مرور معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

یک معادله دیفرانسیل به شکل

$$y'' + P(t)\,y' + Q(t)\,y = R(t)$$

که در آن y تابعی از متغیر مستقل t و y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم y نسبت به t و $P(t)$ و $Q(t)$ و $R(t)$ توابعی از t هستند، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ می‌نامند.

حل معادله دیفرانسیل یعنی پیدا کردن تابع $y(t)$ که در معادله بالا صدق می‌کند.

$R(t)$ را معمولاً در این جزوه «ورودی» معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

تعمیم: یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n دارای شکل کلی:

$$y^{(n)}(t) + P_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}(t) + \cdots + P_1(t)\,y'(t) + P_0(t)\,y(t) = R(t)$$

است.

اگر توابع $P(t)$ و $Q(t)$ در معادله مرتبه ۲ (و توابع $P_{n-1}(t)$ و $P_{n-2}(t)$ و ... $P_0(t)$ در شکل مرتبه n) ضرایب ثابتی باشند، معادله را معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می‌گویند. در این جزوه تمرکز بر حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است. (مرتبه ۲: $\quad y'' + p\,y' + q\,y = R(t)$)

شرایط اولیه معادله: برای بدست آوردن جواب یک معادله دیفرانسیل نیاز به شرایط اولیه داریم. شرایط اولیه، اطلاعات کمکی و اضافی در مورد جواب معادله دیفرانسیل $y(t)$ است که از شرایط مسأله و علاوه بر معادله دیفرانسیل باید در اختیار باشد. برای یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲، این شرایط اولیه باید $y(t_0)$ و $y'(t_0)$ باشد که t_0 یک نقطه از بازه مورد بررسی متغیر

مستقل t است. یعنی باید بدانیم در یک نقطه مثل t_0 مقدار جواب و مقدار مشتق جواب مقید است. با این اطلاعات ثابت می‌شود که می‌توان جواب یگانه‌ای برای معادله دیفرانسیل خطی بدست آورد. (مراجعه به قضیه وجود و یگانگی جواب)

تعمیم: برای معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ خطی

فقط y در نقطه‌ای مانند t_0 : $y(t_0)$

مرتبه ۲ : y و y' در نقطه‌ای مانند t_0 : $y(t_0), y'(t_0)$

مرتبه ۳ : y و y' و y'' " " " " : $y(t_0), y'(t_0), y''(t_0)$

⋮

مرتبه n : y و y' و ... $y^{(n-1)}$ " " " : $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل: بدون شرایط اولیه، حل معادله نهایتاً به یک مجموعه شامل بی‌نهایت تابع می‌رسد که همه در معادله صدق می‌کنند. به این مجموعه، جواب عمومی معادله می‌گویند. جواب معادله دیفرانسیل را با استفاده از شرایط اولیه از میان این جواب عمومی انتخاب می‌کنیم. لیکن جواب عمومی یک معادله، جواب معادله نیست بلکه جواب معادله در بین این جوابهاست. برای بدست آوردن جواب یک معادله، ابتدا جواب عمومی معادله (یعنی همه جوابها) را بدست می‌آوریم و بعد با استفاده از شرایط اولیه، جواب معادله را از میان آنها پیدا می‌کنیم.

حل معادلات دیفرانسیل خطی در حالت کلی ساده نیست ولی معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت در موارد مهم و خاص دارای روشهای حل کلی می‌باشند که بدلیل اهمیتشان در اینجا بررسی می‌شود:

معادلهٔ همگن و معادله غیرهمگن: اگر ورودی $R(t)$ یک معادله دیفرانسیل صفر باشد، معادله همگن و در غیر اینصورت معادله غیرهمگن است.

حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبه ۲

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = R(t) \\ y(t_0) \\ y'(t_0) \end{cases}$$

$y(t_0)$ و $y'(t_0)$: شرایط اولیه لازم داده شده

① جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی (با ضرایب ثابت) برابر است با جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن آن معادله (یعنی $R(t)$ آن را صفر قرار دهیم) بعلاوهٔ جواب مخصوص (یعنی یک جواب دلخواه) از معادله دیفرانسیل غیرهمگن. جواب عمومی معادله همگن را با $y_g(t)$ و جواب خصوصی معادله غیرهمگن را با $y_p(t)$ نشان می‌دهند. پس:

$$y(t) = y_g(t) + y_p(t) \quad \text{جواب عمومی معادله}$$

و $y_g(t)$ جواب عمومی معادلهٔ همگن یعنی

$$y'' + py' + qy = 0$$

و $y_p(t)$ یک جواب از معادلهٔ

$$y'' + py' + qy = R(t)$$

است.

(۱-۱) جواب عمومی معادلهٔ همگن: هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت دارای یک معادلهٔ مشخصه یا معادلهٔ مفسر بصورت زیر است:

$$\text{معادله}: \quad y'' + py' + qy = 0$$

$$\text{معادله مشخصه}: \quad s^2 + ps + q = 0$$

(برای معادلات مرتبه بالاتر هم همین ترتیب :

معادله مرتبه ۳ : $y''' + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

معادله مشخصه درجه ۳ : $s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 = 0$ (

برای معادله مرتبه ۲ ، جواب عمومی با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید .

حالت ۱ : اگر $\Delta > 0$ و معادله مشخصه دو ریشه حقیقی متمایز s_1 و s_2 داشته باشد جواب عمومی معادله همگن :

$$y_g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

خواهد بود .

حالت ۲ : اگر $\Delta = 0$ و معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی برابر باشد یعنی : $s_1 = s_2$

$$y_g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t}$$

حالت ۳ : اگر $\Delta < 0$ باشد ، دو ریشه معادله مشخصه مختلط ولی حتما مزدوج هم خواهند بود . یعنی

$$s_1 = \alpha + j\omega_0, \quad s_2 = \alpha - j\omega_0 \quad \text{یا} \quad s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_0$$

در این حالت ،

$$y_g(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\omega_0 t + c_2 e^{\alpha t}\sin\omega_0 t = e^{\alpha t}(c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t)$$

ضرایب c_1 و c_2 در $y_g(t)$ دو ثابت دلخواه هستند . بنابراین $y_g(t)$ بدست آمده هم یک تابع نیست بلکه بی‌نهایت تابع است که همان جواب عمومی معادله همگن است .

مثال‌ها : جواب عمومی معادلات همگن زیر را بدست آورید:

① $y'' + 3y' + 2y = 0$

معادله مشخصه $\quad s^2 + 3s + 2 = 0 \Longrightarrow (s+2)(s+1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

$$\longrightarrow \quad y_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

② $y'' + 2y' + y = 0$

$$s^2 + 2s + 1 = 0 \Longrightarrow (s+1)^2 = 0 \Longrightarrow s_1 = s_2 = -1$$

$$y_g(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

③ $y'' - 3y' + 4y = 0$

$$s^2 - 3s + 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = 1.5 + 1.32j \\ s_2 = 1.5 - 1.32j \end{cases}$$

$$y_g(t) = e^{1.5t}\left(c_1 \cos(1.32t) + c_2 \sin(1.32t) \right)$$

④ $y'' + 6y' - 5y = 0$

$$s^2 + 6s - 5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = -6.74 \\ s_2 = 0.74 \end{cases}$$

$$y_g(t) = c_1 e^{-6.74t} + c_2 e^{0.74t}$$

⑤ $y'' + 5y' = 0$

$$s^2 + 5s = 0 \Longrightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_g(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-5t} = c_1 + c_2 e^{-5t}$$

توجه: وقتی $c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}$ جواب عمومی معادله همگن است یعنی به ازای هر دو مقدار ثابت c_1 و c_2، تابع بدست آمده در معادله همگن صدق می‌کند و در نتیجه دیگر نمی‌تواند در معادله غیرهمگن صدق کند. یعنی مثلاً برای معادله مثال آخر،

$$y_g(t)=c_1+c_2e^{-5t}$$

جواب عمومی معادله $y''+5y'=0$ است پس

$y_1(t)=5$ که با $c_1=5$ و $c_2=0$ از $y_g(t)$ بدست می‌آید دیگر نمی‌تواند جواب معادله غیرهمگن $y''+5y'=25t$ باشد.

همین ترتیب است مثلاً تابع $y_2(t)=-3e^{-5t}$ که از جواب عمومی معادله همگن به ازای $c_1=0$ و $c_2=-3$ بدست آمده است.

از این نکته برای تعیین حالتهای استثناء جواب خصوصی استفاده می‌کنیم.

۲-۱) جواب خصوصی (یک جواب) برای معادله غیرهمگن، $y_p(t)$: یعنی یک تابع $y_p(t)$ پیدا کنیم که در معادله

$$y'' + py' + qy = R(t)$$

صدق کند.

بدست آوردن جواب خصوصی برای معادله غیرهمگن روش کلی ندارد ولی اگر تابع ورودی معادله یعنی $R(t)$ از توابع زیر باشند، با استفاده از روشی موسوم به روش «ضرایب نامعین» می‌توان یک جواب برای معادله بالا پیدا کرد. این $R(t)$ ها عبارتند از :

۱) $R(t) = ke^{mt}$ (از جمله $R(t)=k$ با $m=0$)

۲) $R(t) = k_1\cos\omega_0 t + k_2\sin\omega_0 t$ (از جمله $R(t)=k_1\cos\omega_0 t$ با $k_2=0$ ، $R(t)=k_2\sin\omega_0 t$ با $k_1=0$)

۳) $R(t) = k_0 + k_1 t + \cdots + k_m t^m$ (یعنی یک چندجمله‌ای مرتبه m حتی اگر بعضی جملات مراتب پایین‌تر نباشند)

۴) حاصلضربهائی از توابعی بصورت (۱) و (۲) و (۳) مثل

$$R(t) = e^{mt}\left(k_1\cos\omega_0 t + k_2\sin\omega_0 t\right)$$

$$R(t) = \left(k_0 + k_1 t\right)e^{mt}$$

۵) $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$ که $R_1(t)$ و $R_2(t)$ از توابع (۱) و (۲) و (۳) و (۴) باشند.

استدلال روش ضرایب نامعین این است که وقتی $R(t)$ یکی از ۴ مورد (۱) و (۲) و (۳) و (۴) بالا باشند، یک تابع به همان شکل ولی با ضرایب دیگر می‌تواند جواب معادله باشد. پس یک تابع با همان شکل ولی با ضرایب نامعین درنظر می‌گیریم

و در معادله قرار می‌دهیم و ضرایب نامعین آنرا، تعیین می‌کنیم.

<u>برای حالت (۱)</u>: اگر $R(t)=ke^{mt}$ باشد جواب را بصورت $y_p(t)=Ae^{mt}$ حدس می‌زنیم و در معادله قرار می‌دهیم تا A بدست بیاید:

$$R(t)=ke^{mt} \Longrightarrow y_p(t)=Ae^{mt} \Longrightarrow \begin{matrix} y_p'=\cdots \\ y_p''=\cdots \end{matrix} \text{ در معادله } \Longrightarrow A=?$$

مثال:

$$y''+3y'+2y=5e^{-3t}$$

$$y_g(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}$$

$$R(t)=5e^{-3t} \Longrightarrow y_p(t)=Ae^{-3t} \Longrightarrow y_p'(t)=-3Ae^{-3t}$$

$$\text{و } y_p''(t)=9Ae^{-3t}$$

جواب عمومی معادله:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t)&=y_g(t)+y_p(t)\\ &=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}+\tfrac{5}{2}e^{-3t}\end{aligned}}$$

در معادله:

$$(9Ae^{-3t})+(3)(-3Ae^{-3t})+(2)(Ae^{-3t})$$

$$=2Ae^{-3t}=5e^{-3t} \Longrightarrow A=5/2$$

$$\Longrightarrow y_p(t)=\tfrac{5}{2}e^{-3t}$$

<u>حالت استثناء</u>: اگر $y_p(t)$ انتخابی ما، جواب معادله همگن باشد، دیگر نمی‌تواند در معادله غیرهمگن صدق کند، این حالت را با مقایسه $y_p(t)$ انتخابی با جواب عمومی معادله همگن تشخیص می‌دهیم. در این حالت $y_p(t)$ را به جای Ae^{mt}، Ate^{mt} انتخاب کنیم. مثال:

$$y''+3y'+2y=5e^{-2t}$$

$$y_g(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}$$

$$R(t)=5e^{-2t} \Longrightarrow y_p(t)=Ae^{-2t}$$

ولی Ae^{-2t} یکی از جوابهای معادله همگن است ($c_1=A$, $c_2=0$) در حالت استثناء اتفاق افتاده و باید $y_p(t)$ را بجای Ae^{-2t} ، تابع Ate^{-2t} انتخاب کنیم.

$$y_p(t)=Ate^{-2t} \longrightarrow y_p'(t)=A\left(e^{-2t}+t(-2)e^{-2t}\right)$$

$$=A(1-2t)e^{-2t}$$

$$\longrightarrow y_p''(t)=A\left[(-2)e^{-2t}+(1-2t)(-2)e^{-2t}\right]$$

$$=A\left(e^{-2t}\right)(4)(t-1)$$

در معادله :

$$4A(t-1)e^{-2t}+3\left(A(1-2t)e^{-2t}\right)+2Ate^{-2t}$$

$$=5e^{-2t}$$

$$\Longrightarrow \quad 4A(t-1)+3A(1-2t)+2At=5$$

جملات شامل t ساده می‌شوند و داریم

$$\Longrightarrow A=-5$$

$$\Longrightarrow y_p(t)=-5te^{-2t}$$

جواب عمومی معادله $\Longrightarrow \quad y(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}-5te^{-2t}$

<u>برای حالت (۲)</u> اگر $R(t)=k_1\cos\omega_0 t+k_2\sin\omega_0 t$ باشد ، $y_p(t)$ را بصورت

$$y_p(t)=A_1\cos\omega_0 t+A_2\sin\omega_0 t$$

می‌گیریم و با قرار دادن y_p و y_p' و y_p'' در معادله ، ضرایب A_1, A_2 را بدست می‌آوریم :

مثال :

$$y'' + 2y' + y = 4\cos 2t - 3\sin 2t \quad , \quad y_g(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$$R(t) = 4\cos 2t - 3\sin 2t \implies y_p(t) = A_1\cos 2t + A_2\sin 2t$$

$$y_p'(t) = -2A_1\sin 2t + 2A_2\cos 2t \quad , \quad y_p''(t) = -4A_1\cos 2t - 4A_2\sin 2t$$

در معادله :

$$(-4A_1\cos 2t - 4A_2\sin 2t) + 2(-2A_1\sin 2t + 2A_2\cos 2t)$$
$$+ (A_1\cos 2t + A_2\sin 2t) = 4\cos 2t - 3\sin 2t$$

$$\implies (-3A_1 + 4A_2)\cos 2t + (-4A_1 - 3A_2)\sin 2t = 4\cos 2t - 3\sin 2t$$

$$\implies \begin{cases} -3A_1 + 4A_2 = 4 \\ -4A_1 - 3A_2 = -3 \end{cases} \qquad A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{25} = 0$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}} = 1 \implies y_p(t) = (0)\cos 2t + (1)\sin 2t$$
$$= \sin 2t$$

جواب عمومی معادله
$$\implies y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \sin 2t$$

حالت استثناء

$$y'' + 4y = 4\cos 2t - 3\sin 2t$$

جواب عمومی معادله همگن : $s^2 + 4 = 0 \implies s_{1,2} = \pm 2j$

$$\implies y_g(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

جواب خصوصی معادله غیرهمگن $R(t) = 4\cos 2t - 3\sin 2t \implies y_p(t) = A_1\cos 2t + A_2\sin 2t$

دیده می‌شود که با $c_1 = A_1$ ، $c_2 = A_2$ ، y_p انتخاب شده یک جواب معادله همگن است

لیکن نمی‌تواند در معادله غیرهمگن صدق کند. این حالت استثناء برای $R(t)$ های سینوسی است.
در این حالت باید $y_p(t) = t(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t)$ در نظر گرفت.

$$y_p(t) = t(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t) \longrightarrow y_p',\ y_p''$$

در معادله قرار می‌دهیم و A_1 ، A_2 را بدست می‌آوریم و سپس

جواب عمومی معادله $y(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + t(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t)$

بعنوان تمرین ضرایب نامعین A_1 ، A_2 و جواب عمومی معادله را بدست آورید.

توجه: حتی اگر $R(t) = k_1\cos\omega_0 t$ باشد هم باید $y_p(t)$ را
بصورت $y_p(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$ و اگر حالت
استثناء اتفاق افتاده است

$y_p(t) = t(A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t)$ در نظر گرفت.
همینطور است اگر $R(t) = k_2\sin\omega_0 t$ باشد.

برای حالت (۳) اگر $R(t)$ یک چندجمله‌ای مرتبه m باشد یعنی

$$R(t) = k_0 + k_1 t + \cdots + k_m t^m$$

$y_p(t)$ را یک چندجمله‌ای مرتبه m در نظر گرفته و در معادله قرار می‌دهیم.

$$y_p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$$

و از معادله ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_m$ را بدست می‌آوریم.

مثال:

$$y'' + 3y' + 2y = 4 + 2t^2 \qquad (k_0 = 4,\ k_1 = 0,\ k_2 = 2)$$

$$y_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

$$R(t) = 4 + 2t^2 \Longrightarrow y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

(به لزوم وجود جمله $a_1 t$ توجه کنید)

$$y_p'(t) = a_1 + 2a_2 t \longrightarrow y_p'' = 2a_2$$

در معادله

$$(2a_2) + 3(a_1 + 2a_2 t) + 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 4 + 2t^2$$

$$\Longrightarrow (4a_2)t^2 + (6a_2 + 2a_1)t + (2a_2 + 3a_1 + 2a_0) = 4 + 2t^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4a_2 = 2 \longrightarrow a_2 = 1 \\ 6a_2 + 2a_1 = 0 \longrightarrow a_1 = -3 \\ 2a_2 + 3a_1 + 2a_0 = 4 \longrightarrow a_0 = 11/2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_p(t) = 5.5 + (-3)t + t^2$$

<u>حالت استثناء</u> وقتی یکی از جملات $y_p(t)$ پیشنهادی شامل a_0 و یا $a_1 t$ و ... و یا $a_m t^m$ جزء جوابهای معادله همگن باشد، دیگر در معادله غیر همگن نمی‌تواند صدق کند و حالت استثناء اتفاق می‌افتد. برای یک معادله مرتبه ۲ این وضعیت فقط در حالتی اتفاق می‌افتد که معادله مشخصه، ریشه $s=0$ داشته باشد و در نتیجه $c_1 e^{0t} = c_1$ جواب معادله همگن است. در این حالت باید $y_p(t)$ پیشنهادی را در t ضرب کرد.

مثال : $y'' + 5y' = 4 + 2t^2$

$$y_g(t) = c_1 + c_2 e^{-5t}$$

$$R(t) = 4 + 2t^2 \Longrightarrow y_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

ولی جملهٔ a_0 در جواب پیشنهادی به ازای $c_1 = a_0$ و $c_2 = 0$ جواب معادله همگن است. پس نمی‌تواند جواب معادله غیرهمگن باشد. پس

$$y_p(t) = t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$$
$$= a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3$$

$$y_p'(t) = a_0 + 2a_1 t + 3a_2 t^2$$

$$y_p''(t) = 2a_1 + 6a_2 t$$

در معادله دیفرانسیل : $(2a_1 + 6a_2 t) + 5(a_0 + 2a_1 t + 3a_2 t^2) = 4 + 2t^2$

$$\Longrightarrow (2a_1 + 5a_0) + (6a_2 + 10a_1)t + 15a_2 t^2 = 4 + 2t^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 15a_2 = 2 \longrightarrow a_2 = 2/15 = 0.133 \\ 6a_2 + 10a_1 = 0 \longrightarrow a_1 = -0.08 \\ 2a_1 + 5a_0 = 4 \longrightarrow a_0 = 0.832 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y_p(t) = 0.832\,t - 0.08\,t^2 + 0.133\,t^3$$

جواب عمومی معادله $\quad y(t) = c_1 + c_2 e^{-5t} + (0.832)t + (-0.08)t^2 + (0.133)t^3$