نوشتهٔ محمد خرمی

تجزیه و تحلیل ابعادی

شاید شنیده باشید که یکی از ابتداییترین مَحَکهای درستی روابط فیزیکی تجزیه و تحلیل ابعادی است. اگر رابطه‌ای بیانگر آن باشد که مثلاً نیروی F با طول L برابر است، این رابطه حتماً غلط است. اما اگر دو طرف رابطه‌ای هردو مثلاً از جنس نیرو باشند، رابطه *می‌تواند* درست باشد.

در اینجا ابتدا می‌خواهیم تجزیه‌وتحلیل ابعادی را به‌عنوان محکی برای درستی روابط فیزیکی دقیقتر بررسی کنیم، سپس ببینیم که آیا از این روش می‌توان به شکل برعکس هم استفاده کرد، یعنی آیا می‌توان به کمک تجزیه‌وتحلیل ابعادی روابط فیزیکی را به‌دست آورد یا خیر. در آخر هم چند مثال می‌آوریم.

فرمولبندی مسئلهٔ اول بسیار ساده است. یک رابطهٔ فیزیکی از چند کمیّت تشکیل می‌شود. هریک از این کمیتها بُعد مشخصی دارد. یعنی هر کمیت را می‌توان به شکل حاصلِ‌ضرب (احتمالاً خارج قسمت) چند کمیت اصلی نوشت. مثلاً مساحت حاصل‌ضرب طول در طول است. بُعدِ این کمیت برابر با حاصل‌ضرب بُعدهای کمیتهای بنیادی تشکیل دهندهٔ آن است. یعنی اگر بُعدِ طول را L بنامیم بُعدِ مساحت $L \times L = L^2$ می‌شود. سرعت خارج قسمت طول بر زمان است. بُعدِ سرعت $L/T = LT^{-1}$ می‌شود (T بُعدِ زمان است). معیار دقیقی برای تعیین این که چه کمیتی *اصلی* است وجود ندارد. درواقع، کمیتهای بنیادی در دستگاههای مختلف واحدها باهم فرق دارند. مثلاً در بعضی از دستگاهها (مثل MKS قدیمی) نیرو را کمیت اصلی می‌گیرند، اما در بعضی دیگر (مثل MKS امروزی) نیروکمیتی فرعی است و به جای آن جرم کمیتی اصلی است. ما در دستگاه MKS امروزی کار می‌کنیم. در این دستگاه، کمیتهای اصلیی که به‌کارمان می‌آید، طول، جرم، زمان، و جریان الکتریکی است. گاهی برای سادگی به جای جریان الکتریکی، بار الکتریکی را به‌عنوان کمیت اصلی به‌کار می‌بریم. رابطهٔ این دو باهم ساده است: اگر بُعدِ جریان را A و بُعدِ بار را C بگیریم، داریم

$$C = AT \quad \text{یا} \quad A = CT^{-1}$$

برگردیم به بحث اصلی. می‌خواستیم ببینیم که با تجزیه‌وتحلیل ابعادی چه‌موقع می‌توان گفت که رابطه‌ای *نادرست* است. رابطه‌ای می‌تواند درست باشد که در آن تنها کمیتهای با بُعد یکسان باهم

جمع (یا از هم کم) شده باشند. (بدیهی است که این شرط برابری بُعد دو طرف رابطه را هم نتیجه می‌دهد، زیرا هردو طرف رابطه را می‌توان به یک طرف آورد.) توجه کنید که روی ضرب و تقسیم کمیتها محدودیتی وجود ندارد. اگر دوکمیت را در هم ضرب (یا برهم تقسیم کنیم) بُعدِ آنها هم درهم ضرب (یا برهم تقسیم) می‌شود. اما تنها دوکمیت با بُعدِ یکسان را می‌توان باهم جمع (یا از هم کم) کرد. بُعدِ کمیت جدید هم همان بُعدِ دوکمیت قبل است.

به‌عنوان مثال رابطه‌ای مثل $x = at$ که در آن x مسافتی معین، a شتابی خاص، و t زمان باشد، حتماً نادرست است. داریم

$$[x] = L, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [t] = T \Rightarrow [at] = LT^{-1} \neq [x]$$

(منظور ازکمیت بین دوکروشه بُعدِ آن کمیت است.) اما روابطی مثل $x = at^2$ یا $x = \frac{1}{2}at^2$ از نظر ابعادی درست هستند. (توجه کنید که اعداد معمولی کمیتهایی بدون بُعد، یعنی با بُعدِ ۱، هستند.)

شرط بالا برای درست بودن یک معادله از نظر ابعادی، به رغم ظاهر ساده‌اش، خیلی محدودکننده است. درواقع، از این شرط نتیجه می‌شود که در روابط فیزیکی هیچ نوع تابعی از کمیتهای بُعددار نمی‌تواند ظاهر شود، * جز ضرب آنها درهم، توانی از آنها، و جمع و تفریق کمیتهای هم بُعد. مثلاً $\sin x$ (x بُعد طول دارد) بی‌معنی است. توابع ریاضی (جز آنهایی که در بالا مستثنا کردیم) فقط برای اعداد (یعنی کمیتهای بی‌بُعد) تعریف شده‌اند. توجه کنید که معنی این حرف این نیست که سینوس و ··· کمیتها در روابط ظاهر نمی‌شود. اما اگر مثلاً از طول سینوس می‌گیرید باید اول آن را درکمیتی با بُعد L^{-1} ضرب کنید تا حاصل بی‌بُعد شود. ازکمیت حاصل است که می‌توانید سینوس، لگاریتم، و ··· بگیرید.

مثلاً در حرکت نوسانی ساده، معادلهٔ حرکت چنین است. $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$
x و x_0 بُعد طول دارند و کسینوس کمیتهای بی‌بُعد، خودش هم بی‌بُعد است. ω بُعد T^{-1} دارد و φ یک زاویه است، که بی‌بُعد است. پس رابطه از نظر ابعادی درست است. اما رابطهٔ $x = x_0 \cos(t)$ حتماً نادرست است. زیرا ازکمیتی با بُعد T نمی‌توان کسینوس گرفت.

اما قسمت دوم؛ فرض کنید که می‌خواهیم رابطه‌ای بین چندکمیت برقرارکنیم. این رابطه چگونه چیزی می‌تواند باشد؟ دیدیم که توابع ریاضی را تنها برای کمیتهای بی‌بُعد می‌توان تعریف کرد. درواقع حتی رابطه‌ای را که دو طرف آن بُعد دارند می‌توان بر حسب کمیتهای بی‌بُعد نوشت (کافی است رابطهٔ $F = G$ را به شکل $\frac{F}{G} = 1$ بنویسیم). پس باید اول هرچند کمیت بی‌بُعدِ مستقل از هم که می‌توانیم پیداکنیم. منظور ازکمیتهای مستقل از هم آن است که هیچ‌کدام را نتوان برحسب آنهای دیگر نوشت (با جمع و تفریق و ضرب و توان) مثلاً ازکمیتهای v (سرعت)، x (مکان)، x_0 (مکان اولیه)، و t (زمان) کمیتهای بی‌بُعدی مثل $\frac{x}{vt}$، $\frac{x_0}{vt}$، $\frac{x}{x_0}$، $(\frac{x}{x_0})^2$، و ··· می‌توان ساخت. اما دیده می‌شود که $\frac{x}{x_0} = \frac{x}{vt}(\frac{x_0}{vt})^{-1}$، $(\frac{x}{x_0})^2 = (\frac{x}{vt})^2(\frac{x_0}{vt})^{-2}$، و ... پس تنها دوکمیت اول مستقل

از هم هستند.

راه ساختن کمیتهای بی‌بُعدِ مستقل چنین است: هر کمیت را به توانی مجهول می‌رسانیم و سپس همهٔ کمیتهای حاصل را درهم ضرب می‌کنیم. نتیجه باید بی‌بُعد باشد. در مورد مثال بالا داریم

$$[v^\alpha x^\beta x_0^\gamma t^\delta] = 1$$

یا

$$(LT^{-1})^\alpha L^\beta L^\gamma T^\delta = 1$$

$$L^{\alpha+\beta+\gamma} T^{\delta-\alpha} = 1$$

رابطهٔ ابعادی معادلاتی برای توانهای مجهول می‌دهد. در این مثال

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \delta-\alpha=0$$

اگر عدهٔ معادلات مستقل کمتر از مجهولها باشد، می‌توان جواب غیرصفر برای توانهای مجهول پیدا کرد. در این‌حالت می‌توان توانهای مجهول را برحسب چندتا از همین توانها نوشت:

$$\delta=\alpha, \quad \gamma=-\alpha-\beta$$

در اینجا چهار توان مجهول را می‌توان برحسب α و β نوشت. پس کمیتی مثل $v^\alpha x^\beta x_0^{-\alpha-\beta} t^\alpha$ بی‌بُعد است. اما این کمیت برابر است با $(\frac{vt}{x_0})^\alpha (\frac{x}{x_0})^\beta$

به این ترتیب همهٔ کمیتهای بی‌بُعد را می‌توان برحسب $\frac{vt}{x_0}$ و $\frac{x}{x_0}$ نوشت. از اینجا نتیجه می‌شود که تنها دو کمیت بی‌بُعدِ مستقل داریم. یادتان باشد که نحوهٔ انتخاب دو کمیت بی‌بُعد مستقل یکتا نیست. می‌توانستیم به‌جای $\frac{x}{x_0}$ و $\frac{vt}{x_0}$، $\frac{vt}{x}$ و $\frac{vt}{x_0}$ را انتخاب کنیم. اما با این کمیتهای بی‌بُعد چه‌کار کنیم؟ از اینجا به بعد فقط می‌توانیم بگوییم که تابعی از این دو کمیت وجود دارد که برابر صفر است. یعنی:

$$f(\frac{x}{vt}, \frac{x_0}{vt}) = 0$$

تجزیه‌وتحلیل ابعادی هیچ محدودیتی روی این تابع نمی‌گذارد. اگر مسئله، مسئلهٔ حرکت یکنواخت باشد رابطهٔ مورد نظر $\frac{x}{vt} - \frac{x_0}{vt} - 1 = 0$ است. اما تا جایی که به‌تجزیه‌وتحلیل ابعادی مربوط می‌شود، مثلاً رابطهٔ $\sin(1 + \frac{x}{vt}) + \cos^2(\frac{x_0}{vt} - 1) = 0$ هم ایرادی ندارد.

ظاهراً چیزی به‌دست نیاورده‌ایم اما این‌طور نیست. همین تابع دلخواه هم محدودیتی بزرگ است. مثلاً در همین مورد از معادلهٔ $f(\frac{x}{vt}, \frac{x_0}{vt}) = 0$، $\frac{x}{vt}$ را برحسب $\frac{x_0}{vt}$ می‌نویسیم: $\frac{x}{vt} = g(\frac{x_0}{vt})$

این رابطه می‌گوید که اگر $\frac{x_0}{vt}$ را تغییر ندهید (حتی اگر x_0 و v و t تغییر کنند) $\frac{x}{vt}$ هم عوض نمی‌شود. مثلاً اگر به‌ازای $x_0 = 5m$، $t = 2s$، و $v = 10\frac{m}{s}$، $x = 7m$ باشد، به‌ازای $x_0 = 10m$، $v = 40\frac{m}{s}$، و $T = 1s$، $\frac{x}{vt}$ همان مقدار قبلی می‌شود، یعنی $x = 14m$ می‌شود. (توجه کنید که این اعداد در معادلهٔ حرکت یکنواخت صدق نمی‌کنند و تابعی دیگر را نشان

می‌دهند.) پس اگر آزمایشگری بخواهد رابطهٔ این چهار کمیت را بیازماید، کمیتها را در آزمایش چنان تغییر می‌دهد که کمیتهای بی‌بُعد تغییر کنند یعنی سعی می‌کند در رابطهٔ $\frac{x}{vt} = g(\frac{x_0}{vt})$ شکل تابع g را به‌دست آورد، یعنی مقدار تابع $(\frac{x}{vt})$ را به‌ازای مقادیر مختلف متغیر $(\frac{x_0}{vt})$ به‌دست می‌آورد.

ساده‌ترین حالتی که در این روش به‌وجود می‌آید آن است که تنها یک کمیت بی‌بُعد پیدا شود. مثلاً سقوط جسمی با سرعت اولیهٔ صفر در میدان گرانشی زمین را در نظر بگیرید. کمیتهایی که در این مسئله وارد می‌شوند، h (ارتفاع سقوط)، g (شتاب گرانش)، و t (زمان سقوط) هستند. ابتدا باید کمیتهای بی‌بُعدِ مستقل را به‌دست آوریم. $[h^\alpha g^\beta t^\gamma] = 1$

$$\Rightarrow L^\alpha (LT^{-2})^\beta T^\gamma = 1 \Rightarrow \alpha+\beta=0, \gamma-2\beta=0 \Rightarrow \beta=-\alpha, \gamma=-2\alpha$$

$$\text{کمیت بی‌بُعد} = h^\alpha g^{-\alpha} t^{-2\alpha} = (hg^{-1}t^{-2})^\alpha$$

پس تنها یک کمیت بی‌بُعد داریم و آن هم $\frac{h}{gt^2}$ است. تابعی از این کمیت برابر با صفر است: $f(\frac{h}{gt^2}) = 0$ یعنی $\frac{h}{gt^2}$ ریشهٔ معادلهٔ بالاست. اگر نام این ریشه را عدد c بگذاریم، خواهیم داشت: $h = cgt^2$ این بیشترین کاری است که با تجزیه‌وتحلیل ابعادی می‌توانیم بکنیم. مقدار c را (که $\frac{1}{2}$ است) باید به‌روشی دیگر حساب کرد.

می‌دانید که معادلهٔ $h = \frac{1}{2}gt^2$ تنها برای سقوطهایی درست است که ارتفاع آنها در مقایسه با فاصلهٔ جسم از مرکز زمین کم باشد. پس چرا معادلهٔ $h = cgt^2$ به‌طورکلی به‌دست می‌آید؟ بله آنهایی که دقیقتر جملهٔ بالا را خوانده‌اند متوجه اشکال شده‌اند. یکی ازکمیتهای مؤثر در مسئله (یعنی فاصلهٔ جسم از مرکز زمین) را به‌حساب نیاورده‌ایم. فرض کنید که R_0 فاصلهٔ اولیهٔ جسم از مرکز زمین و g_0 شتاب گرانش در آن نقطه باشد. به‌این ترتیب چهار کمیت h, R_0, g_0 و t داریم که از آنها، علاوه بر $\frac{h}{g_0 t^2}$، $\frac{h}{R_0}$ هم ساخته می‌شود که بی‌بُعد و مستقل از اولی است. به‌این ترتیب: $\frac{h}{g_0 t^2} = f(\frac{h}{R_0})$

این مثال نکتهٔ مهمی را نشان می‌دهد. با تجزیه و تحلیل ابعاد می‌توانیم کشف کنیم که بعضی ازکمیتهای مؤثر در مسئله را به حساب نیاورده‌ایم. در مثال بالا با درنظرگرفتن R_0، $\frac{h}{g_0 t^2}$ باید ثابت بماند اما عملاً ثابت نمی‌ماند. یکی از مثالهای زیبای تاریخی در این مورد مربوط به مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی است. در مکانیک آماری آنتروپی سیستمها را به شکل $S = k\ln\Omega$ تعریف می‌کنند. در این رابطه s آنتروپی، k ثابت بولتسمان، $\ln$ لگاریتم نپری، و Ω عدهٔ حالات موجود سیستم است. برای به‌دست آوردن Ω راهی وجود دارد که کمیتی با بُعدِ $(ML^2T^{-1})^{3N}$ به‌دست می‌دهد. (M بُعدِ جرم و N عدهٔ ذرات سیستم است). اما ازکمیتی که بُعد دارد نمی‌توان لگاریتم گرفت. پس باید ثابتی با بُعدِ ML^2T^{-1} وجود داشته باشد که با تقسیم عبارت بالا بر h^{3N} کمیتی بی‌بُعد به‌دست آید. تا پیش از پیدایش مکانیک کوانتومی چنین ثابتی پیدا نشده بود، باتوجه به‌اینکه این ثابت در محاسبات بعدی هم بی‌تأثیر است، ثابت دلخواهی با این بُعد را وارد معادلات می‌کردند. بعداً معلوم شد که این ثابت

همان ثابت پلانک است که در مکانیک کوانتومی ظاهر می‌شود.

اکنون می‌خواهیم با استفاده از این روش چند مثال را بررسی کنیم.

۱) شدت میدان الکتریکی ناشی از یک صفحهٔ باردار با چگالی یکنواخت σ؛ کمیتهایی که در این مسئله وارد می‌شوند، σ، فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده از صفحه (d)، ثابت ϵ_0 (گذردهی خلأ)، و خود شدت میدان (E) هستند. در اینجا برای سادگی بار را کمیت اصلی می‌گیریم. داریم:

$$[\sigma]=CL^{-2},\quad [d]=L,\quad [\epsilon_0]=C^2L^{-3}M^{-1}T^2,\quad [E]=C^{-1}LMT^{-2}$$

$$[E^\alpha\sigma^\beta d^\gamma\epsilon_0^\delta]=1 \Rightarrow (C^{-1}LMT^{-2})^\alpha(CL^{-2})^\beta L^\gamma(C^2L^{-3}M^{-1}T^2)^\delta=1$$

$$\beta+2\delta-\alpha=0,\quad \alpha-2\beta+\gamma-3\delta=0,\quad -2\alpha+2\delta=0,\quad \alpha-\delta=0$$

$$\Rightarrow \delta=\alpha,\quad \beta=-\alpha,\quad \gamma=0$$

$$\Rightarrow \text{کمیت بی‌بعد}=E\epsilon_0\sigma^{-1}$$

از اینجا داریم:

$$\frac{E\epsilon_0}{\sigma}=a,\quad E=\frac{a\sigma}{\epsilon_0}$$

که در آن a عددی ثابت است. پس جواب مسئله تا حدّ یک ثابت به‌دست آمده است. پاسخ کامل مسئله $E=\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ است.

۲) نیروی جانب مرکز ذره‌ای که با سرعت ثابت (از نظر بزرگی v) روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند؛ کمیتهای مؤثر در مسئله v، R، F (نیرو)، و m (جرم ذره) هستند. با همان روش بالا دیده می‌شود که تنها یک کمیت بی‌بعد به‌دست می‌آید، $\frac{FR}{mv^2}$، پس داریم

$$F=c\frac{mv^2}{R}$$

که در آن c عددی ثابت است (می‌دانید که مقدار این ثابت یک است ولی این از تجزیه‌وتحلیل ابعادی به‌دست نمی‌آید.)

۳) رابطهٔ دورهٔ تناوب سیاره‌ای که بر دایره‌ای به شعاع R دور خورشید می‌گردد با شعاع مدار (قانون سوم کپلر)؛ کمیتهای مؤثر در مسئله R، τ (دورهٔ تناوب)، m_s (جرم خورشید)، m_p (جرم سیاره)، و G (ثابت جهانی گرانش) هستند. بُعد G از قانون گرانش نیوتون به‌دست می‌آید:

$$[G]=M^{-1}L^3T^{-2}$$

به‌این ترتیب دو کمیت بی‌بعد به‌دست می‌آید:

$$G\tau^2R^{-3}m_s,\quad \frac{mp}{ms}$$

پس داریم

$$G\tau^2R^{-3}ms=f(\frac{mp}{ms})$$

$$\frac{\tau^2}{R^3}=\frac{1}{Gms}f(\frac{mp}{ms})$$

در حالتی که جرم سیاره در مقابل جرم خورشید کوچک باشد، $\frac{mp}{ms}\ll 1$، به‌جای $f(\frac{mp}{ms})$ می‌توان به تقریب $f(0)$ گذاشت، که عددی ثابت است. درواقع شرط مدار دایره‌ای حول خورشید نیز با فرض $\frac{mp}{ms}\ll 1$ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب داریم $\frac{\tau^2}{R^3}=\frac{f(0)}{Gms}$ طرف راست این عبارت مستقل از مشخصات سیاره است. به‌این ترتیب به قانون سوم کپلر می‌رسیم که مربع دورهٔ تناوب با مکعب شعاع متناسب است.

۴) شعاع اتم هیدروژن در مدل اتمی بور؛ یک مدل مکانیک کوانتومی است. بنابراین، علاوه بر جرم الکترون m_e پروتون m_p، بار الکتریکی پروتون e، شعاع بور a_0، و ϵ_0، ثابت h (یا $\hbar=\frac{h}{2\pi}$) هم در مسئله وارد می‌شود. بُعد $\hbar$، ML^2T^{-1} است. از این کمیتها می‌توان دو کمیت بی‌بعد ساخت. یکی $\frac{\epsilon_0\hbar^2}{m_ee^2a_0}$ و یکی $\frac{me}{mp}$. باز هم جرم m_p را خیلی بزرگتر از m_e می‌گیریم. به‌این ترتیب تنها کمیت اول باقی می‌ماند و داریم

$$a_0=c\frac{\epsilon\hbar^2}{m_ee^2}$$

جواب این مسئله $a_0=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_ee^2}$ است. (این در واقع شعاع مدار حالت پایهٔ هیدروژن در مدل بور است.)

۵) انرژی حالت پایهٔ اتم هیدروژن؛ این مثال هم شبیه مثال بالاست اما به‌جای a_0، انرژی E وارد می‌شود. در این حالت کمیت بی‌بعد حاصل $\frac{E\epsilon_0^2\hbar^2}{m_ee^4}$ است. به‌این ترتیب، $E=c\frac{m_ee^4}{\epsilon_0^2\hbar^2}$ انرژی حالت پایهٔ هیدروژن $-\frac{m_ee^4}{8\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}$ است.

با این مثالها می‌بینید که می‌توان کمیتهایی را که محاسبهٔ آنها ممکن است بسیار دشوار باشد، به‌سادگی تخمین زد. تنها کافی است که ثابتها و متغیرهای مؤثر در مسئله را به‌خوبی بشناسید. خودتان هم می‌توانید امتحان کنید و مثالهای دیگری پیدا کنید.

* آنهایی که با سری تیلور آشنا هستند، به‌سادگی می‌توانند این موضوع را برای خود توجیه کنند. توابع خوشرفتار را می‌توان حدّ یک سری توانی دانست. ضرایب این سری توانی اعدادی بی‌بعدند. اگر متغیر تابع بُعد مثلاً F داشته باشد، بُعد جملهٔ nام این سری F^n خواهد بود. در این صورت مجموعه‌ای از جملات با بُعد متفاوت را باهم جمع کرده‌ایم، که غیرمجاز است.