بِسمِ رَبِّ الشُّهَداءِ وَالصِّدّیقین

حل مسئله ای در الکترومغناطیس

علی مصطفی
a.mostafa1376@gmail.com

روشِ جداسازیِ متغیرها در مختصاتِ کروی معرفی شده و پتانسیل در خازنی متشکل از دو کره یِ متداخل غیرِ متحد المرکز با روشِ حلِ معادله یِ لاپلاس و ظرفیتِ خازن با روشِ تصاویرِ متوالی بررسی می گردد.

0 مقـــــدمه:

برایِ حلِ معادله یِ لاپلاس (به روشِ جداسازیِ متغیرها) برایِ اجسامِ گرد ، استفاده از مختصاتِ کروی بهتر است. در مختصاتِ کروی معادله یِ لاپلاس به صورتِ زیر در می آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1)$$

فرض میکنیم مسائلی که میخواهیم حل کنیم دارایِ تقارنِ سمتی اند ، یعنی در مسائلِ مورد نظر، پتانسیل تابعِ φ نیست.

در این صورت معادله یِ (1) تبدیل میشود به

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (2)$$

در روشِ جداسازیِ متغیرها به دنبال جواب هایی به صورتِ حاصل ضرب هستیم

$$V(r,\theta)=F(r)\,G(\theta) \qquad (3)$$

با قرار دادنِ (3) در (2) و تقسیم بر $V(r,\theta)$ داریم

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\frac{1}{G}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right)=0 \qquad (4)$$

از آنجایی که جمله یِ اول فقط به r و جمله یِ دوم فقط به θ وابسته است پس نتیجه میگیریم که هر یک از جملات باید یک مقدارِ ثابت باشد

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = l(l+1), \qquad \frac{1}{G\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right) = -l(l+1) \tag{5}$$

در اینجا $l(l+1)$ صرفاً یک روش برایِ نوشتنِ ثابتِ جداسازی است ، که علتِ آنرا به زودی خواهیم فهمید.

جداسازیِ متغیر ها ، معادله یِ دیفرانسیلِ جزئی را به معادلاتِ دیفراتسیلِ معمولی تبدیل میکند. معادله یِ شعاعیِ

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = l(l+1) \tag{6}$$

دارایِ جوابِ عمومی به صورتِ زیر است

$$F(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{7}$$

و این جواب را به راحتی میتوانید تحقیق کنید ، A , B دو ثابتِ دلخواه هستند که در یک معادله یِ دیفرانسیلِ مرتبه یِ دوم امری

بدیهی است. اما معادله یِ زاویه ای

$$\frac{1}{G\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right) = -l(l+1) \tag{8}$$

ساده نیست. جوابها به صورتِ **چند جمله ایهای لژاندر** بر حسبِ متغیرِ $\cos\theta$ هستند.

$$G(\theta) = P_l(\cos\theta) \tag{9}$$

که در آن $P_l(x)$ با استفاده از **فرمولِ رودریگز** مشخص میشود

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l \tag{10}$$

بنابراین در مسائلی که تقارنِ سمتی داریم ، کلیترین جوابِ جدایی پذیر که شاملِ کمترین نیازهایِ فیزیکی باشد عبارت است از

$$V_{(r,\theta)} = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \tag{11}$$

(در اینجا لزومی به آوردنِ یک ثابتِ کلی برایِ معادله یِ (9) نیست ، چرا که میتوان آنرا در ثوابتِ A , B خوراند.)

جداسازیِ متغیرها منجر به یک مجموعه یِ نامتناهیِ جواب برایِ هر l خواهد شد.جوابِ عمومی ، ترکیبِ خطیِ جوابهایِ

جدایی پذیر است.

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{12}$$

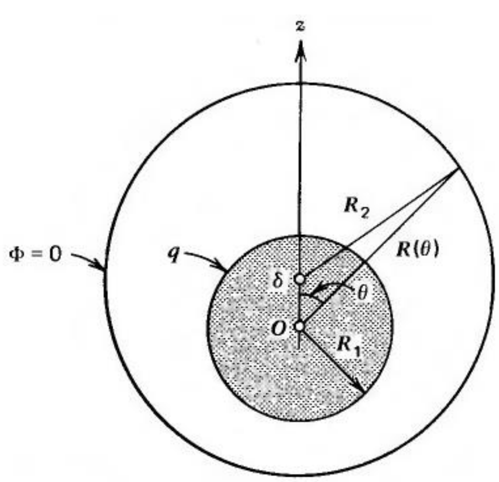
1 پتانسیلِ خـــازنِ کرویِ غیر متــحدالمرکز

پتانسیلِ بینِ دو کره یِ متداخلِ غیرِمتحدالمرکز بررسی میشود.

بارِ q رویِ کره یِ داخلی قرار گرفته و کره یِ خارجی به پتانسیل صفر (زمین) وصل شده است. در مسئله ای که دو کره متحدالمرکز باشند ، پتانسیل (فقط) تابعِ r است. با جابجا کردن مرکزِ کره یِ داخلی پتانسیل تابعیتِ تتا پیدا خواهد کرد. برایِ ساد گی مسئله ، مقدارِ جابجاییِ مرکزِ کره یِ داخلی را نسبت به شعاعِ دو کره بسیار کوچک میگیریم.

دستگاهِ مختصاتی کروی به مبدا مرکزِ کره یِ داخلی در نظر میگیریم . طبقِ قانونِ کسینوس ها $R_\theta \approx R_2 + \delta\cos\theta$

چون $\delta \ll R_1, R_2$ ، محاسبات را تا مرتبه یِ اول بر حسب دلتا پی میگیریم.



شکل $1-1$

طبقِ جداسازیِ متغیرها و با توجه به اینکه دلتا بسیار کوچک است داریم

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 + \frac{B_0}{r} + \delta\left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (13)$$

حال با بررسیِ شرایطِ مرزی ثوابتِ موردِ نظر را بدست میآوریم.

الف)پتانسیل رویِ سطحِ کره یِ داخلی ثابت است . $\varphi_{(R_1,\theta)} = constant$ پس

$$\varphi_{(R_1,\theta)} = A_0 + \frac{B_0}{R_1} + \delta\left(A_1 R_1 + \frac{B_1}{{R_1}^2}\right)\cos\theta \qquad (14)$$

چون عبارتِ بالا باید ثابت باشد ، پس ضروری است ضریبِ $\cos\theta$ متحد با صفر باشد.

$$\frac{B_1}{A_1} = -{R_1}^3 \qquad (15)$$

ب) پتانسیلِ کره یِ بیرونی صفر است $\varphi_{(R,\theta)} = 0$ پس

$$\varphi_{((R_2+\delta\cos\theta),\theta)} = A_0 + \frac{B_0}{(R_2+\delta\cos\theta)} + \delta\left(A_1(R_2+\delta\cos\theta) + \frac{B_1}{(R_2+\delta\cos\theta)\,r^2}\right)\cos\theta \qquad (16)$$

با صرفِ نظر از توانهای دوم و بالاترِ دلتا داریم

$$A_0 + \frac{B_0}{R_2}\left(1 - \frac{\delta\cos\theta}{R_2}\right) + \delta A_1\left(R_2 - \frac{{R_1}^3}{{R_2}^3}\right)\cos\theta = 0 \qquad (17)$$

با متحد قرار دادنِ ضرایبِ $\cos\theta$ با صفر بدست میآوریم

$$\frac{B_0}{A_1} = \left({R_2}^3 - {R_1}^3\right) \qquad , \qquad \frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{R_2} \qquad (18)$$

پ) آخرین شرطِ مرزی ، وجودِ بارِ q رویِ کره یِ داخلی است. این شرط را با قانونِ گاوس به معادله ای برایِ ثوابت تبدیل میکنیم.

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{E}.\hat{\boldsymbol{n}}\ da = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}_{(r=R_1)} = \frac{B_0}{{R_1}^2}\widehat{\boldsymbol{n}} - \delta\left(A_1 - 2\frac{B_1}{{R_1}^3}\right)\cos\theta\,\widehat{\boldsymbol{n}} \qquad (20)$$

با جایگذاری و گرفتنِ انتگرال ، میرسیم به رابطه یِ زیر :

$$B_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (21)$$

با حل کردنِ معادلات بالا ثوابتِ مفروض را بدست آورده و در معادله یِ (13) جایگذاری میکنیم

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0\left({R_2}^3 - {R_1}^3\right)}\left(r - \frac{{R_1}^3}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (22)$$

2 ظرفیتِ خازنِ کرویِ غیرِ متحدالمرکز

در این قسمت ظرفیتِ خازنی کروی که مراکزِ کره هایش بر هم منطبق نیستند ، بررسی میشود.

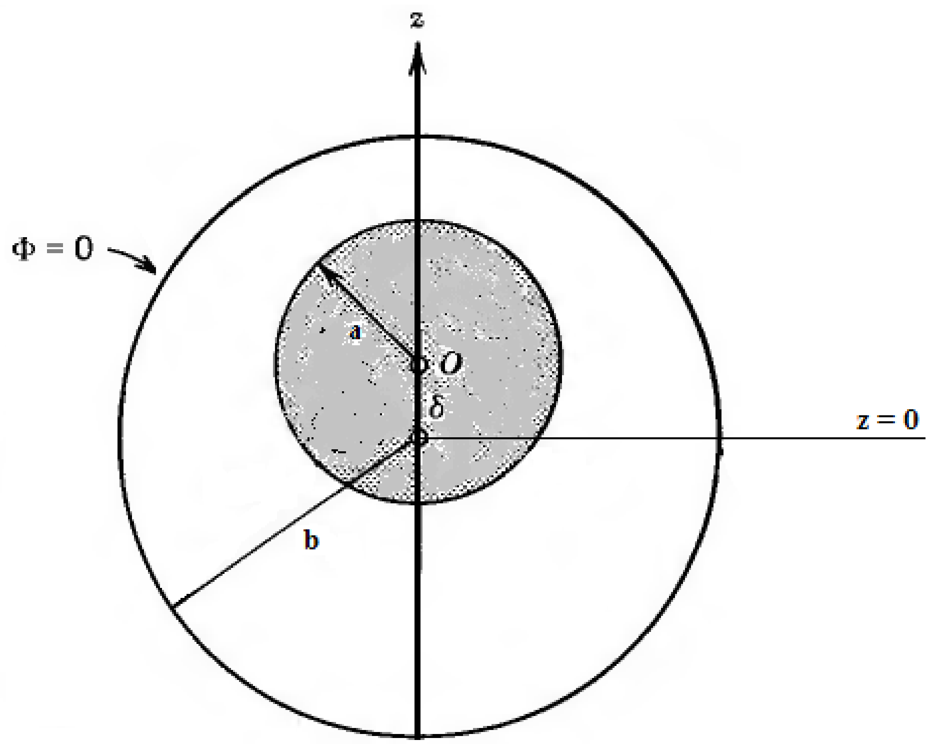
پیکربندی ای همانندِ قسمتِ قبل در نظر بگیرید . میخواهیم به کمکِ تکنیکِ تصویر، ظرفیتِ خازن مفروض را بدست آوریم.

برایِ اینکار فرض میکنیم سطحِ کره یِ خارجی به پتانسیلِ صفر وصل است.

ابتدا بار q_0 را در مرکزِ کره یِ داخلی میگذاریم تا پتانسیلی معلوم بر سطح کره یِ (داخلی) ایجاد کند . با این کار پتانسیلِ سطح کره یِ خارجی به هم خورده و دیگر صفر نیست.

پس باید باری دیگر در خارجِ کره ها گذاشته تا پتانسیلِ کره یِ بیرونی را صفر کند . با گذاشتنِ این بار، پتانسیلِ معلوم رویِ سطحِ کره یِ داخلی تغییر میکند. پس باری دیگر گذاشته تا پتانسیلِ معلوم را به حالتِ قبلی باز گرداند و به همین ترتیب الی آخَر.........!

میتوانیم مقدارِ بارهایِ تصویر در هر مرحله را بر حسب بارهایِ قبلی به دست آورده و به کمک حل معادله یِ تفاضلیِ بدست آمده بارِ کلِّ درونِ کره یِ داخلی را بدست آورده و با تقسیم بر پتانسیلِ معلوم ، ظرفیتِ خازن را بدست آورد.



شکلِ 1–2

پس از اندکی محاسبات به روابطِ زیر میرسیم

$$Z_i = \frac{b^2}{z_i}$$

$$Q_i = -q_i \frac{b}{z_i}$$

$$z_{i+1} = \frac{a^2}{Z_i - \delta} + \delta$$

$$q_{i+1} = -Q_i \frac{a}{Z_i - b}$$

حروفِ بزرگ متناظر با بارهایِ تصویریِ خارج کره ها و حروفِ کوچک متناظر با بارهایِ تصویریِ داخل کره یِ کوچکتر است.

پس از اندکی محاسبات تا مرتبه دوم نسبتِ به دلتا (به زودی میفهمید چرا محاسبات را تا مرتبه یِ دوم نسبت به دلتا انجام میدهیم ، البته باید اینرا از بخشِ 1 استنباط می کردید!) به رابطه ای بازگشتی برای q_{i+1} و z_{i+1} خواهیم رسید.

$$z_{i+1} = z_i \frac{a^2}{b^2} + \delta \qquad (23)$$

$$q_{i+1} = q_i \frac{a}{b}\left(1 + \frac{z_i\delta}{b^2}\right) \qquad (24)$$

با حل کردنِ معادله یِ (22) و (23) به عباراتِ صریحِ زیر میرسیم :

$$z_i = \delta\left(\frac{1-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{i+1}}{1-\frac{a^2}{b^2}}\right) \qquad (25)$$

$$q_{i+1} = q_i \frac{a}{b}\left(1 + \frac{\delta^2}{b^2}\left(\frac{1-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{i+1}}{1-\frac{a^2}{b^2}}\right)\right) \qquad (26)$$

حال باید جمع همه یِ بارهایِ درونِ کره یِ داخلی را بدست آورده و بر پتانسیلِ مفروضِ ابتدای مسئله تقسیم کنیم تا ظرفیتِ خازن بدست آید.

از دو طرفِ معادله ی (25) سیگما میگیریم.(از صفر تا بی نهایت)

برای بدست آوردنِ q_i در معادله یِ (25) ابتدا مرتبه یِ صفرِ آن نسبت به دلتا را بدست آورده ودر رابطه جایگذاری میکنیم (مسئله یِ مسیر) .

$$q_{i+1}^{(0)} = q_0\left(\frac{a}{b}\right)^i \qquad (27)$$

$$q_{i+1} = q_0\left(\frac{a}{b}\right)^{i-1} \frac{a}{b}\left(1 + \frac{\delta^2}{b^2}\left(\frac{1-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{i+1}}{1-\frac{a^2}{b^2}}\right)\right)$$

$$= q_0\left(\frac{a}{b}\right)^i \left(1 + \frac{\delta^2}{b^2}\left(\frac{1 - \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{i+1}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right) \right) \qquad (28)$$

سپس با اندکی محاسبه و با استفاده از رابطه یِ زیر

$$q_0 + \sum_{i=0}^{\infty} q_{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \qquad (29)$$

به عبارتِ زیر برایِ q_{total} دست پیدا میکنیم:

$$q_{total} = \frac{q_0}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}\left(1 + \frac{ab\delta^2}{(b^3 - a^3)(b - a)}\right) \qquad (30)$$

با توجه به اینکه

$$\Delta V_{\text{بین صفحات خازن}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{a} \qquad (31)$$

با تقسیم کردنِ ایندو بر هم داریم

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\left(1 + \frac{ab\delta^2}{(b^3 - a^3)(b - a)}\right)} \qquad (32)$$

همانطور که معادله یِ (22) پیش بینی میکرد ، اولین تصحیحِ ظرفیت نسبت به دلتا از مرتبه یِ دومِ دلتاست.

منابعِ مفید و کاربردی :

– آشنایی با الکترودینامیک /دیوید جی . گریفیث /ترجمه یِ حسین فرمان/انتشارات نشرِ دانشگاهی

- مقدمه ای بر معادلات تفاضلی /امیر آقا محمدی /نشریه گاما/شماره شش /بهار هشتاد و چهار

– مجموعه مقالات / محمد خرمی / نشریه گاما

-Electricity & Magnetism/Munir Nayfeh . Morton Brussel

-Classical Electrodynamics / John David Jackson