانیم دو زنجیر بسازیم که با هم متقاطع هستند:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\ \} & \subseteq & \{i\} & \subseteq & \{i,c,e\} & \subseteq & \{n,i,c,e\} & \subseteq & \{p,e,n,c,i,l\} \\ & \searrow\!\subseteq & \{l,i,p\} & \subseteq & \{c,l,i,p\} & \nearrow\!\subseteq & & & \end{array}$$

با مجموعه حروف کلمات $football$ ، $float$ ، $taboo$ ، $flat$ ، $boat$ ، fat ، at زنجیر بسازید و تقاطع‌ها را پیدا کنید.

بیشتر بدانیم

در بعضی متون ریاضی به جای $\subseteq$ از $\subset$ استفاده می‌کنند. در واقع اگر A زیرمجموعهٔ B باشد می‌توان هر دو رابطهٔ $A\subseteq B$ یا $A\subset B$ را نوشت و اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد می‌توان با هر دو رابطهٔ $A\not\subseteq B$ یا $A\not\subset B$ نشان داد. پس علامت $\subseteq$ نسبت به علامت $\subset$ این چه برتری و مزیتی دارد؟

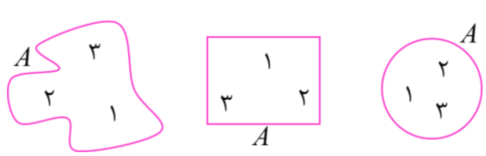
فرض کنید در یک متن ریاضی بخواهیم به خواننده بفهمانیم A زیرمجموعهٔ B است ولی مساوی با B نیست. یعنی فرض کنید $A\subseteq B$ و $A\neq B$. ترکیب این دو رابطه را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$A\subsetneq B$$

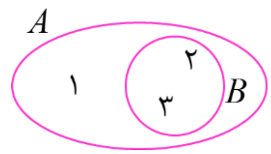
در حالیکه برای علامت $\subset$ فقط ترکیب $\not\subset$ قابل نوشتن است که برای فرض بالا نمی‌توان استفاده کرد.

نمایش هندسی مجموعه‌ها

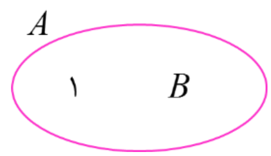
برای اینکه یک مجموعه را به طور هندسی مشخص کنیم، کافی است عضوهای آن را داخل یک خم بسته بنویسیم. این خم بسته می‌تواند هر شکلی داشته باشد. هر سه شکل زیر یک نمایش هندسی برای مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ است:



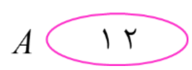
این نمایش هندسی اگر بخواهد فقط برای مشخص کردن و معرفی یک مجموعه به کار رود، ضعف‌هایی را به همراه دارد. اول اینکه دقیقاً معلوم نیست یک خم بسته شامل چه چیزهایی درون خود است. مثلاً در نمودار زیر آیا A شامل B است یا شامل اعضای B؟ به زبان گویاتر آیا A برابر با مجموعهٔ ۲ عضوی $\{۱, B\}$ است یا مجموعهٔ ۳ عضوی $\{۱,۲,۳\}$؟



البته برای رفع این ابهام از این به بعد قرارداد می‌کنیم که هیچ خمی شامل هیچ خمی درون خود نیست و فقط شامل عضوهای درون آنهاست. مثلاً در شکل بالا A شامل B نیست بلکه شامل اعضای B است. به زبانی دیگر $B \notin A$ بلکه $B \subseteq A = \{۱,۲,۳\}$. ولی در نمودار زیر A ۲ عضوی است و شامل B است. یعنی $B \in A = \{۱, B\}$.

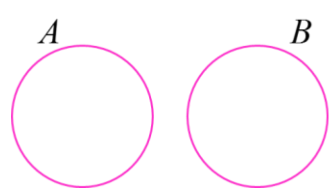


ضعف دوم نمایش هندسی این است که معلوم نیست آیا مجموعهٔ A در شکل زیر شامل دو عضو ۱ و ۲ است یا فقط شامل عدد ۱۲ است. زیرا در این نمایش هندسی عضوها را با هیچ علامتی از هم جدا نمی‌کنیم.

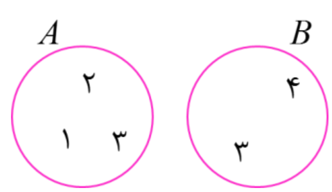


به دلیل این ضعف‌ها از این نمایش هندسی برای مشخص کردن و معرفی یک مجموعه استفاده نمی‌کنیم. بلکه بدون اینکه عضوها را بنویسیم از این نمایش هندسی فقط برای مقایسهٔ دو یا چند مجموعه استفاده می‌کنیم. به این نمایش هندسی که برای مقایسهٔ مجموعه‌ها به کار می‌رود «نمودار ون» می‌گویند. در ادامه وضعیت دو مجموعه نسبت به هم را در حالت‌های مختلف می‌بینید.

۱) از شکل زیر می‌فهمیم که A و B هیچ عضو مشترکی ندارند که به آن دو مجموعهٔ **از هم جدا** می‌گوییم.

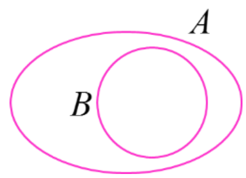


دقت کنید این نمودار نمی‌تواند برای دو مجموعه‌ای استفاده شود که عضو مشترکی دارند. مثلاً اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۳,۴\}$ آنگاه نمودار زیر منطقی نیست:

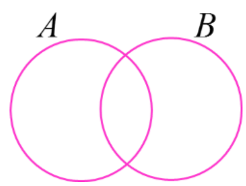


زیرا عدد ۳ هم داخل خم A هست که نشان می‌دهد $۳\in A$ و هم خارج از خم A است که باید $۳\notin A$. این دو نتیجه نشان می‌دهند که A نمی‌تواند یک مجموعه باشد؛ زیرا عضویت ۳ مشخص نیست!

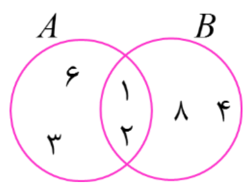
۲) از شکل می‌فهمیم که A شامل اعضای B است و به زبانی دیگر $B\subseteq A$.



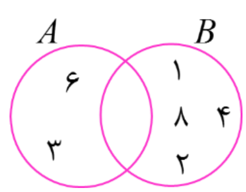
۳) از شکل زیر معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که می‌خواهیم نشان دهیم A و B یک یا چند عضو مشترک دارند که در ناحیهٔ مشترک قرار می‌گیرند.



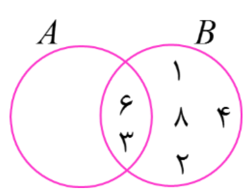
مثلاً از شکل زیر می‌فهمیم که $A=\{۱,۲,۳,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۴,۸\}$ و هر دو شامل ۱ و۲ هستند:



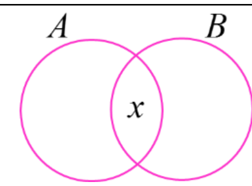
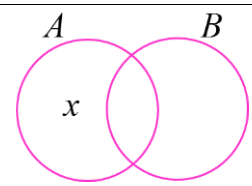
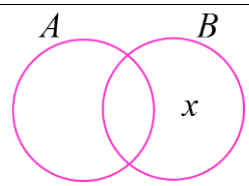
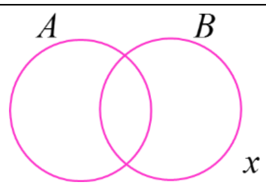
ولی نکتهٔ مهم این است که نمودار سوم را برای همهٔ حالت‌های دیگر نیز می‌توان به کار گرفت. مثلاً در شکل زیر $A=\{۳,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۴,۸\}$ از هم جدا هستند.



و یا در شکل زیر $A=\{۳,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$ و $A\subseteq B$.

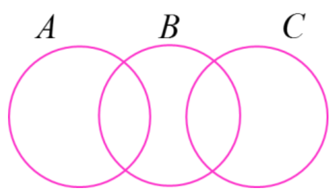


به همین دلیل شکل سوم را **حالت کلی نمودار ون برای دو مجموعه** می‌گوییم. در واقع اگر x عضو دلخواهی از مجموعهٔ مرجع باشد آنگاه در هر حالتی می‌توانیم آن را در ناحیه‌ای مناسب از صفحه قرار دهیم که منطقی باشد.

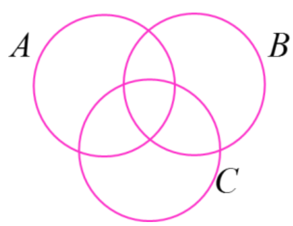
$x \in A, x \in B$	$x \in A, x \notin B$	$x \notin A, x \in B$	$x \notin A, x \notin B$
			

نکته

نمودار ون زیر نمی‌تواند حالت کلی برای سه مجموعه را نشان دهد.

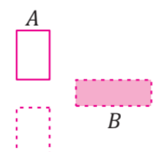


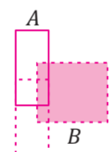
زیرا مثلاً برای حالتی که $x \in A$ و $x \in C$ ولی $x \notin B$ ناحیه‌ای برای نوشتن x وجود ندارد. حالت کلی نمودار ون برای سه مجموعه به شکل زیر است:

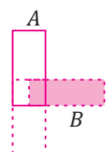


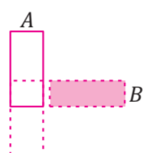
فعالیت

مجموعه‌های A، B و C به ترتیب مجموعه مقسوم علیه‌های ۱۳۹۸، ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰ هستند. کدام گزینه نمودار مناسب‌تری برای این سه مجموعه را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تعداد زیرمجموعه‌ها

فرض کنید سه مجموعهٔ $X_۱=\{a\}$ ، $X_۲=\{a,b\}$ و $X_۳=\{a,b,c\}$ به ترتیب یک، دو و سه عضوی هستند. می‌خواهیم ببینیم با اضافه شدن یک عضو به یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها چقدر بیشتر خواهد شد. روشن است مجموعهٔ یک عضوی $X_۱=\{a\}$ فقط دو زیرمجموعه دارد: یکی a را ندارد که در ردیف اول نوشته‌ایم و دیگری a را دارد که در ردیف دوم قرار داده‌ایم.

$\{\ \}$
$\{a\}$

روشن است زیرمجموعه‌های $X_۲$ به دو دسته تقسیم می‌شوند: دستهٔ اول آنهایی که b را ندارند و دستهٔ دوم آنهایی که b را دارند. از طرف دیگر زنجیر $\square \subseteq X_۱ \subseteq X_۲$ نشان می‌دهد هر زیرمجموعهٔ $X_۱$ که در جای خالی قرار می‌گیرد، زیرمجموعهٔ $X_۲$ نیز هست. پس همهٔ زیرمجموعه‌های $X_۱$ همان دستهٔ اول از زیرمجموعه‌های $X_۲$ هستند که b را ندارند (ردیف اول). برای بدست آوردن دستهٔ دوم از زیرمجموعه‌های $X_۲$ هستند که b را دارند کافی است b را به دستهٔ اول اضافه کنیم (ردیف دوم).

$\{\ \}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{a,b\}$

الگوی بالا را به طور مشابه ادامه می‌دهیم. زیرمجموعه‌های $X_۳$ نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند: دستهٔ اول آنهایی که c را ندارد و دستهٔ دوم آنهایی که c را دارند. همهٔ زیرمجموعه‌های $X_۲$ که قبلا پیدا کرده‌ایم دستهٔ اول را تشکیل می‌دهند (ردیف اول) و با اضافه کردن c به زیرمجموعه‌های ردیف اول، دستهٔ دوم بدست خواهد آمد (ردیف دوم).

$\{\ \}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

نکته

با اضافه شدن یک عضو به یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها **دو برابر** می‌شود. چون مجموعهٔ تهی فقط ۱ زیرمجموعه دارد پس تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با ۲^n است:

تعداد عضو	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد زیرمجموعه‌ها	$۱=۲^۰$	$۲\times۲^۰=۲^۱$	$۲\times۲^۱=۲^۲$	$۲\times۲^۲=۲^۳$	$۲\times۲^۳=۲^۴$	...	۲^n

مثال

چند مجموعه به جای X می‌توان قرار داد تا رابطهٔ زیر درست باشد؟

$$\{۱,۲\}\subseteq X\subseteq\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۲۸

پاسخ: رابطهٔ زیر دو قسمت دارد.

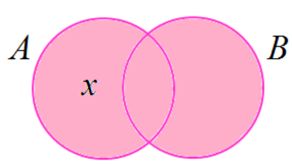
$$\overbrace{\{۱,۲\}\subseteq X}^{\text{قسمت اول}}\underbrace{\subseteq\{۱,۲,۳,۴,۵\}}_{\text{قسمت دوم}}$$

از قسمت اول می‌فهمیم که X باید اعداد ۱ و ۲ را داشته باشد: $X=\{۱,۲,\square,\square,\square,...\}$. از قسمت دوم می‌فهمیم که X عضوهایی به غیر از ۱ تا ۵ ندارد. پس مجموعهٔ X حداکثر ۳ جای خالی دارد که با اعداد ۳، ۴ و ۵ می‌تواند پُر شود: $X=\{۱,۲,\square,\square,\square\}$. پس جاهای خالی یک زیرمجموعهٔ دلخواه از $\{۳,۴,۵\}$ است. مثلاً با توجه به اینکه $\{۴,۵\}\subseteq\{۳,۴,۵\}$ جاهای خالی را در این حالت با ۴ و ۵ پُر می‌کنیم و $X=\{۱,۲,۴,۵\}$ بدست می‌آید. پس تعداد X های مختلف در رابطهٔ بالا برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مختلف $\{۳,۴,۵\}$ است که برابر با $۸=۲^۳$ است. گزینهٔ ۲ درست است.

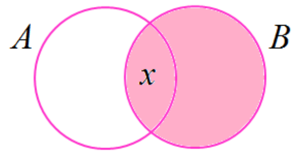
دو مجموعهٔ برابر

فرض کنید دو مجموعهٔ A و B داریم که هر چیزی مانند x از مجموعهٔ مرجع یا عضو این دو مجموعه است و یا عضو هیچکدام از این دو مجموعه نیست. پس با دو مجموعه روبرو هستیم که در مورد عضو بودن یا عضو نبودن هر چیزی پاسخ یکسانی دارند. در این صورت می‌گوییم با دو **مجموعهٔ برابر** روبرو هستیم.

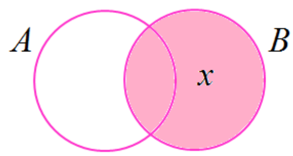
نمودار کلی ون برای دو مجموعهٔ A و B را در نظر بگیرید. با فرض اینکه $A=B$ اگر $x\in A$ آنگاه x نمی‌تواند در ناحیهٔ زیر قرار بگیرد.



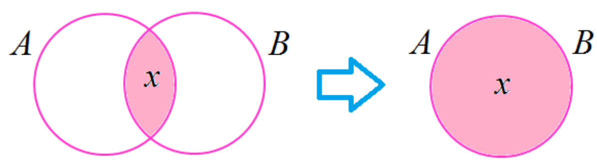
زیرا در اینصورت $x\in A$ ولی $x\notin B$ در حالیکه این دو مجموعه چون برابرند باید پاسخ یکسانی برای عضویت آن داشته باشند. پس باید $x\in B$ و نتیجه می‌گیریم $A\subseteq B$.



مشابه همین استدلال اگر $x \in B$ آنگاه x نمی‌تواند در ناحیهٔ زیر قرار بگیرد.



پس باید $x \in A$ که نتیجه می‌گیریم $B \subseteq A$. بنابراین اگر $A=B$ مانند این است که باید $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.



مثال

در هر مورد بررسی کنید که دو مجموعه برابرند یا خیر.

الف) S برابر با مجموعه مثلث‌هایی که دو ضلع برابر دارند. T برابر با مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویهٔ برابر دارند.

ب) $A=\{۰,۱,۳,۵\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$

پ) حسین آقا ۵ پسر دارد که نام دوتا از آنها مجید و امید است. M مجموعه برادرهای مجید و O مجموعه برادرهای امید است.

پاسخ:

الف) روشن است هر مثلثی مانند ABC که دو ضلع برابر دارد ($ABC \in S$) آنگاه حتماً دو زاویهٔ برابر دارد ($ABC \in T$) که نشان می‌دهد $S \subseteq T$. در ضمن هر مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد آنگاه دو ضلع برابر دارد؛ پس $T \subseteq S$. بنابراین $S=T$.

ب) با این حال که $B \subseteq A$ امّا $A \not\subseteq B$. همین یک دلیل کافی است که نتیجه بگیریم $A \neq B$.

پ) امید برادر مجید است (امید $\in M$) ولی امید برادر خودش محسوب نمی‌شود (امید $\notin O$) و نتیجه می‌گیریم $M \not\subseteq O$. همین یک دلیل کافی است که نتیجه بگیریم $M \neq O$. این درحالی است که $O \not\subseteq M$.

فعالیت

با توجه به تساوی $\left\{a\ ,\ a^{۲}\right\}=\left\{۱\ ,\ b\ ,\ b^{۲}\right\}$ آنگاه $a+b$ چه مقادیر مختلفی دارد؟

عملگرهای اصلی در مجموعه‌ها

اعداد طبیعی به تنهایی فقط برای شمارش به کار می‌روند. به محض اینکه پای یک عملگر مانند جمع یا ضرب به میان می‌آید، اعداد با هم ترکیب می‌شوند و خواص آنها خودنمایی می‌کند. مثلاً با وجود عملگر ضرب است که می‌توانیم بخش پذیری و اعداد اول را تعریف کنیم. می‌خواهیم بین مجموعه‌ها عملگرهایی تعریف کنیم تا بتوانیم آنها را با هم ترکیب کنیم و از روی آنها مجموعه‌های جدیدی بسازیم.

اشتراک

	وزن (Kg)	مصرف بنزین (L/۱۰۰km)	صفر تا صد (S)
پراید	۹۱۵	۷	۱۴/۵
پروتون ویرا	۹۹۵	۸	۱۱
پژو ۲۰۶	۱۰۵۴	۶/۴	۱۲/۶
تندر ۹۰	۱۱۰۰	۶/۹	۱۰/۲
رنو ساندور	۱۱۰۵	۶/۷	۱۰/۵
پژو پارس	۱۱۶۵	۹/۱	۱۱
H۳۰ کراس	۱۲۳۰	۷/۰۴	۱۲/۵
دنا	۱۲۵۸	۷/۸	۱۲
مزدا ۳N	۱۳۱۰	۷/۶	۹/۲
سانتافه	۱۵۶۸	۱۱/۱	۱۰/۹
آزرا	۱۶۳۵	۹/۶	۸
لکسوس	۱۸۷۳	۹/۸	۷/۱
پورشه	۲۱۰۵	۹/۹	۸

این جدول مشخصات فنی ۱۳ خودرو را نشان می‌دهد. خودروهای کوچک شهری خودروهایی هستند که کمتر از ۱۱۰۰ کیلوگرم وزن دارند:

$S=\{$ پراید، پژو۲۰۶، پروتون ویرا $\}$

خودروهای کم مصرف به خودروهایی می‌گوییم که مصرف آنها در ۱۰۰ کیلومتر کمتر یا مساوی ۷ لیتر بنزین باشد:

$L=\{$ پراید، پژو۲۰۶، تندر ۹۰، رنو ساندرو $\}$

هر مشتری با توجه به سلیقهٔ خود زیرمجموعه‌ای از این ۱۳ خودرو را انتخاب می‌کند. مثلاً رفت و آمد آقای مرادی در شهر زیاد است. به همین دلیل او به دنبال خودرویی است که کم‌مصرف باشد. از طرفی عبور و مرور در ترافیک شهری و کوچه‌های باریک باعث شده او به دنبال خودروی کوچک شهری نیز باشد. بنابراین خودروهایی برای آقای مرادی مناسبند که کم‌مصرف و کوچک شهری باشند.

تعریف

همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ مرجع M که هم در A **و** هم در B قرار دارند، مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که به آن اشتراک دو مجموعهٔ A و B می‌گوییم و با $A \cap B$ نشان می‌دهند. می‌توانیم این مجموعه را با استفاده از نمادهای ریاضی به شکل زیر بنویسیم:

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

بنابراین خودروهایی که برای آقای مرادی مناسبند برابر با مجموعهٔ $S \cap L$ است:

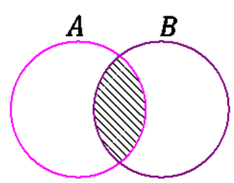
$$S \cap L = \{\text{پراید، پژو ۲۰۶}\}$$

فعالیت

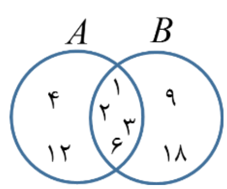
مجموعه خودروهایی که صفر تا صد آنها کمتر از ۱۲ ثانیه باشد را G می‌نامیم. مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $S \cap G$ ب) $G \cap L$ ج) $(S \cap G) \cap L$

نمودار ون به ما کمک می‌کند تا در یک نمایش هندسی $A \cap B$ را بهتر درک کنیم. $A \cap B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که در ناحیهٔ مشترک قرار دارند:



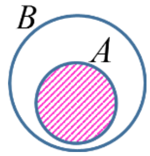
مثلاً اگر A برابر با مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ و B برابر با مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۸ باشد آنگاه $A \cap B = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$:



نکته

۱) اشتراک مجموعهٔ تهی با هر مجموعه‌ای مانند A برابر با تهی است. یعنی: $A \cap \varnothing = \varnothing$

۲) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap B = A$. زیرا همانطور که در نمودار ون زیر می‌بینید عضوهایی که در ناحیهٔ مشترک A و B قرار دارند همان‌هایی هستند که در A قرار دارند.



۳) $A\bigcap B$ هم زیرمجموعهٔ A و هم زیرمجموعهٔ B است. زیرا $A\bigcap B$ ناحیه‌ای است که هم در A قرار دارد و هم در B.

مثال

با توجه به تساوی زیر کدام رابطه در مورد مجموعهٔ A حتماً درست است؟

$$\{۱,۲,۳\}\bigcap A=\{۱,۲,۳\}$$

۱) $A=\{۱,۲,۳\}$ ۲) $A\subseteq\{۱,۲,۳\}$ ۳) $\{۱,۲,۳\}\subseteq A$ ۴) $A=\varnothing$

پاسخ: مجموعهٔ A باید همهٔ عددهای ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد تا حاصل اشتراک بالا $\{۱,۲,۳\}$ باشد. امّا A می‌تواند عضوهای دیگری مانند ۴ را نیز داشته باشد. مثلاً $\{۱,۲,۳\}=\underbrace{\{۱,۲,۳,۴\}}_{A}\bigcap\{۱,۲,۳\}$. پس حتماً $A\supseteq\{۱,۲,۳\}$ یعنی $\{۱,۲,۳\}\subseteq A$. گزینهٔ ۳ درست است.

فعالیت

اگر با هر سه عدد طبیعی یک رقمی متوالی یک مجموعه بسازیم، اشتراک همهٔ این مجموعه‌ها برابر چه مجموعه‌ای است؟

اجتماع

مانا و کیانا دوقلو هستند و در یک کلاس ۱۵ نفره درس می‌خوانند. جدول زیر دوستان مانا و کیانا را نشان می‌دهد.

	ملیکا	سعیده	منیره	نیوشا	ترانه	یلدا	مریم	پریسا	بهناز	مهسا	نگار	پونه	فاطمه
دوستان **مانا**	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗
دوستان **کیانا**	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗

مجموعه دوستان مانا را M و دوستان کیانا را K می‌نامیم:

$K=\{$ ملیکا ، نیوشا، یلدا، مریم، پریسا، بهناز $\}$ $M=\{$ سعیده، منیره، یلدا، ترانه، مریم، پریسا، بهناز $\}$

این دو خواهر تصمیم گرفتند دوستان خود را به جشن تولد دعوت کنند. روشن است افرادی به این جشن تولد دعوت می‌شوند که حداقل با یکی از این دو نفر دوست باشند. یعنی افرادی دعوت می‌شوند که دوست مانا **«یا»** دوست کیانا باشند.

تعریف

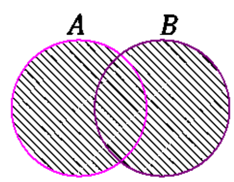
همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ مرجع M که در A **یا** در B قرار دارند، مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که به آن اجتماع مجموعهٔ A و B می‌گوییم و با $A\bigcup B$ نشان می‌دهند. می‌توانیم اجتماع دو مجموعه را با نمادهای ریاضی به شکل زیر بنویسیم:

$$A\bigcup B=\{x\in M \,|\, x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

افراد دعوت شده به این جشن تولد در واقع اجتماع K و M است:

$K\bigcup M=$ {ملیکا ، نیوشا، یلدا، مریم، پریسا، بهناز، سعیده، منیره، ترانه}

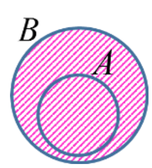
دقت کنید یلدا دوست هر دو خواهر است و طبیعتاً دعوت می‌شود. ولی یلدا فقط یک بار شمرده می‌شود. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\bigcup B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو ناحیه قرار دارند:



نکته

۱) اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ تهی برابر با خود آن مجموعه است. یعنی: $A\bigcup\varnothing=A$

۲) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcup B=B$. زیرا همانطور که در نمودار ون زیر می‌بینید عضوهایی که حداقل در یکی از دو ناحیه قرار دارند همان‌هایی هستند که در ناحیهٔ B قرار دارند.



۳) A و B هر دو زیرمجموعهٔ $A\bigcup B$ هستند. زیرا هر دو داخل ناحیهٔ $A\bigcup B$ قرار دارند.

مثال

با توجه به تساوی زیر کدام رابطه در مورد مجموعهٔ A حتماً درست است؟

$$\{۱,۲,۳\} \cup A = \{۱,۲,۳\}$$

۱) $A = \{۱,۲,۳\}$ ۲) $A \subseteq \{۱,۲,۳\}$ ۳) $\{۱,۲,۳\} \subseteq A$ ۴) $A = \varnothing$

پاسخ: A نمی‌تواند عضوی غیر از ۱، ۲ و ۳ داشته باشد. زیرا حاصل اجتماع بالا یعنی $\{۱,۲,۳\}$ عضوی غیر از این سه عدد ندارد. ولی هر کدام از اعداد ۱، ۲ یا ۳ می‌تواند در A نباشد. مثلاً $\{۱,۲,۳\} = \{۲,۳\} \cup \{۱,۲,۳\}$. پس حتماً $A \subseteq \{۱,۲,۳\}$. گزینهٔ ۲ درست است.

A

فعالیت

فرض کنید B برابر با مجموعه اعداد اول یک رقمی است. چند مجموعه مانند A وجود دارد که $A \cup B$ برابر با همهٔ اعداد طبیعی یک رقمی باشد؟

تفاضل مجموعه‌ها

وزارت مسکن به افراد متأهلی که صاحبخانه نیستند وام مسکن اعطا می‌کند. در یک مهمانی مجموعه افرادی که متأهل هستند را با M و مجموعه افرادی که صاحبخانه هستند را با H نمایش داده‌ایم. جدول عضویت آن‌ها به شکل زیر است:

	محمود	حامی	جلیل	بهرام	وحید	علیرضا	پدرام	فرزان	آرش
M	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗
H	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗

با توجه به جدول بالا فقط بهرام، وحید و علیرضا می‌توانند وام مسکن دریافت کنند. به زبان دیگر فقط این سه نفر عضو M هستند ولی عضو H نیستند.

تعریف

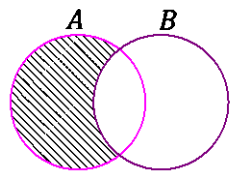
همهٔ عضوهایی از A **که** در B **قرار ندارند**، مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که به آن A منهای B می‌گوییم و با $A-B$ نشان می‌دهیم. می‌توانیم مجموعهٔ A منهای B را با استفاده از نمادهای ریاضی به شکل زیر بنویسیم:

$$A-B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$$

افرادی که متأهل هستند ولی صاحبخانه نیستند همان مجموعهٔ $M-H$ است:

$M-H =$ { بهرام، علیرضا، وحید }

دقت کنید درست است که محمود متأهل است ولی چون صاحبخانه است، نمی‌توانند وام مسکن دریافت کند. فرزان هم درست است که خانه ندارد ولی چون متأهل نیست، نمی‌تواند وام مسکن دریافت کند. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A-B$ برابر با مجموعه عضوهایی از ناحیهٔ A است که در ناحیهٔ B نیستند:



فعالیت

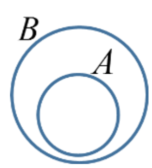
۱) در مثال اخیر مجموعهٔ $H-M$ را مشخص کنید.

۲) منظور از A_n مجموعه مقسوم علیه‌های عدد n است. مثلاً $A_{10}=\{1,2,5,10\}$. مجموعه‌های $A_{30}-A_{20}$ و A_4-A_{12} و A_4-A_{27} را پیدا کنید.

نکته

۱) به ازای هر مجموعهٔ دلخواه A داریم: $A-\varnothing=A$ و $\varnothing-A=\varnothing$

۲) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A-B=\varnothing$. زیرا همانطور که در نمودار ون زیر می‌بینید عضوهایی از ناحیهٔ A که در ناحیهٔ B نیستند وجود ندارد:



۳) $A-B$ زیرمجموعهٔ A است؛ زیرا ناحیهٔ $A-B$ داخل A قرار دارد.

۴) عمل تفاضل دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد. یعنی ممکن است $A-B$ با $B-A$ برابر نباشد: $A-B\neq B-A$

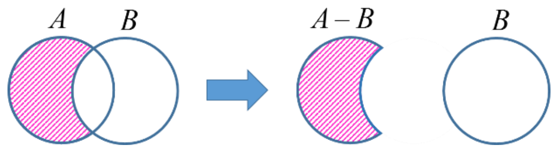
مثال

اگر $A-B=B$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=\varnothing$ ۳) $B=\varnothing$ ۴) همهٔ گزینه‌ها

پاسخ:

می‌دانیم $A-B$ و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند. یعنی $(A-B)\bigcap B=\varnothing$:



از طرفی طبق فرض مسئله $A-B=B$. پس $\varnothing=\underbrace{(A-B)}_{B}\bigcap B=B\bigcap B=B$ که نشان می‌دهد $B=\varnothing$. در نتیجه با جای‌گذاری دوباره در فرض مسئله داریم:

$$\varnothing = A-\underbrace{B}_{\varnothing} = A-\varnothing = A$$

که نشان می‌دهد $A=\varnothing$. پس گزینهٔ ۴ درست است.

تعداد عضوهای اجتماع و تفاضل دو مجموعه

تعریف

شمارش اعضای یک مجموعه فقط وقتی پایان‌دار است که تعداد عضوهای آن مجموعه برابر با یک عدد صحیح و نامنفی باشد. در اینصورت آن مجموعه را **متناهی** می‌گوییم و تعداد اعضای آن را با $n(A)$ (بخوانید اِنِ آ) نشان می‌دهند. اگر شمارش اعضای یک مجموعه پایان‌دار نباشد به آن مجموعه **نامتناهی** می‌گوییم.

مثال

۱) اگر مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ را A بنامیم آنگاه $A=\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰\}$. پس A مجموعه‌ای متناهی است و $n(A)=۶$.

۲) مجموعه اعداد اول سه رقمی مجموعه‌ای متناهی است. زیرا تعداد آنها قطعاً کمتر از همهٔ اعداد سه رقمی (۹۰۰تا) است و درنتیجه شمارش آنها پایان‌دار است.

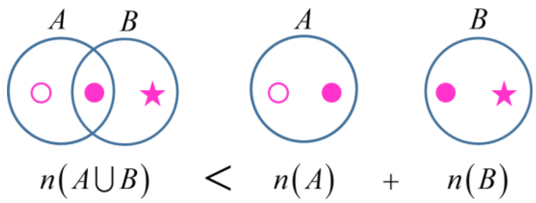
۳) مجموعه تارِ موهای سر شما مجموعه‌ای متناهی است. زیرا اگر با دست و دل بازی تخمین بزنیم این مجموعه حتماً کمتر از یک میلیون عضو دارد. پس متناهی است.

۴) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳ مساوی با $\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,...\}$ است. این مجموعه **نامتناهی** است. زیرا شمارش اعضای آن پایان‌دار نیست و تعداد آنها نمی‌تواند مساوی با یک عدد صحیح باشد.

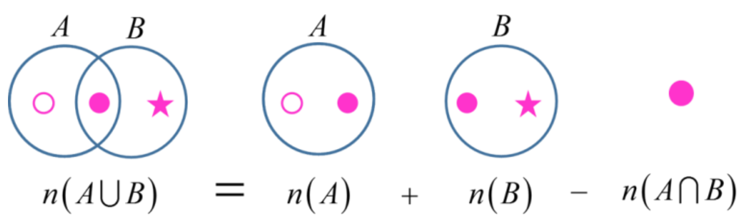
اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند آنگاه $A\cup B$ نیز مجموعه‌ای متناهی است زیرا شمارش عضوهای آن پایان‌دار است. برای اینکه رابطهٔ بین $n(A)$، $n(B)$ و $n(A\cup B)$ را بهتر درک کنید در ادامه به معما توجه کنید.

معما: ۷ سیب را بین ۶ دختر و ۳ مادر تقسیم کردند و به هر نفر یک سیب کامل رسید. چطور ممکن است؟؟؟

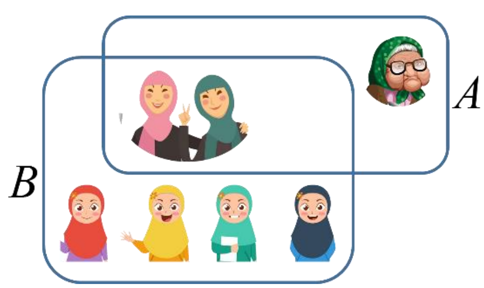
مجموعهٔ مادران را A و مجموعهٔ دختران را B می‌نامیم. چون به هر نفر یک سیب رسیده است پس تعداد این افراد ۷ نفر است. بنابراین $A\cup B$ مجموعه‌ای ۷ عضوی است: $n(A\cup B)=۷$. همانطور که $۶+۳\neq ۷$ این معما نشان می‌دهد تصور اینکه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ممکن است نادرست باشد. نکتهٔ معما این است که مجموعهٔ این ۷ نفر شامل تعدادی دختر ○، مادر ● و مادربزرگ ★ است. مادر نسبت به دختر مادر است و نسبت به مادربزرگ دختر محسوب می‌شود.



هر مادر ● که عضوهای $A\cap B$ را مشخص می‌کند یک بار اضافه‌تر در حاصلجمع $n(A)+n(B)$ شمرده می‌شود. در حالیکه باید یک بار در $n(A\cup B)$ محاسبه گردند. پس با یک بار کم کردن $n(A\cap B)$ از $n(A)+n(B)$ آن شمارش اضافه‌تر را جبران می‌کنیم:



شکل زیر به خوبی جواب معما را نشان می‌دهد.



نکته

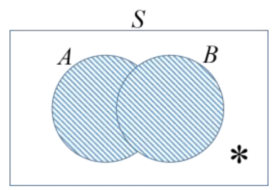
اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند آنگاه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

مثال

در بین ۸۰ نفر دانش آموز ۵۰ نفر در کنکور سراسری ۳۰ نفر در کنکور آزاد شرکت کرده‌اند و ۲۵ نفر در هیچ یک از این دو کنکور شرکت نکرده‌اند. چند نفر در هر دو کنکور شرکت کرده‌اند؟

۱) ۰ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

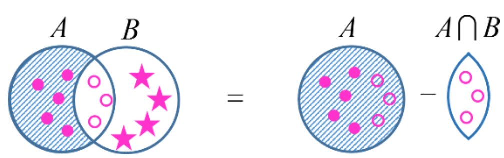
پاسخ: در بین این ۸۰ نفر دانش آموز شرکت کنندگان کنکور سراسری را با A و کنکور آزاد را با B نشان می‌دهیم.دانش آموزانی که حداقل در یکی از این دو آزمون شرکت کرده‌اند مجموعهٔ $A\bigcup B$ را تشکیل می‌دهند. آنهایی که در هیچ یک از دو کنکور شرکت نکرده‌اند در نمودار زیر در ناحیهٔ ❋ قرار دارند.



پس $n(A\bigcup B)=۸۰-۲۵=۵۵$. حالا با استفاده از رابطهٔ $\underbrace{n(A\bigcup B)}_{۵۵}=\underbrace{n(A)}_{۵۰}+\underbrace{n(B)}_{۳۰}-n(A\bigcap B)$ و با حل این معادله درمی‌یابیم که $n(A\bigcap B)=۸۰-۵۵=۲۵$. پس گزینهٔ ۳ درست است.

نکته

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند آنگاه $n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$.

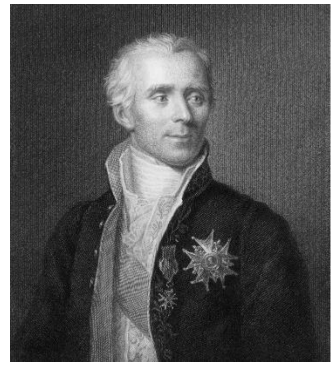


فعالیت

در بین ۲۰۰ نوزاد، ۸۰ نفر واکسن فلج اطفال و ۹۰ نفر واکسن کزاز تزریق کرده‌اند. در ضمن ۶۰ نفر هیچ یک از دو واکسن را تزریق نکرده‌اند. چند نفر از این ۲۰۰ نوزاد، فقط یکی از دو واکسن را تزریق کرده است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

احتمال



سیمون لاپلاس (۱۷۴۹ – ۱۸۲۷ میلادی)

"نظریهٔ احتمال چیزی بیش از عقل سلیم نیست که به محاسباتی روی کاغذ تنزّل پیدا کرده است"

همهٔ ما در زندگی روزمره ممکن است در موقعیتی قرار بگیریم که شبیه جملات زیر را به کار ببریم:

۱) **غیر ممکن** است در قرعه کشی بانک برنده شوم.

۲) **شک** دارم پلاک خانهٔ دوستم ۳ یا ۴ است.

۳) **به احتمال زیاد** با وجود چنین ابرهایی در آسمان، امروز باران می‌بارد.

۴) **حتماً** تیم ملی والیبال ایران امسال قهرمان آسیا خواهد شد.

در واقع با به کار بردن چنین قیدهایی میزان اطمینان یا عدم اطمینان از رخ دادن یک **پیشامد** را نشان می‌دهیم. نظریهٔ احتمال با استفاده از روابط ریاضی این پیشامدها را شبیه سازی می‌کند تا بتواند میزان شک و تردید ما را با یک عدد اندازه گیری کند.

در اوایل قرن بیستم علم احتمال به صورت نظریه‌ای پیشرفته توسعه یافت، اما مبنای محکمی نداشت. تا آن زمان در میان تعبیرهای گوناگون از احتمال، تعبیر **فراوانی نسبی** رضایت بخش ترین تعبیر بود. مثلاً برای توجیه اینکه چرا در پرتاب یک سکه $\frac{۱}{۲}$ احتمال دارد که شیر بیاید این استدلال را می‌آوردند که با پرتاب بیشتر و بیشتر انتظار می‌رود **نسبت تعداد شیرها به تعداد کل پرتاب‌ها** به عدد $\frac{۱}{۲}$ نزدیک شود. اما این توجیه برای احتمال رخ دادن یک پیشامد مثل شیر آمدن یک سکه ابهام دارد و ما را با چند سؤال مواجه می‌کند:

۱. چند بار باید پرتاب یک سکه را تکرار کنیم؟ ۱۰ بار؟ ۱۰۰ بار؟ ...

۲. چه دلیلی وجود دارد که بپذیریم نسبت تعداد شیرها به تعداد کل پرتاب‌ها به یک عدد آن هم $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می‌شود؟

آزمایش تصادفی

هنگامی که یک پدیده را چندین بار تحت شرایط یکسان آزمایش می‌کنیم، تقریباً نتیجهٔ یکسانی بدست می‌آوریم. به چنین آزمایش-هایی **قطعی** می‌گوییم. به طور مثال با حذف اکسیژن نتیجهٔ **قطعی** این است که فرایند سوختن متوقف می‌شود یا دو بادکنکی که با مالش باردار شده‌اند **قطعاً** همدیگر را دفع می‌کنند. در واقع نتیجهٔ چنین آزمایش‌هایی از قبل قابل پیش بینی هستند.

ولی آزمایش‌هایی وجود دارند که حتی در شرایط یکسان نتیجه‌های متفاوتی دارند. مثلاً قبل از اینکه یک تاس سالم را پرتاب کنیم دقیقاً نمی‌توانیم پیش بینی کنیم چه عددی می‌آید یا قبل از اینکه یک پنالتی در فوتبال زده شود دقیقاً نمی‌دانیم که گل می‌شود یا نه. امّا در اینکه نتیجهٔ پرتاب تاس یکی از اعداد ۱ تا ۶ است و یا نتیجهٔ پنالتی گل شدن یا نشدن است شکی نداریم. به چنین آزمایش‌هایی **تصادفی** می‌گوییم.

تعریف

فرض کنید نتیجهٔ یک آزمایش از قبل معلوم نباشد امّا همهٔ نتیجه‌های ممکن برای این آزمایش قابل پیش‌بینی باشد. به این آزمایش یک **آزمایش تصادفی** می‌گوییم. به هر یک از نتیجه های ممکن و قابل پیش بینی برای یک آزمایش تصادفی یک **برآمد** می‌گوییم. به مجموعه برآمدهای یک آزمایش تصادفی **فضای نمونه** می‌گوییم که معمولاً با S نشان می‌دهیم.

مثال

الف) نتیجهٔ پرتاب یک سکه فقط «شیر» یا «خط» است که هر کدام یک برآمد این آزمایش تصادفی‌اند. پس فضای نمونهٔ پرتاب سکه مجموعهٔ $S=\{$ شیر ، خط $\}$ است.

ب) وقتی یک تاس می‌اندازیم هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ یک برآمد به شمار می‌آیند. یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$.

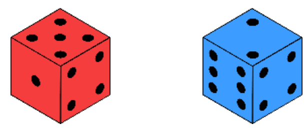
پ) وقتی یک قوطی کبریت را باز می‌کنیم از قبل نمی‌دانیم این قوطی چند چوب‌کبریت دارد. ولی می‌دانیم تعداد چوب کبریت‌ها عددی صحیح و نامنفی است. پس این یک آزمایش تصادفی است. با فرض اینکه در یک قوطی کبریت بیش از ۵۰ چوب کبریت جا نمی‌گیرد پس فضای نمونه برابر با مجموعهٔ $S=\{۰,۱,۲,\ldots,۵۰\}$ است.

فعالیت

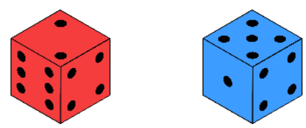
الف) به آقای طلوع خبر داده‌اند که ساعت دیواری اتاقش از کار افتاده است. قبل از اینکه او وارد اتاق شود نمی‌داند ساعت دیواری روی چه زمانی متوقف شده است. پس اینکه ساعت دیواری روی چه زمانی متوقف شده یک آزمایش تصادفی است. یک فضای نمونه برای این آزمایش تصادفی مشخص کنید. این فضای نمونه چند عضوی است؟

ب) آقای طلوع در حال رانندگی متوجه شد ماشین‌های اطراف به او اشاره می‌کنند که پنچر شده است. یک فضای نمونه برای اینکه کدام لاستیک(ها) پنچر شده است، مشخص کنید.

فرض کنید در یک آزمایش تصادفی می‌خواهیم دو تاس یکی قرمز و دیگری آبی را پرتاب می‌کنیم. اگر تاس قرمز را بیاندازیم هنوز آزمایش تصادفی تمام نشده و نتیجهٔ آن معلوم نیست. با پرتاب تاس آبی نیز آزمایش تمام می‌شود و نتیجهٔ آن یا همان برآمد را می‌توان با دو عدد مشخص کرد. مثلاً به برآمد زیر دقت کنید:

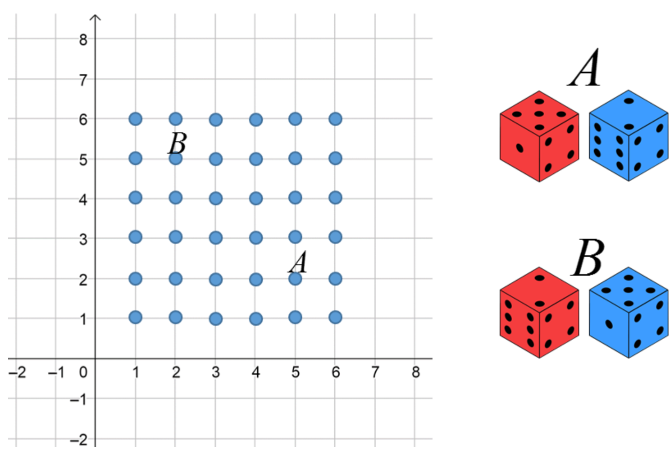


$\{۵,۲\}$ نمایش مناسبی برای برآمد بالا نیست. زیرا با توجه به اینکه $\{۲,۵\}=\{۵,۲\}$ پس مانند این است که برآمد بالا را با برآمد زیر یکسان فرض کنیم. در حالیکه این دو برآمد، دو نتیجهٔ متفاوت از این آزمایش تصادفی محسوب می‌شوند!



یک ایدهٔ خوب برای نمایش چنین برآمدهایی استفاده از نماد **مختصات یک نقطه** است. ویژگی مختصات یک نقطه مانند $(۲,۵)$ این است که با جابجایی طول و عرض نقطهٔ متفاوت $(۵,۲)$ بدست می‌آید. پس مختصات نقاط شبکهٔ زیر نمایش مناسبی برای فضای نمونهٔ آزمایش پرتاب دو تاس است.

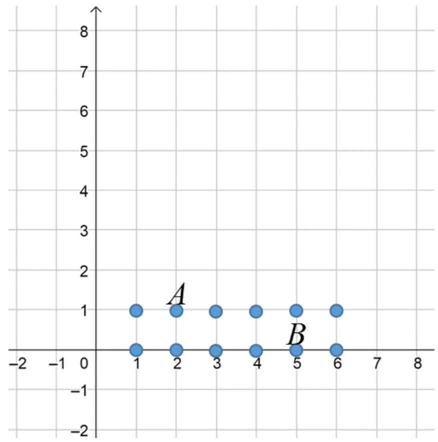
$$S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},۱\le x,y\le ۶\}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),\ldots,(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$$



پس برای شمردن تعداد عضوهای فضای نمونه کافی است ابعاد **شبکهٔ مستطیلی** بالا را در هم ضرب کنیم. یعنی:

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

این بار یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. برای اینکه بتوانیم هر برآمد این آزمایش را به صورت مختصات یک نقطه نشان دهیم باید «شیر» و «خط» با دو عدد جایگزین کنیم. مثلاً قرارداد می‌کنیم به جای «شیر» عدد ۱ و به جای «خط» عدد ۰ را در نظر می‌گیریم. حالا قرارداد می‌کنیم اگر نتیجهٔ پرتاب تاس عدد x و نتیجهٔ پرتاب سکه عدد y باشد، این برآمد را با مختصات (x,y) نشان می‌دهیم. پس فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی متناظر با مجموعه نقاط شبکهٔ زیر است:



مثلاً نقطهٔ $A=(۲,۱)$ این برآمد را نشان می‌دهد که تاس ۲ و سکه «شیر» آمده است و یا نقطهٔ $B=(۵,۰)$ برآمد تاس ۵ و سکهٔ «خط» را نشان می‌دهد. همانطور که تعداد نقاط این شبکهٔ مستطیلی از حاصلضرب ابعاد آن بدست می‌آید، پس:

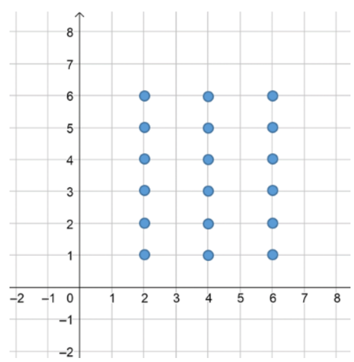
$$n(S)=۲\times۶=۱۲$$

مثال

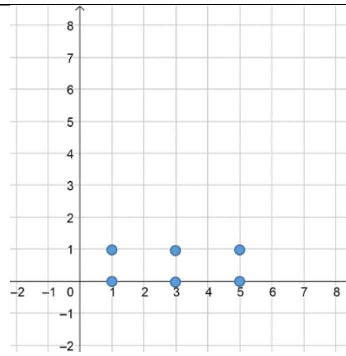
در یک آزمایش تصادفی ابتدا یک تاس می‌اندازیم. اگر زوج بیاید آنگاه یک تاس دیگر می‌اندازیم ولی اگر فرد بیاید آنگاه یک سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

پاسخ: فرض کنید تاس اول زوج بیاید. پس باید تاس دوم را پرتاب کنیم. در این حالت می‌توان هر برآمد را با (x,y) نشان داد که x نتیجهٔ تاس اول (یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶) و y نتیجهٔ تاس دوم (یکی از اعداد ۱ تا ۶) است:



امّا اگر تاس اول فرد بیاید باید یک سکه پرتاب کنیم. در این حالت می‌توان هر برآمد را با (x,y) نشان داد که x تاس اول (یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵) و y نتیجهٔ سکه (۰ یا ۱) است:



شبکهٔ اول $۱۸ = ۶ \times ۳$ نقطه و شبکهٔ دوم $۶ = ۲ \times ۳$ نقطه دارد. پس روی هم رفته فضای نمونه $۲۴ = ۶ + ۱۸$ عضو دارد. پس گزینهٔ ۲ درست است.

پیشامد

فرض کنید در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده‌اید که اگر نتیجهٔ پرتاب تاس شما زوج باشد، برندهٔ مسابقه خواهید بود. چه برآمدهایی مطلوب شما است و اگر چه **پیش آید** خوشحال می‌شوید؟ مطلوب شما این است که برآمد این آزمایش تصادفی یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶ باشد. همهٔ این برآمدهای مطلوب مجموعهٔ $\{۲,۴,۶\}$ را تشکیل می‌دهند که زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است.

هر زیرمجموعهٔ دیگر از فضای نمونهٔ پرتاب تاس، می‌تواند شرط برنده شدن ما در یک مسابقهٔ دیگر باشد. مثلاً ممکن است در مسابقهٔ دیگری شرط برنده شدن این باشد که تاس شما یکی از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,۵,۶\}$ بیاید.

تعریف

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک **پیشامد** می‌گوییم.

مثال

یک جشن با حضور خانواده‌هایی که دقیقاً ۳ فرزند دارند برگزار شده است.

آزمایش تصادفی: یک خانواده به طور تصادفی انتخاب می‌شود تا جنس فرزندان این خانواده به ترتیب سن مشخص شود.

برآمد: جنس فرزندان یک خانواده به ترتیب سن نتیجهٔ این آزمایش تصادفی است. هر برآمد را می‌توان با ۳ حرف مشخص کرد که هر حرف یا G (دختر) یا B (پسر) است. مثلاً برآمد BGG یعنی فرزند اول پسر و دو فرزند بعدی دخترند.

فضای نمونه: همهٔ برآمدهای ممکن فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را تشکیل می‌دهند و برابر با مجموعهٔ زیر است.

$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$$

پیشامد: این اتفاق که برآمد آزمایش تصادفی خانواده‌ای باشد که فرزند اول آنها دختر است، یک **پیشامد** است. این پیشامد برابر با **زیرمجموعهٔ** زیر است:

$$\{GBB, GBG, GGB, GGG\} \subseteq S$$

ممکن است یک پیشامد فقط شامل یک برآمد باشد. مثلاً پیشامد اینکه خانوادهٔ انتخاب شده فرزند دختر نداشته باشد برابر با مجموعهٔ تک عضوی $\{BBB\}$ است.

اگر شرط برنده شدن در یک مسابقه این باشد که تاس شما زوج بیاید، نمی‌توان انتظار داشت که در یک پرتاب تاس هر سه عدد ۲، ۴ و ۶ ظاهر شده باشد. ولی اگر نتیجهٔ پرتاب شما عددی عضو $\{۲,۴,۶\}$ باشد شما برنده خواهید شد.

تعریف

فرض کنید A یک پیشامد برای فضای نمونهٔ S است. اگر برآمد این آزمایش تصادفی عضو A باشد، می‌گوییم پیشامد A **رخ داده است**.

مثلاً در انتخاب تصادفی یک خانواده که دقیقاً ۳ فرزند دارند پیشامد اینکه تعداد فرزندان دختر بیشتر از پسر باشد را A می‌نامیم:

$$A = \{BGG, GBG, GGB, GGG\}$$

فرض کنید یک خانواده به طورتصادفی انتخاب کرده‌ایم و نام فرزندان آن‌ها به ترتیب سن ملیکا، علی و سارا است. در این صورت پیشامد A رخ داده است. زیرا نتیجهٔ این آزمایش GBG است که عضو A است.

محاسبهٔ احتمال

احتمال رخ دادن یک پیشامد عددی بین ۰ تا ۱ است که می‌تواند خود ۰ یا ۱ نیز باشد. هر چه احتمال به ۱ نزدیک‌تر باشد با اطمینان بیشتری امیدواریم که این پیشامد رخ دهد. هر چه احتمال به ۰ نزدیک‌تر باشد کمتر انتظار داریم که این پیشامد به وقوع بپیوندد. اگر ممکن نیست پیشامدی رخ دهد احتمال آن ۰ و اگر این پیشامد حتماً به وقوع می‌پیوندد احتمال آن ۱ است.

نکته

معمولاً میزان امیدواری ما به نتیجهٔ یک آزمایش تصادفی در مورد همهٔ برآمدها یکسان است. یعنی معمولاً انتظار داریم شانس رخ دادن یک برآمد نسبت به برآمد دیگر فرقی نکند. در این صورت می‌گوییم این فضای نمونه شامل برآمدهای **هم شانس** است.

فرض کنید جعبه‌ای شامل ۱ مهرهٔ قرمز (R) و ۹۹ مهرهٔ آبی (B) است. یک مهره به طور تصادفی از این جعبه خارج می‌کنیم تا رنگ آن را مشاهده کنیم. بنابراین یک فضای نمونه برای این آزمایش می‌تواند مجموعهٔ $T = \{R, B\}$ باشد. روشن است که خیلی بیشتر انتظار داریم مهرهٔ خارج شده آبی باشد. بنابراین بدیهی است احتمال رخ دادن پیشامد $\{B\}$ خیلی بیشتر از احتمال رخ دادن پیشامد $\{R\}$ است. این واقعیت نشان می‌دهد که T یک فضای نمونهٔ **غیر هم شانس** است.

حالا فرض کنید مهره‌ها را شماره‌گذاری کنیم. اگر یک مهره به طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم آیا انتظارمان از قرمز بودن یا آبی بودن مهرهٔ خارج شده تغییر می‌کند؟ خیر؛ زیرا رنگ مهرهٔ خارج شده به شمارهٔ آن بستگی ندارد. ولی فضای نمونهٔ ما به مجموعهٔ زیر تغییر کرده است:

$$S=\{R_{۱},B_{۲},B_{۳},B_{۴},\ldots,B_{۱۰۰}\}$$

روشن است که شانس هر یک از این ۱۰۰ مهرهٔ **شماره گذاری شده** با هم مساوی است. بنابراین S شامل برآمدهای **هم شانس** است.

تعریف

فرض کنید S یک فضای نمونه است که تعداد عضوهای آن پایان‌دار و شامل برآمدهای هم شانس است. در این صورت احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ (بخوانید پیِ A) نشان می‌دهیم که برابر با نسبت زیر است:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

بنابراین در مثال اخیر احتمال اینکه مهرهٔ خارج شده قرمز باشد برابر با $\frac{۱}{۱۰۰}$ و احتمال اینکه آبی باشد برابر با $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ است.

مثال

در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر با ۶ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

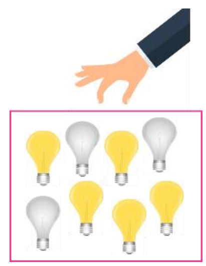
پاسخ: اگر دو تاس را رنگ کنیم میزان امیدواری ما در مورد رخ دادن پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۶ باشد تغییر نمی‌کند. اگر یک تاس را آبی و دیگری را قرمز کنیم این خوبی را دارد که برآمدهای این آزمایش تصادفی به صورت (x,y) قابل توصیف است که x عدد تاس آبی و y عدد تاس قرمز است. بنابراین تعداد فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی برابر با $۶\times۶=۳۶$ است. این فضای نمونه هم شانس نیز هست. یعنی مثلاً احتمال رخ دادن برآمد $(۱,۵)$ با احتمال رخ دادن دیگر برآمدها برابر است. اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم آنگاه:

$$A=\{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}$$

دقت کنید اینکه یکی از تاس‌ها ۱ و دیگری ۵ بیاید در این فضای نمونه دو نسخه وجود دارد: ۱) آبی۱، قرمز۵ ۲) آبی۵، قرمز۱. ولی اینکه هر دو تاس ۳ بیاید فقط یک نسخه موجود است. زیرا با تغییر رنگ این برآمد تغییر نمی‌کند. چون این فضای نمونه هم شانس است پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۲}$. پس گزینهٔ ۴ درست است.

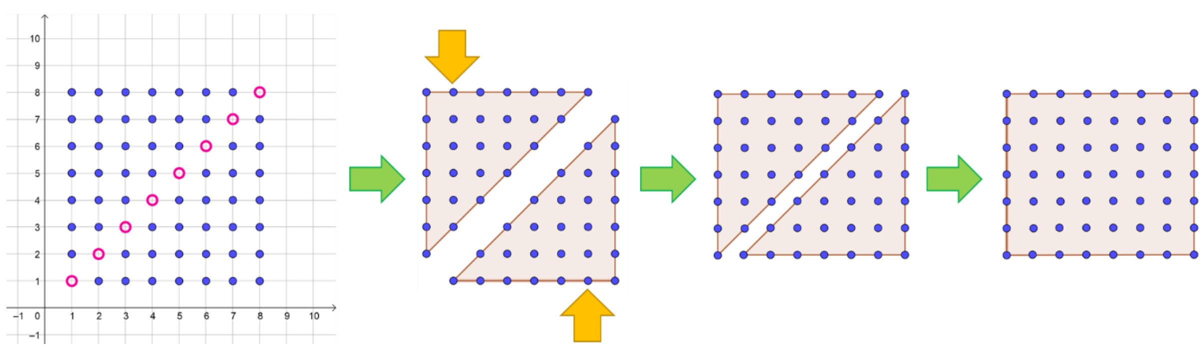
مثال

در یک جعبه ۵ لامپ سالم و ۳ لامپ سوخته وجود دارد. اگر ۲ لامپ به طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم چقدر احتمال دارد که حداقل یک لامپ سالم برداشته‌ایم؟



پاسخ: شماره گذاری کردن لامپ‌ها میزان امیدواری ما را از رخ دادن پیشامد مورد نظر تغییر نمی‌دهد.

اگر دو لامپ را یکی پس از دیگری برداریم، شمارهٔ لامپ اول و لامپ دوم می‌تواند به ترتیب مختصات یک نقطه باشد. نقاطی که طول و عرض آنها با هم مساوی است متناظر با هیچ برآمدی نیستند. زیرا از هر شماره یک لامپ وجود دارد و شمارهٔ لامپ اول با لامپ دوم مساوی نیست. بنابراین فضای نمونهٔ S متناظر با شبکهٔ ۸×۸ زیر است که ۸ نقطه باید از آن کم کنیم!



پس با توجه به شکل بالا تعداد برآمدهای ممکن برابر با $۸\times۸-۸=۸\times(۸-۱)=۸\times۷=۵۶$ است.

فرض کنیم A پیشامد این باشد که حداقل یک لامپ سالم برداشته‌ایم. در اینصورت A وقتی رخ می‌دهد که یا هر دو لامپ برداشته شده سالم باشد و یا یکی سالم و یکی سوخته باشد. امّا پیشامد $S-A$ پیشامد این است که هر دو لامپ برداشته شده سوخته باشد. پس مشابه با شمارش بالا تعداد اعضای $S-A$ برابر با $۳\times(۳-۱)=۳\times۲=۶$ است. بنابراین:

$$n(A)=۵۶-۶=۵۰$$

در نتیجه $P(A)=\frac{۵۰}{۵۶}\simeq ۸۹\%$.