

۹- هر تابع به فرم $f(x) = ka^x + b$ رفتار نمایی دارد. که در آن $a > 0$ و مخالف یک و k عدد مخالف صفر و b عددی حقیقی است با این توضیحات:

توابع (ث) و (ج) و (چ) رفتار نمایی ندارند. سایر توابع، رفتار نمایی دارند. تابع (الف) را می‌توان به صورت $y = -3 + (\frac{1}{7})^x$ نوشت که رفتار نمایی دارد.

۱۰- الف) یک جدول رسم می‌کنیم:

سال	۰	۱	۲	۳	۴
جمعیت شهر	۱۰۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۶۴۰۰۰	۵۱۲۰۰	۴۰۹۶۰

(ب) ضابطه‌ای به دست می‌آوریم که جمعیت شهر را در x سال بعد محاسبه کند:

$$f(1) = 100000(1 - 0.20) = 100000(0.8)$$

$$f(2) = 100000(0.8) \times (1 - 0.20) = 100000(0.8)^2$$

$$f(3) = 100000(0.8)^2 \times (1 - 0.20) = 100000(0.8)^3$$

به‌طور کلی:

$$f(x) = 100000(0.8)^x$$

حال در ۵۴ ماه بعد یعنی $\frac{54}{12} = 4.5$ سال مقدار تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(4.5) = 100000(0.8)^{4.5} = 100000(0.8)^{\frac{9}{2}} = 100000\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$= 100000 \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^9} = 100000 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$= 100000 \times \frac{256}{625} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{81920}{\sqrt{5}} \approx 36635$$

۱۱- الف) نادرست (a نمی‌تواند عدد یک باشد)

(ب) درست

(پ) نادرست (برد تابع نمایی $y = a^x$ بازه $(0, +\infty)$ است.)

(ت) درست

(ث) درست

(ج) درست

(چ) درست

(ح) نادرست (تابع نمایی اصلی محور x ها را قطع نمی‌کند برد آن $(0, +\infty)$ است.)



مجموعه تمرینات

۱- رفتار نمایی دارد و می توان نوشت $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

g تابع کسری است. تابع h رفتار نمایی دارد. تابع t تابع رادیکالی و تابع M تابع خطی است. تابع N تابع نمایی است و می توان نوشت: $N(x) = -2 + 3 \times 3^x$



الف) نمایی نمی باشد زیرا مرتباً منفی و مثبت شده است.

ب) نمایی است فرض کنیم ضابطه آن $f(x) = ka^x$ باشد چون $f(0) = 20$ پس $k = 20$ از طرفی داریم:

$$f(2) = 5 \Rightarrow 20 \cdot a^2 = 5 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

($a > 0$ می باشد)

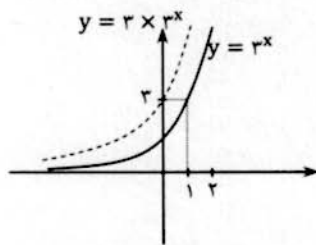
$$f(x) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

مختصات سایر نقاط نیز در ضابطه صدق می کند.



$$g(x) = 3^{x+2} - 2(3^{x+1}) = 9 \times 3^x - 2 \times 3 \times 3^x = 3 \times 3^x$$

همان طور که از ضابطه تابع g به دست آمده است:



$$g(x) = 3 \times 3^x = 3f(x)$$



$$f(x) = a^{x+c}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} \Rightarrow a^c = \frac{1}{3} \\ f(1) &= \frac{1}{9} \Rightarrow a^{1+c} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-1+c} = \frac{1}{3} \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

(ف) ← (ت)

(۱) ← (پ)

(۳) ← (ب)

(۲) ← الف



۵-

۶- 

$$2^{x+2} - 2(2^{x+1}) = 12 \Rightarrow 2^2 \times 2^x - 2(2 \times 2^x) = 12 \Rightarrow 12 \times 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

۷- الف 

$$f(0.5) = 3.0 + 4.0 \times 2^{-0.5} = 3.0 + 4.0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3.0 + 2.0\sqrt{2} = 5.8/2 \text{ درجه سانتی گراد}$$

ب

$$f(t) = 3.5 \Rightarrow 3.0 + 4.0 \times 2^{-t} = 3.5$$

$$2^{-t} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{-t} = 2^{-3} \Rightarrow t = 3 \text{ (پس از ۳ ساعت)}$$

۸- 

الف) $t(x) = x^{\frac{1}{2}}$

ب) $g(x) = x^2$

پ) $f(x) = 3x$

ت) $h(x) = 3^x$

۹- الف 

$$x^{2^2} = 64 \Rightarrow x = \sqrt[2]{64} = \sqrt[2]{2^6} = 2^3 = 8 \quad f(x) = (\sqrt[2]{x})^x = x^{\frac{1}{2}x}$$

ب

$$f(2) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1/68$$

پ

$$f(x) = 8 \Rightarrow (\sqrt[2]{x})^x = 8 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6$$

۱۰- 

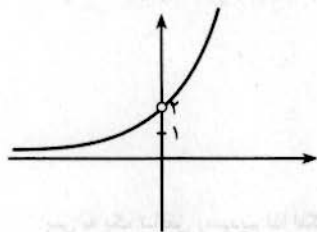
$$\begin{cases} 3^{x-y} = 3^2 \Rightarrow x-y = 2 \\ 4^{x+y} = 4^2 \Rightarrow x+y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 0$$

ویژه دانش آموزان علاقه مند

۱- 

$$f(x) = \frac{(3^x)^2 - 1}{3^x - 1} = \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{3^x - 1} = 3^x + 1 \quad (x \neq 0 \text{ فرض با فرض } 3^x - 1 \neq 0 \text{ یعنی با فرض } x \neq 0)$$

تابع در نقطه $x = 0$ تعریف نمی شود.



$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = (0, +\infty) - \{2\}$$

۲- برای یافتن محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات یکبار به x عدد صفر می‌دهیم تا y پیدا شود و بار دیگر به y عدد صفر می‌دهیم تا x پیدا شود:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(0, -3)$$

$$y = 0 \Rightarrow 3 \times 2^x - 6 = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$

۳- الف

سال t	۰	۱	۲	۳	۴
مبلغ سپرده $f(t)$	۱۰۰۰۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰۰۰	۱۴۴۰۰۰۰۰	۱۷۲۸۰۰۰۰	۲۰۷۳۶۰۰۰

ب

$$f(1) = 1000000 + 1000000 \times \frac{20}{100} = 10^6 (1/2)$$

$$f(2) = 10^6 (1/2) + 10^6 (1/2) \times \frac{20}{100} = 10^6 (1/2) (1/2) = 10^6 (1/2)^2$$

$$f(t) = 10^6 (1/2)^t$$

۴- اعداد $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند زیرا حاصل ضرب آن‌ها برابر یک است فرض کنیم $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = A$ داریم $A + \frac{1}{A} = \frac{10}{3}$ و از آن جا:

$$A^2 - \frac{10}{3}A + 1 = 0 \Rightarrow 3A^2 - 10A + 3 = 0 \Rightarrow A = \frac{10 \pm 8}{6} \begin{cases} A = 3 \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 3 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}x} = 3 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 9 \\ (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = \frac{1}{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

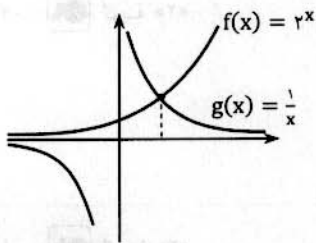
مساله دو جواب دارد.

۵- چون $3^2 + 4^2 = 5^2$ پس $x = 2$ یک جواب معادله است؛ ثابت می‌کنیم معادله دارای جواب بیش از ۲ نمی‌باشد. اگر $x > 2$ بخواند جواب معادله باشد داریم:

$$x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x}{1} < \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$$\Rightarrow 1 < 1 \text{ (تناقض)}$$

پس به یک تناقض رسیدیم لذا امکان وجود جواب بزرگ‌تر از ۲ وجود ندارد.



۶- معادله را به صورت $2^x = \frac{1}{x}$ می‌نویسیم و دو تابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد محل تلاقی دو نمودار f و g ، تعداد جواب‌های معادله است. همان‌طور که در شکل مشخص شده است یک محل تلاقی وجود دارد لذا یک جواب مثبت دارد.

■ دوره سریع مطالب

۱- درست	۲- نادرست
۳- درست	۴- درست
۵- نادرست	۶- درست
۷- ۳	۸- $A(0, -3)$ و $B(-2, 0)$
۹- a^k	۱۰- ۴

■ آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینه «۳»، ضابطه تابع را می‌توان به صورت $y = (\sqrt{2})^x + 1$ نوشت. گزینه (۱) تابع چند جمله‌ای و گزینه (۲) تابع خطی و گزینه (۴) تابع جبری غیرنمایی است.

۲- گزینه «۴»

$$g(x) = \frac{a^{x+r} - ra^{x+1}}{a^x} = a^r - ra$$

۳- گزینه «۴»

$$y = \left(\frac{1}{r}\right)^{-x} = r^x$$

۴- گزینه «۱»

$$2^{-2x+3} = 2^2 \times 2^{4x} \Rightarrow 2^{-2x+3} = 2^{2+4x} \Rightarrow -2x + 3 = 2 + 4x \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$3^{x+1} - 3^x = 6 \Rightarrow 3 \times 3^x - 3^x = 6 \Rightarrow 2 \times 3^x = 6 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$

۵- گزینه «۴»، تابع نمایی با ضابطه $y = -3^{x+1}$

۶- گزینه «۳»، گزینه (۱) خطی، گزینه (۲) رادیکالی و گزینه (۴) درجه دوم است.

$$f(0) = r \Rightarrow ka^r = r \Rightarrow k = r$$

$$f(r) = 1r \Rightarrow ra^r = 1r \Rightarrow a^r = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a > 0} a = r$$

$$f(x) = r \times r^x \Rightarrow f(r) = r \times r^r = r^2$$



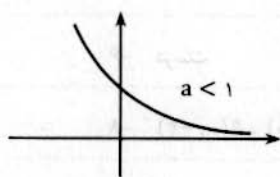
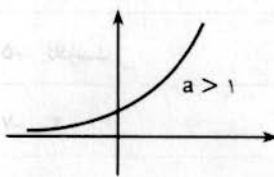
گزینه «۲» -۷

$$f(r) = r \Rightarrow r = a^r \Rightarrow a = \sqrt[r]{r}$$

$$f(-r) = (\sqrt[r]{r})^{-r} = \left(\frac{1}{\sqrt[r]{r}}\right)^r = \frac{1}{r}$$

گزینه «۳» -۸

سوال ۷



گزینه «۳» -۹

گزینه «۲» -۱۰ در $x > 0$ تابع کاهشی است. لذا گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد در $x < 0$ گزینه

(۲) به صورت $y = 2^x$ و گزینه (۴) به صورت $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ می‌باشد. چون تابع افزایشی است پس با کاهش x باید y نیز

کاهش یابد لذا $y = 2^x$ یا همان گزینه (۲) پاسخ مسأله است.

پاسخ ایستگاه فکر

۴۴، ۲۳، ۱۸، ۱۵