

به نام حضرت دوست

اسفند ماه ۱۳۹۵

آزمون جامع (سری دوم)



11 TH IOAA TEAM
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

امیراحسان علیزاده	سینا بلوکی
عباس فروزان نژاد	امیرحسین ستوده فر
زهرا فرهمند	عماد صالحی
علیرضا ملکی	پریمه صفریان
محمد علی نادمی	شایان عزیزی

تذکرات :

- ✓ آزمون شامل ۵ سوال است و نمره آن از ۵۰۰ محاسبه می گردد
- ✓ استفاده از ماشین حسابی که قابل برنامه ریزی نباشد مجاز است و مدت پیشنهادی آزمون ۴:۳۰ ساعت است .

سوال اول : خوشه ستاره ای (۸۰ نمره)

خوشه‌ای ستاره‌ای به قدر مطلق ۶,۶- را که در آن ستاره‌ها ۵ میلیارد سال پیش با توزیع جرم زیر در بازه ی ۰,۱ تا ۱۰۰ برابر جرم خورشید متولد شده‌اند را رصد می کنیم.

$$\xi(m)dm = \xi_0 m^{-\alpha}dm$$

که در آن $\alpha > 2$ است.

جرم میانگین ستاره‌ها به هنگام تولد ۰,۴ جرم خورشید بوده. می توانید از یک عدد بزرگ، به توان منفی صرف نظر کنید!

(الف) این خوشه هم اکنون دارای چند ستاره است؟

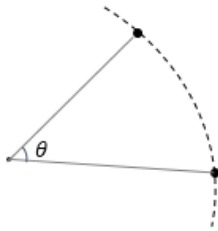
(ب) جرم میانگین درخشندگی را جرم ستاره ای تعریف می کنیم که اگر به تعداد کل ستاره‌های موجود، از آن ستاره داشته باشیم درخشندگی حاصل برابر با درخشندگی کل باشد؛ این مقدار را برای این لحظه‌ی خوشه محاسبه کنید.

(پ) جرم متوسط خوشه در زمان تشکیل را با جرم متوسط در حال حاضر و جرم میانگین درخشندگی مقایسه کنید.

سوال دو : مکانیک سماوی (۱۲۰ نمره)

(الف) دو ذره را در نظر بگیرید که تحت گرانش نیوتونی به دور یک جرم مرکزی و در یک مدار به صورت ساعتگرد در حرکت‌اند؛ به طوری که در یک لحظه اختلاف آنومالی حقیقی آنها θ است. ثابت کنید مقدار سرعت نسبی آنها در این لحظه از رابطه ی زیر بدست می‌آید.

$$|\vec{V}| = 2 \frac{\mu}{h} \sin \frac{\theta}{2}$$



که در آن h تکانه زاویه‌ای مدار است.

(ب) کاوشگری در مداری سهمی شکل با فاصله حضیض $p = 3 AU$ در حال حرکت به دور خورشید است. در زمان $t = 0$ او در حضیض مداری خویش بوده است. در $t = 1^yr$ ماهواره‌ی دیگری را در همین مدار قرار می‌دهیم. ماهواره دوم حرکت خود را از حضیض آغاز میکند. از این به بعد این دو ماهواره تبادلات مخابراتی خواهند داشت. در زمان $t = 2^yr$ ماهواره اول پالس‌هایی را برای ماهواره دوم ارسال می‌کند. ماهواره دوم این پالس‌ها را با چه قرمزگرایی‌ای دریافت می‌کند؟ راهنمایی: رابطه ی زمان برای مدار سهمی به شکل زیر است.

$$t = \sqrt{\frac{2p^3}{\mu}} \left(\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right)$$

سوال سه : الکترون خورشیدی (۱۳۰ نمره)

بخش اول : انرژی الکترون

فرض کنید در اثر برهم کنش های موجود در ستارگان ، علاوه بر تابش فوتون ، نوعی تابش موسوم به تابش الکترون وجود دارد که از مرکز ستاره سرچشمه میگیرد . حرکت الکترون را به دو قسمت تقسیم می کنیم ، تا شعاع ۰,۳ شعاع خورشید به واسطه برخورد های متعدد موجود در هسته ستاره ، الکترون مسیر مستقیم را طی نمیکند و در هر برخورد به اندازه 6.33×10^{-20} رادیان منحرف میشود . پس از آن در همان راستا ادامه حرکت را انجام میدهد تا به سطح برسد. به واسطه حرکت الکترون و اثر محیط بر روی آن ، انرژی هر الکترون کاهش می یابد . کاهش این انرژی به شکل زیر است :

$$\frac{dE}{d\chi} = -\alpha - \frac{E}{\xi}$$

که در آن $d\chi$ المان طول در در راستای حرکت و α و ξ ثابت هستند . با فرض آنکه انرژی اولیه الکترون مقدار $2.29E_0$ باشد که در آن E_0 انرژی سکون الکترون است ، الف (انرژی الکترون خروجی و سرعت آن و ب) مدت زمان رسیدن آن به سطح را تعیین کنید . (دقت کنید که الکترون مسیر مستقیم را نمی پیماید !) فرض کنید خورشید کاملاً از هیدروژن یونیزه تشکیل شده است .

$$\xi = 5.62 \times 10^{18} m , \alpha = 1.78 \times 10^{-20} E_0 , 2.81 \times 10^{-15} m$$
 شعاع موثر برخورد :

بخش دوم : کمربند ون آلن

کمربند ون آلن لایه ای از ذرات باردار است که به علت میدان مغناطیسی زمین ایجاد شده است . می خواهیم با استفاده از یک مدل ساده و منطقی علت ایجاد آن را بررسی کنیم :

میدانیم حضور میدان مغناطیسی در مجاورت یک ذره باردار موجب ایجاد نیروی لورنتس به فرم $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ می شود. دستگاه مختصات راستگرد XYZ را در نظر بگیرید که محور Z آن موازی با قطب شمال سماوی و صفحه $X - Y$ منطبق بر استوا است . از داده های موجود می دانیم راستای میدان مغناطیسی زمین در مشخصات عرض جغرافیایی $79^\circ -$ و طول جغرافیایی 108° شرقی است . همچنین فرض کنید که منشا همه ذرات موجود در کمربند وان آلن تنها خورشید است . این مسئله را برای روز اول دی حل کنید .

الف) ابتدا دستگاه مناسبی را انتخاب کنید تا حل معادلات حرکت در آن ساده تر باشد (بررسی کنید که آیا امکان حل معادلات در دستگاه XYZ کنونی امکان پذیر است ؟)

ب) دستگاه معادلات را حل کنید و معادله خم حرکت ذرات را در دستگاه جدید بدست آورید .

$$\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$
 معادله خم :

ج) معادله خم بدست آمده را در دستگاه اولیه XYZ بدست آورید .

د) فرم مسیر حرکت چگونه است ؟ اندازه پارامتر های مسیر را بدست آورید .

سوال چهارم : پیش ستاره (۷۰ نمره)

یک ابر گازی با دمای متوسط ۲۰ کلوین در نظر بگیرید که در برخی از نواحی این ابر ، فرایند رمبش و افزایش چگالی در حال رخ دادن است . به این نواحی به اصطلاح پیش ستاره گفته می شود که در حال سقوط آزاد گرانشی هستند و به واسطه همین رویداد از خود تابش می کنند . فرض کنید این پیش ستاره در نهایت به یک ساختار مشابه خورشید تبدیل می شود . با فرض آنکه شعاع ثانویه ساختار نسبت به شعاع اولیه آن قابل صرفنظر است ، درخشندگی حاصل از سقوط آزاد گرانشی را بدست آورید . (فرض کنید در این مدت درخشندگی ثابت باقی می ماند)

سوال پنجم : مهاجرت پرندگان (۱۰۰ نمره)

یک گروه پژوهشگر قصد بررسی دسته ای از پرندگان حین مسیر مهاجرتشان را دارند. این پرندگان از شهر A به مختصات ($77.52^{\circ}E$ و $16^{\circ}N$) به شهر B با مختصات ($41.59^{\circ}N$ و $133.15^{\circ}W$) می روند و همواره روی دایره عظیمه حرکت می کنند. پرواز در عرضهای جغرافیایی بیشتر از $60^{\circ}N$ به دلیل کاهش دما برای اینگونه از پرندگان ممکن نیست. برای این بررسی ها، پژوهشگران یک تراشه کوچک به تعدادی از این پرندگان متصل کردند که با استفاده از راداری بتوانند مسیر آنها را در عرض های مختلف دنبال کنند. هنگامی که پرندگان به این مرز می رسند، مسیر پرواز خود را اینگونه تغییر می دهند ؛ سمت غربی پرواز در عرض 60° درجه را به مقدار سمت شرقی جهت پرواز در عرض 60° درجه تغییر می دهند (طوری که گویا از دایره صغیره عرض جغرافیایی 60° درجه بازتاب می شوند!) و در آن جهت به مقداری که از مسیر باقی مانده بود حرکت می کنند. حال با استفاده از صفحه تسطیح اسطرلابی که در صفحه بعد در اختیارتان قرار گرفته است که مرکز تسطیح نیز قطب شمال سماوی می باشد، به سوال زیر پاسخ دهید:

- رادار مورد استفاده این پژوهشگران برد محدودی دارد، به همین خاطر این می خواهیم این رادار را در مکانی نصب کنیم که با استفاده از کوتاهترین برد ممکن، بتواند کل مسیر مهاجرت این نوع پرندگان را دنبال کند. با توجه به این مطلب، مختصات محل قرارگیری رادار را بیابید. همچنین برد را در این حالت محاسبه کنید.

نکته! : حق استفاده از هیچ گونه روابط مثلثات کروی را ندارید، همچنین استفاده از روابط تسطیح اسطرلاب بدون اثبات مجاز است.

