کنکوری دات بلاگ تقدیم میکند

- تست های فصل به فصل دروس اختصاصی
- پاسخ پرسش های ارائه شده در کتاب درسی
- ارائه مختصر، مفید و کاربردی نکات کنکوری

از مطالعه لذت ببرید

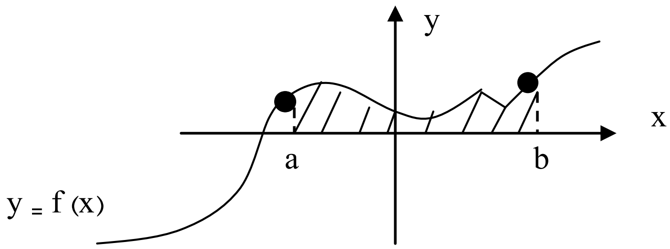
سرشخ

شدن با کنکور

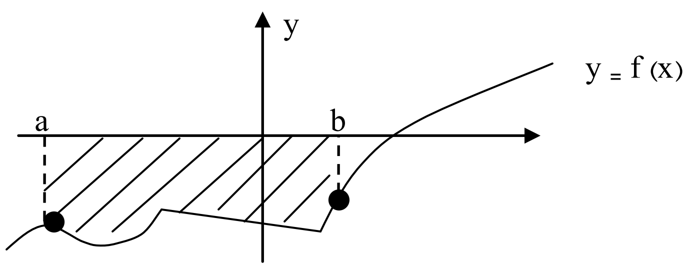
www.konkoori.blog.ir

» کنکور چیزی جز کتاب نیست و کتاب خواندن، کار دانش آموزان حرفه ای

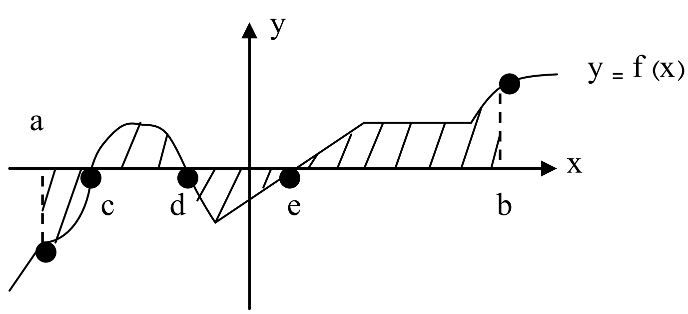
انتگرال معین :



$\int_a^b f(x)\ dx$ همان مساحت ناحیه هاشورزده می‌باشد و لذا عددی مثبت است .



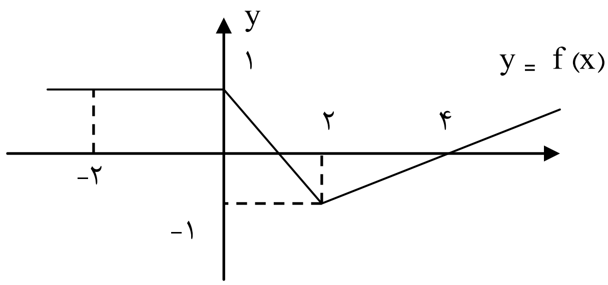
$\int_a^b f(x)\ dx$ برابر قرینه مساحت ناحیه هاشورزده میباشد و لذا عددی منفی است .



$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^d f(x)\ dx + \int_d^e f(x)\ dx + \int_e^b f(x)\ dx$$

$$-\qquad\qquad +\qquad\qquad -\qquad\qquad +$$

تست : شکل مقابل نمودار تابع f است ،
حاصل $\int_{-۲}^{۴} f(x)\ d(x)$ کدام است ؟



(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $-\frac{۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{۳}{۲}$

حل : (۳)

مثال : مقدار انتگرال‌های زیر را بدست آورید .

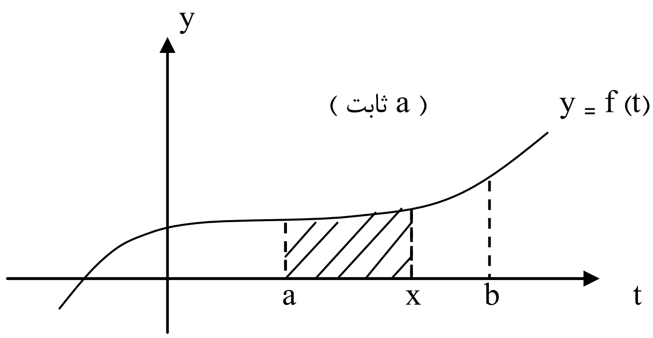
(۱) $\int_{-۵}^{۴} \left(\frac{x+۲}{۳}\right)\ dx$

جواب : $\left(\frac{۹}{۲}\right)$

(۲) $\int_{-۲}^{۵} \left(\frac{|x-۳|-۴}{۲}\right)\ dx$

جواب : $\left(-\frac{۲۷}{۴}\right)$

اولین قضیه اساسی حساب انتگرال :



(f بر $[a\,,b]$ پیوسته است)

$\int_a^x f(t)\ dt = A(x)$ (تابع مساحت)

نکته :

$A'(x) = f(x)$ و x (متغیر) ⟵ حد بالای انتگرال‌گیری

$a < x < b$ t (متغیر) ⟵ (متغیر انتگرال‌گیری)

مثال : اگر $h(x) = \int_۲^x \frac{\cos(۴t)\ dt}{۱+t^۴}$ و $y = \frac{h(x)}{۲x}$ آنگاه y' را بدست آورید .

حل :

$$y' = \frac{\left[\frac{\cos ۴x}{۱+x^۴} \times ۲x\right] - ۲\int_۲^x \frac{\cos ۴t}{۱+t^۴}\, dt}{۴x^۲} \quad \begin{bmatrix} y' = \frac{h'(x)\ (۲x) - ۲h(x)}{(۲x)^۲} \\ h'(x) = \frac{\cos ۴x}{۱+x^۴} \end{bmatrix}$$

نکته :

$$A = \int_a^u f(t)\ dt \implies A' = u'\, f(u)$$

مثال :

$$A = \int_۳^{x^۳} \frac{\sin ۲t}{۱+t^۲}\, dt \implies A' = ۳x^۲ \left(\frac{\sin ۲x^۳}{۱+x^۶}\right)$$

دومین قضیه اساسی حساب انتگرال :

$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ ⟵ F یک تابع اولیه دلخواه تابع پیوسته f است .

(نتیجه) (فرض)

مثال : $\int_{۲}^{۳} ۳x^{۲}\ dx = [x^{۳}]_{۲}^{۳} = [(۳)^{۳} - (۲)^{۳}] = ۲۷ - ۸ = ۱۹$

$f(x) = ۳x^{۲}$ و $F(x) = x^{۳}$

فرمول‌های اساسی تابع اولیه‌گیری (انتگرال‌گیری) (نامعین)

(۱) $\int dx = x + C$ C عددی ثابت است

(۲) $\int x^{n}\, dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} + C \quad (n \neq -۱)$

(۳) $\int \frac{dx}{x} = \text{Ln}|x| + C$

(۴) $\int e^{ax}\, dx = \frac{۱}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq ۰)$

(۵) $\int \sin ax\ dx = -\frac{۱}{a} \cos ax + C \quad (a \neq ۰)$

(۶) $\int \cos ax\ dx = \frac{۱}{a} \sin ax + C \quad (a \neq ۰)$

(۷) $\int (۱ + \tan^{۲} ax)\ dx = \frac{۱}{a} \tan ax + C \quad (a \neq ۰)$

(۸) $\int (۱ + \cot^{۲} ax)\ dx = -\frac{۱}{a} \cot ax + C \quad (a \neq ۰)$

(۹) $\int \tan ax\ dx = -\frac{۱}{a} \text{Ln}|\cos ax| + C \quad (a \neq ۰)$

(۱۰) $\int \cot ax\ dx = \frac{۱}{a} \text{Ln}|\sin ax| + C \quad (a \neq ۰)$

انتگرال توان ساده مثلثاتی با کمان غیر از x

(۱) $\int \sin u\ du = -\cos u + C$

مثال $\int \sin(x^۲) \times (۲x)\ dx = -\cos x^۲ + C$

(۲) $\int \cos u\ du = \sin u + C$

مثال $\int \cos(\sqrt{x}) \times \frac{۱}{\sqrt{x}}\ dx = ۲\sin\sqrt{x} + C$

(۳) $\int (۱ + \tan^۲ u)\ du = \tan u + C$

مثال $\int (۱ + \tan^۲(\sin x)) \cos x\ dx = \tan(\sin x) + C$

(۴) $\int (۱ + \cot^۲ u)\ du = -\cot u + C$

مثال $\int (۱ + \cot^۲ x^۳)(۵x^۲)\ dx = -\frac{۵}{۳}\cot x^۳ + C$

نکته : هرگاه یک نقطه از منحنی مشخص باشد ، آنگاه میتوان عدد ثابت C را نیز پیدا کرد .

تست : هرگاه $f'(x) = ۳x^۲ + ۴x$ و $f(-۱) = ۲$ ، آنگاه $f(۲)$ کدام است ؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

حل : (۲)

$$f(x) = \int (۳x^۲ + ۴x)\ dx = x^۳ + ۲x^۲ + C$$

$$f(x) = x^۳ + ۲x^۲ + ۱$$

$$f(-۱) = -۱ + ۲ + C = ۲ \Longrightarrow C = ۱$$

$$f(۲) = ۸ + ۸ + ۱ = ۱۷$$

نکته : هرگاه حاصلضرب دو عبارت مثلثاتی به گونه‌ای باشد که یکی مشتق دیگری باشد ، $(u'u^n)$ داریم :

$$\int u'u^n\ du = \frac{۱}{n+۱} u^{n+۱} + C$$

مثال : $\int \sin x \sqrt[5]{\cos x}\ dx =$

جواب : $= -\frac{5}{6}\ (\cos x)^{\frac{6}{5}} + C$

نکته : برای محاسبه‌ی انتگرال‌های تک‌جمله‌ای سینوس و کسینوس با توان‌های زوج ، به فرمول‌های مثلثاتی زیر توجه کنید :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

مثال : $\int \cos^2 5x\ dx =$

جواب : $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\sin 10x + C$

نکته : برای محاسبه‌ی انتگرال‌های تک‌جمله‌ای سینوس و کسینوس با توان‌های فرد ، ابتدا یکی از توان‌ها را جدا کرده و سپس توان زوج باقیمانده را با استفاده از فرمول‌های زیر جایگزین می‌کنیم :

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

مثال : $\int \sin^3 dx\ dx = \int \sin x\ \sin^2 x\ dx = \int \sin x\ (1 - \cos^2 x)\ dx =$

$$= \int \sin x\ dx + \int -\sin x\ \cos^2 x\ dx\ = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

نکته : معمولا هرگاه $\sin^{2} x$ و $\cos^{2} x$ در مخرج عبارت مثلثاتی باشند برای محاسبه‌ی انتگرال از فرمول‌های زیر استفاده میکنیم .

$$\frac{1}{\sin^{2} x} = 1 + \cot^{2} x$$

$$\frac{1}{\cos^{2} x} = 1 + \tan^{2} x$$

مثال : $\int \frac{\tan^{7} x}{\cos^{2} x}\, dx = \int \tan^{7} x\ (1 + \tan^{2} x)\ dx = \frac{1}{8} \tan^{8} x + C$

نکته : (محاسبه‌ی انتگرال تانژانت با توان زوج)

برای محاسبه ، توان‌های فرد کوچکتر از توان داده شده یک در میان ، ابتدا مثبت و سپس منفی می‌نویسیم (تا x)

مثال : $\int \tan^{6} x\ dx = \frac{1}{5} \tan^{5} x - \frac{1}{3} \tan^{3} x + \tan x - x + C$

مثال : $\int \tan^{2} x\ dx = \tan x - x + C$

راه دوم (تشریحی) $\int (\tan^{2} x + 1 - 1)\ dx = \int (1 + \tan^{2} x)\ dx - \int dx = \tan x - x + C$

نکته : (محاسبه انتگرال کتانژانت با توان زوج)

توان‌های فرد کوچکتر از توان داده شده ، یک در میان ، ابتدا منفی و سپس مثبت می‌نویسیم و باید دقت کنیم که علامت x و جمله قبلش یکی باشد .

مثال : $\int \cot^{8} x\ dx = -\frac{1}{7} \cot^{7} x + \frac{1}{5} \cot^{5} x - \frac{1}{3} \cot^{3} x + \cot x + x + C$

مثال : $\int \cot^{2} x\ dx = -\cot x - x + C$

راه دوم (راه تشریحی) $\int (1 + \cot^{2} x - 1)\ dx = \int (1 + \cot^{2} x)\ dx - \int dx = -\cot x - x + C$

انتگرال (جزء صحیح)

هرگاه انتگرال معینی از جزء صحیح داشتیم ، ابتدا آن را در فواصل دو عدد متوالی صحیح می‌نویسیم و سپس انتگرال‌ها را یکی یکی حساب می‌کنیم .

تست : حاصل انتگرال $\int_{۰}^{۳} ۲x\,[x]\,dx$ کدام است ؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

حل : (۴)

$$\int_{۰}^{۱} ۲x[x]\ dx + \int_{۱}^{۲} ۲x[x]\ dx + \int_{۲}^{۳} ۲x[x]\ dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} ۲x\,(۰)\ dx + \int_{۱}^{۲} ۲x\,(۱)\ dx + \int_{۲}^{۳} ۲x\,(۲)\ dx = ۰ + \int_{۱}^{۲} ۲x\ dx + \int_{۲}^{۳} ۴x\ dx$$

$$x^{۲}\ \Big|_{۱}^{۲} + ۲x^{۲}\ \Big|_{۲}^{۳} = ۴ - ۱ + ۱۸ - ۸ = ۱۳$$

انتگرال (قدرمطلق)

ابتدا ریشه عبارت داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم و سپس :

الف) اگر ریشه بین دو حد انتگرال باشد آن را به دو انتگرال تبدیل و با توجه به حدود ، علامت قدرمطلق را حذف می‌کنیم .

ب) اگر ریشه بین دو حد انتگرال نباشد علامت قدرمطلق را با توجه به حدود انتگرال حذف می‌کنیم .

مثال :

$$\int_{-۱}^{۳} |x - ۱|\ dx$$

حل :

$$\int_{-۱}^{۱} -(x - ۱)\ dx + \int_{۱}^{۳} (x - ۱)\ dx = -\frac{(x-۱)^{۲}}{۲}\ \Big|_{-۱}^{۱} + \frac{(x-۱)^{۲}}{۲}\ \Big|_{۱}^{۳}$$

$$= ۰ - (-۲) + ۲ - ۰ = ۴$$

مثال :

$$\int_{۰}^{۲} |x|\ x^{۴}\ dx$$

حل : $\int_{0}^{2} x^{5}\,dx = \frac{1}{6}x^{6}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{6}(2)^{6} = \frac{1}{3}(2^{5}) = \frac{32}{3}$

انتگرال‌های خاص :

$$(1)\quad \int \frac{1}{1+x^{2}}\,dx = \text{Arc }\tan x + C$$

$$(2)\quad \int \frac{du}{1+u^{2}} = \text{Arc }\tan u + C$$

$$(3)\quad \int \frac{du}{a^{2}+u^{2}} = \frac{1}{a}\text{Arc }\tan\frac{u}{a} + C$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx = \text{Arc }\sin x + C$$

$$(5)\quad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}} = \text{Arc }\sin u + C$$

$$(6)\quad \int \frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \frac{1}{a}\text{Arc }\sin\frac{u}{a} + C$$

$$(7)\quad \int \frac{du}{u} = \text{Ln}|u| + C$$

$$(8)\quad \int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

مثال : $\int \frac{2+2\tan^{2}x}{\sqrt{1-\tan^{2}x}}\,dx = 2\int \frac{(1+2\tan^{2}x)}{\sqrt{1-\tan^{2}x}} = 2\text{Arc }\sin(\tan x) + C$

مثال : $\int \frac{dx}{4x+x^{2}+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^{2}+1} = \text{Arc }\tan(x+2) + C$

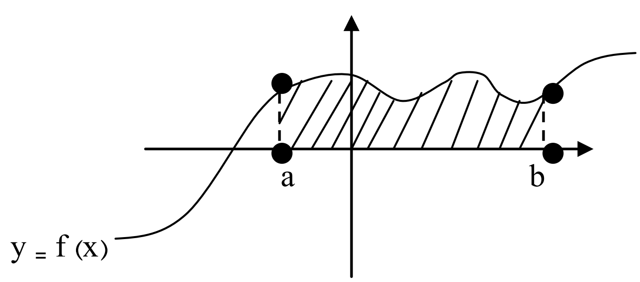
تست : حاصل $\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos^{2}x^{2}\,\sin x^{2}\,dx$ کدام است ؟

(۱) $\frac{1}{6}$　(۲) $\frac{1}{4}$　(۳) $\frac{1}{3}$　(۴) $\frac{1}{2}$

حل : (۱)

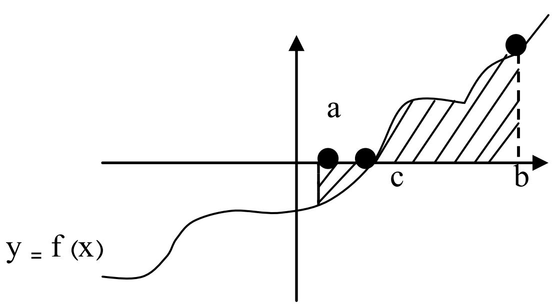
سطح محصور (بین منحنی $y = f(x)$ و محور طول‌ها و دو خط $x = a$ و $x = b$)

(حالت اول)



$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

(حالت دوم)



$$S = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

نکته : (حالت دوم) اگر از حل $y = ۰$ طول نقطه‌ای بین a و b بدست آمد (مانند نقطه‌ی بطول c) باید سطح محصور را در دو مرحله بدست آوریم .

مثال : (حالت اول) مطلوبست سطح بین منحنی $f(x) = ۳x^۲ + ۴x$ و محور طول‌ها و دو خط $x = ۰$ و $x = ۳$

حل : $$3x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x(3x+4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

هیچکدام از ریشه‌ها بین $x = 0$ و $x = 3$ نیستند .

$$\left|\int_0^3 (3x^2 + 4x)\,dx\right| = x^3 + 2x^2 \Big|_0^3 = 27 + 18 = 45 \quad (\text{جواب})$$

مثال : (حالت دوم) مطلوبست سطح محصور بین منحنی $f(x) = 5x^2 - 5x$ و محور طول‌ها و خطوط $x = -1$ و $x = 3$

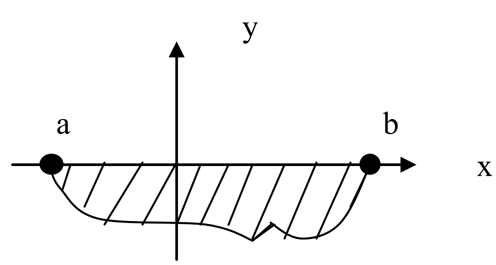
حل : $$5x^2 - 5x = 0 \Longrightarrow 5x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \left|\int_{-1}^0 (5x^2 - 5x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 (5x^2 - 5x)\,dx\right| + \left|\int_1^3 (5x^2 - 5x)\,dx\right| =$$

جواب : $\left(\frac{85}{3}\right)$

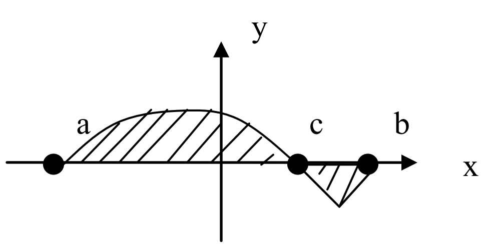
سطح محصور (بین منحنی $y = f(x)$ و محور طول‌ها)

(حالت اول)



$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

(حالت دوم)



$$S = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

از حل معادله $y = ۰$ دو ریشه حاصل می‌شود . از حل معادله $y = ۰$ سه ریشه حاصل می‌شود .

مثال : (حالت اول) مطلوبست سطح بین منحنی $y = -۴x^۲ - ۸x$ و محور طول‌ها .

حل : (دو ریشه) $y = ۰ \Longrightarrow -۴x(x+۲) = ۰ \Longrightarrow x = ۰$ یا $x = -۲$

$$S = \left|\int_{-۲}^{۰}(-۴x^۲ - ۸x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲\right]_{-۲}^{۰}\right|$$

$$= \left|-\left(\frac{۳۲}{۳} - ۱۶\right)\right| = \left|\frac{۳۲-۴۸}{۳}\right| = \frac{۱۶}{۳}$$

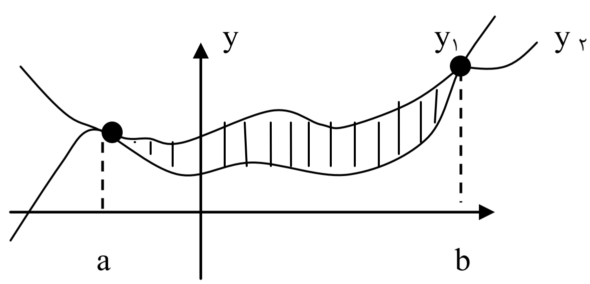
مثال : (حالت دوم) مطلوبست سطح بین منحنی $y = ۴x^۳ - ۴x$ و محور طول‌ها .

حل : (سه ریشه) $y = ۰ \Longrightarrow ۴x(x^۲ - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰$ یا $x = -۱$ یا $x = ۱$

$$S = \left|\int_{-۱}^{۰}(۴x^۳ - ۴x)\,dx\right| + \left|\int_{۰}^{۱}(۴x^۳ - ۴x)\,dx\right| = \left|x^۴ - ۲x^۲\right]_{-۱}^{۰}\right| + \left|x^۴ - ۲x^۲\right]_{۰}^{۱}\right| = ۲$$

سطح بین دو منحنی :

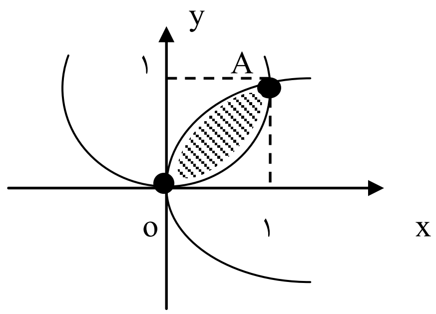
دو منحنی را تلاقی داده و ریشه‌های بدست آمده را $x = a$ و $x = b$ در نظر می‌گیریم .



$$S = \left|\int_a^b (y_۱ - y_۲)\,dx\right|$$

مثال : سطح محصور بین دو منحنی $y = x^۲$ و $x = y^۲$ را بدست آورید .

حل : $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = \sqrt{x}$



$$\begin{cases} y_۱ = x^۲ \\ y_۲ = \sqrt{x} \end{cases} \Longrightarrow x^۲ = \sqrt{x} \Longrightarrow x^۴ - x = ۰ \Longrightarrow x^۳(x - ۱) = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۱$$

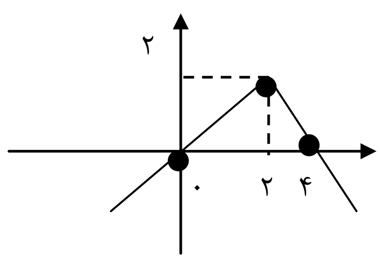
$O(۰, ۰)$ و $A(۱, ۱)$

$$S = \left|\int_۰^۱ \left(x^۲ - \sqrt{x}\right) dx\right| = \left|\int_۰^۱ x^۲\, dx - \int_۰^۱ x^{\frac{۱}{۲}}\, dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{۱}{۳}x^۳\right]_۰^۱ - \left[\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right]_۰^۱\right| = \left|\frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳}\right| = \left|-\frac{۱}{۳}\right| = \frac{۱}{۳}$$

جمع‌بندی مبحث انتگرال به همراه چندین تست :

تست : با توجه به شکل رو به رو ، حاصل انتگرال $\int_۰^۲ (۲ - |x - ۲|)\, dx$ کدام است ؟



(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۳/۵ (۴) ۴

تست : اگر $f(x) = |x| - [x]$ ، حاصل $\int_{-۱}^{۲} f(x)\, dx$ کدام است ؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) ۳

تست : اگر $\int \frac{۵x^{۲}-۳x}{\sqrt{x}}\,dx = f(x)\left(۲x\sqrt{x}\right) + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $x-۱$ (۲) $x-۲$ (۳) $۳x-۲$ (۴) $۵x-۳$

تست : مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = |۲x-۱|$ و محور xها و دو خط $x = ۱$ و $x = -۱$ کدام است ؟

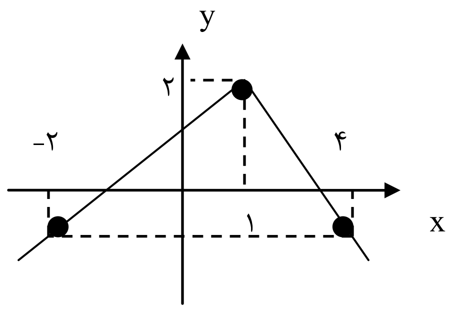
(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) ۳

تست : با شرط $x > ۱$ داریم : $\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}}\,dx = x\,.\,f(x) + C$ ، $f(x)$ برابر کدام است ؟

(۱) $۳+۲\sqrt{x}$ (۲) $۳+\sqrt{x}$ (۳) $۳x-\sqrt{x}$ (۴) $۲x-۳\sqrt{x}$

تست : با توجه به نمودار تابع $f(x) = ۲-|x-۱|$ ، حاصل انتگرال معین $\int_{-۲}^{۴} f(x)\,dx$ ، کدام است ؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{۷}{۲}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{۵}{۲}$



تست : اگر $\int \frac{(۱-\sqrt{x})^۲}{۲\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times f(x) + C$ باشد ، $f(x)$ کدام است ؟

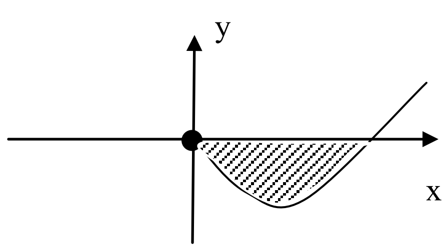
(۱) $۱ - \sqrt{x} + \frac{۱}{۳}x$ (۲) $۲ - \sqrt{x} + ۳x$

(۳) $۲ - \sqrt{x} + \frac{۲}{۳}x$ (۴) $۱ + \sqrt{x} - \frac{۱}{۳}x$

تست : حاصل $\int_{-۲}^{۲}(x + [x])\,dx$ ، کدام است ؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

تست : با توجه به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، مساحت ناحیه سایه‌زده کدام است ؟

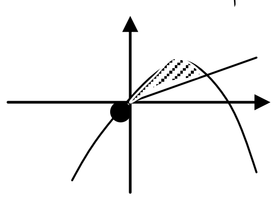


(۱) $\frac{۱}{۶}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۳}$ (۴) $\frac{۲}{۳}$

تست : اگر $G(x) = \int_{۲}^{x} \frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\, dt$ ، آنگاه مشتق راست تابع $y = x \times G(x)$ ، در نقطه $x = ۲$ کدام است ؟

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۴}{۳}$ (۴) $\frac{۵}{۳}$

تست : مساحت ناحیه زیر منحنی به معادله $y = -x^۲ + ۵x$ و بالای خط $y = x$ کدام است ؟



(۱) $\frac{۱۶}{۳}$ (۲) $\frac{۲۲}{۳}$ (۳) $\frac{۲۸}{۳}$ (۴) $\frac{۳۳}{۳}$

تست : حاصل $\int_{-۲}^{۲} (۲x + |x|)\, dx$ کدام است ؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

تست : اگر $\int \frac{(۱+\sqrt{x})^۲ - x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x}\,.\, f(x) + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $۱ + \sqrt{x}$ (۲) $۱ + ۲\sqrt{x}$ (۳) $۲ + \sqrt{x}$ (۴) $۲ + ۲\sqrt{x}$

تست : اگر $\int \frac{۴x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} d(x) = \sqrt[۳]{x}\,.\,f(x) + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $x-۴$ (۲) $x-۲$ (۳) $۲x-۱$ (۴) $۴x-۱$

حل : (۱)

$$\int \frac{۴x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} d(x) = \sqrt[۳]{x}\,.\,f(x) + C$$

$$\int \frac{۱}{۳}\,(۴x-۴)\,x^{-\frac{۲}{۳}}\,dx = \int \left(\frac{۴}{۳}\,x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۴}{۳}\,x^{-\frac{۲}{۳}}\right) dx = \frac{۴}{۳} \times \frac{۳}{۴} x^{\frac{۴}{۳}} - \frac{۴}{۳} \times ۳x^{\frac{۱}{۳}} + C$$

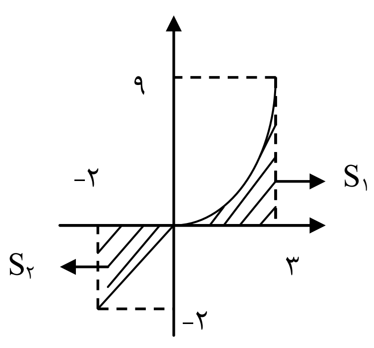
$$= x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}} + C = \sqrt[۳]{x}\,(x-۴) + C \implies f(x) = x-۴$$

برای انتگرال‌گیری از تابع فوق از قاعده‌ی $n \neq -۱$ و $\int x^{n}\,dx = \frac{۱}{n+۱}\,x^{x+۱} + C$ استفاده کردیم .

تست : مساحت ناحیه‌ی بین نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x & -۲ \le x \le ۰ \\ x^{۲} & ۰ \le x \le ۳ \end{cases}$ و محور x ها و دو خط $x = -۲$ و $x = ۳$ ، کدام است ؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

حل : (۴) برای محاسبه‌ی مساحت بین نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x & -۲ \le x \le ۰ \\ x^{۲} & ۰ \le x \le ۳ \end{cases}$ و محور x ها و دو خط $x = -۲$ و $x = ۳$ به نمودار رو به رو دقت کنید :



$$S_{۲} = \int_{۰}^{۳} x^{۲}\,dx = \frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۳} = ۹$$

کل $S = S_{۱} + S_{۲} = ۲ + ۹ = ۱۱$

$S_۱$ را هم میتوانیم با استفاده از $\left|\int_{-۲}^{۰} x\,dx\right|$ محاسبه کنیم .

تست : اگر $\int \frac{x-۱}{x^۳}\,dx = \frac{f(x)}{۲x^۲} + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $-x+۲$ (۲) $x-۲$ (۳) $-۲x+۱$ (۴) $۲x-۱$

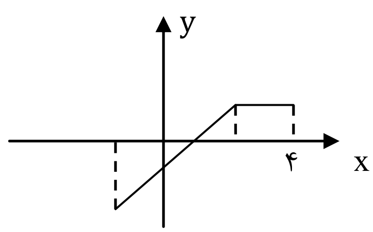
حل : (۳)

$$\int \frac{x-۱}{x^۳}\,dx = \frac{f(x)}{۲x^۲} + C \implies \int (x-۱)\,x^{-۳} = \int (x^{-۲} - x^{-۳})\,dx = \frac{x^{-۱}}{-۱} - \frac{x^{-۲}}{-۲} + C$$

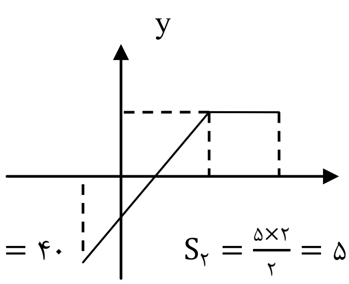
$$= -\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۲x^۲} + C = \frac{-۲x+۱}{۲x^۲} + C \implies f(x) = -۲x+۱$$

تست : با توجه به نمودار تابع $f(x) = x - |x-۲|$ ، حاصل انتگرال معین $\int_{-۱}^{۴} f(x)\,dx$ ، کدام است ؟

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۱   (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۲



حل : (۲)



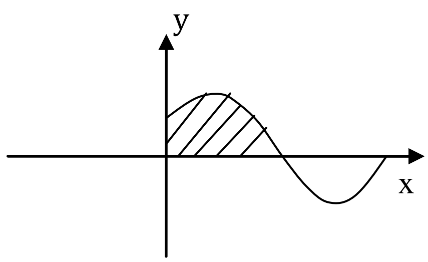
$S_۱ = \frac{۲\times۴}{۲} = ۴$ $S_۲ = \frac{۵\times۲}{۲} = ۵$

$$f(x) = x - |x-۲|$$

$$f(-۱) = -۴ \quad f(۴) = ۲ \quad f(۱) = ۰\ , \quad f(۲) = ۲$$

$$\int_{-۱}^{۴} f(x)\,dx = \int_{-۱}^{۱} f(x)\,dx + \int_{۱}^{۴} f(x)\,dx = -۴ + ۵ = ۱$$

تست : با توجه به قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sin x + \cos x$ در شکل مقابل ، مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده کدام است ؟



(۱) $۲-\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۲}$

(۳) ۲ (۴) $۱+\sqrt{۲}$

حل : (۴) با توجه به قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ ، مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده برابر با انتگرال معین تابع f از $x=۰$ تا اولین (کوچکترین) ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x)=\sin x+\cos x$ است (کوچک‌ترین طول از مبداء مثبت منحنی f) . پس داریم :

$$\sin x+\cos x=۰ \implies \sqrt{۲}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۰ \implies x+\frac{\pi}{۴}=k\pi$$

$$\implies x=k\pi-\frac{\pi}{۴} \xrightarrow[k=۱]{\text{کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت}} x=\frac{۳\pi}{۴}$$

نکته : برای حل معادله‌ی $\sin x+\cos x=۰$ ، می‌توانیم اولین کمان مثبت که در آن $\sin x=-\cos x$ است را نیز مشخص کنیم .

$$\sin x=-\cos x \implies x=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$S_{\text{سایه‌زده}}=\int_{۰}^{\frac{۳\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)\,dx=\left[(-\cos x+\sin x)\right]_{۰}^{\frac{۳\pi}{۴}}=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)-(-۱+۰)=\sqrt{۲}+۱$$

تست : حاصل $\int_{-۲}^{۲}(۲-[x])\,dx$ کدام است ؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

حل : (۳) روش اول :

$$\int_{-۲}^{۲}(۲-[x])\,dx=\int_{-۲}^{-۱}(۲-[x])\,dx+\int_{-۱}^{۰}(۲-[x])\,dx+\int_{۰}^{۱}(۲-[x])\,dx+\int_{۱}^{۲}(۲-[x])\,dx$$

$$\int_{-۲}^{۲}(۲-[x])\,dx=\int_{-۲}^{-۱}\big(۲-(-۲)\big)\,dx+\int_{-۱}^{۰}\big(۲-(-۱)\big)\,dx+\int_{۰}^{۱}\big(۲-(۰)\big)\,dx+\int_{۱}^{۲}\big(۲-(۱)\big)\,dx$$

$$\int_{-۲}^{-۱}۴\,dx+\int_{-۱}^{۰}۳\,dx+\int_{۰}^{۱}۲\,dx+\int_{۱}^{۲}۱\,dx=۴\times۱+۳\times۱+۲\times۱+۱\times۱=۱۰$$

تست : اگر $\int \frac{x^۲+۱}{x\sqrt{x}}\,dx = \frac{f(x)}{۳\sqrt{x}}$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $۲x-۳$ (۲) $۲x+۲$ (۳) $۲x^۲-۶$ (۴) $۲x^۲+۳$

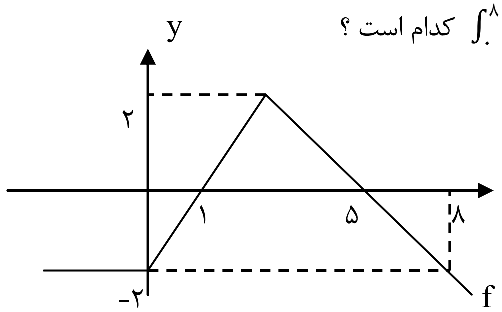
حل : (۳)

$$\int \frac{x^۲+۱}{\sqrt[۲]{x^۳}}\,dx = \int \frac{x^۲+۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}\,dx = \int \left(x^{\frac{۱}{۲}} + x^{-\frac{۳}{۲}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + \frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}} + C$$

$$\frac{۲}{۳}x\sqrt{x} - \frac{۲}{\sqrt{x}} + C = \frac{۲x^۲-۶}{۳\sqrt{x}} + C$$

بنابراین $f(x)$ برابر با $۲x^۲-۶$ است .

تست : شکل مقابل نمودار تابع f است . حاصل $\int_۰^۸ f(x)\,dx$ کدام است ؟



(۱) $-\frac{۱}{۲}$ (۲) صفر

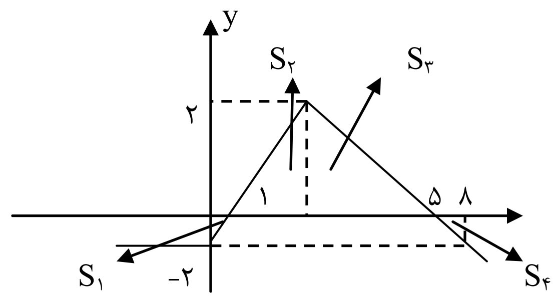
(۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) ۱

حل : (۲)

$$\int_۰^۸ f(x)\,.dx = -S_۱ + S_۲ + S_۳ - S_۴ = ۰ \xRightarrow[S_۳ = S_۴]{S_۱ = S_۲}$$

$$S_۱ = \frac{۱\times۲}{۲} = ۱ \;,\; S_۳ + S_۲ = \frac{۴\times۲}{۲} = ۴ \;,\; S_۴ = \frac{۳\times۲}{۲} = ۳$$

$$\int_۰^۸ f(x)\,.dx = -S_۱ + S_۲ - S_۳ = -۱ + ۴ - ۳ = ۰$$



تست : حاصل $\int \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}\,dx$ برابر کدام است ؟

(۱) $x+\sin x+C$ (۲) $x-\sin x+C$

(۳) $-x+\cos x+C$ (۴) $x-\cos x+C$

حل : (۱)

$$\int \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}\,dx=\int \frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x}\,dx=\int \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}\,dx=$$

$$\int(۱+\cos x)\,dx=x+\sin x+C$$

تست : حاصل $\int_{-۲}^{۱}[x]\ x\ dx$ کدام است ؟

(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۵}{۲}$ (۳) $\frac{۷}{۲}$ (۴) ۴

حل : (۳) بازه‌ی (۱ , ۲-) را به سه فاصله تقسیم می‌کنیم :

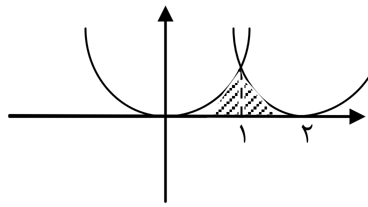
$$-۲<x<-۱ \Longrightarrow [x]=-۲\quad,\ -۱\le x<۰ \Longrightarrow [x]=-۱\quad,\quad ۰\le x<۱ \Longrightarrow [x]=۰$$

بنابراین داریم :

$$\int_{-۲}^{۱}[x]\,x\,dx=\int_{-۲}^{-۱}-۲x\,.\,dx+\int_{-۱}^{۰}-x\,.\,dx+\int_{۰}^{۱}۰\,dx=-x^۲\Big]_{-۲}^{-۱}-\frac{x^۲}{۲}\Big]_{-۱}^{۰}+۰=$$

$$\left(-۱-(-۴)\right)-\left(۰-\frac{۱}{۲}\right)=۳+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

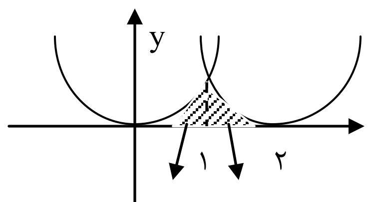
تست : مساحت ناحیه محدود به دو منحنی به معادلات $y = x^۲$ و $y = (x - ۲)^۲$ و محور xها کدام است ؟



(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$

(۳) ۱ (۴) $\frac{۴}{۳}$

حل : (۲) باید $S_۱$ و $S_۲$ را بطور مجزا محاسبه کرده و مجموع آن‌ها را به عنوان جواب ارائه دهیم . $S_۱$ سطح محصور بین نمودار $y = x^۲$ و محور xها در محدوده‌ی بین خطوط $x = ۰$ تا $x = ۱$ است و $S_۲$ سطح محصور بین نمودار $y = (x-۲)^۲$ و محور xها در محدوده‌ی بین خطوط $x = ۱$ تا $x = ۲$ است . بنابراین :



$$\left.\begin{aligned} S_۱ &= \left|\int_۰^۱ x^۲\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^۱\right| = \left|\frac{۱}{۳} - ۰\right| = \frac{۱}{۳} \\ S_۲ &= \left|\int_۱^۲ (x-۲)^۲\, dx\right| = \left|\left[\frac{(x-۲)^۳}{۳}\right]_۱^۲\right| = \left|۰ - \left(-\frac{۱}{۳}\right)\right| = \frac{۱}{۳} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = S + S_۲ = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

تست : اگر $\int \frac{۱-x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{x}\,.\,f(x) + C$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $۲ - ۳x$ (۲) $۲ - x$ (۳) $۳ - x$ (۴) $۳ - ۲x$

حل : (۳)

$$\int \frac{۱-x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{۱}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx = \int \left(x^{-\frac{۱}{۲}} - x^{\frac{۱}{۲}}\right) dx = \frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} - \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + C = ۲\sqrt{x} - \frac{۲}{۳}x\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{۱-x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{x}\,.\,f(x) + C \equiv \frac{۳}{۲}\sqrt{x}\,.\,f(x) + C \Longrightarrow f(x) = ۳ - x$$

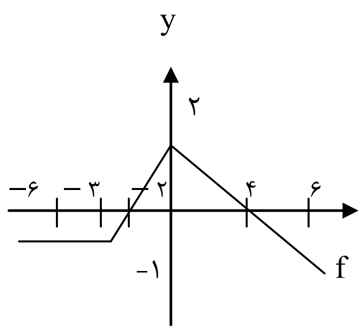
تست : حاصل $\int_۱^۲ \left(۱ - \frac{۱}{x}\right)^۲ dx$ کدام است ؟

(۱) $\frac{۳}{۲} - \ln ۲$ (۲) $\frac{۳}{۲} - \ln ۴$ (۳) $-\frac{۱}{۲} - \ln ۲$ (۴) $-\frac{۱}{۲} - \ln ۴$

حل : (۲) $\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(1-\frac{2}{x}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,x^{-2}}\right) dx = \underbrace{(x-2\ln x-x^{-1})}_{F(x)}\Big]_1^2 = F(2)-F(1)$

$= \left(2-\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(1-2\ln 1-1)=\frac{3}{2}-\ln 2^2=\frac{3}{2}-\ln 4$

تست : شکل مقابل نمودار تابع f است . $\int_{-6}^{6} f(x)\,dx$ برابر کدام است ؟



(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$

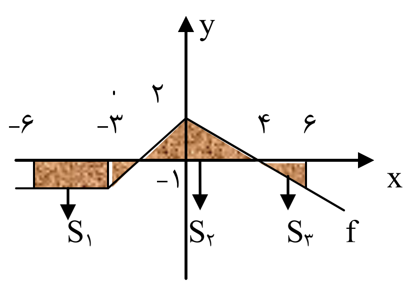
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

حل : (۳) می‌دانیم انتگرال معین $\int_b^a f(x)\,dx$ برابر با مساحت علامت‌دار محصور بین نمودار f و محور xها از خط $x=a$ تا خط $x=b$ است . پس :

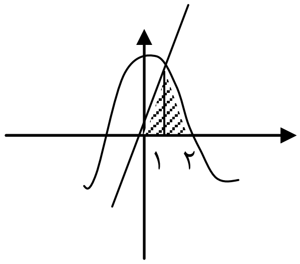
$\int_{-6}^{6} f(x)\,.\,dx = \int_{-6}^{-2} f(x)\,.\,dx + \int_{-2}^{4} f(x)\,.\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,.\,dx$

$= -S_1+S_2-S_3 = -\frac{1}{2}\times 1\times(4+3)+\frac{1}{2}\times 2\times 6-\frac{1}{2}\times 2\times 1 = -\frac{7}{2}+6-1=\frac{3}{2}$

دقت می‌کنیم ! عرض نقطه‌ای به طول ۶ برابر ۱- میباشد .



تست : مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=4-x^2$ و خط به معادله‌ی $y=3x$ و محور xها واقع در ناحیه‌ی اول کدام است ؟



(۱) $\frac{13}{6}$ (۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{۸}{۳}$ (۴) $\frac{۱۹}{۶}$

حل : (۴) $S = \int_{\cdot}^{۱} ۳x\,dx + \int_{۱}^{۲} (۴ - x^۲)\,dx = \frac{۳x^۲}{۲}\Big]_{\cdot}^{۱} + ۴x - \frac{x^۳}{۳}\Big]_{۱}^{۲} = \frac{۳}{۲} + ۸ - \frac{۸}{۳} - ۴ + \frac{۱}{۳}$

$= ۴ + \frac{۳}{۲} - \frac{۷}{۳} = \frac{۲۴+۹-۱۴}{۶} = \frac{۱۹}{۶}$

تست : اگر $\int x\left(۱ - ۵\sqrt{x}\right) dx = \frac{x^۲}{۲}\,.\,f(x) + C$ ، تابع f(x) کدام است ؟

(۱) $۱ - ۴\sqrt{x}$ (۲) $۱ - ۲\sqrt{x}$ (۳) $x - ۲\sqrt{x}$ (۴) $x - x\sqrt{x}$

حل : (۱) $\int \left(x - ۵x^{\frac{۳}{۲}}\right) dx = \frac{x^۲}{۲} - ۵ \times \frac{۲x^{\frac{۵}{۲}}}{۵} + C = \frac{x^۲}{۲}\left(۱ - ۴\sqrt{x}\right) + C$

تست : حاصل $\int_{\cdot}^{۱} \left(\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{(۱+x)^۲}\right) dx$ کدام است ؟

(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۵}{۴}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$

حل : (۲) $\int_{\cdot}^{۱} \left(\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{(۱+x)^۲}\,dx\right) = \frac{x^{\frac{۴}{۳}}}{\frac{۴}{۳}} - \frac{۱}{۱+x}\ \Big|_{\cdot}^{۱} = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۴}$

تست : اگر $f(x) = (x + |x|)[x]$ آنگاه $\int_{-۱}^{۲} f(x)\,dx$ برابر کدام است ؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل : (۳) $\int_{-۱}^{۲} f(x)\,dx = \int_{-۱}^{\cdot} f(x)\,dx + \int_{\cdot}^{۱} f(x)\,dx + \int_{۱}^{۲} f(x)\,dx =$

$$\int_{-۱}^{۰} ۰\, dx + \int_{۰}^{۱} ۰\, dx + \int_{۱}^{۲} ۲x\, dx = x^{۲} \Big|_{۱}^{۲} = ۴ - ۱ = ۳$$

تست : اگر $\int \left(۳\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} \right) dx = \sqrt{x}\,.\,f(x) + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

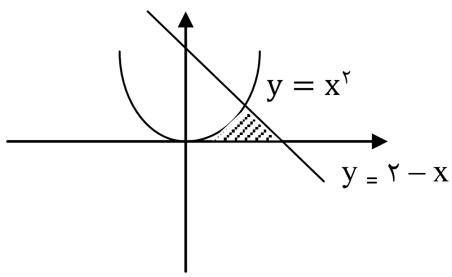
(۱) $۳x - ۱$ (۲) $۳x - ۲$ (۳) $۲x - ۲$ (۴) $x - ۲$

حل : (۳) $\frac{۲}{۳} \times ۳ \times x^{\frac{۳}{۲}} - ۲\sqrt{x} = \sqrt{x}(۲x - ۲) + C$

تست : با توجه به شکل زیر مساحت ناحیه سایه‌زده کدام است ؟

(۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۷}{۶}$

(۳) $\frac{۵}{۶}$ (۴) $\frac{۲}{۳}$



حل : (۳) $x^{۲} = ۲ - x \implies x = ۱ \;,\; x = -۲$ غ ق ق

محل برخورد خط با محور xها $y = ۲ - x = ۰ \implies x = ۲$

$$S = \int_{۰}^{۱} x^{۲}\, dx + \int_{۱}^{۲} (۲ - x)\, dx = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۶}$$

تست : اگر $\int \frac{۳x-۲}{\sqrt{x}}\, dx = f(x)\,.\,\sqrt{x} + C$ آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $۲x - ۱$ (۲) $۲x - ۴$ (۳) $۳x - ۲$ (۴) $۳x - ۴$

حل : (۲) $\int \left(۳x^{\frac{۱}{۲}} - ۲x^{-\frac{۱}{۲}} \right) dx = ۲x\sqrt{x} - ۴\sqrt{x} = (۲x - ۴)\sqrt{x} + C$

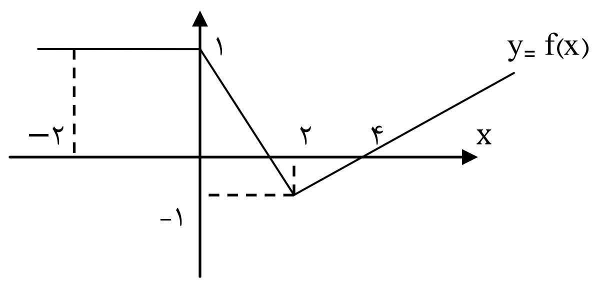
تست : حاصل $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۶}}(\cos^۲ x - \sin^۲ x)\,dx$ کدام است ؟

(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ (۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۴) $\sqrt{۲}$

حل : (۱)

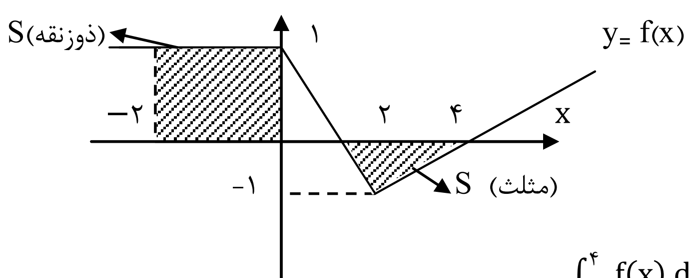
$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۶}} \cos ۲x\,dx = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

تست : شکل مقابل نمودار تابع f است . حاصل $\int_{-۲}^{۴} f(x)\,dx$ کدام است ؟



(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $-\frac{۱}{۲}$

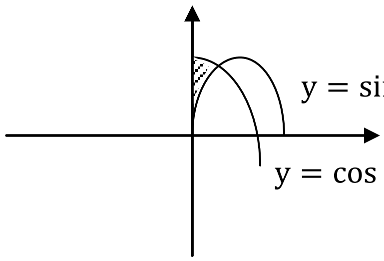
(۳) ۱ (۴) $\frac{۳}{۲}$



$$\int_{-۲}^{۴} f(x)\,dx = \left(\text{ذوزنقه}\right) S - S\left(\text{مثلث}\right) \Longrightarrow$$

$$۱ \times \frac{(۲+۳)}{۲} - \frac{۱\times۳}{۲} = \frac{۵}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۱$$

تست : مساحت ناحیه‌ی هاشورزده‌ی شکل مقابل کدام است ؟



(۱) $۲-\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۲}-۱$

(۳) $\frac{۱}{۲}\left(۲-\sqrt{۲}\right)$ (۴) $\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲}-۱\right)$

حل : (۴) $\left.\begin{matrix} y=\sin ۲x \\ y=\cos ۲x \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{\cos ۲x}{\cos ۲x} \Longrightarrow \tan ۲x = ۱ \Longrightarrow$

$۲x=\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow x=\frac{\pi}{۸}$ محل برخورد دو تابع

مشخص است که سطح محصور برابر است با سطح بین دو تابع $y=\sin ۲x$ و $y=\cos ۲x$ و خطوط $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۸}$ بنابراین :

$$S=\left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}}(\cos ۲x-\sin ۲x)\,dx\right|=\left|\frac{۱}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x\,\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۸}}\right|$$

$$\left|\left(\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}\right)-\left(\frac{۱}{۲}\sin ۰+\frac{۱}{۲}\cos ۰\right)\right|=\left|\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)-\frac{۱}{۲}\right|=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$$

تست : مساحت ناحیه‌ی بین منحنی به معادله‌ی $y=x^{۳}+۲x$ و محور x ها و دو خط به معادلات $x=۱$ و $x=-۱$ کدام است ؟

(۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

حل : (۲) $x^{۳}+۲x=۰ \Longrightarrow x(x^{۲}+۲)=۰ \Longrightarrow x=۰ \Longrightarrow$

$$S=\left|\int_{-۱}^{۰}(x^{۳}+۲x)\,dx\right|+\left|\int_{۰}^{۱}(x^{۳}+۲x)\,dx\right|=\left|\left(\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}\right)\Big|_{-۱}^{۰}\right|+\left|\left(\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}\right)\Big|_{۰}^{۱}\right|=$$

$$\left|۰-\left(\frac{۱}{۴}+۱\right)\right|+\left|\frac{۱}{۴}+۱\right|=\frac{۵}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

تست : اگر $\int \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲}\,dx = \frac{f(x)}{x} + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $x-\sqrt{x}$ (۲) $x+\sqrt{x}$ (۳) $۱-۲\sqrt{x}$ (۴) $۲-\sqrt{x}$

حل : (۳)
$$\int \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲}\,dx = \int x^{-۲}\left(x^{\frac{۱}{۲}}-۱\right)dx = \int \left(x^{-\frac{۳}{۲}} - x^{-۲}\right)dx = \frac{۱}{۱-\frac{۳}{۲}}\,x^{۱-\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۱-۲}\,x^{۱-۲} + C$$

$$= -۲x^{-\frac{۱}{۲}} + x^{-۱} + C = \frac{x\left(-۲x^{-\frac{۱}{۲}}+x^{-۱}\right)}{x} + C = \frac{۲x^{-\frac{۱}{۲}}+۱}{x} + C = \frac{-۲\sqrt{x}+۱}{x} + C$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = -۲\sqrt{x}+۱$$

تست : اگر $F(x) = \int_۱^x \frac{dt}{۱+\sqrt[۳]{t}}$ ، مقدار مشتق $F(x^۳)$ به ازای $x=۲$ چقدر است ؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل : (۴) طبق مشتق تابع مرکب داریم :
$$[F(x^۳)]' = ۳x^۲\,F'(x^۳) \quad (۱)$$

حال چون $F(x) = \int_۱^x \frac{dt}{۱+\sqrt[۳]{t}}$ طبق رابطه تابع اولیه داریم :

$$F'(x) = \frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x}} \Longrightarrow F'(x^۳) = \frac{۱}{۱+x} \quad (۲)$$

$$(۱)\,,(۲) \Longrightarrow \left(F(x^۳)\right)' = \frac{۳x^۲}{۱+x}$$

در نقطه‌ی $x=۲$ داریم :
$$F'(۸) = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow [F(۲^۳)]' = ۳\times ۲^۲ \times \frac{۱}{۳} = ۴$$

تست : اگر $\int \frac{(۱-\sqrt{۳x})(۱+\sqrt{۳x})}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\,.\,f(x) + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $۲-۲x$ (۲) $۲-x$ (۳) $۱+۲x$ (۴) $۱+x$

حل : (۱) رابطه انتگرال را ساده می‌کنیم ، داریم :

$$\int \frac{۱-۳x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{۱}{\sqrt{x}} - ۳\sqrt{x}\right)\,dx$$

$$= ۲\sqrt{x} - ۲x\sqrt{x} + C = ۲\sqrt{x}(۱-x) + C = \sqrt{x}(۲-۲x) + C$$

حال طبق رابطه‌ی سوال و هم‌ارز قرار دادن جواب سوال مقدار $f(x) = ۲-۲x$ می‌باشد .

تست : مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = (x-۳)^۲$ و $y = -۳x + ۹$ کدام است ؟

(۱) ۳ (۲) ۴/۵ (۳) ۶ (۴) ۷/۵

حل : (۲)

ابتدا نمودار توابع را باهم تلاقی می‌دهیم تا محل‌های تلاقی بدست آید : $\begin{cases} y = (x-۳)^۲ \\ y = -۳x + ۹ \end{cases} \Longrightarrow x = ۰\ ,\ x = ۳$

طبق رابطه‌ی مساحت داریم :

$$S = \left|\int_۰^۳ (x-۳)^۲ - (-۳x+۹)\,dx\right| = \left|\int_۰^۳ (x^۲ - ۳x)\,dx\right| = \left|\frac{x^۳}{۳} - \frac{۳x^۲}{۲}\Big|_۰^۳\right| = ۹ - \frac{۹}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

تست : اگر $F(x) = \int_۰^x \frac{۳}{۱+t^۳}\,dt$ ، مشتق $F\left(\frac{۱}{x}\right)$ به ازای $x = ۲$ چقدر است ؟

(۱) $-\frac{۲}{۳}$ (۲) $-\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$

حل : (۱) می‌دانیم اگر $F(x) = \int_۰^x f(t)\,dt$ باشد $F'(x) = f(x)$ است . پس داریم :

$$F'(x) = \frac{۳}{۱+x^۳}\ ,\ \left(F\left(\frac{۱}{x}\right)\right)' = -\frac{۱}{x^۲}F'\left(\frac{۱}{x}\right)$$

که بازاء $x = ۲$ خواهیم داشت : $-\frac{۱}{۴}F'\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۴} \times \frac{۳\times۸}{۹} = -\frac{۲}{۳}$

تست : اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$, $\int \frac{\tan x}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}\,dx = \frac{۱}{f(x)} + C$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟

(۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\cos x$ (۴) $\sin x$

حل : (۲) با توجه به اینکه x در ناحیه سوم تغییر می‌کند . پس $\cos x$ منفی است :

$$L=\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx=\int \frac{\sin x}{-\cos x\ \cos x}\,dx=\int \frac{\sin x}{-\cos^2 x}\,dx$$

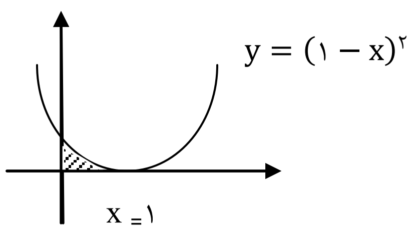
$$\cos x=u \implies -\sin x\ dx=du \implies L=\int \frac{du}{u^2}=\int u^{-2}\,du=\frac{-1}{u}+C=\frac{-1}{\cos x}+C$$

$$\frac{1}{f(x)}+C=\frac{-1}{\cos x}+C \implies f(x)=-\cos x$$

تست : مساحت محدود بین نمودار تابع با ضابطه $y=(1-x)^2$ و محورهای مختصات کدام است ؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

حل : (۳) مطابق شکل مساحت بصورت زیر محاسبه می‌شود :



$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1)^2\,dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$