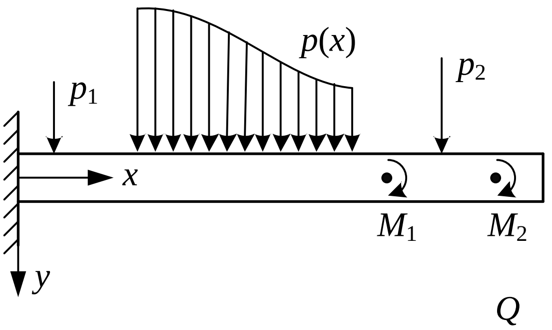
فصل دهم: فرمولاسیون اجزاء محدود برای تیرها

مقدمه



در این فصل فرمولاسیون اجزاء محدود را برای تیرها بدست می‌آوریم.

به این منظور از تئوری مقدماتی تیرها استفاده می‌کنیم

که مبتنی بر مفروضات زیر است:

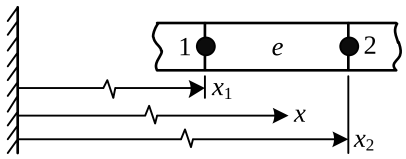
- خیز تیر در مقایسه با ابعاد آن کوچک است.
- بارها عمود بر تیر وارد شده و کرنش‌های طولی ناچیزند.

طبق این تئوری معادله حاکم بر خیز تیر عبارت است از:

(۱-۱۰)

××

با توجه به اینکه معادله دیفرانسیل حاکمه از مرتبه چهارم است عبارت زیر انتگرال در فرم ضعیف از مرتبه دوم خواهد بود.



در پیوستگی C^1 علاوه بر خود تابع، مشتق آن نیز در گره‌ها پیوسته است.

یک المان تیر در شکل مقابل آمده است.

××

تابع شکل برای مسأله تیر

هر المان دو گره دارد اما برای هر گره دو مجهول خیز و شیب (مشتق خیز) وجود دارد.

بنابراین در هر المان چهار مجهول خواهیم داشت و تابع خیز باید بصورت زیر باشد:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

تابع شیب نیز متعاقباً بصورت زیر خواهد بود:

(۳-۱۰)

××

برای هر المان e بردار مقادیر گرهی عبارت است از:

(۴-۱۰)

مطابق با معادلات (۱۰-۲) و (۱۰-۳) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^{\,2} + c_4 x_1^{\,3} \\
\theta_1 &= c_2 + 2c_3 x_1 + 3c_4 x_1^{\,2} \\
w_2 &= c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^{\,2} + c_4 x_2^{\,3} \\
\theta_2 &= c_2 + 2c_3 x_2 + 3c_4 x_2^{\,2}
\end{aligned}
$$

یا به فرم ماتریسی:

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^{\,2} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & x_2^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^{\,2} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & x_2^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^{\,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}
$$

××

با کمک معادله اخیر و معادله (۱۰-۲) خواهیم داشت:

$$
w = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^{\,2} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & x_2^{\,3} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^{\,2} \end{bmatrix}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{N}}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{w}}^e} \qquad (۵-۱۰)
$$

یا به عبارت دیگر:

(۶-۱۰)

توجه کنید که هر گره دو تابع شکل یکی برای خیز و یکی برای شیب دارد.

××

همچنین داریم:

(۷-۱۰)

با توجه به دو معادله اخیر خواص زیر برای تابع شکل استنتاج می‌شود:

$$\text{at}\quad x=x_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N_{w1}^e=1,\ \ N_{\theta1}^e=N_{w2}^e=N_{\theta2}^e=0 \\ \dfrac{dN_{\theta1}^e}{dx}=1,\ \ \dfrac{dN_{w1}^e}{dx}=\dfrac{dN_{w2}^e}{dx}=\dfrac{dN_{\theta2}^e}{dx}=0 \end{cases} \qquad \text{(۱۰-۸- الف)}$$

××

و :

$$\text{at}\quad x=x_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N_{w2}^e=1,\ \ N_{w1}^e=N_{\theta1}^e=N_{\theta2}^e=0 \\ \dfrac{dN_{\theta2}^e}{dx}=1,\ \ \dfrac{dN_{w1}^e}{dx}=\dfrac{dN_{\theta1}^e}{dx}=\dfrac{dN_{w2}^e}{dx}=0 \end{cases} \qquad \text{(۱۰-۸- ب)}$$

برای بدست آوردن فرمولاسیون اجزاء محدود مسأله تیر، معادله (۱۰-۱) را در تابع وزن ضرب کرده و روی ناحیه المان انتگرال می‌گیریم:

(۱۰-۹)

××

فرمولاسیون اجزاء محدود مسأله تیر

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از ترم اول معادله بالا خواهیم داشت:

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}p\,dx \qquad \text{(۱۰-۱۰)}$$

اما از دروس پایه مکانیک می‌دانیم:

(۱۰-۱۱)

××

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}=\left[\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\left(-V\right)\right]_{x_1}^{x_2}=-\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\left(x_2\right)V\left(x_2\right)+$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\left(x_1\right)V\left(x_1\right)=-V\left(x_2\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+V\left(x_1\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V\left(x_1\right)\\0\\-V\left(x_2\right)\\0\end{bmatrix} \qquad \text{(۱۰-۱۲)}$$

در گام بعد معادله (۱۰-۱۲) را در معادله (۱۰-۱۰) جاگذاری می‌کنیم.

××

به این ترتیب:

(۱۰-۱۳)

با انتگرال‌گیری جزء به جزء مجدد از معادله بالا بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} V(x_1) \\ 0 \\ -V(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} - \left[\frac{d\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} p dx \quad (۱۰\text{-}۱۴)$$

××

با توجه به معادله (۱۰-۱۱) ترم دوم معادله اخیر به فرم زیر درمی‌آید:

$$-\left[\frac{d\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x_1}^{x_2} = \left[-\frac{d\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx} M \right]_{x_1}^{x_2} = -M(x_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + M(x_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(x_1) \\ 0 \\ -M(x_2) \end{bmatrix} \quad (۱۰\text{-}۱۵)$$

بنابراین معادله (۱۰-۱۴) بصورت زیر حاصل می‌شود:

(۱۰-۱۶)

××

می‌دانیم $w = \tilde{\mathbf{N}}^e \tilde{\mathbf{w}}^e$ است در نتیجه بدست می‌آید:

$$\left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx^2} EI \frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}}{dx^2} dx \right\} \tilde{\mathbf{w}}^e = \begin{bmatrix} -V(x_1) \\ -M(x_1) \\ V(x_2) \\ M(x_2) \end{bmatrix} + \int_{x_1}^{x_2} \tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} p dx \quad (۱۰\text{-}۱۷)$$

یا به صورت خلاصه:

(۱۸-۱۰)

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{dx^2} EI \frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}}{dx^2} dx \quad , \quad \tilde{\mathbf{f}}^e = \tilde{\mathbf{f}}_{VM}^e + \tilde{\mathbf{f}}_p^e = \begin{bmatrix} -V(x_1) \\ -M(x_1) \\ V(x_2) \\ M(x_2) \end{bmatrix} + \int_{x_1}^{x_2} \tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} p dx \qquad (۱۹-۱۰)$$

××

تابع شکل برای مسأله تیر

در مسأله تیر اگر به جای مختصات کلی x از مختصات موضعی ξ استفاده کنیم ریاضیات مربوطه آسانتر می‌شود.

مختصات موضعی را برای مسأله تیر بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۲۰-۱۰)

در این رابطه L طول المان است. در مختصات موضعی توابع شکل عبارتند از:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_{w1} \\ N_{\theta 1} \\ N_{w2} \\ N_{\theta 2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right) \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ L\left(-\xi^2+\xi^3\right) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۲۱-۱۰)$$

××

در صورت استفاده از مختصات موضعی خواهیم داشت:

(۲۲-۱۰)

خواص توابع شکل {معادله (۱۰-۸)} در این مختصات عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\text{at} \quad \xi = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N_{w1}^e = 1, \;\; N_{\theta 1}^e = N_{w2}^e = N_{\theta 2}^e = 0 \\ \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{\theta 1}^e}{d\xi} = 1, \;\; \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{w1}^e}{d\xi} = \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{w2}^e}{d\xi} = \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{\theta 2}^e}{d\xi} = 0 \end{cases} \\ &\text{at} \quad \xi = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N_{w2}^e = 1, \;\; N_{w1}^e = N_{\theta 1}^e = N_{\theta 2}^e = 0 \\ \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{\theta 2}^e}{d\xi} = 1, \;\; \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{w1}^e}{d\xi} = \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{\theta 1}^e}{d\xi} = \dfrac{1}{L}\dfrac{dN_{w2}^e}{d\xi} = 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad (۲۳-۱۰)$$

××

اگر معادله اجزاء محدود بدست آمده برای تیر یعنی معادله (۱۰-۱۸) را در مختصات موضعی بنویسیم بصورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\mathbf{K}}^e\tilde{\mathbf{w}}^e=\tilde{\mathbf{f}}^e \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{K}}^e=\frac{1}{L^3}\int_0^1\frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}}{d\xi^2}EI\frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}}{d\xi^2}d\xi \;\;,\;\; \tilde{\mathbf{f}}^e=\tilde{\mathbf{f}}^e_{VM}+\tilde{\mathbf{f}}^e_p=\begin{bmatrix}-V(x_1)\\-M(x_1)\\V(x_2)\\M(x_2)\end{bmatrix}+\int_0^1\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}pLd\xi \tag{۲۴-۱۰}$$

××

فرمولاسیون اجزاء محدود مسأله تیر

ابتدا مشتق دوم تابع شکل را بدست می‌آوریم:

(۲۵-۱۰)

با جاگذاری در معادله (۱۰-۲۴) فرض ثابت بودن EI خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{K}}^e=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\-12 & -6L & 12 & -6L\\6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix} \tag{۲۶-۱۰}$$

××

به منظور آسانی محاسبات، برای محاسبه $\tilde{\mathbf{f}}^e_p$ از مقدار متوسط بار p روی المان استفاده می‌کنیم:

(۲۷-۱۰)

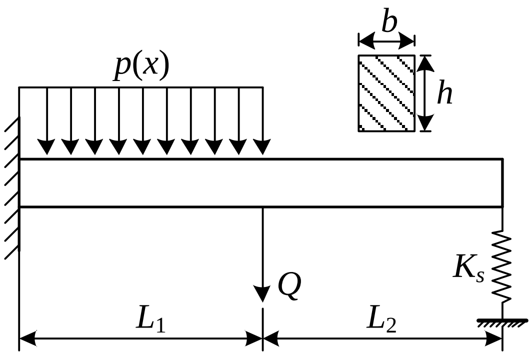
در صورتیکه در محل اعمال نیروها و گشتاورهای متمرکز یک گره قرار دهیم می‌توانیم با استفاده از $\tilde{\mathbf{f}}^e_{VM}$ آن‌ها را هم وارد محاسبات کنیم.

بعد از تعیین $\tilde{\mathbf{K}}^e$ و $\tilde{\mathbf{f}}^e$، اسمبل و حل معادلات مثل قبل انجام می‌شود.

××

مثال (۱۰-۱)

در تیر شکل زیر L_1 و L_2 یک متر هستند. بار گسترده p برابر با ۴۸۰۰N/m و نیروی متمرکز Q برابر ۳۰۰۰N است. طرف راست تیر روی فنری الاستیک با سختی ۲۰۰kN/m قرار دارد. سطح مقطع تیر مستطیلی با ابعاد b=3cm و h=4.31cm است. تیر فولادی بوده و مدول الاستیک آن $E=2.0\times10^{11}\text{N/m}^2$ است. شیب و خیز دو انتهای تیر را بیابید. گشتاور خمشی، نیروی برشی و تنش نرمال و برشی ماکزیمم را در وسط بار گسترده تعیین کنید.

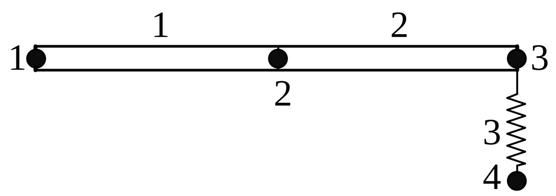


××

حل: ممان اینرسی تیر برابر است با:

$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}(0.03)(0.0431)^3=2.00\times10^{-7}\text{ m}^4$$

بنابراین سفتی خمشی تیر برابر است با:



مطابق شکل برای حل مسأله از سه المان استفاده می‌کنیم.

××

$$\vec{\mathbf{K}}^{(1)}=\frac{40\times10^3}{(1)^3}\begin{bmatrix}12 & 6(1) & -12 & 6(1)\\ 6(1) & 4(1)^2 & -6(1) & 2(1)^2\\ -12 & -6(1) & 12 & -6(1)\\ 6(1) & 2(1)^2 & -6(1) & 4(1)^2\end{bmatrix}=10^3\times\begin{array}{c}\begin{bmatrix}480 & 240 & -480 & 240\\ 240 & 160 & -240 & 80\\ -480 & -240 & 480 & -240\\ 240 & 80 & -240 & 160\end{bmatrix}\begin{matrix}w_1\\ \theta_1\\ w_2\\ \theta_2\end{matrix}\\ \begin{matrix}w_1 & \quad\theta_1 & \quad w_2 & \quad\theta_2\end{matrix}\end{array}$$

××

و از معادله (۱۰-۳۰) داریم:

$$\tilde{\mathbf{f}}_p^{(1)} = \begin{bmatrix} (4800)(1)/2 \\ (4800)(1)^2/12 \\ (4800)(1)/2 \\ -(4800)(1)^2/12 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0.4 \\ 2.4 \\ -0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

اگر تمام بار نقطه‌ای را به المان اول وارد کنیم خواهیم داشت:

ماتریس سختی المان دوم با المان اول برابر است.

چون روی این المان بار گسترده نداریم $\tilde{\mathbf{f}}_p^e$ برای المان دوم صفر است.

××

همه بار نقطه‌ای به المان ۱ داده شد پس $\tilde{\mathbf{f}}_{VM}^e$ هم در المان ۲ صفر است.

ماتریس سختی برای المان سوم هم برابر است با:

بعد از تعیین مشخصات مربوط به المان‌ها مشخصات کل سیستم با استفاده از اسمبل کردن بدست می‌آید.

بردار مجهولات گرهی در این مسأله عبارت است از:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 & w_4 \end{bmatrix}^T$$

××

بنابراین بردار نیرو و ماتریس سختی سیستم برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{K}} = 10^3 \times \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccccc|c} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 & w_4 & \\ \end{array}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = 10^3 \times \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 & w_4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 480 & 240 & -480 & 240 & 0 & 0 & 0 \\ 240 & 160 & -240 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ -480 & -240 & 480+480 & 0 & -480 & 240 & 0 \\ 240 & 80 & 0 & 160+160 & -240 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -480 & -240 & 480+200 & -240 & -200 \\ 0 & 0 & 240 & 80 & -240 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 200 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \end{array}$$

××

در نتیجه معادله اجزاء محدود سیستم یعنی $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{f}}$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 480 & 240 & -480 & 240 & 0 & 0 & 0 \\ 240 & 160 & -240 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ -480 & -240 & 960 & 0 & -480 & 240 & 0 \\ 240 & 80 & 0 & 320 & -240 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -480 & -240 & 680 & -240 & -200 \\ 0 & 0 & 240 & 80 & -240 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0.4 \\ 5.4 \\ -0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای حل این معادله لازم است شرایط مرزی را اعمال نمود.

××

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 960 & 0 & -480 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 320 & -240 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -480 & -240 & 680 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 80 & -240 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.4 \\ -0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه خواهیم داشت:

××

گشتاور خمشی و نیروی برشی در هر نقطه تیر عبارتند از:

$$M = EI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{EI}{L^2}\frac{d^2w}{d\xi^2} = \frac{EI}{L^2}\frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathbf{e}}}{d\xi^2}\tilde{\mathbf{w}}^e$$

$$V = -\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = -\frac{1}{L}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{EI}{L^2}\frac{d^2w}{d\xi^2}\right) = -\frac{1}{L}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{EI}{L^2}\frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^{\mathbf{e}}}{d\xi^2}\right)\tilde{\mathbf{w}}^e$$

نقطه وسط بار گسترده مربوط به المان اول بوده و در آن ξ =0.5 است. بنابراین:

××

تنش نرمال ماکزیمم هم در این نقطه برابر است با:

به همین ترتیب برای نیروی برشی و تنش برشی:

$$V = -\frac{1}{L}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{EI}{L^2}\frac{d^2\tilde{\mathbf{N}}^1}{d\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=0.5}\tilde{\mathbf{w}}^1 = -\frac{EI}{L^3}\left(12w_1 + 6L\theta_1 - 12w_2 + 6L\theta_2\right) =$$

$$= -40\times10^3\big(12(0) + 6(1)(0) - 12(0.01166) + 6(1)(0.00648)\big) = 4040\,\mathrm{N}$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{(4040)(0.0431)^2}{8\left(2\times10^{-7}\right)} = 4.7\times10^6\ \mathrm{N/m^2}$$