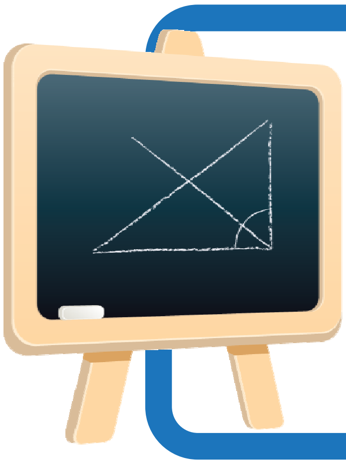
گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی



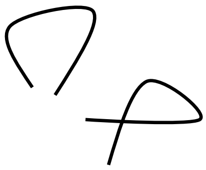
هندسه ۱

- ادامه فصل ۲ و فصل ۳

چند ضلعی‌ها:

تعاریف:

خم مسطح:



خم مسطح مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیـم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

خط‌ها، نیم‌خط‌ها، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها، همگی خم‌های مسطح هستند.

خم ساده:

یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. به عبارت دیگر خم ساده، خمی است که از هر نقطه روی آن حداکثر ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود. به عبارت دیگر خم بسته خمی است که از هر نقطه روی آن حداقل ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

خم ساده بسته:

اگر نقطه‌های انتهایی یک خم ساده بر هم منطبق باشند، آن خم، خم ساده بسته نامیده می‌شود به عبارت دیگر خم ساده بسته، خمی است که از هر نقطه روی آن دقیقاً ۲ مسیر حرکت داشته باشیم.

جمع بندی:

- خم مسطح
  - ساده
    - بسته: دایره، مربع، لوزی...
    - باز: زاویه، پاره‌خط، نیم‌خط...
  - غیر ساده
    - بسته: علامت‌هایی مانند ∞,...
    - باز: علامت‌هایی مانند α,...

قضیه خم جردن:

هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم، درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

ناحیه‌ی محدب و غیر محدب:

اجتماع یک خم ساده بسته با درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه به دو دسته محدب و غیرمحدب طبقه‌بندی می‌شود. یک ناحیه‌ی محدب (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار گیرد.

در غیر این صورت اگر حداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به‌طوری‌که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود.

چند ضلعی:

چندضلعی یک خم ساده بسته است که از اجتماع حداقل ۳ پاره‌خط تشکیل شده است، به‌طوری‌که پاره‌خط‌ها هم‌صفحه باشند و هیچ سه رأس متوالی آن روی یک خط قرار نگرفته باشند.

چندضلعی محدب:

هرگاه مجموعه نقاط درونی یک چندضلعی یک مجموعه محدب باشد، چندضلعی را محدب گوییم.

شرط لازم و کافی برای آن که یک چندضلعی، محدب باشد آن است که تمام زاویه‌هایش از 180° کمتر باشد.

☜مثال: ناحیه‌ی محدود به یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است، یک مجموعه‌ی محدب نباشد؟

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل کند، عضو آن مجموعه باشد.

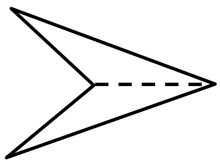
۲) هر زاویه‌ی داخلی آن کمتر از 180° باشد.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.

۴) یک قطر آن را به دو مجموعه‌ی محدب تقسیم کند.

✍حل: گزینه ٤ پاسخ است.

مثال نقض برای این موضوع شکل مقابل است:



چندضلعی:

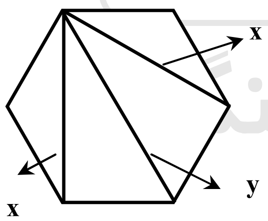
یک چندضلعی منتظم است هرگاه همه‌ی اضلاع آن با هم و همه‌ی زاویه‌هایش نیز با هم مساوی باشند. یک چندضلعی منتظم، محدب نیز هست.

مساحت n ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{n}{2}\times a\times OH$

حالت خاص مهم: مساحت ٦ ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ (هر زاویه‌ی ٦ ضلعی منتظم برابر 120° است.)

☜مثال: در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، طول اقطار را به‌دست آورید.

✍حل:



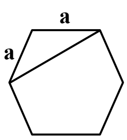
قطر کوچک را با قضیه کسینوس‌ها و قطر بزرگ را با قضیه فیثاغورث به‌دست می‌آوریم.

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a$$
$$y^2 = x^2 + a^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow y = 2a$$

☜مثال: قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم، ضلع یک شش‌ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش‌ضلعی جدید چند برابر مساحت شش‌ضلعی اولیه است؟

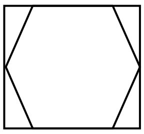
✍حل:

در شش‌ضلعی قطر کوچک برابر $a\sqrt{3}$ است. لذا:

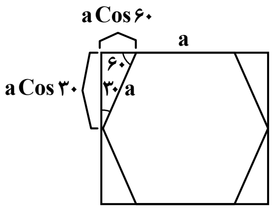


$$\frac{S_{\text{جدید}}}{S_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{6(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$$

☜مثال: در شکل مقابل، مساحت شش‌ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل محیط بر آن است؟

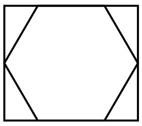


✍حل:



$$\frac{\text{مساحت شش‌ضلعی}}{\text{مساحت مستطیل}}=\frac{\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}}{(2a)(a\sqrt{3})}=\frac{3}{4}$$

☜مثال: در شکل مقابل محیط شش‌ضلعی منتظم، چند برابر محیط مستطیل محیط بر آن است؟

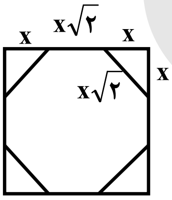


✍حل:

$$\frac{\text{محیط شش‌ضلعی}}{\text{محیط مستطیل}}=\frac{6a}{(2a+a\sqrt{3})\times 2}=\frac{3}{(2+\sqrt{3})}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{1}$$

☜مثال: در شکل مقابل مساحت مربع ۲ واحد مربع است.مساحت هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟

✍حل:

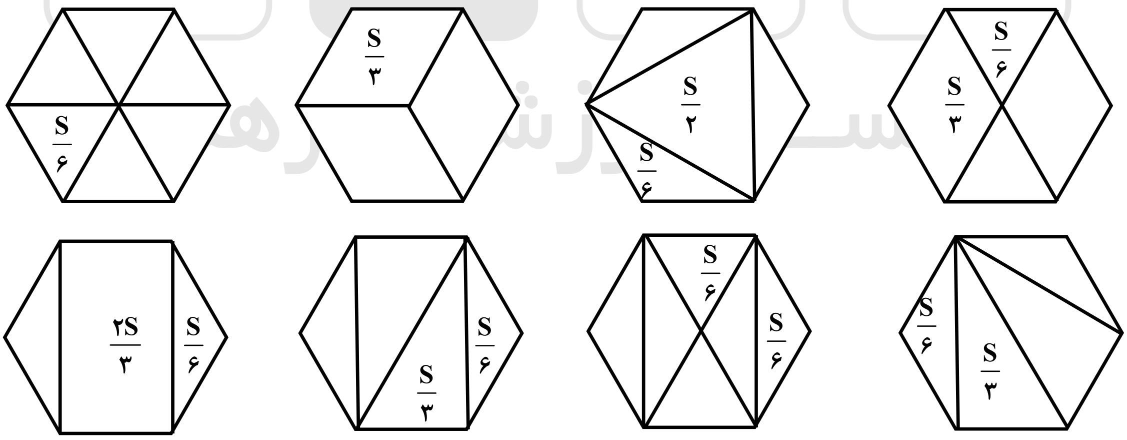


$$S=2\to 2x+x\sqrt{2}=\sqrt{2}\to x=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4-2}=\sqrt{2}-1$$

$$S_8=8\times(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times x\sqrt{2})=4x=4(\sqrt{2}-1)$$

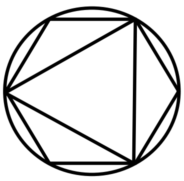
☜مثال: مساحت هر یک از نواحی به‌وجود آمده به‌وسیله‌ی اقطار را در شش‌ضلعی‌های زیر برحسب S بیابید.

✍حل:



☜مثال: اگر در یک دایره مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی برابر با ۱۲ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در آن کدام است؟

✍حل:



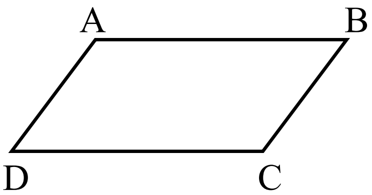
همان‌گونه که در مثال فوق معلوم شد مساحت شش‌ضلعی دو برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس مساحت شش ضلعی برابر ۲۴ است.

چهارضلعی‌ها:

پس از مثلث، چهارضلعی، ساده‌ترین نوع چندضلعی‌ها می‌باشد. برخی از چهارضلعی‌ها به سبب روابطی که بین اجزای آن‌ها وجود دارد، اهمیت بیشتری دارند. در این قسمت انواع و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

انواع چهارضلعی:

متوازی‌الاضلاع:



تعریف: متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. مانند متوازی‌الاضلاع ABCD در شکل که در آن $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$ است.

متوازی‌الاضلاع علاوه بر خواص عمومی چهارضلعی‌ها دارای خواصی است که با قضایای زیر بیان می‌شوند:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.

۲- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل، متساوی و زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند.

۳- در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

۱- اگر در یک چهارضلعی اضلاع مقابل دوبه‌دو متساوی باشند چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲- اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳- اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۴- اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۵- اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

☜مثال: کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

۱) چهارضلعی‌ای که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.

۲) چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

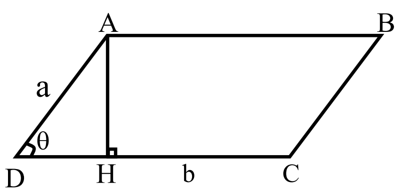
۳) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

۴) چهارضلعی‌ای که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

✍حل: گزینه ۱ پاسخ است.

ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین نیز دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد. بقیه‌ی گزینه‌ها خصوصیات متوازی‌الاضلاع را بیان می‌کنند.

نکات:



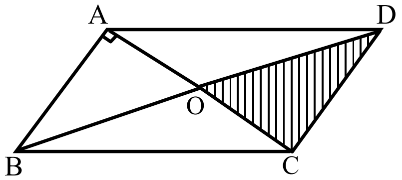
۱- مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع نظیر یک ضلع در آن ضلع همچنین اگر طول و عرض متوازی‌الاضلاعی a و b و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، داریم:

$$S = ab\sin\theta$$

۲- قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

☜مثال: در متوازی‌الاضلاع مقابل قطر AC عمود بر ساق AB، $AC=۶$ و $AB=۵$ است. مساحت قسمت هاشور زده شده در شکل چقدر است؟

✍حل:



قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، لذا:

$$\Delta ABC=\Delta ADC,\Delta ABD=\Delta BCD\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

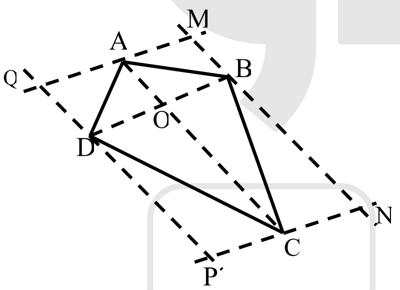
اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، لذا:

$DO=OB\Rightarrow$ میانه مثلث ΔBCD است $CO\Rightarrow S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow S_{\Delta COD}=\frac{۱}{۲}S_{\Delta BCD}=\frac{۱}{۴}S_{ABCD}\\ S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶=۱۵\Rightarrow S_{ABCD}=۳۰\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta COD}=\frac{۱}{۴}\times ۳۰=۷/۵$$

☜مثال: از چهار رأس یک چهارضلعی، خط‌هایی موازی قطرها رسم می‌کنیم. از تلاقی این خطوط، یک چهارضلعی حاصل می‌شود. نسبت مساحت چهارضلعی اول به مساحت چهارضلعی حاصل شده، چقدر است؟

✍حل: هر چهارضلعی که اضلاع روبه‌رویش دوبه‌دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع می‌باشد. قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند. لذا:



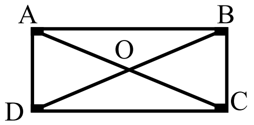
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AO\parallel MB\\ BO\parallel AM\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AOB=\Delta AMB\\ \left.\begin{array}{l}BN\parallel OC\\ BO\parallel NC\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BOC=\Delta BNC\\ \left.\begin{array}{l}AO\parallel QD\\ AQ\parallel OD\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AOD=\Delta AQD\\ \left.\begin{array}{l}OC\parallel DP\\ CP\parallel OD\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta OCD=\Delta CDP\end{array}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}S_{MNPQ}$$

مستطیل:

تعریف: مستطیل، چهارضلعی‌ای است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. اگر زاویه‌های چهارضلعی قائمه باشند، اضلاع آن دوبه‌دو موازی یکدیگرند. پس مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. اگر یک زاویه از متوازی‌الاضلاعی قائمه باشد، سه زاویه‌ی دیگر آن نیز قائمه‌اند. پس می‌توان گفت: مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

مستطیل همه‌ی خواص یک متوازی‌الاضلاع را دارد، ضمناً داری خاصیت مهمی است که با قضیه‌ی زیر بیان می‌شود:

در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند.



قضیه عکس:

متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن متساوی باشند، مستطیل است.

☜مثال: تساوی قطرهای یک چهارضلعی برای مستطیل بودن آن چه شرطی است؟

۱) شرط لازم ۲) شرط کافی ۳) شرط لازم و کافی ۴) نه شرط لازم و نه شرط کافی

✍حل: اگر چهارضلعی مستطیل باشد، قطرهای آن مساویند، پس تساوی قطرها شرط لازم است.

لوزی:

تعریف: لوزی، چهارضلعی‌ای است که چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. می‌توان ثابت کرد که اضلاع لوزی دوبه‌دو متوازیند. بنابراین لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی یکدیگر است.

لوزی همه‌ی خواص متوازی‌الاضلاع را دارد و علاوه بر آن‌ها دارای خاصیت دیگری است که با قضیه‌ی زیر بیان می‌شود:

در لوزی قطرها بر هم عمودند و زاویه‌ها را نصف می‌کنند.

قضایای عکس:

۱- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، لوزی است.

۲- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زاویه‌ها باشد، لوزی است.

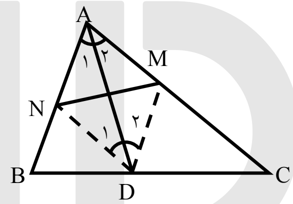
☜ مثال: در مثلث ΔABC از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{A}$ با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو را در نقاط N,M قطع کند. MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) فقط عمود بر هم ۲) فقط منصف هم ۳) زاویه بین آن‌ها مکمل A ٤) عمودمنصف هم

✍ حل: گزینه ٤ صحیح است.

$$ND \parallel AM \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\hat{D}_1 = \hat{A}_2 \quad \text{(موازی- مورب)} \\ &\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow AN = ND$$

$$MD \parallel AN \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\hat{D}_2 = \hat{A}_1 \\ &\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{A}_2 \Rightarrow AM = MD$$

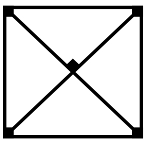


چون اضلاع چهارضلعی $ANDM$ دوبه‌دو موازیند، لذا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، و چون اضلاع مجاور مساویند، پس چهارضلعی لوزی است. در لوزی اقطار عمود بر هم و منصف هم هستند لذا خطوط AD و NM عمودمنصف هم هستند.

به‌طور کلی هر متوازی‌الاضلاع که قطرهایش نیمساز باشند، لوزی خواهد بود.

مربع:

تعریف: مربع، چهارضلعی‌ای است که زاویه‌هایش قائمه و چهار ضلع آن مساوی یکدیگرند. با توجه به آن‌چه ذکر شد از قائمه بودن زاویه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مربع نوع خاصی مستطیل و نوع خاصی متوازی‌الاضلاع است و از تساوی چهار ضلع نیز نتیجه می‌گیریم که مربع نوعی لوزی است. بنابراین مربع همه خواص متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی را دارد و با توجه به قضایای عکس می‌توان گفت:



۱- مستطیلی که قطرهای آن عمود بر یکدیگر باشد، مربع است.

۲- مستطیلی که قطرهای آن زاویه‌هایش را نصف کند، مربع است.

۳- لوزی که زاویه‌های آن متساوی باشد، مربع است.

٤- لوزی که قطرهای آن متساوی باشد، مربع است.

☜ مثال: کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱) لوزی‌ای که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.

۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشد.

٤) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

✍ حل:

اگر دو قطر یک مستطیل بر هم عمود باشند، اضلاع مجاورش نیز با هم مساویند، لذا مربع است. اما مثال نقض برای گزینه‌ی (۱) لوزی‌ای است که یک زاویه‌ی $60°$ داشته باشد، برای گزینه‌ی (۳)، مستطیل و برای گزینه‌ی (٤) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

☜مثال: کدام گزینه صحیح است؟

۱) مربع لوزی‌ای است، که اقطارش مساویند.

۲) هر چهارضلعی که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.

۳) هر متوازی‌الاضلاع که اقطارش بر هم عمود باشد، مربع است.

٤) هر ذوزنقه که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، مربع است.

✍حل:

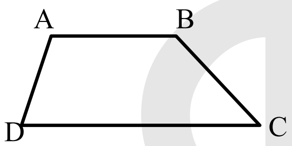
اگر اقطار یک لوزی با هم مساوی باشند، اضلاعش نیز بر هم عمودند. برای گزینه های (۲) و (۳)، مثال نقض لوزی و برای گزینه (٤)، مثال نقض ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

☜مثال: در مربعی مجموع یک ضلع و قطر برابر با $\sqrt{8}+2$ می‌باشد. مساحت مربع چقدر است؟

✍حل:

$$a+a\sqrt{2}=2+\sqrt{8}=2+2\sqrt{2}\Rightarrow a=2\Rightarrow S=a^{2}=4$$

ذوزنقه:



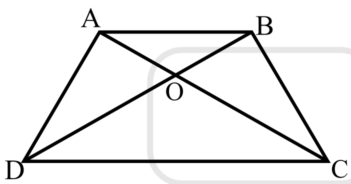
تعریف: ذوزنقــه چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

در ذوزنقه هر یک از دو ضلع متوازی را یک قاعده و هر یک از دو ضلع ناموازی را یک ساق می‌گوییم.

در ذوزنقه دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق مکمل یکدیگرند.

ذوزنقه انواع گوناگون دارد که هر یک از آن‌ها برحسب وضع ساق‌ها نسبت به دو قاعده یا وضع خود دو ساق مشخص می‌شود.

ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین:



ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین آن است که دو ساق آن متساوی باشند.

قضیه: در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین:

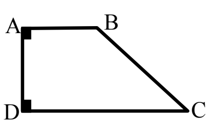
۱- دو زاویه‌ی مجاور به هر قاعده با یکدیگر متساویند.

۲- دو قطر با یکدیگر متساویند.

قضیه عکس:

هر ذوزنقه که دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده آن، یا دو قطر آن، متساوی باشند، متساوی‌الساقین است.

ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه:



ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه آن است که یکی از ساق‌های آن بر دو قاعده عمود باشد در شکل مقابل ذوزنقه‌ی ABCD قائم‌الزاویه است که در آن CD و AB بر AD عمودند.

☜مثال: کدام گزینه درست نیست؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲) ذوزنقه‌ای که دو قطرش برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۳) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند، مربع است.

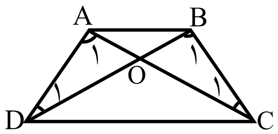
٤) هر چهارضلعی که دو ضلعش برابر باشند، ذوزنقه است.

✍حل: مثال نقض گزینه (٤)، متوازی‌الاضلاع است.

☜مثال: در یک چهارضلعی دو قطر برابر و دو ضلع روبه‌رو مساویند. الزاماً کدام گزاره در مورد این چهارضلعی درست است؟

۱) دو قطر عمود بر یکدیگر می‌باشند.
۲) دو قطر با یک نسبت متقاطعند.
۳) دو زاویه‌ی مقابل مساویند.
۴) تفاضل دو زاویه‌ی مقابل، ۹۰° است.

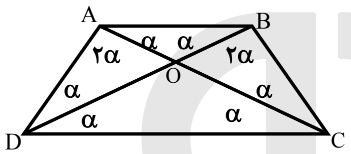
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ BD = AC : \text{ذوزنقه متساوی‌الساقین} \\ DC = DC : \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC = \Delta BCD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \hat{C}_۱ \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADO = \Delta BOC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

دلیلی برای اثبات گزینه‌های دیگر در دسترس نیست.

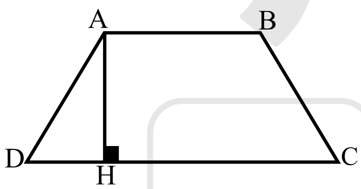
☜مثال: در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، ساق‌ها با قاعده‌ی کوچک و قطرها با قاعده‌ی بزرگ مساویند. یکی از زاویه‌های این ذوزنقه برابر با کدام است؟



۱) ۶۰°
۲) ۷۲°
۳) ۸۰°
۴) ۴۵°

✍حل:

$$\hat{\alpha} + ۲\hat{\alpha} + ۲\hat{\alpha} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = ۳۶^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۱۰۸^\circ \;,\; \hat{C} = \hat{D} = ۷۲^\circ$$



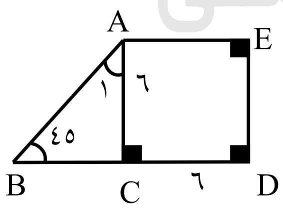
نکات:

۱- مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب نصف ارتفاع در مجموع دو قاعده:

$$S = \frac{۱}{۲} AH \times (AB + CD)$$

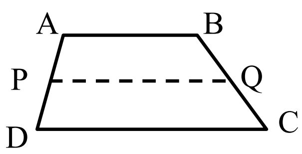
☜مثال: یک زاویه‌ی ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای ۴۵° است. اگر ارتفاع و قاعده‌ی کوچک ذوزنقه هر دو $۶cm$ باشند، مساحت ذوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

✍حل:



$$\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} = ۴۵^\circ \Rightarrow AC = BC \Rightarrow BC = ۶$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(۶ + ۱۲) \times ۶ = ۵۴$$



۲- پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌های یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی با دو قاعده‌ی آن و برابر با نصف مجموع دو قاعده است.

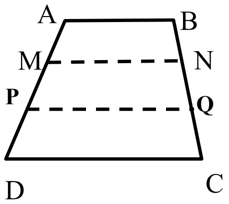
$$PQ \parallel AB \parallel CD$$

$$PQ = \frac{AB + CD}{۲}$$

در حالت کلی اگر $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{m}{n}$ خواهیم داشت: $PQ = \frac{nAB + mCD}{n + m}$

مثال: در ذوزنقه‌ی ABCD اگر $AB=٤$، $CD=٨$ و $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{١}{٣}$ باشد، آن‌گاه **MN** را بیابید.

حل:

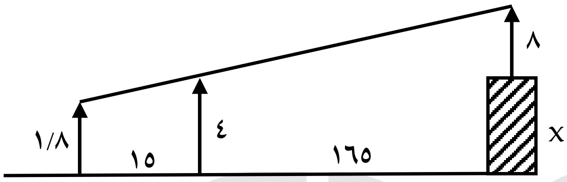


$$\left.\begin{aligned} MN &= \frac{AB+PQ}{۲} \\ PQ &= \frac{MN+DC}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow MN = \frac{AB+\frac{MN+DC}{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{۲AB+MN+DC}{۴} \Rightarrow \frac{۳MN}{۴} = \frac{۲AB+CD}{۴} \Rightarrow MN = \frac{۲AB+CD}{۳} = \frac{۸+۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

مثال: در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ٤ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟

حل:



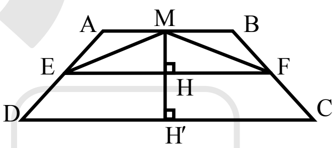
طبق رابطه در حالت کلی داریم:

$$۴ = \frac{۱۶۵\times ۱/۸ + ۱۵\times(۸+x)}{۱۵+۱۶۵}$$

پس $x=۲۰/۲$

مثال: در ذوزنقه‌ی ABCD نقطه‌ی M وسط AB، E وسط AD و F وسط BC است. مساحت ذوزنقه، چند برابر مساحت مثلث MEF است؟

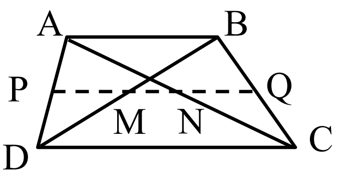
حل:



$$EF = \frac{AB+CD}{۲}$$

$$\left.\begin{aligned} & S_{\Delta MEF} = \frac{۱}{۲}MH\times EF = \frac{۱}{۲}MH\times\left(\frac{AB+CD}{۲}\right) \\ & \left.\begin{aligned} S_{ABCD} &= MH'\times\left(\frac{AB+CD}{۲}\right) \\ MH' &= ۲MH \end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{ABCD} = MH\times(AB+CD) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = ۴S_{\Delta MEF}$$

۳- اگر در ذوزنقه‌ی ABCD، P وسط AD و Q وسط BC باشد و نیز قطرهای AC و BD را رسم کرده باشیم، آن‌گاه:



$$PM = QN$$

$$MN = \frac{CD-AB}{۲}$$

قضیه‌ی تالس، تشابه:

نسبت و تناسب

خواص نسبت‌های مساوی:

ترکیب و تفضیل در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$ ترکیب و تفضیل در صورت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\alpha a\pm\beta c}{\alpha b\pm\beta d}$$

☜مثال: اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

✍حل:

$$\mathbf{\frac{a+b}{b}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{a+b}{a+۲b}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{۲a+۲b}{a+۲b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}}$$

☜مثال: اگر داشته باشیم $\frac{c}{۷}=\frac{b}{۵}=\frac{a}{۳}$، به‌جای x و y چه اعدادی می‌توان نوشت تا تناسب $\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{y}$ برقرار باشد؟

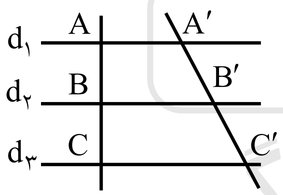
۱) $x=۳, y=۱۵$ ۲) $x=۳, y=۳$ ۳) $x=۷, y=۳$ ٤) $x=۱۵, y=۳$

✍حل:

$$\mathbf{\frac{a+b+c}{۳+۵+۷}=\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}\Rightarrow\frac{a+b+c}{۱۵}=\frac{a}{۳}}$$

قضیه‌ی تالس و نتایج آن

قضیه‌ی دسته خطوط موازی با فواصل مساوی:



قضیه: اگر چند خط موازی یک خط را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های متساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آن‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳}\\ \mathbf{AB=BC=\cdots}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{A'B'=B'C'=\cdots}$$

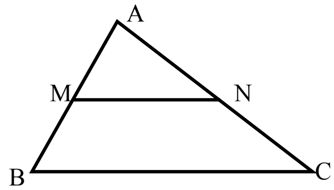
نتیجه ۱: در هر صفحه خط‌های موازی که بر یک خط، پاره‌خط‌های متساوی پدید می‌آورند دوبه‌دو به‌طور متوالی متساوی‌الفاصله‌اند.

نتیجه ۲: در هر صفحه خط‌های موازی که دوبه‌دو و به‌طور متوالی به یک فاصله باشند، بر هر خط که آن‌ها را قطع کند پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.

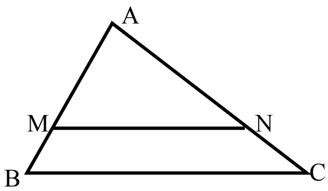
تذکر: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست یعنی اگر چند خط روی دو خط، پاره‌خط‌های متناسب پدید آورند، لزوماً موازی نیستند.

قضیه‌ی تالس و عکس آن:

قضیه: خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود بر دو ضلع دیگر یا بر امتداد آن‌ها، پاره‌خط‌های متناظر پدید می‌آورد که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسبند. برعکس اگر خطی دو ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها را قطع کند و بر آن دو ضلع پاره‌خط‌های متناسب با دو ضلع مزبور پدید آورد، با ضلع سوم مثلث موازی خواهد.

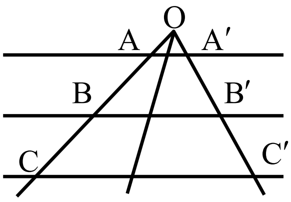


$$\mathbf{MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}}$$



نتیجه ۱: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر یا با امتدادهای آن‌ها مثلثی پدید می‌آورد که ضلع‌های آن نظیر به نظیر با اضلاع مثلث مزبور متناسبند.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



نتیجه ۲: پاره‌خط‌هایی که چند خط متوازی بر دو خط هم‌رأس پدید می‌آورند، نظیر به نظیر متناسبند و در هر صفحه خط‌های نامتوازی که چند خط متوازی را قطع کنند و توسط

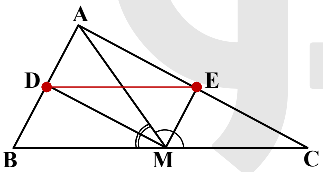
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \dots \Rightarrow \text{همرسند}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots \ \text{همرسند} \Rightarrow AC\ ,A'C'$$

☜مثال: در مثلث ABC، میانه AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم می‌کنیم، تا دو ضلع AB و AC را به‌ترتیب در D و E قطع کند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{AD}{AB}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ٤) $\frac{AM}{BC}$

✍حل: گزینه ۳ پاسخ است.



خواص نیمساز:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC}$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{BM}$$

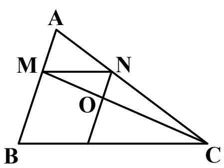
چون $BM = MC$، پس:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

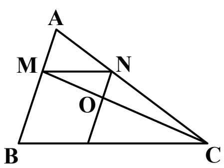
از عکس تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

☜مثال: در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ و چهارضلعی MNPB متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



✍حل:



$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNC}} = \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{۳}{۷} S_{MNC}$$

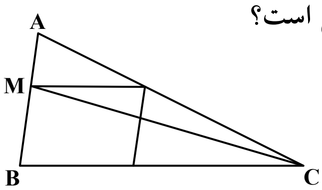
$$\text{تالس}\ \frac{PC}{BP} = \frac{NC}{AN} = \frac{MB}{MA} = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{BP} = \frac{OC}{MO} = \frac{۷}{۳} = \frac{S_{ONC}}{S_{OMN}} \Rightarrow \frac{S_{ONC} + S_{OMN}}{S_{OMN}} = \frac{۱۰}{۳}$$

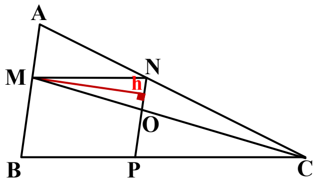
$$\Rightarrow S_{OMN} = \frac{۳}{۱۰} S_{MNC}$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۳}{۷}} = \frac{۷}{۱۰}$$

☜مثال: در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$، مساحت مثلث سایه‌زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



✍حل:

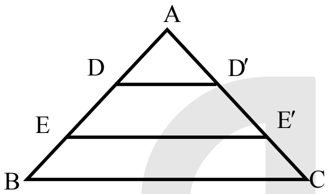


$$\frac{NO}{AM}=\frac{OP}{MB}=\frac{CO}{CM}\Rightarrow\frac{NO}{OP}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{NO}{NP}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNPB}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\cdot ON}{h\cdot NP}=\frac{۱}{۲}\frac{ON}{NP}=\frac{۱}{۵}$$

☜مثال: در شکل روبه‌رو $BC=۸$، $AD=DE=EB$ و $DD'\parallel EE'\parallel BC$ می‌باشد. $DD'+EE'$ کدام است؟

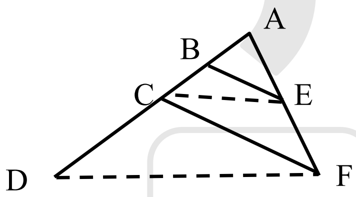
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}DD'\parallel BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DD'}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DD'=\frac{۸}{۳}\\ EE'\parallel BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EE'}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow EE'=\frac{۱۶}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow DD'+EE'=۸$$

☜مثال: در شکل مقابل $BE\parallel CF$، $CE\parallel DF$، $AB=۵$ و $BC=۳$، آنگاه اندازه CD کدام است؟

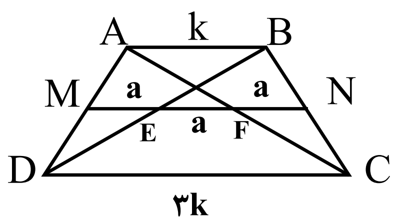
✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}BE\parallel CF\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}\\ CE\parallel DF\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{۵}{۳}=\frac{۵+۳}{CD}\Rightarrow CD=۴/۸$$

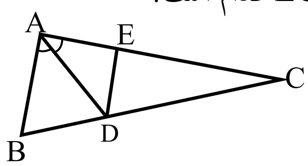
☜مثال: در یک ذوزنقه، قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. پاره‌خطی موازی با قاعده و محدود به ساق‌ها توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. این پاره‌خط ساق‌ها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

✍حل:



$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADC: MF\parallel DC\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{MF}{DC}=\frac{۲a}{۳k}\\ \triangle ADB: ME\parallel AB\Rightarrow\frac{DM}{AD}=\frac{ME}{AB}=\frac{a}{k}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{AM}{DM}=\frac{۲}{۳}$$

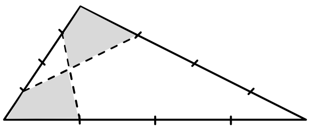
☜مثال: در شکل مقابل، $۵AB=۳AC=۶۰$، AD نیمساز زاویه‌ی A و $DE\parallel AB$ است. اندازه‌ی EC کدام است؟



✍حل:

$$ED\parallel AB\rightarrow\frac{EC}{AE}=\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۲۰}{۱۲}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{EC}{۲۰-EC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow EC=۱۲/۵$$

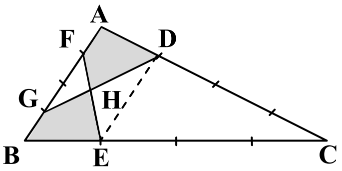
مثال: در شکل مقابل هر ضلع مثلث به ٤ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه‌زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط

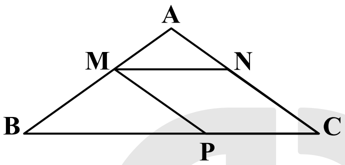
۳) همنهشت ٤) متشابه

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

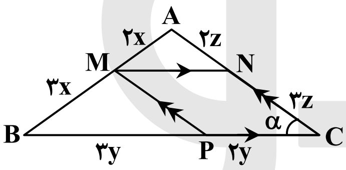


با توجه به این‌که $\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{4}$، نتیجه می‌گیریم که DE موازی AB می‌باشد. بنابراین نقاط E و D از خط AB به یک فاصله‌اند و چون $BF=AG=\frac{3}{4}AB$، در نتیجه دو مثلث ADG و FEB هم‌مساحت هستند؛ زیرا قاعده و ارتفاع مساوی دارند. حال اگر از هر دو مثلث مساحت مثلث GFH را کم کنیم، نتیجه می‌شود: $S_{BGHE}=S_{AFHD}$

مثال: در شکل مقابل، $AM=\frac{2}{3}MB$ و چهارضلعی MNCP متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



حل:



$$AM=\frac{2}{3}MB \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$$

$$MP \parallel AC \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}}=\frac{2y\times 3z\times \sin\alpha}{\frac{1}{2}\times 5y\times 5z\times \sin\alpha}=\frac{6}{\frac{25}{2}}=\frac{12}{25}=\frac{48}{100}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ٤۸ درصد مساحت مثلث ABC است.

راه حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \Rightarrow AMN \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25} \\ MP \parallel AC \Rightarrow BMP \simeq ABC \Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}}=\left(\frac{BM}{AB}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{MNCP}=S_{ABC}-\frac{4}{25}S_{ABC}-\frac{9}{25}S_{ABC}=\frac{12}{25}S_{ABC}=\%48 S_{ABC}$$

شکل‌های متشابه:

در هندسه منحصراً وقتی از وجود تشابه بین دو شکل سخن می‌گوییم که از حیث ساختمان و همچنین از لحاظ اندازه‌ها بین اجزای دو شکل نسبت‌های معین وجود داشته باشد. به عبارت دیگر یکی از شکل‌ها بزرگ و یا کوچک شده دیگری باشد. تساوی حالت خاصی از تشابه می‌باشد.

شکل‌های متشابه دارای ویژگی‌های یکسانی هستند. مثلاً دو چندضلعی در صورتی متشابه هستند که بین اجزای آن‌ها از لحاظ ساختمان و توالی اضلاع تناظر یک به یک وجود داشته باشد و زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی و پاره‌خط‌های متناظر به یک نسبت باشند. مثلاً دو مربع همواره متشابهند.

تعریف: دو n ضلعی متشابهند هرگاه زوایای متناظر آن‌ها متساوی و اضلاع متناظر آن‌ها متناسب باشند.

مثال: کدام دو چهارضلعی متشابهند؟

۱) دو مستطیل ۲) دو متوازی‌الاضلاع که زوایای مساوی داشته باشند.

۳) دو لوزی که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ٤) دو ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین که زوایای مساوی داشته باشند.

حل: اگر یک زاویه‌ی دو لوزی مساوی باشد، کلیه زوایای آن‌ها مساوی است و اضلاع آن‌ها نیز متناسبند.

مثال: در کدام حالت دو مستطیل متشابهند؟

۱) طول دو مستطیل برابر باشد.
۲) زاویه‌ی بین دو قطر برابر باشد.
۳) قطر دو مستطیل برابر باشد.
۴) همواره متشابهند.

حل: اگر دو مستطیل بخواهند متشابه باشند، باید نسبت طول به عرض در آن‌ها مقدار ثابتی باشد. اگر زاویه‌ی بین دو قطر دو مستطیل با هم برابر باشد، می‌توان ثابت کرد که نسبت طول به عرض در این دو مستطیل با هم برابر است. اما از برابری طول یا قطر دو مستطیل نمی‌توان نتیجه گرفت که نسبت طول به عرض در آن‌ها مقدار ثابتی است.

حالات تشابه دو مثلث:

از آن‌چه از تعریف تشابه دو چندضلعی ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که: دو مثلث وقتی متشابهند که زاویه‌های آن‌ها دوبه‌دو متساوی و ضلع‌های روبه‌روی زاویه‌های متساوی متناسب باشند.

اما به سبب بعضی ویژگی‌های مثلث، پاره‌ای از شرایط تشابه، از شرایط دیگر قابل نتیجه‌گیری می‌باشد. بنابراین تشابه دو مثلث را با شرایط کمتری می‌توان بررسی نمود.

قضیه: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌های بین آن اضلاع با یکدیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.

قضیه: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، آن دو مثلث متشابهند.

نکته: دو مثلث قائم الزاویه در حالات زیر نیز متشابهند:

۱- اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه‌ی حاده برابر داشته باشند، متشابهند.

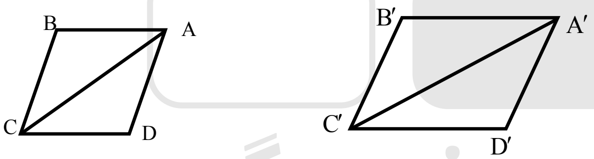
۲- اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

۳- اگر وتر و ارتفاع‌های نظیر، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

تشابه در چندضلعی‌ها:

برای اثبات گزاره‌های مربوط به تشابه چندضلعی‌ها، آن‌ها را با رسم قطرهای متناظر به چند مثلث تجزیه کرده و ویژگی‌های چندضلعی‌ها را از گزاره‌های مربوط به تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم.

قضیه: در دو چندضلعی محدب متشابه قطرهایی که از رأس‌های متناظر دو چندضلعی رسم می‌شوند، چندضلعی‌ها را به مثلث‌های متناظری که دوبه‌دو متشابه هستند تجزیه می‌کنند.



تناسب اجزا و مساحت‌های شکل‌های متشابه:

در دو شکل متشابه نسبت هر دو جزء طولی متناظر، مقداری ثابت است که آن را نسبت تشابه آن دو شکل می‌نامند.

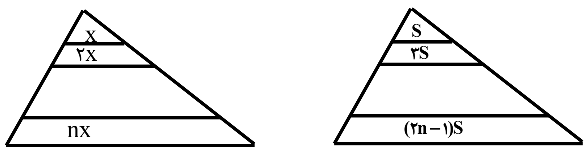
در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ همواره داریم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{h_a}{h_{a'}}=\frac{h_b}{h_{b'}}=\frac{h_c}{h_{c'}}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{m_b}{m_{b'}}=\frac{m_c}{m_{c'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{d_b}{d_{b'}}=\frac{d_c}{d_{c'}}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{2p}{2p'}=k$$

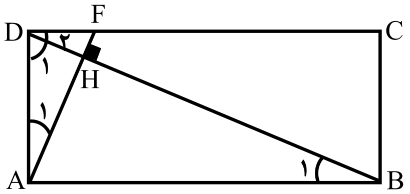
$$\frac{S}{S'}=k^2$$

نسبت تشابه: k شعاع دایره‌ی محاطی: r شعاع دایره‌ی محیطی: R ارتفاع: h نیمساز: d میانه: m

نکته: اگر پاره‌خط‌های موازی هم، دو ضلع مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنند، طول پاره‌خط‌های موازی تصاعد عددی با قدر نسبت x و مساحت ناحیه‌های افراز شده تصاعد عددی با قدر نسبت ۲ می‌سازند.



☜مثال: در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به‌طوری‌که $AF \perp BD$. اگر $AB = ۳AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟



✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ \left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ADH \Rightarrow \frac{AH}{DH} = \frac{AB}{AD} = \frac{BH}{AH} = ۳ \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AH = ۳DH \\ BH = ۳AH\end{array}\right\} \Rightarrow BH = ۹DH$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۳ = \hat{H}_۲ \\ AB \parallel DC \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{B}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta DHF \Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{AH}{FH} = \frac{AB}{DF} = ۹ \Rightarrow AB = ۹DF \xrightarrow{AB=CD} CD = ۹DF$$

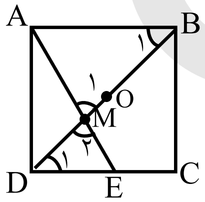
☜مثال: مثلثی به اضلاع ۳، ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x و y متشابه است. اگر $x > ۵$ و $y > ۵$ باشد، $x + y$ کدام است؟

✍حل:

چون $x > ۵$ و $y > ۵$ است، لذا ۵ کوچکترین ضلع مثلث است. لذا داریم:

$$\frac{x}{۷} = \frac{y}{۵} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲۵}{۳}, x = \frac{۳۵}{۳} \Rightarrow x + y = \frac{۶۰}{۳} = ۲۰$$

☜مثال: در یک مربع به ضلع $۴\sqrt{۲}$ پاره‌خطی که رأس **A** را به نقطه‌ی **E**، وسط ضلع **CD**، متصل می‌کند، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از وسط مربع کدام است؟

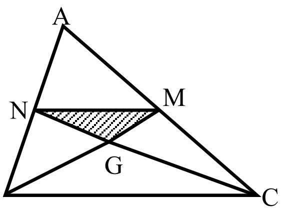


✍حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta DME \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{۱}{۲} \\ DB = ۴\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۸\end{array}\right\} \Rightarrow MD = \frac{۱}{۳}DB = \frac{۸}{۳} \Rightarrow MO = DO - MD = \frac{۸}{۲} - \frac{۸}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

☜مثال: در مثلث ABC، نسبت مساحت مثلثی که یک رأس آن مرکز ثقل و دو رأس دیگرش وسط اضلاع AB و AC باشند به مساحت مثلث ABC کدام است؟

✍حل:



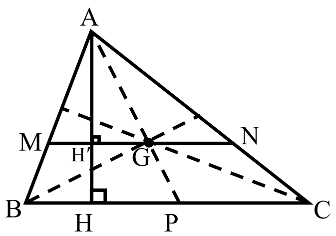
$$\Delta GMN \sim \Delta GBC \Rightarrow \frac{S_{\Delta GMN}}{S_{\Delta GBC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$S_{\Delta GBC} = \frac{۱}{۳}S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GMN} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴}S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۱۲}S_{\Delta ABC}$$

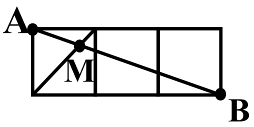
☜مثال: از نقطه‌ی G محل تلاقی سه میانه‌ی مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در نقاط M و N قطع کند، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

✍حل:



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AG}{AP} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$

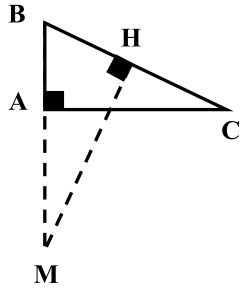
☜مثال: در شکل مقابل، سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله‌ی **MA** چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



✍حل:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۳}\to\frac{AM}{AM+MB}=\frac{۱}{۴}\to\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۴}\to AM=\frac{۱}{۴}AB=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

☜مثال: اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه ای ۲ , ٦ واحد است. عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در **M** قطع می‌کند. فاصله‌ی **M** از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

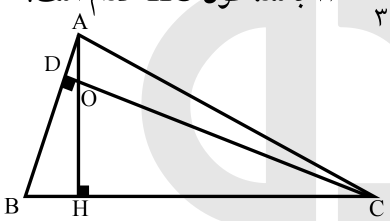


✍حل:

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\to ABC\approx BMH\to\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{BM}$$

$$\to\frac{۲}{\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲+AM}\to ۲+AM=۱۰\to AM=۸$$

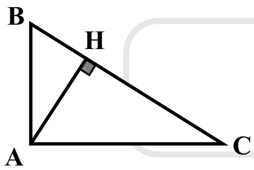
☜مثال: در شکل مقابل **AH** و **CD** دو ارتفاع مثلث **ABC** هستند. اگر $\frac{۱}{۳}OH = AD = ۵DO = ۱۲$ باشد، طول **HC** کدام است؟



✍حل:

$$ADO\approx OHC\to\frac{DO}{OH}=\frac{AD}{HC}\to\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳۶}=\frac{۱۲}{HC}\to HC=۱۸۰$$

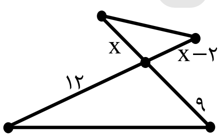
☜مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی **ABC** ($A=۹۰^\circ$)، $AC=۲AB$ و ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟



✍حل:

$$ABH\approx AHC\to\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\left(\frac{BH}{CH}\right)^۲=\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\to S_{ABC}=۵S_{ABH}$$

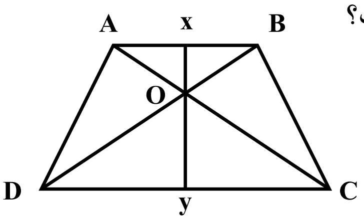
☜مثال: در شکل مقابل، دو مثلث متشابهند. نسبت مساحت آن دو مثلث را بیابید.



✍حل: چون در شکل دو ضلع غیرموازی کشیده شده پس: $\frac{x-۲}{۹}=\frac{x}{۱۲}\to x=۸$

لذا: $\frac{S}{S'}=\left(\frac{x-۲}{۹}\right)^۲=\frac{۴}{۹}$

☜مثال: اندازه‌ی دو قاعده‌ی یک ذوزنقه ٦ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه‌ی وسط قاعده ها را به‌هم متصل می‌کند، برابر ۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این ذوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچکتر چقدر است؟

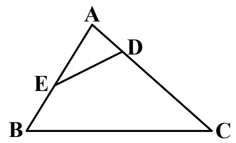


✍حل: خط واصل بین وسط دو قاعده حتماً از وسط دو قطر می‌گذرد.

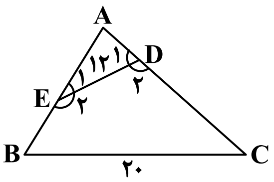
مثلث OxA با OyC متشابه است پس $\frac{Ax}{yC}=\frac{Ox}{Oy}$

$$\Rightarrow\ \frac{۳}{۴/۵}=\frac{Ox}{Oy}=\frac{Ox}{۱۲-Ox}\ \Rightarrow\ Ox=۴/۸$$

مثال: در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC=۲۰$ و $DE=۱۲$، آن‌گاه مساحت چهارضلعی BCDE چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



حل: دو مثلث $\overset{\Delta}{AED}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند زیرا:



$$\begin{cases}\hat{C}+\hat{E}_۲=۱۸۰ & \text{فرض}\\ \hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۸۰ & \text{از طرفی}\end{cases}\Rightarrow \hat{C}=\hat{E}_۱$$

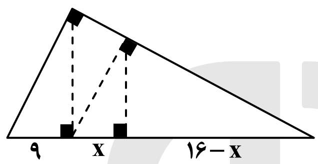
و

$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{D}_۲=۱۸۰ & \text{فرض}\\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰ & \text{از طرفی}\end{cases}\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۱$$

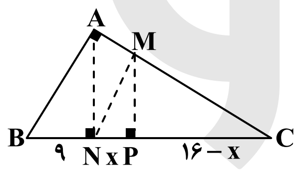
پس دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $k=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$ است پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{AED}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۲۵-۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{EDCB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱۶}{۲۵}=۰/۶۴$$

مثال: در شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x چقدر است؟



حل: از آن‌جا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA}=\frac{CN}{NB}=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\overset{\Delta}{ACN}: MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA}=\frac{CP}{PN}=\frac{۱۶-x}{x}$$

چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PN}$ است، یعنی:

$$\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}\Rightarrow ۱۶x=۱۴۴-۹x\Rightarrow ۲۵x=۱۴۴\Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۲۵}=\frac{۵۷۶}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

مثال: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را K در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت تشابه) است، داریم:

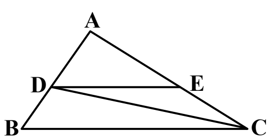
$$\text{نسبت مساحت‌ها}=\frac{۲}{۳}\times\text{نسبت اضلاع}\Rightarrow k^۲=\frac{۲}{۳}k\xrightarrow[(k\neq ۰)]{\div k}k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر } k'=\frac{۱}{k}=\frac{۳}{۲}$$

حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k'=\frac{۳}{۲}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=k'^۲=(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

مثال: در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

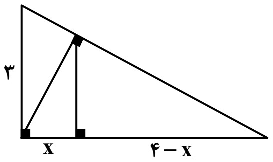
حل:



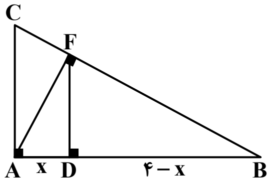
$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\cdot EC}{\frac{۱}{۲}h\cdot AE}=\frac{EC}{AE}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{۵}{۸}$$

$$S_{ADE}=(\frac{۵}{۸})^۲S_{ABC}=\frac{۲۵}{۶۴}S_{ABC}\Rightarrow S_{DECB}=S_{ABC}-\frac{۲۵}{۶۴}S_{ABC}=\frac{۳۹}{۶۴}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{DECB}}{S_{ADE}}=\frac{۳۹}{۲۵}=\frac{۱۵۶}{۱۰۰}=۱/۵۶$$

مثال: در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



حل:



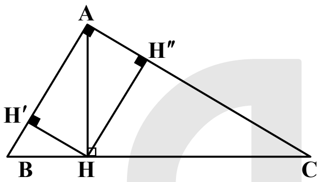
$$FD^{۲} = x(۴-x)$$

$$\frac{۴-x}{۴} = \frac{\sqrt{x(۴-x)}}{۳} \text{ تشابه}$$

$$۳\sqrt{۴-x} = ۴\sqrt{x} \Rightarrow ۹(۴-x) = ۱۶(x) \Rightarrow ۲۵x = ۳۶ \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱/۴۴$$

مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

حل:



$$S_{ABC} = ۵S_{ABH} \Rightarrow S_{ACH} = ۴S_{ABH}$$

چون دو مثلث ABH و ACH متشابهند و نسبت مساحت‌هایشان ٤ است، پس نسبت تشابهشان ۲ است. چون دو مثلث متشابهند، نسبت هر دو جزء طولیشان نسبت تشابه است.

$$\frac{HH'}{HH''} = \frac{۱}{۲}$$

مثال: مثلثی به طول اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ٤ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیش‌ترین محیط از مثلث اول کدام است؟

حل: اگر دو مثلث متشابه غیرمنطبق باشند، برای آن‌که بیش ترین محیط را به‌دست آوریم، ۳ را متناظر با دومین ضلع مثلث دوم در نظر می‌گیریم.

از طرفی نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است.

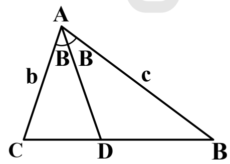
$$\frac{\text{محیط۱}}{\text{محیط۲}} = \frac{\text{محیط۱}}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \text{محیط۱} = ۱۲\times\frac{۳}{۴} = ۹$$

مثال: در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = ۲\hat{B}$، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه B است).

۱) $a^{۲} = b^{۲}$ ۲) $b^{۲} = ac$ ۳) $a^{۲} - b^{۲} = bc$ ٤) $a^{۲} - c^{۲} = bc$

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

نیمساز A را رسم می‌کنیم:



$$ACD \sim ABC \Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^{۲}}{a}$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{BD+DC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c} = \frac{b^{۲}}{a}$$

$$\Rightarrow a^{۲} = b(b+c) \Rightarrow a^{۲} - b^{۲} = bc$$

مثال: در مثلث ABC داریم $\hat{A} = ۷۰^\circ$ و $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و ضلع $Ab = ۱۸$ ، در مثلث MNP داریم $\hat{N} = ۶۰^\circ$ و $\hat{M} = ۷۰$، اگر مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{۹}{۴}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

حل:

$$\left.\begin{aligned} A = ۷۰^\circ \;,\; B = ۵۰^\circ &\Rightarrow C = ۶۰^\circ \\ \hat{N} = ۶۰^\circ \;,\; \hat{M} = ۷۰^\circ &\Rightarrow \hat{P} = ۵۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \simeq \overset{\triangle}{MNP}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \frac{AB}{MP} = \frac{۳}{۲}$$