

راه حل کوثر 1.

۱) بنا به فرض مسئله داریم $0 \leq a \leq b$ به ازای هر $b \in \mathbb{R}^+$ حال به ریاضیات عمل می‌کنیم.
فرض کنید $a < 0$. در این صورت بنا به خواص اعداد حقیقی، عدد b مورد دلالت $a < b < 0$ اما این با فرض مسئله در مورد a متناقض است، پس $a = 0$.

۲) فرض کنید که P مجموعه همه زیرمجموعه‌های متناهی \mathbb{N} باشد.

تابع $f: P \rightarrow \mathbb{N}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که به ازای هر

$A = \{n_1, \dots, n_k\} \in P$ داریم $f(A) = p_{n_1} \times p_{n_2} \times \dots \times p_{n_k}$ جابده، p_{n_i} n_i مین عدد اول p_{n_i}

(مثلاً $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) f یک به یک است (جواب) پس P با زیرمجموعه‌ای از \mathbb{N}

هم‌توان است و بنابراین شمارا است. ضمناً P بوضوح نامتناهی است، پس P شمارای نامتناهی است.

تذکره. خیلی از دوستان، از این فرض استفاده کرده‌اند که مجموعه همه زیرمجموعه‌های

k -عضوی \mathbb{N} ، با $\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_k$ هم‌توان است. این درست است ولی

احتیاج به اثبات دارد.