فصل سوم

فرمولاسیون مسأله برهمکنش

سیال- جامد

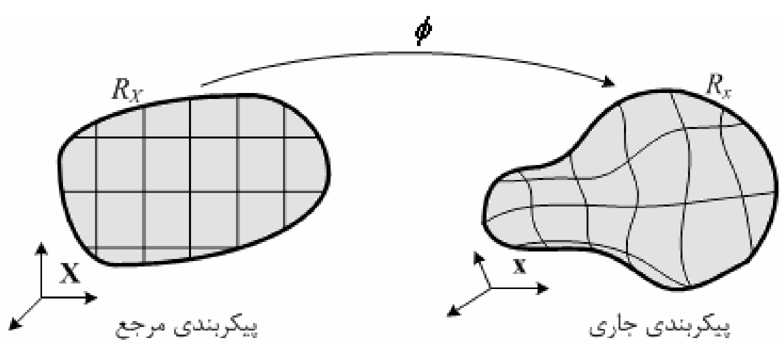
۳-۱- مقدمه

در این فصل, فرمولاسیون حاکم بر مسأله برهمکنش سیال- جامد ارائه خواهد شد. به این منظور ابتدا کلیاتی از توصیفات لاگرانژي, اویلری و ALE بیان شده و معادلات پایستگی جرم و مومنتوم یادآوری می‌گردد. آنگاه معادلات حاکم بر مسأله سیال و جامد تشریح خواهد گردید. در ادامه, شرایط فصل مشترک سیال- جامد, الگوریتم حرکت شبکه, روش کوپل سیال- جامد, الگوریتم انتگرالگیری زمانی مسأله و ساختار برنامه بکار رفته برای انجام شبیه‌سازی برهمکنش سیال- جامد توضیح داده می‌شود. در نهایت به منظور حصول اطمینان از صحت روش و فرمولاسیون ارائه شده دو مسأله محک[1] که در مراجع مشابه مورد استفاده قرار گرفته‌اند شبیه‌سازی خواهد شد.

۳-۲- توصیفات لاگرانژی و اویلری

در مکانیک محیط‌های پیوسته برای بیان حرکت یک محیط پیوسته عموماً از دو توصیف متمایز استفاده می‌شود: توصیف لاگرانژی و توصیف اویلری.

در توصیف لاگرانژی, مطابق با شکل (۳-۱) نقاط شبکه محاسباتی, ذرات مادی محیط پیوسته را هنگام حرکت دنبال کرده و گره‌های شبکه همواره بر نقاط مادی یکسان منطبق هستند. در این توصیف پیکربندی مرجع R_X توسط مختصات مادی $\mathbf{X}$ تعیین می‌گردد. ضمن اینکه پیکربندی جاری R_x از نقاط فضايي $\mathbf{x}$ تشکیل شده است.



شکل ۳-۱- توصیف لاگرانژی حرکت

[1] Benchmark

حرکت محیط پیوسته که مختصات مادی $\mathbf{X}$ محیط پیوسته را به مختصات فضايي $\mathbf{x}$ آن مربوط می‌کند بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}=\phi(\mathbf{X},t) \quad \text{or} \quad x_i=\phi_i(\mathbf{X},t) \tag{۱-۳}$$

در این رابطه $\mathbf{x}$ موقعیت فضايي نقطه مادی $\mathbf{X}$ در زمان t است. سرعت یک ذره مادی $\mathbf{v}(\mathbf{X},t)$ برابر با نرخ تغییر بردار موقعیت آن ذره بوده و با مشتق‌گیری زمانی از نگاشت ϕ با ثابت نگه داشتن $\mathbf{X}$ بدست می‌آید. یعنی:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial\phi(\mathbf{X},t)}{\partial t}=\left.\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right|_X \tag{۲-۳}$$

مشتقات زمانی که با ثابت نگه داشتن $\mathbf{X}$ بدست می‌آیند مشتقات مادی نامیده می‌شوند. چون در توصیف لاگرانژی, نقاط مادی در طول حرکت بر نقاط یکسان شبکه منطبق هستند بنابراین در محاسبات لاگرانژی اثرات انتقالی[۲] وجود نداشته و مشتق مادی به یک مشتق زمانی ساده کاهش مي‌یابد. این مطلب که المانهای یک شبکه لاگرانژی همواره ذرات مادی یکسانی را در بر دارند از نقطه نظر محاسباتی بویژه در مسائلی که شامل مواد وابسته به تاریخچه هستند بسیار مفید است. اما وقتی ماده دچار تغییر شکلهای بزرگ شود (مثلاً در گردابه‌های سیال) الگوریتمهای لاگرانژی بدلیل واپیچش بیش از حد شبکه محاسباتی, دقت خود را از دست داده و حتی ممکن است بدون نتیجه متوقف شوند.

مشکلات ناشی از تغییر شکل بیش از اندازه شبکه اجزاء محدود را می‌توان با فرمولاسیون اویلری مرتفع نمود. در توصیف اویلری شبکه اجزاء محدود ثابت بوده و محیط پیوسته نسبت به شبکه محاسباتی حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهد. در این توصیف معادلات پایستگی نسبت به مختصات فضايي $\mathbf{x}$ و زمان t فرمولبندی می‌شوند. مشتق زمانی مادی هر تابع از مختصات فضايي $\mathbf{x}$ و زمان t را می‌توان با کمک قاعده زنجیره‌ای[۳] بدست آورد. به عنوان مثال برای یک تابع اسکالر $f(\mathbf{x},t)$ می‌توان نوشت:

[2] Convective
[3] Chain rule

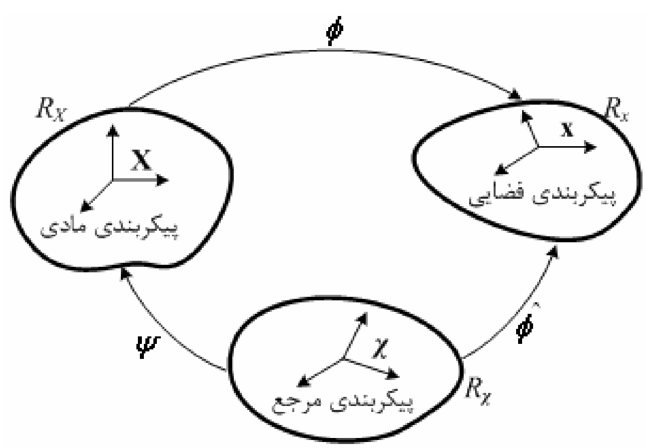
$$\frac{df}{dt}=\left.\frac{\partial f\left(x_i,t\right)}{\partial t}\right|_X=\left.\frac{\partial f\left(x_i\left(\mathbf{X},t\right),t\right)}{\partial t}\right|_x+\frac{\partial f\left(x_i\left(\mathbf{X},t\right),t\right)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}= \tag{۳-۳}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_x+v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_x+\mathbf{v}.\nabla f$$

با توجه به اینکه فرمولاسیون اویلری گره‌های شبکه را از ذرات مادی تفکیک می‌کند حرکت نسبی بین ماده تغییر شکل دهنده و شبکه محاسباتی سبب ایجاد اثرات انتقالی می‌گردد. ضمن اینکه برخلاف توصیف لاگرانژی, مدلسازی مرزهای متحرک و تغییر شکل دهنده در توصیف اویلری مشکلاتی جدي بوجود می‌آورد.

۳-۳- توصیف لاگرانژی- اویلری اختیاری (ALE)

با توجه به مزایا و معایب توصیفات لاگرانژی و اویلری, نیاز به توصیفی کلی‌تر که محاسن روشهای لاگرانژی و اویلری را ترکیب کرده و حتی‌المقدور از معایب آنها اجتناب نماید احساس می‌شود. این توصیف کلی‌تر توصیف لاگرانژی- اویلری اختیاری (ALE) نامیده می‌شود.

در توصیف ALE نه پیکربندی مادی R_X و نه پیکربندی فضايي R_x به عنوان مرجع گرفته نمی‌شود. بلکه پیکربندی مرجع R_χ ناحیه سومی است که در آن مختصات مرجع χ معرف نقاط شبکه است. یعنی ناحیه مرجع R_χ حرکت شبکه را مستقل از حرکت ماده تشریح می‌کند. شکل (۳-۲) این نواحی و تبدیلات یک‌به‌یکی که آنها را به هم مربوط می‌کند نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲- تبدیلات بین نواحی لاگرانژی, اویلری و ALE

ناحیه مرجع R_{χ} به ترتیب با ψ و $\hat{\phi}$ به نواحی مادی و فضايي نگاشت می‌شود. حرکت شبکه بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} = \hat{\phi}(\chi, t) \tag{۴-۳}$$

نگاشت $\hat{\phi}$ نقاط χ را در ناحیه مرجع به نقاط $\mathbf{x}$ در ناحیه فضايي تبدیل می‌کند و معرف حرکت نقاط شبکه در ناحیه فضايي است. سرعت شبکه $\mathbf{v}^m$ به طریقی مشابه با سرعت ماده تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{v}^m(\chi, t) = \frac{\partial \hat{\phi}(\chi, t)}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}\right|_{\chi} = \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\chi} \tag{۵-۳}$$

۳-۳-۱- معادلات پایه توصیف ALE

برای نوشتن معادلات پایستگی در چارچوب ALE, باید رابطه‌ای بین مشتقات زمانی بدست آورد. به عبارت دیگر مشتقات زمانی مادی که بطور طبیعی در معادلات پایستگی حضور دارند باید به مشتقات زمانی مرجع مربوط شوند. به این منظور مانند قبل با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای تابع $f(\chi, t)$ می‌توان نوشت:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f(\chi_i, t)}{\partial t}\right|_{X} = \left.\frac{\partial f(\chi_i, t)}{\partial t}\right|_{\chi} + \frac{\partial f(\chi_i, t)}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\chi} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i}{\partial t} \tag{۶-۳}$$

سرعت ذره در مختصات مرجع که آن را سرعت مرجع $\mathbf{w}$ می‌نامیم با محاسبه تغییر زمانی مختصات مرجع χ با ثابت نگه داشتن ذره مادی $\mathbf{X}$ بدست می‌آید:

$$w_i = \left.\frac{\partial \chi_i}{\partial t}\right|_{X} \tag{۷-۳}$$

با استفاده از سرعت مرجع, معادله (۳-۶) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{X} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\chi} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} w_i \tag{۸-۳}$$

این معادله مشتقات زمانی مادی و مرجع را به هم مربوط می‌کند اما نیازمند تعیین گرادیان در ناحیه مرجع ($\frac{\partial f}{\partial \chi_i}$) است. گرچه تعیین این گرادیان امکان‌پذیر است اما معمولاً در مکانیک محاسباتی کار با

ناحیه فضایي (یا مادی) آسانتر است. بنابراین برای حذف گرادیان در ناحیه مرجع, از رابطه زیر بین سرعت مادی $\mathbf{v}$, سرعت شبکه $\mathbf{v}^m$ و سرعت مرجع $\mathbf{w}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} w_j = v_i - v_i^m \tag{۹-۳}$$

با کمک رابطه (۳-۹) می‌توان معادله (۳-۸) را بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_X = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_\chi + \frac{\partial f}{\partial \chi_j} w_j = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_\chi + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} w_j = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_\chi + \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(v_i - v_i^m\right) \tag{۱۰-۳}$$

یا به فرم برداری:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_X = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_\chi + \left(\mathbf{v} - \mathbf{v}^m\right).\nabla f \tag{۱۱-۳}$$

این معادله را می‌توان به طریق معمول تفسیر نمود: تغییر کمیت فیزیکی f برای یک ذره $\mathbf{X}$ برابر است با جمع تغییر موضعی (نسبت به مرجع χ) و یک ترم انتقالی که حرکت نسبی بین سیستم مادی و مرجع را به حساب می‌آورد.

۳-۴- مشتق زمانی انتگرال روی حجمهای متحرک

حجم مادی V_t که با سطح بسته هموار S_t محدود شده مورد نظر است. نقاط سطح S_t در زمان t با سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ حرکت می‌کنند. مشتق زمانی مادی انتگرال یک تابع اسکالر هموار $f(\mathbf{x},t)$ روی حجم مادی متغیر با زمان V_t از قضیه انتقال رینولدز[4] بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} f(\mathbf{x},t)\,dV = \int_{V_c \equiv V_t} \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,dV + \int_{S_c \equiv S_t} f(\mathbf{x},t)\,\mathbf{v}.\mathbf{n}\,dS \tag{۱۲-۳}$$

انتگرال حجمی سمت راست معادله بالا روی حجم کنترل V_c تعریف شده که در فضا ثابت بوده و در زمان مورد نظر t بر حجم مادی متحرک V_t منطبق است. به همین صورت سطح کنترل ثابت S_c در زمان t بر سطح بسته S_t منطبق است. $\mathbf{n}$ بیانگر بردار نرمال خروجی واحد سطح S_t در زمان t بوده و $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ سرعت مادی نقاط روی مرز S_t است.

[4] Reynolds transport theorem

۳-۵- معادلات پایستگی

معادلات پایستگی از پایستگی جرم, تعادل مومنتوم خطی, پایستگی انرژی و تعادل حرارتی تشکیل شده‌اند. این معادلات برای هر ماده‌ای کاربرد داشته و باید در تمام لحظات برقرار باشند. از این میان, معادلات پایستگی جرم و تعادل مومنتوم خطی که کاربرد بیشتری در اجزاء محدود دارند در قسمتهای زیر ذکر خواهند شد.

۳-۵-۱- معادله پایستگی جرم

قانون پایستگی جرم برای حجم مادی متغیر V_t که توسط ماده‌ای با چگالی ρ اشغال شده عبارت است از:

$$0=\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{V_t}\rho dV \tag{۳-۱۳}$$

با استفاده از قضیه انتقال رینولدز و قضیه دیورژانس می‌توان معادله اخیر را بصورت زیر بیان نمود:

$$0=\frac{dm}{dt}=\int_{V_t}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_{S_t}\rho\mathbf{v}.\mathbf{n}dV=\int_{V_t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\mathbf{v})\right)dV \tag{۳-۱۴}$$

چون این رابطه برای هر حجم V_t معتبر است بنابراین:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\mathbf{v})=0 \tag{۳-۱۵}$$

معادله بالا معادله پایستگی جرم یا معادله پیوستگی نامیده می‌شود. با بسط ترم دیورژانس و استفاده از تعریف مشتق زمانی مادی فرم دیگر این معادله بصورت زیر حاصل می‌آید:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla.\mathbf{v}=0 \tag{۳-۱۶}$$

۳-۵-۲- معادله مومنتوم

مطابق با معادله پایستگی مومنتوم خطی که معادله حرکت نیز نامیده می‌شود نرخ تغییر مومنتوم یک قسمت مشخص از ماده برابر با جمع کل نیروهای وارد بر آن قسمت از ماده است. مومنتوم قسمتی از ماده با حجم V_t که با سطح S_t محصور شده مساوی $\int_{V_t}\rho\mathbf{v}dV$ می‌باشد. اگر این قسمت ماده در معرض

نیروی جسمی $\rho\mathbf{b}$ و کشش سطحی $\mathbf{t}$ قرار داشته باشد معادله پایستگی مومنتوم برای آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t}\rho\mathbf{v}dV=\int_{S_t}\mathbf{t}\,dS+\int_{V_t}\rho\mathbf{b}dV \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

با اعمال قضیه انتقال رینولدز به سمت چپ معادله بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t}\rho\mathbf{v}dV=\int_{V_t}\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}dV+\int_{S_t}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}).\mathbf{n}dS \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

که در آن حال $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ بیانگر ضرب تانسوری است (یعنی $[\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}]_{ij}=u_iv_j$). با استفاده از قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{V_t}\rho\mathbf{v}dV=\int_{V_t}\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}dV+\int_{V_t}\nabla.(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})dV=\\&\int_{V_t}\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}+\nabla.\mathbf{v}\rho\mathbf{v}+\mathbf{v}.\nabla(\rho\mathbf{v})\right]dV=\int_{V_t}\left[\frac{d(\rho\mathbf{v})}{dt}+\nabla.\mathbf{v}\rho\mathbf{v}\right]dV=\\&\int_{V_t}\left[\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{v}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla.\mathbf{v}\right)\right]dV=\int_{V_t}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV\end{aligned} \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

همچنین با کمک قانون کاوشی[5] و قضیه دیورژانس می‌توان نوشت:

$$\int_{S_t}\mathbf{t}\,dS=\int_{S_t}\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}\,dS=\int_{V_t}\nabla.\boldsymbol{\sigma}\,dV \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ نشان دهنده تنش کاوشی است. با استفاده از دو معادله اخیر معادله (۳-۱۷) بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{V_t}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV=\int_{V_t}\nabla.\boldsymbol{\sigma}\,dV+\int_{V_t}\rho\mathbf{b}dV \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

چون این رابطه برای هر حجم مادی V_t برقرار است بنابراین:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla.\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b} \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

این معادله همان معادله پایستگی مومنتوم یا تعادل مومنتوم خطی است.

[5] Cauchy's law

۳-۵-۳- فرم ALE معادلات پایستگی

با استفاده از معادله (۳-۱۱) براحتی می‌توان فرم ALE معادلات پایستگی را از فرمهای مادی متناظر استخراج کرد. در این صورت معادلات پایستگی جرم و تعادل مومنتوم خطی به ترتیب به شکل زیر خواهند بود:

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\chi} + \left(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{m}\right).\nabla \rho + \rho \nabla.\mathbf{v} = 0 \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

$$\rho\left(\left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\chi} + \left(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{m}\right).\nabla \mathbf{v}\right) = \nabla.\boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

۳-۵-۴- تکمیل مسأله مقدار اولیه مرزی[6]

بعد از تعریف معادلات حاکم, برای تکمیل مسأله باید شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز را تعیین نمود. شرایط مرزی ممکن است از نوع دیریکله[7], نیومن[8] یا روبین[9] باشند. شرایط مرزی دیریکله مقدار تابع مجهول, شرایط مرزی نیومن گرادیان نرمال تابع در طول مرز, و شرایط مرزی روبین ترکیبی از تابع مجهول و گرادیان آن را پیش‌دهی می‌کنند.

۳-۶- مسأله سیال

۳-۶-۱- تانسورهای نرخ کرنش و اسپین[10]

تحلیل حرکت نسبی ذرات مجاور در یک سیال شبیه تئوری تغییر شکل یک جامد الاستیک است. یعنی نرخ کرنش و نرخ چرخش در سیال جایگزین کرنش و چرخش جامد می‌شوند. متغیری بسیار مهم در توصیف حرکت سیال گرادیان سرعت است که تانسوری مرتبه دوم بوده و بصورت زیر در سیستم مختصات کارتزین تعریف می‌شود:

---

[6] Initial boundary value problem
[7] Dirichlet
[8] Neumann
[9] Robin
[10] Spin

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad (۲۵-۳)$$

با تجزیه این تانسور به دو بخش متقارن و پادمتقارن خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{for} \quad i, j = 1, \dots, n_{\mathrm{SD}} \qquad (۲۶-۳)$$

n_{SD} در این رابطه تعداد ابعاد فضای مسأله را نشان می‌دهد. فرم تانسوری رابطه اخیر عبارت است از:

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla^s \mathbf{v} + \nabla^w \mathbf{v} \quad \text{where} \quad \begin{cases} \nabla^s = \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^T\right) \\ \nabla^w = \frac{1}{2}\left(\nabla - \nabla^T\right) \end{cases} \qquad (۲۷-۳)$$

تانسور متقارن $\nabla^s \mathbf{v}$ تانسور نرخ تغییر شکل (یا نرخ کرنش) و تانسور پادمتقارن $\nabla^w \mathbf{v}$ تانسور ورتیسیتی[11] (یا تانسور اسپین) نام دارد.

۳-۶-۲- تانسور تنش در یک سیال نیوتنی

در سیالی که در حالت سکون باشد تنها تنشهای نرمال حضور داشته و تانسور تنش ایزوتروپیک[12] است. یعنی:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad (۲۸-۳)$$

در این معادله p فشار استاتیک سیال و δ_{ij} دلتای کرونکر[13] است. اما وقتی سیال در حرکت باشد در حالت کلی تنشهای مماسی غیر صفر بوده و مؤلفه نرمال تنش که بر المانی سطحی وارد می‌شود به جهت بردار نرمال المان بستگی دارد. کمیت $-\sigma_{ii}/3$ که تحت چرخش محورهای مختصات نامتغیر بوده و در سیال ساکن برابر با فشار استاتیک می‌شود برای تعریف فشار در سیال متحرک بکار می‌رود:

[11] Vorticity
[12] Isotropic
[13] Kronecker delta

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \qquad (۲۹-۳)$$

برای یک سیال نیوتنی فرض می‌شود معادله ساختاری[۱۴] یعنی رابطه بین تانسور تنش و تانسور نرخ کرنش خطی است. اگر سیال تراکم‌ناپذیر هم باشد این رابطه به قانون استوکس[15] تبدیل می‌شود:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_f\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن μ_f لزجت سیال است. قانون استوکس به فرم تانسوری عبارت است از:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu_f \nabla^s \mathbf{v} \qquad (۳۱-۳)$$

۳-۶-۳- معادلات ناویر- استوکس

معادلات حاکم بر جریان وابسته به زمان یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی, معادله مومنتوم و معادله پایستگی جرم هستند که بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\rho_f \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla.\boldsymbol{\sigma}^f + \rho_f \mathbf{b}^f \quad \text{in} \quad \Omega^f \times (0,T) \qquad (۳۲-۳- \text{الف})$$

$$\nabla.\mathbf{v} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^f \times (0,T) \qquad (۳۲-۳- \text{ب})$$

این دو معادله در کنار هم معادلات ناویر- استوکس نامیده می‌شوند. با بسط مشتق زمانی سرعت مطابق با معادله (۳-۱۱) یا استفاده مستقیم از معادله (۳-۲۴) فرم ALE معادله مومنتوم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho_f \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\chi} + \rho_f\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v} = \nabla.\boldsymbol{\sigma}^f + \rho_f \mathbf{b}^f \quad \text{in} \quad \Omega^f \times (0,T) \qquad (۳۳-۳)$$

با کمک قانون استوکس در (۳-۳۱) می‌توان معادله بالا را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_f \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\chi} - 2\mu_f \nabla.\nabla^s\mathbf{v} + \rho_f\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v} + \nabla p = \rho_f \mathbf{b}^f \quad \text{in} \quad \Omega^f \times (0,T) \qquad (۳۴-۳)$$

[14] Constitutive equation
[15] Stokes' law

پس از استخراج معادلات ناویر- استوکس باید مسأله مقدار اولیه مرزی را با شرایط اولیه و مرزی مناسب تکمیل نمود. شرایط مرزی عموماً شامل پیش‌دهی مقدار $\mathbf{v}_D$ برای سرعت روی قسمت Γ_D^f از مرز سیال بصورت

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}_D(\mathbf{x},t) \quad \text{on} \quad \Gamma_D^f\times(0,T) \qquad (۳-۳۵)$$

و مقدار کشش مرزی $\mathbf{t}^f$ روی قسمت مکمل Γ_N^f بصورت

$$\mathbf{n}^f.\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{x},t)=\mathbf{t}^f(\mathbf{x},t) \;\; \text{on} \;\; \Gamma_N^f\times(0,T) \qquad (۳-۳۶)$$

می‌شود. $\mathbf{n}^f$ در معادله اخیر نماینده بردار واحد نرمال خروجی از مرز سیال است. با استفاده از قانون استوکس این معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{n}^f.\boldsymbol{\sigma}^f=-p\mathbf{n}^f+2\mu_f\mathbf{n}^f.\nabla^s\mathbf{v}=\mathbf{t}^f \quad \text{on} \;\; \Gamma_N^f\times(0,T) \qquad (۳-۳۷)$$

شرایط اولیه هم برای مسائل وابسته به زمان به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0 \;\; \text{on} \;\; \Omega^f\times\{0\} \qquad (۳-۳۸)$$

قابل توجه است که نیازی به تعیین شرایط اولیه برای فشار نداریم. زیرا مشتق زمانی فشار در معادلات حاکم وجود ندارد.

۳-۶-۴- فرم قوی معادلات حاکم بر سیال

با توجه به مطالب بالا فرم قوی معادلات ناویر- استوکس به همراه شرایط مرزی و اولیه مناسب در توصیف لاگرانژی- اویلری اختیاری بصورت زیر خلاصه می‌شود: برای نیروی جسمی (بر واحد جرم) $\mathbf{b}^f$ داده شده، سرعت $\mathbf{v}_D$ پیش‌دهی شده روی قسمت Γ_D^f مرز و کشش مرزی $\mathbf{t}^f$ اعمال شده روی قسمت باقیمانده Γ_N^f، میدان سرعت $\mathbf{v}$ و میدان فشار p را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\rho_f\left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|_\chi-2\mu_f\nabla.\nabla^s\mathbf{v}+\rho_f\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v}+\nabla p=\rho_f\mathbf{b}^f \quad \text{in} \quad \Omega^f\times(0,T) \qquad \text{(۳-۳۹- الف)}$$

$$\nabla.\mathbf{v}=0 \quad \text{in} \quad \Omega^f\times(0,T) \qquad \text{(۳-۳۹- ب)}$$

$$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}_0 \;\; \text{on} \;\; \Omega^f\times\{0\} \qquad \text{(۳-۳۹- ج)}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}_D(\mathbf{x},t) \quad \text{on} \quad \Gamma_D^f\times(0,T) \tag{۳-۳۹- د}$$

$$\mathbf{n}^f.\boldsymbol{\sigma}^f=-p\mathbf{n}^f+2\mu_f\mathbf{n}^f.\nabla^s\mathbf{v}=\mathbf{t}^f \quad \text{on} \quad \Gamma_N^f\times(0,T) \tag{۳-۳۹- ه}$$

۳-۶-۵- فرم ضعیف استاندارد معادلات حاکم بر سیال

فرم ضعیف استاندارد (گالرکین) معادلات حاکم بر سیال با ضرب معادله حرکت (۳-۳۹- الف) در تابع تست سرعت یعنی $\delta\mathbf{v}$ و انتگرالگیری روی ناحیه فضایی Ω^f سیال بدست می‌آید. بطور مشابه قید تراکم‌ناپذیری (۳-۳۹- ب) در تابع تست فشار یعنی δp ضرب شده و از حاصل روی ناحیه Ω^f انتگرالگیری می‌شود. بنابراین فرم ضعیف مسأله ناویر- استوکس به این صورت خواهد بود: فرض کنید V بیانگر فضای حلهای آزمون و W بیانگر فضای توابع وزن باشد. برای نیروی جسمی $\mathbf{b}^f$, سرعت $\mathbf{v}_D$ و کشش مرزی $\mathbf{t}^f$ داده شده, میدان سرعت و فشار $\{\mathbf{v},p\}\in V$ را طوری بیابید که برای تمام توابع تست $\{\delta\mathbf{v},\delta p\}\in W$ داشته باشیم [۱۳و۱۳۰]:

$$\begin{aligned}&\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|_\chi\right)_{\Omega^f}-\left(\delta\mathbf{v},\mu_f\nabla.\nabla^s\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}+\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}\\&+\left(\delta\mathbf{v},\nabla p\right)_{\Omega^f}+\left(\delta p,\nabla.\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}=\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\mathbf{b}^f\right)_{\Omega^f}\end{aligned} \tag{۳-۴۰}$$

که در آن $(\cdot,\cdot)=\int_\Omega(\cdot)\,d\Omega$ نشان دهنده ضرب داخلی L^2 نسبت به ناحیه Ω است. می‌توان نشان داد (جزئیات در پیوست الف) که این فرم ضعیف بصورت زیر هم قابل بیان است:

$$B^f\left(\delta\mathbf{v},\delta p;\mathbf{v},p\right)=L^f\left(\delta\mathbf{v},\delta p\right) \tag{۳-۴۱- الف}$$

که در این رابطه داریم:

$$\begin{aligned}B^f\left(\delta\mathbf{v},\delta p;\mathbf{v},p\right)=&\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|_\chi\right)_{\Omega^f}+\left(\nabla^s\delta\mathbf{v},2\mu_f\nabla^s\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}\\&+\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}-\left(\nabla.\delta\mathbf{v},p\right)_{\Omega^f}+\left(\delta p,\nabla.\mathbf{v}\right)_{\Omega^f}\end{aligned} \tag{۳-۴۱- ب}$$

و

$$L^f\left(\delta\mathbf{v},\delta p\right)=\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\mathbf{b}^f\right)_{\Omega^f}+\left(\delta\mathbf{v},\mathbf{t}^f\right)_{\Gamma_N^f} \tag{۳-۴۱- ج}$$

۳-۶-۶- گسسته‌سازی اجزاء محدود فرم گالرکین معادلات حاکم بر سیال

برای بدست آوردن تقریب اجزاء محدود معادلات (۳-۴۱) از تقریبهای زیر برای مؤلفه‌های سرعت و فشار استفاده می‌کنیم:

$$v_i = \sum_{I=1}^{n_N^e} N_I v_{iI} \qquad \text{(۳-۴۲- الف)}$$

$$p = \sum_{I=1}^{n_N^e} N_I p_I \qquad \text{(۳-۴۲- ب)}$$

در این روابط n_N^e تعداد گره‌های المان, N_I تابع شکل اجزاء محدود با پیوستگی از نوع C^0, v_{iI} و p_I مقادیر گرهی مؤلفه‌های سرعت و فشار هستند.

ضمناً برای یافتن فرم اجزاء محدود ترم غیر خطی $\rho_f \left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v}$ در معادله (۳-۴۱), باید این ترم غیرخطی را که مربوط به جابجايي[16] است خطی نمود. به این منظور از روش خطی‌سازی پیکارد[17] بهره می‌گیریم. در خطی‌سازی پیکارد از تقریب زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v} \simeq \mathbf{V}.\nabla\mathbf{v} \qquad \text{(۳-۴۳)}$$

که در آن $\mathbf{V}$ بردار سرعت از تکرار قبلی است. با تعریف $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \mathbf{v}^m$ ترم غیرخطی مربوط به جابجايي بصورت زیر خطی می‌شود:

$$\rho_f \left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right).\nabla\mathbf{v} = \rho_f \bar{\mathbf{V}}.\nabla\mathbf{v} \qquad \text{(۳-۴۴)}$$

با استفاده از روابط (۳-۴۲) و (۳-۴۴), تقریب گسسته اجزاء محدود معادله (۳-۴۱) به فرم زیر حاصل می‌آید:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \left[\mathbf{K}+\mathbf{C}\right]\mathbf{v} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{F} \\ &\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{(۳-۴۵)}$$

در این رابطه $\mathbf{M}$ ماتریس جرم استاندارد اجزاء محدود است:

$$M_{IJ} = \int_{\Omega^f} \rho_f N_I N_J d\Omega \qquad \text{(۳-۴۶)}$$

---
[16] Convection
[17] Picard linearization

$\mathbf{K}$ ماتریس لزجت[۱۸] نام دارد و از گسسته‌سازی ترمهای وابسته به لزجت حاصل می‌شود:

(۳-۴۷- الف) $$\mathbf{K} = {}^{1}\mathbf{K} + {}^{2}\mathbf{K}$$

(۳-۴۷- ب) $${}^{1}K_{IJ} = \int_{\Omega^f} \mu_f \frac{\partial N_I}{\partial x_j}\frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega$$

(۳-۴۷- ج) $${}^{2}K_{ijIJ} = \int_{\Omega^f} \mu_f \frac{\partial N_I}{\partial x_j}\frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega$$

$\mathbf{C}$ ماتریس جابجايي[۱۹] است و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

(۳-۴۸) $$C_{IJ} = \int_{\Omega^f} \rho_f N_I \frac{\partial N_J}{\partial x_j} \nabla_j d\Omega$$

ماتریس $\mathbf{G}$ عملگر گرادیان گسسته[۲۰] و $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ عملگر دیورژانس گسسته[۲۱] است:

(۳-۴۹) $$G_{iIJ} = -\int_{\Omega^f} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} N_J d\Omega$$

اثر ناشی از نیروی جسمی $\mathbf{b}^f$ و کشش سطحی $\mathbf{t}$ پیش‌دهی شده روی قسمت نیومن Γ^f مرز توسط بردار $\mathbf{F}$ لحاظ می‌گردد:

(۳-۵۰) $$\mathbf{F} = \int_{\Omega^f} \rho_f N_I b_i^f d\Omega + \int_{\Gamma_N^f} N_I t_i d\Gamma$$

جزئیات مربوط به استخراج این فرم گسسته در پیوست (الف) ارائه شده است.

۳-۶-۷- فرم ضعیف پایدار شده معادلات حاکم بر سیال

روش اجزاء محدود گالرکین برای گسسته‌سازی ترمهای جابجايي از تقریب تفاضل مرکزی[۲۲] استفاده می‌کند. این تقریب در جریانهايي که اثر جابجايي بر اثر پخش[۲۳] (یا اثر لزجت) غالب باشد یعنی در جریانهایی که دارای عدد رینولدز بالا هستند مناسب نیست و سبب ناپایداری فرمولاسیون گالرکین استاندارد می‌گردد. در این مواقع باید از فرمولاسیون اجزاء محدود پایدار شده استفاده کرد تا به جوابهای

[18] Viscosity matrix
[19] Convection matrix
[20] Discrete gradient operator
[21] Discrete divergence operator
[22] Central difference
[23] Diffusion

قابل اطمینان دست یافت. علاوه بر این هنگامی که روش گالرکین به معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر اعمال می‌شود فضاهای سرعت و فشار را نمی‌توان بصورت دلخواه انتخاب نمود بلکه وجود یک رابطه بین آنها ضروری است که این رابطه به شرایط سازگاری LBB[24] معروف است. در صورت عدم ارضای این شرایط ممکن است جوابهای نادرست و نوسانی برای میدان فشار بدست آید. البته با استفاده از تکنیکهای پایدارسازی مناسب می‌توان قید ضرورت ارضای شرایط LBB را از میان برداشت. بنابراین دو دلیل اصلی برای پایدارسازی معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر وجود دارد: جلوگیری از ناپایداری جواب در رینولدزهای بالا و برداشتن ضرورت ارضای شرایط LBB [۱۳و۱۶].

به منظور پایدارسازی ترم جابجايي, یک ترم اضافی که روی ناحیه درونی المان تعریف شده است به فرم ضعیف گالرکین افزوده می‌شود. این ترم باید تابعی از باقیمانده[۲۵] معادله دیفرانسیل اصلی باشد تا سازگاری پایدارسازی تضمین گردد [۱۳]. سازگاری به این معناست که پایدارسازی به گونه‌ای انجام شود که جواب معادله دیفرانسیل جوابی برای فرم ضعیف هم باشد.

فرم کلی تکنیکهای پایدارسازی سازگار را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathrm{WF}\left[\mathcal{L}(\mathbf{v},p)\right]+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^e}\mathcal{P}(\delta\mathbf{v},\delta p)\,\tau\,\mathcal{R}(\mathbf{v},p)\,d\Omega=\mathrm{WF}\left[\mathrm{RHS}\right] \qquad (۵۱-۳)$$

در رابطه اخیر $\mathcal{L}(\mathbf{v},p)$ عملگر دیفرانسیلی متناظر با معادله دیفرانسیل (در اینجا معادلات ناویر- استوکس) و WF بیانگر فرم ضعیف مربوطه است. $\mathcal{P}(\delta\mathbf{v},\delta p)$ یک عملگر معلوم است که به توابع آزمون $\delta\mathbf{v}$ و δp اعمال می‌شود. τ پارامتر پایدارسازی (یا زمان ذاتی) و $\mathcal{R}(\mathbf{v},p)$ باقیمانده معادله دیفرانسیل است. رابطه زیر بین $\mathcal{L}(\mathbf{v},p)$ و $\mathcal{R}(\mathbf{v},p)$ برقرار است:

$$\mathcal{R}(\mathbf{v})=\mathcal{L}(\mathbf{v})-\mathrm{RHS} \qquad (۵۲-۳)$$

[24] Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi
[25] Residual

تکنیکهای پایدارسازی مختلف با تعریف $\mathcal{P}(\delta \mathbf{v}, \delta p)$ متمایز می‌شوند. به عنوان مثال در تکنیک SUPG[26] از تعریف زیر برای $\mathcal{P}(\delta \mathbf{v}, \delta p)$ استفاده می‌شود [۱۳و۱۶و۱۳۱]:

$$\mathcal{P}(\delta \mathbf{v}) = \mathbf{v}.\nabla \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p \tag{۵۳-۳}$$

بنابراین معادله (۳-۵۱) برای این تکنیک بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{WF}\left[\mathcal{L}(\mathbf{v}, p)\right] + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{v}.\nabla \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p)\, \tau \mathcal{R}(\mathbf{v}, p)\, d\Omega = \mathrm{WF}[\mathrm{RHS}] \tag{۵۴-۳}$$

در نتیجه فرمولاسیون پایدار شده معادله ناویر- استوکس با تکنیک SUPG به شکل زیر قابل بیان است [۱۳و۱۶و۱۳۲]:

$$\begin{aligned} &B^f(\delta \mathbf{v}, \delta p; \mathbf{v}, p) + \left((\mathbf{v} - \mathbf{v}^m).\nabla \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p, \tau_{SUPG} \mathbf{r}_M\right)_{\Omega^f} \\ &+ (\nabla.\delta \mathbf{v}, \tau_{LSIC} \mathbf{r}_C)_{\Omega^f} = L^f(\delta \mathbf{v}, \delta p) \end{aligned} \tag{۵۵-۳}$$

در این معادله $\mathbf{r}_M$ و $\mathbf{r}_C$ به ترتیب باقیمانده‌های معادلات مومنتوم و پیوستگی هستند:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{v}, p) = \rho_f \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\chi} - 2\mu_f \nabla.\nabla^s \mathbf{v} + \rho_f (\mathbf{v} - \mathbf{v}^m).\nabla \mathbf{v} + \nabla p - \rho_f \mathbf{b}^f \tag{۵۶-۳}$$

$$\mathbf{r}_C(\mathbf{v}) = \rho_f \nabla.\mathbf{v} \tag{۵۷-۳}$$

ضمناً ترم $(\nabla.\delta \mathbf{v}, \tau_{LSIC} \mathbf{r}_C)_{\Omega^f}$ یک ترم اضافه است که به منظور افزایش پایداری در رینولدزهای بالا علاوه بر ترمهای ناشی از تکنیک SUPG به معادله افزوده شده است [۱۳و۱۳۳]. τ_{SUPG} و τ_{LSIC} هم پارامترهای پایدارسازی هستند که نقش عمده‌ای در موفقیت روشهای پایدارسازی ایفا می‌کنند. این پارامترها برای معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر بصورت زیر در مرجع [۱۶] تعریف شده‌اند:

$$\tau_{LSIC} = \lambda |\mathbf{v}(x)| h_K\, \xi(\mathrm{Re}_K(x)) \tag{۵۸-۳}$$

$$\tau_{SUPG} = \frac{h_K\, \xi(\mathrm{Re}_K(x))}{2|\mathbf{v}(x)|} \tag{۵۹-۳}$$

که در آن داریم:

[26] Streamline-upwind Petrov-Galerkin

$$\xi\left(\mathrm{Re}_K(x)\right)=\mathrm{Min}\left(1.0,\frac{\rho\, m_K\, h_K\left|\mathbf{v}(x)\right|}{4\mu_f}\right) \quad (۳-۶۰)$$

$$\left|\mathbf{v}(x)\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{SD}}\left|\nabla_i(x)\right|^2} \quad (۳-۶۱)$$

در این روابط K بیانگر ناحیه المان و $\lambda>0$ یک پارامتر مثبت است. در مرجع [۱۶] $\lambda=1$ پیشنهاد شده است. مطابق با مراجع [۱۲و۱۶و۱۳۱] استفاده از مقدار $m_K=1/3$ برای المانهای خطی و $m_K=1/12$ برای المانهای مرتبه دوم مناسب است. h_K هم قطر المان[27] است که در مراجع [۱۶و۱۳۱] برای المانهای مستطیلی و شش‌وجهی بصورت زیر تعریف شده است:

$$h_K=\sqrt{2}\,\frac{\text{Element Area}}{\text{Element Diagonal}} \quad (۳-۶۲)$$

۳-۶-۸- گسسته‌سازی اجزاء محدود فرم پایدار شده معادلات حاکم بر سیال

با استفاده از رابطه (۳-۴۲)، تقریب گسسته اجزاء محدود معادله (۳-۵۵) به فرم زیر حاصل می‌آید [۱۶]:

$$\begin{gathered}\left[\mathbf{M}+{}^{\tau}\mathbf{M}^{v}\right]\dot{\mathbf{v}}+\left[\mathbf{K}+{}^{\tau}\mathbf{K}^{v}+{}^{\tau_{\mathrm{LSIC}}}\mathbf{K}^{v}+\mathbf{C}+{}^{\tau}\mathbf{C}^{v}\right]\mathbf{v}+\left[\mathbf{G}+{}^{\tau}\mathbf{G}^{v}\right]\mathbf{p}=\mathbf{F}+{}^{\tau}\mathbf{F}\\ \left[{}^{\tau}\mathbf{M}^{p}\right]\dot{\mathbf{v}}+\left[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}+{}^{\tau}\mathbf{K}^{p}+{}^{\tau}\mathbf{C}^{p}\right]\mathbf{v}+\left[{}^{\tau}\mathbf{G}^{p}\right]\mathbf{p}={}^{\tau}\mathbf{E}\end{gathered} \quad (۳-۶۳)$$

در این معادله $\mathbf{M}$، $\mathbf{K}$، $\mathbf{C}$، $\mathbf{G}$ و $\mathbf{F}$ همان ماتریسها و بردارهای تعریف شده توسط معادلات (۳-۴۶) تا (۳-۵۰) هستند. سایر ماتریسها و بردارها که از پایدارسازی حاصل شده‌اند بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$${}^{\tau}M_{IJ}^{v}=\int_{\Omega^f}\tau_{SUPG}\nabla_j\frac{\partial N_I}{\partial x_j}N_J\,d\Omega \quad (۳-۶۴)$$

$${}^{\tau}\mathbf{K}^{v}={}_{1}^{\tau}\mathbf{K}^{v}+{}_{2}^{\tau}\mathbf{K}^{v}+{}_{3}^{\tau}\mathbf{K}^{v} \quad (۳-۶۵)$$

$${}_{1}^{\tau}K_{IJ}^{v}=-\int_{\Omega^f}\mu_f\tau_{SUPG}\nabla_k\frac{\partial N_I}{\partial x_k}\frac{\partial^2 N_J}{\partial x_j\partial x_j}d\Omega \quad (۳-۶۶)$$

$${}_{2}^{\tau}K_{IJ}^{v}=-\int_{\Omega^f}\mu_f\tau_{SUPG}\nabla_k\frac{\partial N_I}{\partial x_k}\frac{\partial^2 N_J}{\partial x_j\partial x_j}d\Omega \quad (۳-۶۷)$$

[27] Element diameter

$${}^{\tau}_{3}K^{v}_{ijIJ} = -\int_{\Omega^f} \mu_f \tau_{SUPG} \nabla_k \frac{\partial N_I}{\partial x_k} \frac{\partial^2 N_J}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega \qquad (۶۸-۳)$$

$${}^{\tau_{\mathrm{LSIC}}}K^{v}_{ijIJ} = \int_{\Omega^f} \rho_f \tau_{LSIC} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \qquad (۶۹-۳)$$

$${}^{\tau}C^{v}_{IJ} = \int_{\Omega^f} \rho_f \tau_{SUPG} \nabla_j \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \nabla_k \frac{\partial N_J}{\partial x_k} d\Omega \qquad (۷۰-۳)$$

$${}^{\tau}G^{v}_{iIJ} = \int_{\Omega^f} \tau_{SUPG} \nabla_j \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega \qquad (۷۱-۳)$$

$${}^{\tau}F_i = \int_{\Omega^f} \rho_f \tau_{SUPG} \nabla_j \frac{\partial N_I}{\partial x_j} b_i^f d\Omega \qquad (۷۲-۳)$$

$${}^{\tau}M^{p}_{iIJ} = \int_{\Omega^f} \rho_f \tau_{SUPG} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} N_J d\Omega \qquad (۷۳-۳)$$

$${}^{\tau}\mathbf{K}^{p} = {}^{\tau}_{1}\mathbf{K}^{p} + {}^{\tau}_{2}\mathbf{K}^{p} \qquad (۷۴-۳)$$

$${}^{\tau}_{1}K^{p}_{iIJ} = -\int_{\Omega^f} \frac{\mu_f}{\rho_f} \tau_{SUPG} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial^2 N_J}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega \qquad (۷۵-۳)$$

$${}^{\tau}_{2}K^{p}_{iIJ} = -\int_{\Omega^f} \frac{\mu_f}{\rho_f} \tau_{SUPG} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial^2 N_J}{\partial x_j \partial x_j} d\Omega \qquad (۷۶-۳)$$

$${}^{\tau}C^{p}_{iIJ} = \int_{\Omega^f} \tau_{SUPG} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \nabla_j \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \qquad (۷۷-۳)$$

$${}^{\tau}G^{p}_{IJ} = \int_{\Omega^f} \frac{\tau_{SUPG}}{\rho_f} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega \qquad (۷۸-۳)$$

$${}^{\tau}E_I = \int_{\Omega^f} \tau_{SUPG} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} b_i^f d\Omega \qquad (۷۹-۳)$$

جزئیات مربوط به استخراج این فرم گسسته در پیوست (ب) ارائه شده است.

۳-۷- مسأله جامد

۳-۷-۱- تانسورهای گرادیان تغییر شکل و کرنش

یکی از متغیرهای مهم در توصیف تغییر شکل یک محیط پیوسته گرادیان تغییر شکل است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \text{or} \quad \mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \tag{۸۰-۳}$$

بنابراین اگر تکه خطی بینهایت کوچک را در پیکربندی اولیه با $d\mathbf{X}$ و تکه خط متناظر با آن در پیکربندی جاری را با $d\mathbf{x}$ نشان دهیم با توجه به رابطه (۳-۸۰) می‌توان نوشت:

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}.d\mathbf{X} \quad \text{or} \quad dx_i=F_{ij}dX_j \tag{۸۱-۳}$$

برخلاف الاستیسیته خطی, در مکانیک محیط‌های پیوسته غیرخطی معیارهای متعددی برای کرنش استفاده می‌شود. در اینجا تنها یکی از این معیارها یعنی کرنش گرین (یا گرین- لاگرانژ)[28] مورد بررسی قرار می‌گیرد. تانسور کرنش گرین با $\mathbf{E}$ نمایش داده شده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2-dS^2=2d\mathbf{X}.\mathbf{E}.d\mathbf{X} \quad \text{or} \quad dx_idx_i-dX_idX_i=2dX_iE_{ij}dX_j \tag{۸۲-۳}$$

بنابراین معیار کرنش گرین اختلاف مربع طول یک بردار بسیار کوچک را در پیکربندی جاری (فضايي) و پیکربندی اولیه (مادی) بدست می‌دهد. برای تعیین تانسور کرنش گرین از معادله (۳-۸۱) استفاده می‌کنیم:

$$d\mathbf{x}.d\mathbf{x}=dx_idx_i=F_{ij}dX_jF_{ik}dX_k=dX_jF^T_{ji}F_{ik}dX_k=d\mathbf{X}.\left(\mathbf{F}^T.\mathbf{F}\right).d\mathbf{X} \tag{۸۳-۳}$$

با ترکیب دو معادله اخیر می‌توان نوشت:

$$d\mathbf{X}.\mathbf{F}^T.\mathbf{F}.d\mathbf{X}-d\mathbf{X}.\mathbf{I}.d\mathbf{X}-d\mathbf{X}.2\mathbf{E}.d\mathbf{X}=0 \tag{۸۴-۳}$$

با فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$d\mathbf{X}.\left(\mathbf{F}^T.\mathbf{F}-\mathbf{I}-2\mathbf{E}\right).d\mathbf{X}=0 \tag{۸۵-۳}$$

چون این رابطه برا تمام مقادیر $d\mathbf{X}$ برقرار است باید داشته باشیم:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T.\mathbf{F}-\mathbf{I}\right) \tag{۸۶-۳}$$

یا به عبارت دیگر

$$\mathrm{E}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right), \quad \mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\left(\nabla_0\mathbf{u}\right)^T+\left(\nabla_0\mathbf{u}\right)+\left(\nabla_0\mathbf{u}\right).\left(\nabla_0\mathbf{u}\right)^T\right) \tag{۸۷-۳}$$

[28] The Green (Green-Lagrange) strain

∇_0 در این معادله گرادیان نسبت به مختصات مادی است.

۳-۷-۲- تانسورهای تنش

در مسائل غیرخطی, تعاریف مختلفی برای تنش قابل بیان است. در اینجا سه تعریف از تنش را ارائه می‌کنیم:

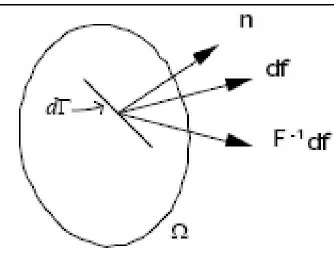
۱- تنش کاوشی[۲۹], $\boldsymbol{\sigma}$

۲- تانسور تنش نامی $\mathbf{P}$ که رابطه نزدیکی با تنش اول پیولا-کیرشهف[۳۰] (PK1) دارد.

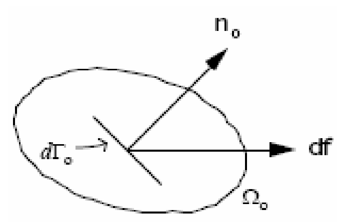
۳- تانسور تنش دوم پیولا-کیرشهف (PK2), که با $\mathbf{S}$ نمایش داده می‌شود.

تعاریف این سه تانسور تنش در جدول زیر داده است:

جدول ۳-۱- تعاریف تنش



پیکربندی جاری



پیکربندی مرجع

تنش کاوشی:	$\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}\, d\Gamma = d\mathbf{f} = \mathbf{t}\, d\Gamma$
تنش نامی:	$\mathbf{n}_0.\mathbf{P}\, d\Gamma_0 = d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0\, d\Gamma_0$
تنش دوم پیولا-کیرشهف	$\mathbf{n}_0.\mathbf{S}\, d\Gamma_0 = \mathbf{F}^{-1}.d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1}.\mathbf{t}_0\, d\Gamma_0$

تنشها با قانون کاوشی تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}\, d\Gamma = \mathbf{t}\, d\Gamma \qquad (۸۸-۳)$$

که در آن $\mathbf{t}$ کشش[۳۱] است. در پیکربندی مرجع همتای معادله (۳-۸۸) عبارت است از:

$$\mathbf{n}_0.\mathbf{P}\, d\Gamma_0 = \mathbf{t}_0\, d\Gamma_0 \qquad (۸۹-۳)$$

---

[29] Cauchy stress
[30] First Piola-Kirchhoff stress
[31] Traction

با استفاده از اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای می‌توان نشان داد که تانسور تنش کاوشی متقارن است یعنی: $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$. تعریف تنش نامی $\mathbf{P}$ مشابه تنش کاوشی است جز اینکه تنش نامی برحسب مساحت و نرمال سطح مرجع (سطح تغییر شکل نیافته) تعریف می‌گردد. می‌توان نشان داد که تنش نامی متقارن نیست. ترانهاده[32] تنش نامی تنش اول پیولا-کیرشهف خوانده می‌شود. تنش دوم پیولا-کیرشهف یا PK2 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{n}_0.\mathbf{S}\,d\Gamma_0 = \mathbf{F}^{-1}.\mathbf{t}_0\,d\Gamma_0 \qquad (۳-۹۰)$$

می‌توان نشان داد که تنش دوم پیولا-کیرشهف تانسوری متقارن است.

۳-۷-۲-۱- تبدیل بین تانسورهای تنش

ارتباط بین تانسورهای مختلف تنش در جدول (۳-۲) آمده است.

جدول ۳-۲- تبدیلات تنش

	تنش کاوشی $\boldsymbol{\sigma}$	تنش نامی $\mathbf{P}$	تنش دوم پیولا-کیرشهف $\mathbf{S}$
$\boldsymbol{\sigma}$		$J^{-1}\mathbf{F}.\mathbf{P}$	$J^{-1}\mathbf{F}.\mathbf{S}.\mathbf{F}^T$
$\mathbf{P}$	$J\,\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\sigma}$		$\mathbf{S}.\mathbf{F}^T$
$\mathbf{S}$	$J\,\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{P}.\mathbf{F}^{-T}$	

این روابط با استفاده از معادلات (۳-۸۸) تا (۳-۹۰) به همراه رابطه نانسون[33] که نرمال جاری را با نرمال مرجع مرتبط می‌سازد بدست آمده‌اند. رابطه نانسون عبارت است از:

$$\mathbf{n}\,d\Gamma = J\mathbf{n}_0.\mathbf{F}^{-1}d\Gamma_0\,,\quad n_i\,d\Gamma = Jn_j^0.F_{ji}^{-1}d\Gamma_0 \qquad (۳-۹۱)$$

۳-۷-۳- معادله ساختاری برای جامد

بسیاری از کاربردهای مهندسی شامل کرنشهای کوچک و چرخشهای بزرگ هستند. در این مسائل اثرات تغییر شکل بزرگ عمدتاً ناشی از چرخشها هستند (مانند خمش یک میله ماهیگیری). پاسخ ماده را

[32] Transpose
[33] Nanson’s relation

در این حالت می‌توان با تعمیمی ساده از قوانین الاستیک خطی مدل کرد که در آن تنش با تنش PK2 و کرنش خطی با کرنش گرین جایگزین شده‌اند. این ماده را ماده سن‌ونان-کیرشهف[34] (یا ماده کیرشهف) می‌نامند. رابطه تنش-کرنش را برای یک ماده کیرشهف ایزوتروپیک می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$S_{ij} = \lambda_s E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_s E_{ij}, \qquad \mathbf{S} = \lambda_s \operatorname{trace}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E} \tag{۹۲-۳}$$

دو ثابت مستقل λ_s و μ_s ثوابت لامه[35] نامیده می‌شوند که با روابط زیر از مدول یانگ E_s و ضریب پواسون υ_s جامد بدست می‌آیند:

$$\mu_s = \frac{E_s}{2(1+\upsilon_s)} \tag{۹۳-۳}$$

$$\mu_s = \frac{\upsilon_s E_s}{(1+\upsilon_s)(1-2\upsilon_s)} \tag{۹۴-۳}$$

۳-۷-۴- فرم قوی معادلات حاکم بر جامد

همانطور که پیشتر گفته شد در رویکرد لاگرانژی- اویلری اختیاری به مسأله برهمکنش سیال- جامد از توصیف لاگرانژی برای ساختار جامد استفاده می‌شود. به منظور تدوین فرمولاسیون اجزاء محدود در توصیف لاگرانژی استفاده از دو روش رایج است. در روش اول که فرمولاسیون لاگرانژی تام[36] نامیده می‌شود معادلات بر حسب معیارهای لاگرانژی تنش و کرنش نوشته شده و مشتقها و انتگرالها نسبت به مختصات لاگرانژی (مادی) $\mathbf{X}$ گرفته می‌شوند. در روش دوم که به عنوان فرمولاسیون لاگرانژی بهنگام[37] شناخته می‌شود معادلات بر حسب معیارهای اویلری تنش و کرنش بیان شده و مشتقها و انتگرالها نسبت به مختصات اویلری (فضايي) $\mathbf{x}$ گرفته می‌شوند. قابل توجه است در هر دو فرمولاسیون لاگرانژی تام و بهنگام متغیرهای وابسته تابعی از مختصات مادی و زمان هستند.

در فرمولاسیون لاگرانژی تام استفاده از تنش نامی, تنش دوم پیولا-کیرشهف و کرنش گرین معمول است. فرم قوی معادلات حاکم بر محیط پیوسته جامد به همراه شرایط مرزی و اولیه در جدول (۳-۳)

34 St. Venant-Kirchhoff material
35 Lamé constants
36 Total Lagrangian formulation
37 Updated Lagrangian formulation

آمده است. همانطور که این جدول نشان می‌دهد در معادله مومنتوم از تنش نامی **P** استفاده شده است زیرا معادله مومنتوم حاصله و فرم ضعیف آن نسبت به تنش PK2 ساده‌ترند. اما, تنش نامی بدلیل عدم تقارن در معادلات ساختاری مناسب نیست بنابراین برای معادلات ساختاری از تنش PK2 استفاده گردیده است. وقتی تنش PK2 با استفاده از معادلات ساختاری تعیین شد تنش نامی را می‌توان براحتی با تبدیل داده شده در معادله (۳-۹۸) بدست آورد.

جدول ۳-۳- معادلات حاکم برای فرمولاسیون لاگرانژی تام

بقای جرم:

$$\rho J = \rho_0 J_0 = \rho_0 \qquad (۳-۹۵)$$

بقای مومنتوم خطی:

$$\nabla_0 . \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}^s = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{or} \quad \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \qquad (۳-۹۶)$$

معیار کرنش:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T . \mathbf{F} - \mathbf{I}\right), \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}\right) \qquad (۳-۹۷)$$

معادله ساختاری:

$$\mathbf{S} = \lambda_s \operatorname{trace}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E} \quad \text{or} \quad S_{ij} = \lambda_s E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_s E_{ij}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{S}.\mathbf{F}^T \qquad (۳-۹۸)$$

شرایط مرزی:

$$n_j^0 P_{ji} = t_i^{s0} \quad \text{or} \quad \mathbf{e}_i . \mathbf{n}^0 . \mathbf{P} = \mathbf{e}_i . \mathbf{t}^{s0} \ \text{on } \Gamma_N^{s0} \qquad (۳-۹۹)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \ \text{on } \Gamma_u^{s0} \qquad (۳-۱۰۰)$$

شرایط اولیه:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{X}) \qquad (۳-۱۰۱)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \qquad (۳-۱۰۲)$$

۳-۷-۵- فرم ضعیف معادلات حاکم بر جامد

فرم ضعیف معادلات حاکم بر جامد با ضرب معادله حرکت (۳-۹۶) در تابع تست جابجايي يعنى $\delta\mathbf{u}$ و انتگرالگیری روی ناحیه مادی Ω^{s0} جامد بدست می‌آید. بنابراین فرم ضعیف مسأله جامد به این صورت خواهد بود: فرض کنید U بیانگر فضای حلهای آزمون و S بیانگر فضای توابع وزن باشد. برای نیروی جسمی $\mathbf{b}^s$, جابجايي $\mathbf{u}_D$ و کشش مرزی $\mathbf{t}^{s0}$ داده شده, میدان جاجايي $\mathbf{u}\in U$ را طوری بیابید که برای تمام توابع تست $\delta\mathbf{u}\in S$ داشته باشیم [۱۳۴]:

$$\left(\delta\mathbf{u},\nabla_0.\mathbf{P}\right)_{\Omega^{s0}}+\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\mathbf{b}\right)_{\Omega^{s0}}=\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\ddot{\mathbf{u}}\right)_{\Omega^{s0}} \tag{۳-۱۰۳}$$

به منظور یافتن معادلات اجزاء محدود ابتدا هر یک از ترمهای معادله (۳-۱۰۳) را بسط می‌دهیم. این کار را با ترم $\left(\delta\mathbf{u},\nabla_0.\mathbf{P}\right)_{\Omega^{s0}}$ آغاز می‌کنیم:

$$\left(\delta\mathbf{u},\nabla_0.\mathbf{P}\right)_{\Omega^{s0}}=\int_{\Omega^{s0}}\delta\mathbf{u}.\nabla_0.\mathbf{P}d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\delta u_i\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j}d\Omega_0 \tag{۳-۱۰۴}$$

این فرم ضعیف مفید نیست زیرا بدلیل وجود مشتق تنش نامی در (۳-۱۰۴) نیاز است جابجايي‌های آزمون[۳۸] دارای پیوستگی از نوع C^1 باشد. به منظور حذف مشتق تنش نامی از این معادله, از فرمول مشتق حاصلضرب بهره می‌گیریم:

$$\int_{\Omega^{s0}}\delta u_i\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j}d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\delta u_iP_{ji}\right)d\Omega_0-\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial\left(\delta u_i\right)}{\partial X_j}P_{ji}\,d\Omega_0 \tag{۳-۱۰۵}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان ترم اول سمت راست را در معادله بالا بصورت یک انتگرال مرزی بیان کرد:

$$\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\delta u_iP_{ji}\right)d\Omega_0=\int_{\Gamma^{s0}}\delta u_in_j^0P_{ji}\,d\Gamma_0=\int_{\Gamma_N^{s0}}\delta u_it_i^{s0}\,d\Gamma_0 \tag{۳-۱۰۶}$$

با جاگذاری از معادله (۳-۱۰۶) در (۳-۱۰۵) و مقایسه با معادله (۳-۱۰۴) بدست می‌آید:

$$\left(\delta\mathbf{u},\nabla_0.\mathbf{P}\right)_{\Omega^{s0}}=\int_{\Gamma_N^{s0}}\delta u_it_i^{s0}\,d\Gamma_0-\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial\left(\delta u_i\right)}{\partial X_j}P_{ji}\,d\Omega_0 \tag{۳-۱۰۷}$$

حال به بررسی ترم $\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\mathbf{b}\right)_{\Omega^{s0}}$ می‌پردازیم:

---

[38] Trial displacements

$$\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\mathbf{b}\right)_{\Omega^{s0}}=\int_{\Omega^{s0}}\delta\mathbf{u}.\rho_0\mathbf{b}d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\delta u_i b_i d\Omega_0 \tag{۱۰۸-۳}$$

و در نهایت ترم $\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\ddot{\mathbf{u}}\right)_{\Omega^{s0}}$

$$\left(\delta\mathbf{u},\rho_0\ddot{\mathbf{u}}\right)_{\Omega^{s0}}=\int_{\Omega^{s0}}\delta\mathbf{u}.\rho_0\ddot{\mathbf{u}}d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\delta u_i\ddot{u}_i d\Omega_0 \tag{۱۰۹-۳}$$

با افزودن عبارتهای بدست آمده مطابق با معادله (۳-۱۰۳) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\delta u_i\ddot{u}_i d\Omega_0+\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial\left(\delta u_i\right)}{\partial X_j}P_{ji}\,d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\delta u_i b_i d\Omega_0+\int_{\Gamma_N^{s0}}\delta u_i t_i^{s0}\,d\Gamma_0 \tag{۱۱۰-۳}$$

۳-۷-۶- گسسته‌سازی اجزاء محدود فرم ضعیف معادلات حاکم بر جامد

برای بدست آوردن تقریب اجزاء محدود معادلات (۳-۱۱۰) از تقریبهای زیر برای مؤلفه‌های جابجايي استفاده می‌کنیم:

$$u_i=\sum_{I=1}^{n_N^e}N_I u_{iI} \tag{۱۱۱-۳}$$

در این رابطه n_N^e تعداد گره‌های المان, N_I تابع شکل اجزاء محدود با پیوستگی از نوع C^0 و u_{iI} مقادیر گرهی مؤلفه‌های جابجايي است. سرعت و شتاب با گرفتن مشتق زمانی مادی رابطه (۳-۱۱۱) بدست می‌آید:

$$\dot{u}_i=\sum_{I=1}^{n_N^e}N_I\dot{u}_{iI} \tag{۱۱۲-۳}$$

$$\ddot{u}_i=\sum_{I=1}^{n_N^e}N_I\ddot{u}_{iI} \tag{۱۱۳-۳}$$

با جاگذاری از معادلات (۳-۱۱۱) تا (۳-۱۱۳) در معادله (۳-۱۱۰) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\left(N_I\delta u_{iI}\right)\left(N_J\ddot{u}_{iJ}\right)d\Omega_0+\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial\left(N_I\delta u_{iI}\right)}{\partial X_j}P_{ji}\,d\Omega_0=\\&\int_{\Omega^{s0}}\rho_0\left(N_I\delta u_{iI}\right)b_i d\Omega_0+\int_{\Gamma_N^{s0}}\left(N_I\delta u_{iI}\right)t_i^{s0}\,d\Gamma_0\end{aligned} \tag{۱۱۴-۳}$$

که با ساده‌سازی بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\Omega^{s0}}\rho_0 N_I N_J d\Omega_0\ddot{u}_{iJ}+\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial N_I}{\partial X_j}P_{ji}\,d\Omega_0=\int_{\Omega^{s0}}\rho_0 N_I b_i d\Omega_0+\int_{\Gamma_N^{s0}}N_I t_i^{s0}\,d\Gamma_0 \tag{۱۱۵-۳}$$

این معادله را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{M}^{s}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{f}^{s,int}=\mathbf{f}^{s,ext} \tag{۱۱۶-۳}$$

در این معادله $\mathbf{M}^{s}$ ماتریس استاندارد اجزاء محدود است:

$$M_{IJ}^{s}=\int_{\Omega^{s0}}\rho_{0}^{s}N_{I}N_{J}\,d\Omega_{0} \tag{۱۱۷-۳}$$

$\mathbf{F}^{s,int}$ بردار نیروهای گرهی داخلی است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{iI}^{s,int}=\int_{\Omega^{s0}}\frac{\partial N_{I}}{\partial X_{j}}P_{ji}\,d\Omega_{0} \tag{۱۱۸-۳}$$

$\mathbf{f}^{s,ext}$ هم بردار نیروهای گرهی خارجی است:

$$f_{iI}^{s,ext}=\int_{\Omega^{s0}}\rho_{0}N_{I}b_{i}d\Omega_{0}+\int_{\Gamma_{N}^{s0}}N_{I}t_{i}^{s0}\,d\Gamma_{0} \tag{۱۱۹-۳}$$

روند محاسبه نیروهای گرهی داخلی در جدول (۳-۴) آمده است.

جدول ۳-۴- الگوریتم محاسبه نیروی گرهی داخلی برای فرمولاسیون لاگرانژی تام

۱- $\mathbf{f}^{\text{int}}=0$ قرار دهید.
۲- برای تمام نقاط تربیع[39] ξ_{Q}
الف) برای تمام مقادیر I مقدار $\partial N_{I}\left(\xi_{Q}\right)/\partial X_{j}$ را محاسبه کرده و مقدار $H_{ij}=\partial N_{I}/\partial X_{j}\,u_{iI}$ را تعیین کنید.
ب) گرادیان تغییر شکل و ژاکوبین را با استفاده از روابط $\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{H},\ J=\det\left(\mathbf{F}\right)$ بدست آورید.
ج) تانسور کرنش گرین را از $\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{T}.\mathbf{F}-\mathbf{I}\right)$ تعیین کنید.
د) با استفاده از معادله ساختاری تنش دوم پیولا-کیرشهف $\mathbf{S}$ را از روی کرنش گرین محاسبه نمایید.
ه) تنش نامی را از رابطه $\mathbf{P}=\mathbf{S}.\mathbf{F}^{T}$ بدست آورید.
و) برای تمام گره‌ها قرار دهید: $f_{iI}^{s,int}\leftarrow f_{iI}^{s,int}+\frac{\partial N_{I}}{\partial X_{j}}P_{ji}J_{\xi}^{0}\bar{w}_{Q}$. ($\bar{w}_{Q}$ اوزان تربیع[40] هستند)
ز) پایان حلقه

[39] Quadrature points
[40] Quadrature weights

۳-۸- شرایط فصل مشترک سیال- جامد

شرایط فصل مشترک سیال- جامد از قیود سینماتیکی و دینامیکی تشکیل شده‌اند که به بصورت زیر روی فصل مشترک Γ^{f-s} مشخص می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t} = \mathbf{v}^f \quad \text{on} \quad \Gamma^{f-s} \times (0,T) \tag{۱۲۰-۳}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s.\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^f.\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma^{f-s} \times (0,T) \tag{۱۲۱-۳}$$

در این روابط $\mathbf{n}$ نشان دهنده بردار نرمال خروجی مرز جامد در Γ^{f-s} است. رابطه (۳-۱۲۰) بیانگر سازگاری هندسی یعنی برابری سرعت عمودی سیال و جامد در فصل مشترک و عدم لغزش سیال لزج بر روی فصل مشترک است و رابطه (۳-۱۲۱) مبین تعادل نیروها در فصل مشترک است. جزئیات پیاده‌سازی این قیود در قسمتهای بعد تشریح خواهد شد.

۳-۹- الگوریتم حرکت شبکه

در رویکرد لاگرانژی- اویلری اختیاری به مسائل برهمکنش سیال- جامد دو عنصر کلیدی مورد نیاز هستند. عنصر اول تدارک شیوه‌ای برای حرکت دادن شبکه سیال است به گونه‌ای که بتواند حرکت سازه جامد را در فصل مشترک دنبال کند. این تغییر شکل باید به ناحیه داخلی سیال گسترش یابد تا شبکه سیال در فصل مشترک دچار واپیچش بیش از حد نگردد. عنصر دوم که در بخشهای قبل به آن پرداخته شد تدوین فرمولاسیون سیال در چارچوب ALE است. به عنوان مثال در معادله (۳-۳۹- الف) مشتق زمانی در توصیف ALE گرفته شده و عبارت $\rho_f \mathbf{v}^m.\nabla\mathbf{v}$ انتقال[41] نقاط متحرک شبکه را به حساب می‌آورد.

شیوه‌های مختلفی برای حرکت شبکه در مراجع ارائه شده‌اند. در اینجا از رویکرد قیاس محیط الاستیک استفاده می‌کنیم که مبتنی بر حل معادلات الاستیسیته خطی است [۷۷]. در این رویکرد فرض می‌شود شبکه (شبکه سیال در مسائل FSI) در یک محیط مجازی الاستو- استاتیک[42] پیوسته جاسازی

[41] Convection
[42] Elasto-static pseudo medium

شده است. خواص الاستیک این محیط مجازی به همراه شرایط مرزی آن حرکت شبکه را تعریف می‌کنند. البته باید توجه داشت که مقادیر خواص الاستیک محیط مجازی خیالی بوده و می‌توان آنها را طوری انتخاب کرد که به همگرايي یا کیفیت شبکه حاصل کمک کنند. در قیاس محیط الاستیک, معادله حاکم بر جابجايي گره‌های شبکه سیال را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma}^{p-m}=0 \ \text{ in } \ \Omega^f \times (0,T) \qquad (۱۲۲-۳)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}^{p-m}$ تانسور تنش کاوشی محیط مجازی است که فرض کردیم شبکه سیال در آن جاسازی شده است. برای هر مرز i می‌توان شرایط مرزی دیریکله را به شکل زیر تعریف نمود:

$$\mathbf{u}_i^{p-m}=\mathbf{u}_i^b \qquad (۱۲۳-۳)$$

که در آن $\mathbf{u}^b$ بردار جابجايي مرزی است که یا از قبل داده شده یا با حل معادلات سازه جامد بدست می‌آید.

روش قیاس محیط الاستیک قادر است کیفیت کلی شبکه را در شبیه‌سازیها حفظ کند. ضمن اینکه از قوام بالايي برخوردار بوده و می‌توان آن را تقویت کرد تا از واپیچش بیش از حد المانها در جابجاییهای بزرگ فصل مشترک FSI جلوگیری کند [۷۷و۱۳۵و۱۳۶].

۳-۱۰- روش کوپل سیال- جامد

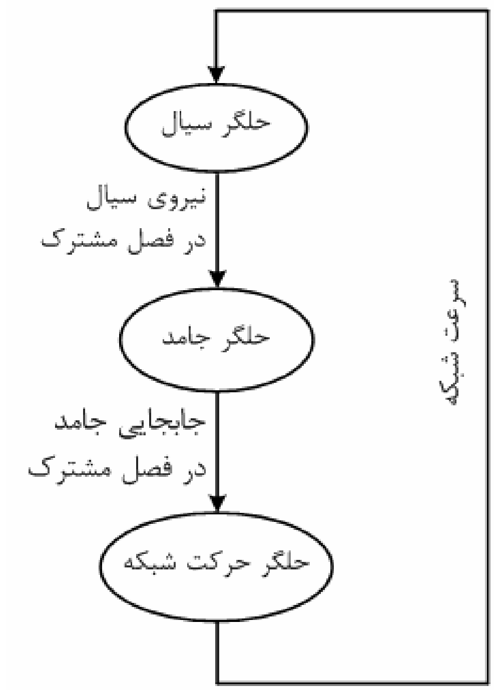
در این تحقیق به منظور کوپل حلگرهای سیال, جامد و حرکت شبکه از رویکرد تفکیک شده با کوپل قوی استفاده شده است که مطابق با شکل (۳-۳) از الگوریتمی با تکرارهای متوالی بهره می‌گیرد. این طرح تکراری برای سیستم کوپل سیال و جامد تا رسیدن به همگرايي در هر گام زمانی تکرار می‌شود. یعنی تکرارها آنقدر ادامه می‌یابد تا نُرم تغییر نسبی[۴۳] در متغیرهای میدان بین دو تکرار متوالی از تلرانس همگرايي تعیین شده کمتر شود.

نحوه پیاده‌سازی این الگوریتم در جدول (۳-۵) توضیح داده شده است.

[43] Norm of relative change

جدول ۳-۵- جزئیات پیاده‌سازی الگوریتم تکراری کوپل سیال- جامد

مراحل زیر را رسیدن به همگرايي در گام زمانی جدید تکرار نمایید.   ۱- با استفاده از معادله (۳-۳۹) مسأله سیال را حل کنید: - بر اساس حل بدست آمده (هندسه مرزهای سیال و سرعت شبکه $\mathbf{v}^m$) از تکرار قبلی (گام زمانی قبل برای اولین تکرار)   ۲- با داشتن حل معادلات ناویر- استوکس از مرحله اول و با استفاده از معادله (۳-۳۹- ه) یعنی $\mathbf{t}^f = -p\mathbf{n}^f + 2\mu_f \mathbf{n}^f.\nabla^s \mathbf{v}$ کشش $\mathbf{t}^f$ سیال را روی فصل مشترک Γ^{f-s} محاسبه کنید.   ۳- مطابق با معادله (۳-۱۲۱)، برای ارضای قید دینامیکی روی فصل مشترک سیال- جامد باید روی Γ^{f-s} داشته باشیم $\mathbf{t}^s = \mathbf{t}^f$. بنابراین با توجه به نتیجه مرحله دوم روی Γ^{f-s} $\mathbf{t}^s = -p\mathbf{n}^f + 2\mu_f \mathbf{n}^f.\nabla^s \mathbf{v}$ قرار داده و آن را به عنوان شرط مرزی کشش در معادلات حاکم بر جامد که در جدول (۳-۳) داده شده‌اند اعمال کرده و مسأله جامد را حل نمایید.   ۴- با داشتن جابجايي جامد از مرحله سوم، در فصل مشترک سیال- جامد جابجايي شبکه سیال را مساوی جابجايي جامد قرار دهید (یعنی $\mathbf{u}^{\text{mesh}} = \mathbf{u}^{\text{Solid}}$ on Γ^{f-s}). این کار شرط مرز دیریکله معادله (۳-۱۲۳) را برای حلگر حرکت شبکه سیال بهنگام می‌کند. برای بدست آوردن جابجايي و سرعت شبکه معادله (۳-۱۲۲) را حل کنید. این فرایند مرزهای شبکه سیال را مطابق با حرکت جامد بهنگام می‌کند تا پیوستگی فصل مشترک FSI حفظ شود و از طرف دیگر منجر به ارضای قید سینماتیکی روی فصل مشترک که توسط معادله (۳-۱۲۰) داده شده است می‌گردد. هندسه جدید مرزهای سیال و سرعت شبکه $\mathbf{v}^m$ که در این مرحله بدست آمدند به معادلات حاکم بر سیال یعنی معادلات (۳-۳۹) داده شده و تکراری جدید از مرحله اول آغاز می‌شود (گام زمانی جدید در صورت همگرايي گام زمانی جاری).



شکل ۳-۳- الگوریتم تکراری کوپل سیال- جامد

۳-۱۱- الگوریتم انتگرالگیری زمانی مسأله

برای گسسته‌سازی زمانی مسأله حاکم بر سیال از روش انتگرالگیری زمانی ضمنی اویلر استفاده گردید. در این روش مشتق زمانی سرعت $\dot{\mathbf{v}}$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t} \qquad (۱۲۴\text{-}۳)$$

که در آن $\mathbf{v}^n$ بیانگر سرعت سیال در گام زمانی nام، $\Delta t = \frac{t_{\text{end}}}{N}$ اندازه گام زمانی بکار رفته (در صورت استفاده از گام زمانی ثابت)، N تعداد کل گامهای زمانی و t_{end} زمانی است که حل مسأله در آن مطلوب است. اگر این روش به عنوان مثال به فرم نیمه گسسته گالرکین معادلات سیال که در معادله (۳-۴۱) داده شده اعمال گردد معادلات کاملاً گسسته متناظر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\left(\delta\mathbf{v}, \rho_f \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t}\right)_{\Omega^f} + \left(\nabla^s\delta\mathbf{v}, 2\mu_f \nabla^s\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f} + \left(\delta\mathbf{v}, \rho_f\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right)^n . \nabla\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f} - \left(\nabla.\delta\mathbf{v}, p^n\right)_{\Omega^f} + \left(\delta p, \nabla.\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f} = \left(\delta\mathbf{v}, \rho_f\left(\mathbf{b}^f\right)^n\right)_{\Omega^f} + \left(\delta\mathbf{v}, \left(\mathbf{t}^f\right)^n\right)_{\Gamma_N^f} \qquad (۱۲۵\text{-}۳)$$

که بعد از بازآرايي ترمها خواهیم داشت:

$$\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\,\frac{\mathbf{v}^n}{\Delta t}\right)_{\Omega^f}+\left(\nabla^s\delta\mathbf{v},2\mu_f\nabla^s\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f}+\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}^m\right)^n.\nabla\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f}-\left(\nabla.\delta\mathbf{v},p^n\right)_{\Omega^f}$$
$$+\left(\delta p,\nabla.\mathbf{v}^n\right)_{\Omega^f}=\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\left(\mathbf{b}^f\right)^n\right)_{\Omega^f}+\left(\delta\mathbf{v},\left(\mathbf{t}^f\right)^n\right)_{\Gamma_N^f}+\left(\delta\mathbf{v},\rho_f\,\frac{\mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t}\right)_{\Omega^f} \quad (۱۲۶-۳)$$

این معادله غیرخطی تا رسیدن به t_{end} در هر گام زمانی با استفاده از روش تکراری پیکارد حل می‌شود.

برای گسسته‌سازی زمانی مسأله جامد از روش انتگرالگیری ضمنی نیومارک استفاده شد که دارای صورت کلی زیر است:

$$\mathbf{u}^n=\mathbf{u}^{n-1}+\Delta t\,\dot{\mathbf{u}}^{n-1}+\left(\Delta t\right)^2\left(1/2-\beta\right)\ddot{\mathbf{u}}^{n-1}+\left(\Delta t\right)^2\beta\,\ddot{\mathbf{u}}^n \quad (۱۲۷-۳ \text{- الف})$$

$$\dot{\mathbf{u}}^n=\dot{\mathbf{u}}^{n-1}+\Delta t\left(1-\gamma\right)\ddot{\mathbf{u}}^{n-1}+\Delta t\gamma\,\ddot{\mathbf{u}}^n \quad (۱۲۷-۳ \text{- ب})$$

اگر معادله حاکم بر جامد را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$\mathbf{M}^s\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+\mathbf{K}^s\mathbf{u}=\mathbf{F}^s \quad (۱۲۸-۳)$$

می‌توان نشان داد معادلات غیرخطی جامد در هر گام زمانی به شکل زیر است:

$$\left(\frac{\mathbf{M}^s}{\beta\left(\Delta t\right)^2}+\mathbf{K}^s\right)\mathbf{u}^n=\left(\mathbf{F}^s\right)^n+\left(\frac{\mathbf{M}^s}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\right)\mathbf{u}^{n-1}+$$
$$\left(\frac{\mathbf{M}^s}{\beta\,\Delta t}+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\right)\dot{\mathbf{u}}^{n-1}-\mathbf{M}^s\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}^{n-1} \quad (۱۲۹-۳)$$

۳-۱۲- ساختار برنامه

طرح کلی الگوریتم تکراری بکار رفته برای حل سیستم کوپل حاکم بر مسأله برهمکنش سیال-جامد در بخش (۳-۱۰) تشریح شده و در شکل (۳-۳) خلاصه گردید. جزئیات مربوط به پیاده‌سازی هر حلگر در این الگوریتم تکراری در جدول (۳-۶) نمایش داده شده است.

جدول ۳-۶- جزئیات پیاده‌سازی حلگرهای بکار رفته در الگوریتم تکراری حل سیستم کوپل FSI

- برنامه اصلی
  - حلقه روی گامهای زمانی
    - تکرار سیستم کوپل
      - حلگر مربوطه
        - مقداردهی اولیه به متغیرها
        - حلقه روی تکرارهای مربوط به معادلات غیرخطی
          - حلقه روی المانهای ناحیه
            - تشکیل ماتریس سختی المان و اسمبل
          - حلقه روی المانهای مرزی
            - تشکیل ماتریس مربوط به شرایط مرزی نیومن و اسمبل
          - اعمال شرایط مرزی دیریکله
          - حل سیستم
        - تا وقتی نُرم تغییر نسبی در متغیرهای میدان بین دو تکرار متوالی حل سیستم معادلات غیرخطی از تلرانس همگرایي تعیین شده کمتر شود.
    - تا وقتی نُرم تغییر نسبی در متغیرهای میدان بین دو تکرار متوالی حل سیستم کوپل از تلرانس همگرایي تعیین شده کمتر شود.
  - تا آخرین گام زمانی

۳-۱۱- مثالهای عددی

در این بخش به منظور حصول اطمینان از صحت روش و فرمولاسیون ارائه شده در بخشهای قبل برای حل مسأله برهمکنش سیال- جامد, دو مسأله محک که در مراجع مشابه مورد استفاده قرار گرفته‌اند شبیه‌سازی کرده و نتایج بدست آمده را با نتایج گزارش شده در این مراجع مقایسه می‌کنیم.

۳-۱۱-۱- آزمون محک تورک

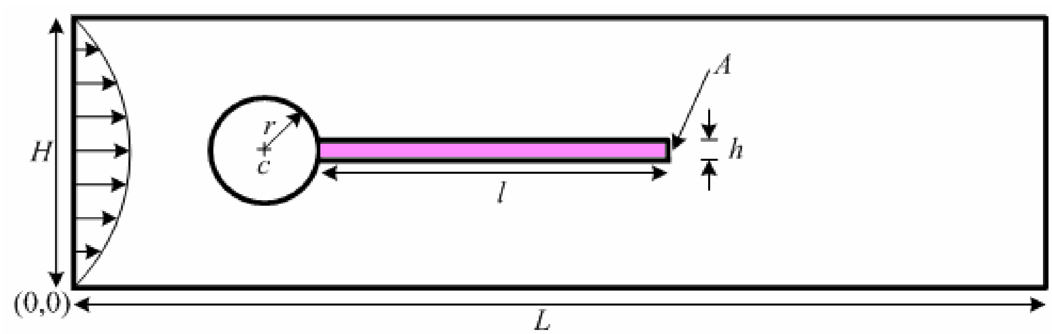
در مثال اول یک آزمون محک که توسط تورک و همکاران در [۳۶و۱۳۷] برای شبیه‌سازی عددی برهمکنش جریان تراکم‌ناپذیر آرام و جسم الاستیک پیشنهاد شده است مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف این آزمون محک اعتبارسنجی و مقایسه روشهای عددی مختلف و نیز شیوه‌های متفاوت پیاده‌سازی کدها برای حل مسأله برهمکنش سیال- جامد در حالتهای یکنواخت و نیز وابسته به زمان است. بویژه مکانیزمهای کوپلینگ مختلف شامل روشهای تفکیک شده با کوپل ضعیف یا قوی و روشهای یکپارچه با این آزمون قابل ارزیابی هستند. ضمناً می‌توان با کمک این آزمون کیفیت روشهای گسسته‌سازی مختلف مانند اجزاء محدود, حجم محدود یا . . . مورد بررسی قرار داد. این آزمون محاسباتی که به آزمون تورک نیز مشهور است به منظور صحت سنجی در بسیاری از مراجع FSI استفاده شده است (به عنوان مثال در [۳۵و۱۴۶-۱۳۸]).

در این آزمون تیری الاستیک در داخل یک کانال در معرض جریان تراکم‌ناپذیر و آرام سیالی نیوتنی قرار دارد. تیر کاملاً در سیال غوطه‌ور بوده و در اثر جریان سیال دچار نوسانات خود- تحریک[44] با دامنه بزرگ می‌گردد.

هندسه مسأله در شکل (۳-۴) نشان داده شده است. ناحیه محاسباتی دارای طول $L = 2.5\ \mathrm{m}$ و ارتفاع $H = 0.41\ \mathrm{m}$ بوده و گوشه پایینی سمت چپ ناحیه در $(0,0)$ قرار دارد. مرکز دایره دارای

[44] Self induced

مختصات $(0.2, 0.2)$ بوده و شعاع دایره $r = 0.05\ \mathrm{m}$ است. طول تیر الاستیک $l = 0.35\ \mathrm{m}$ و ارتفاع آن $h = 0.02\ \mathrm{m}$ است. انتهای پایینی سمت راست تیر در $(0.6, 0.19)$ قرار داشته و انتهای چپ آن بصورت گیردار به دایره متصل شده است. نقطه کنترل $A(t)$ در انتهای آزاد تیر با مختصات اولیه $A(0) = (0.6, 0.2)$ قرار دارد. هندسه مسأله عمداً بصورت نامتقارن تعریف شده تا از وابسته شدن شروع نوسانات به دقت محاسبات جلوگیری کند.



شکل ۳-۴- ناحیه محاسباتی برای آزمون محک تورک

جدول ۳-۷- مروری بر هندسه مسأله

پارامتر هندسی		مقدار (m)
طول کانال	L	۲/۵
ارتفاع کانال	H	۰/۴۱
مختصات مرکز دایره	C	(۰/۲و۰/۲)
شعاع دایره	r	۰/۰۵
طول تیر الاستیک	l	۰/۳۵
ضخامت تیر الاستیک	h	۰/۰۲
مختصات نقطه مرجع در $t = 0$	A	(۰/۶و۰/۲)

در ورودی (سمت چپ) کانال, یک پروفیل سرعت سهمی‌گون بصورت زیر برای جریان در نظر گرفته می‌شود:

$$v^f(0, y) = 1.5\bar{U}\frac{y(H-y)}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} = 1.5\bar{U}\frac{4.0}{0.1681}y(0.41-y) \qquad (۱۲۴-۳)$$

بطوریکه سرعت متوسط جریان ورودی برابر $\bar{U}$ و ماکزیمم پروفیل سرعت جریان ورودی برابر $1.5\bar{U}$ باشد. در خروجی (سمت راست) کانال, فشار برابر صفر قرار داده شده است. روی مرزهای دیگر یعنی دیواره‌های بالا و پایین, مرز دایره و فصل مشترک سیال- سازه شرط عدم لغزش تعریف شده است.

برای آزمونهای وابسته به زمان, پروفیل سرعت بصورت یکنواخت در زمان افزایش می‌یابد:

$$v^f(t,0,y)=\begin{cases} v^f(0,y)\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)}{2} & \text{if} \quad t<2.0 \\ v^f(0,y) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{۱۲۵-۳}$$

در این رابطه $v^f(0,y)$ پروفیل سرعت داده شده در معادله (۳-۱۲۴) است.

دو وضعیت مختلف با نامهای FSI1 برای حالت یکنواخت و FSI2 برای حالت وابسته به زمان با پارامترهای داده شده در جدول (۳-۸) در این آزمون محک شبیه‌سازی می‌شوند.

جدول ۳-۸- مقادیر پارامترها برای آزمونهای FSI

پارامتر	FSI1	FSI2
چگالی جامد kg/m3	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
مدول الاستیک MPa	۱/۴	۱/۴
ضریب پواسون	۰/۴	۰/۴
چگالی سیال kg/m3	۱۰۰۰	۱۰۰۰
لزجت Pa.s	۱	۱
سرعت ورودی m/s	۰/۲	۱
رینولدز جریان	۲۰	۱۰۰

جدول (۳-۹) مقادیر بدست آمده در این تحقیق برای مؤلفه‌های افقی و عمودی جابجایي نقطه کنترل A را با داده‌های مرجع [۳۶] برای آزمون FSI1 مقایسه می‌کند. مطابق با این جدول نتایج تحقیق حاضر بسیار نزدیک به مقادیر گزارش شده در مرجع [۳۶] هستند. نحوه همگرایي جوابها به مقادیر جدول (۳-۹) برای سه سطح مختلف از تعداد المانهای شبکه به همراه زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی بر حسب

ثانیه در هر حالت در جدول (۳-۱۰) فهرست شده است. در تمام حالتها از المانهای چهارضلعی چهارگرهی برای شبکه بندی مسأله استفاده شده است.

جدول ۳-۹- مقایسه نتایج بدست آمده از آزمون FSI1 با نتایج مرجع

جابجایي نقطه A (متر)	تحقیق حاضر	مرجع
$u_x \times 10^{-3}$	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۲۷
$u_y \times 10^{-3}$	۰/۸۱۶۷	۰/۸۲۰۹

جدول ۳-۱۰- جوابهای بدست آمده از سه سطح مختلف از تعداد المانهای شبکه

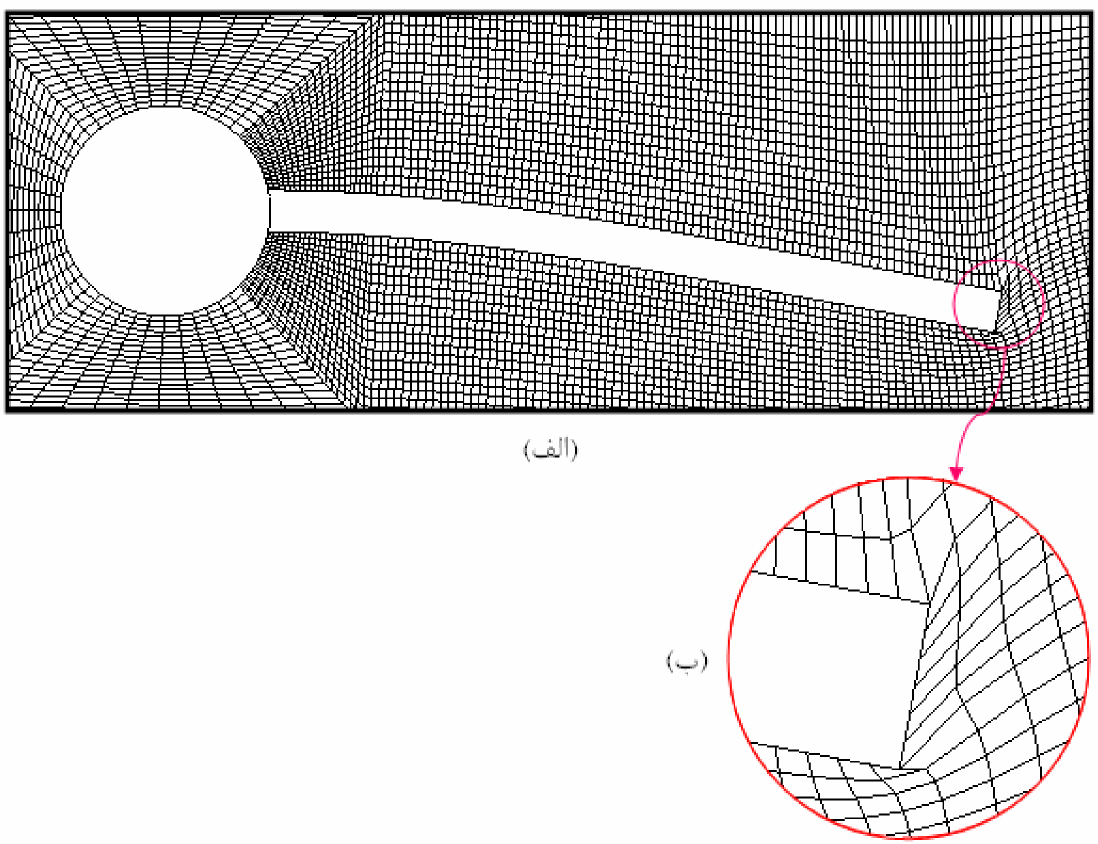
کل المانها	المانهای سیال	المانهای جامد	$u_x \times 10^{-3}$	$u_y \times 10^{-3}$	زمان شبیه‌سازی (ثانیه)
۳۹۵۰	۳۶۵۰	۳۰۰	۰/۰۲۱۷	۰/۷۸۴۶	۴۲۰
۱۵۸۰۰	۱۴۶۰۰	۱۲۰۰	۰/۰۲۲۲	۰/۸۰۷۲	۱۸۰۰
۶۳۲۰۰	۵۸۴۰۰	۴۸۰۰	۰/۰۲۲۶	۰/۸۱۶۷	۱۱۳۰۰

به منظور انجام آزمون وابسته به زمان FSI2 از ۱۴۰۰۰ گام زمانی با اندازه $\Delta t = 0.0025$ برای شبیه‌سازی ۳۵ ثانیه از برهمکنش بین سیال و جامد استفاده گردید. در این حالت بدلیل بزرگی دامنه نوسانات تیر, المانهای منطقه‌ای از شبکه سیال که در مجاورت نوک (انتهای آزاد) تیر قرار داشتند مطابق با شکل (۳-۵) دچار واپیچش بیش از حد شده و این سبب خراب شدن محاسبات و توقف پیش از موعد شبیه‌سازی گردید (شبکه نشان داده شده مربوط به سطح دوم جدول بالا یعنی تعداد المان ۱۵۸۰۰ است).

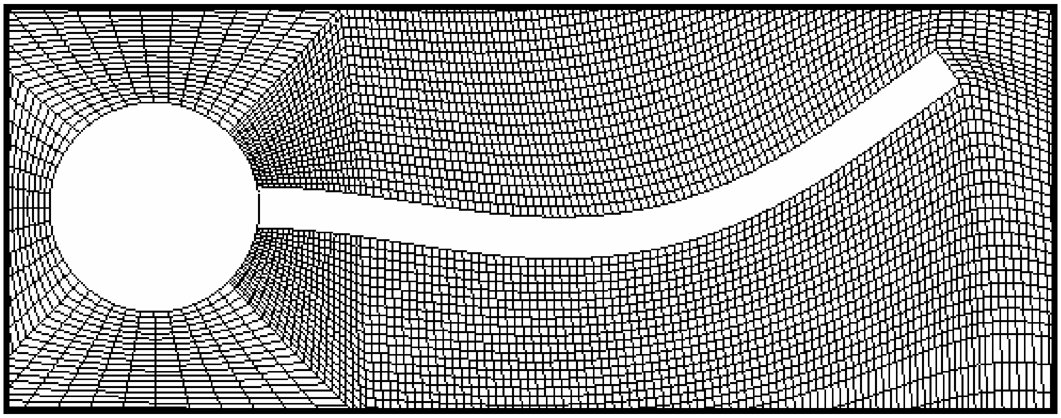
برای جلوگیری از واپیچش المانهای سیال در نزدیکی نوک تیر که دارای دامنه نوسان ماکزیمم است باید تدبیری اتخاذ کرد که المانهای سیال موجود در این ناحیه نسبت به المانهای دیگری تمایل کمتری برای تغییر شکل داشته باشند. به این منظور مدول یانگ محیط الاستیک مجازی متناظر با شبکه سیال را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E^{p-m} = \frac{1}{\sqrt{\left(x-\left(x_A-\varepsilon\right)\right)^2 + \left|\left(y-\left(y_A-\frac{h}{2}+\varepsilon\right)\right)\left(y-\left(y_A+\frac{h}{2}-\varepsilon\right)\right)\right|}} \qquad (۳-۱۲۶)$$

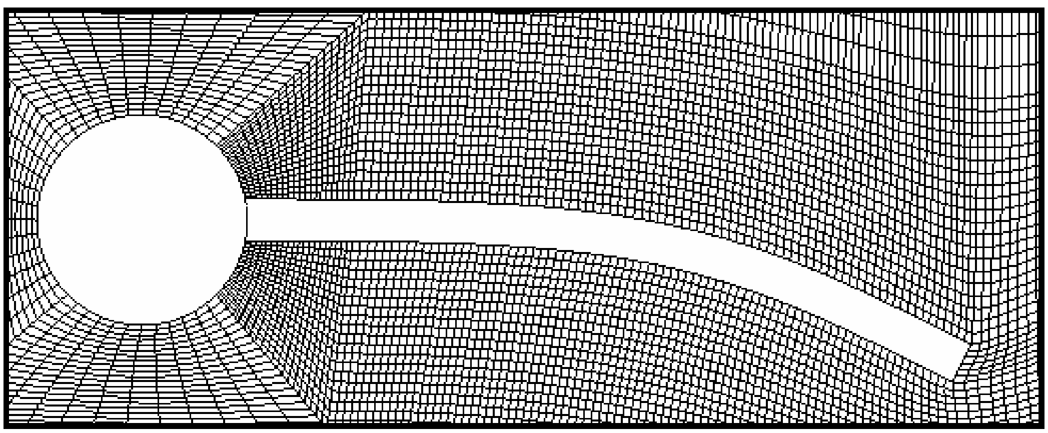
در این رابطه ε عددی بسیار کوچک است که برای این مثال برابر با $\varepsilon = 0.0001$ انتخاب شده است. به این ترتیب محیط مجازی شبکه در اطراف نوک تیر (نقطه A) بسیار سفت شده و تغییر شکل المانها در این منطقه دشوار می‌شود. اما با دور شدن از نوک تیر مدول یانگ کاهش یافته و تغییر شکل راحت‌تر انجام می‌گیرد. در نتیجه تغییر شکل در کل شبکه سیال توزیع شده و تغییر شکل بیش از حد موضعی نخواهیم داشت. تغییر شکل شبکه سیال در اطراف تیر الاستیک در سه موقعیت مختلف از نوسان تیر برای شبکه سطح دوم از تعداد المان در شکل (۳-۶) تا (۳-۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با وجود تغییر شکل نسبتاً زیاد تیر الاستیک, کیفیت شبکه سیال در تمام حالتها مطلوب است.



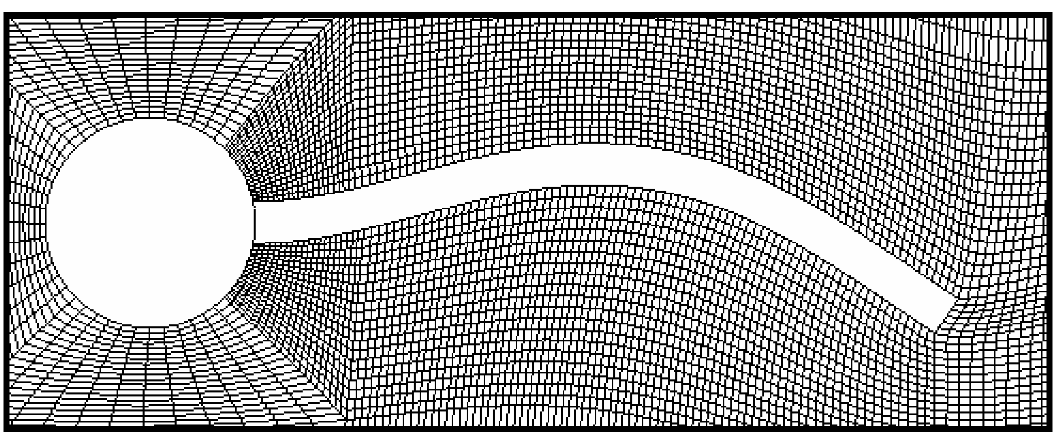
شکل ۳-۵- تغییر شکل شبکه سیال برای مدول یانگ ثابت محیط الاستیک مجازی در مجاورت تیر الاستیک (الف) نمایی بزرگ شده از منطقه خراب شدن المانها (ب)



شکل ۳-۶- تغییر شکل شبکه سیال برای مدول یانگ متغیر محیط الاستیک مجازی در اطراف تیر الاستیک در $t = 34.3$ s



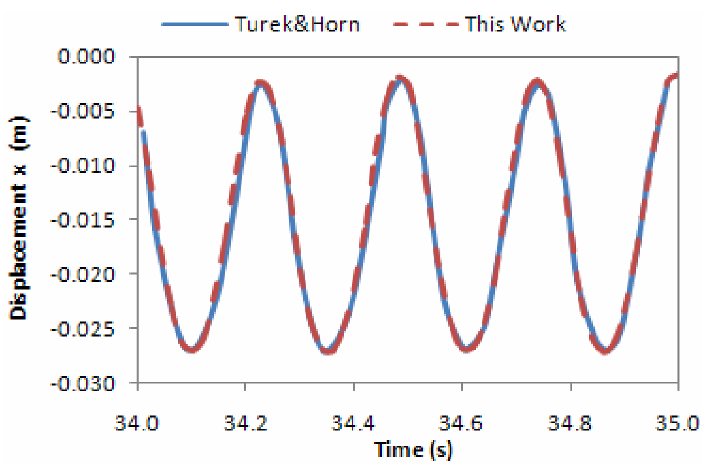
شکل ۳-۷- تغییر شکل شبکه سیال برای مدول یانگ متغیر محیط الاستیک مجازی در اطراف تیر الاستیک در $t = 34.5$ s



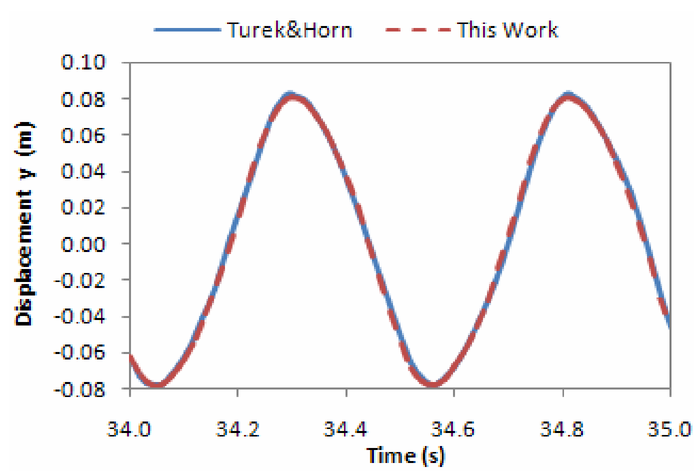
شکل ۳-۸- تغییر شکل شبکه سیال برای مدول یانگ متغیر محیط الاستیک مجازی در اطراف تیر الاستیک در $t = 34.7$ s

مقادیر بدست آمده برای مؤلفه‌های افقی و عمودی نقطه A در بازه زمانی $t = 34\ \mathrm{s}$ تا $t = 35\ \mathrm{s}$ به ترتیب در شکلهای (۳-۹) و (۳-۱۰) با داده‌های مرجع [۳۶] مقایسه شده‌اند. همانطور که مشخص است نتایج شبیه‌سازی حاضر همخوانی خوبی با مقادیر گزارش شده در این مرجع دارند.

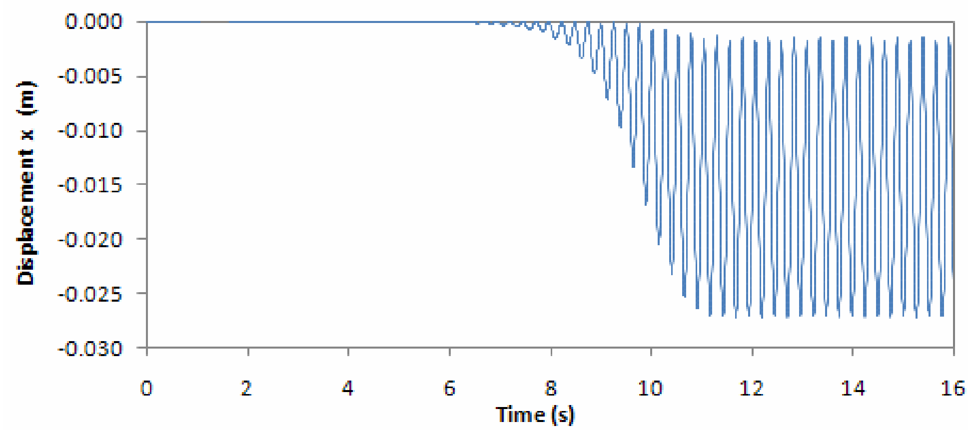
شکلهای (۳-۱۱) و (۳-۱۲) مؤلفه‌های جابجایي نقطه A را در ۱۶ ثانیه اول شبیه‌سازی نشان می‌دهند. مطابق با این شکلها جریان ورودی سیال سبب تحریک تیر الاستیک شده و آن را وادار به نوسان می‌کند. دامنه ماکزیمم نوسان با گذشت زمان تا حدود $t = 12\ \mathrm{s}$ افزایش می‌یابد و بعد از آن ثابت می‌ماند.



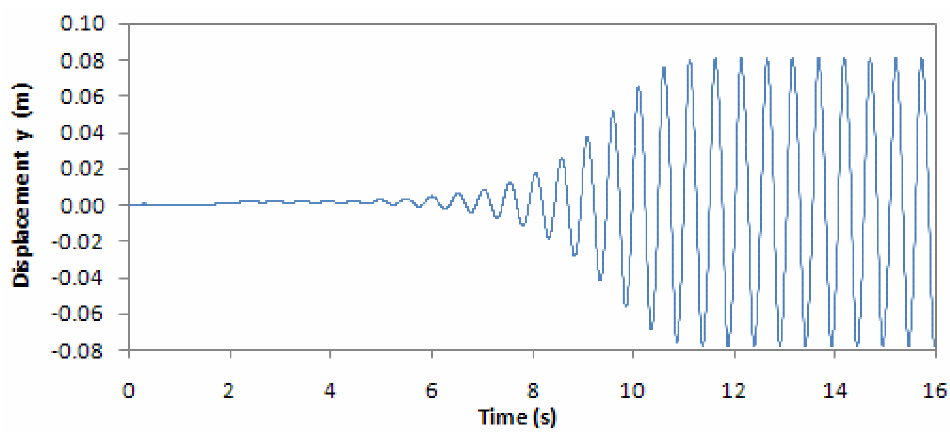
شکل ۳-۹- مقایسه جابجایي افقی نقطه A



شکل ۳-۱۰- مقایسه جابجایي عمودی نقطه A

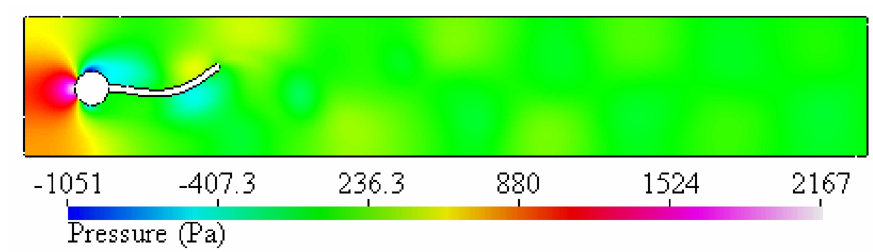


شکل ۳-۱۱- تغییر جابجایي افقی نقطه A در طول زمان

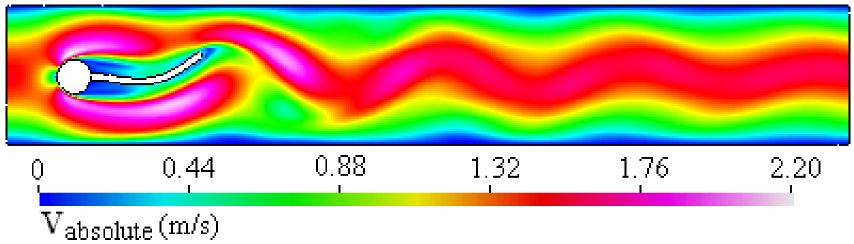


شکل ۳-۱۲- تغییر جابجایي عمودی نقطه A در طول زمان

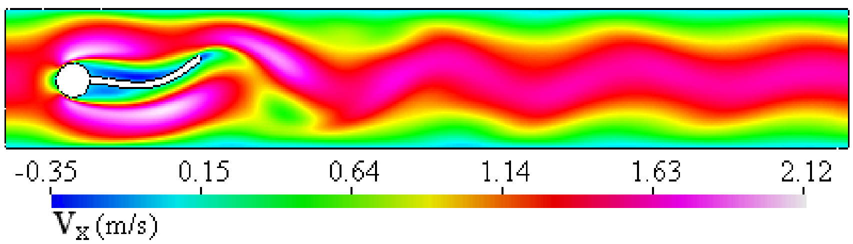
کانتورهای فشار, سرعت کل و مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت سیال به ترتیب در شکلهای (۳-۱۳) تا (۳-۱۶) نشان داده شده‌اند. کانتورهای توزیع مؤلفه‌های سرعت شبکه در شکلهای (۳-۱۷) و (۳-۱۸) ارائه شده‌اند.



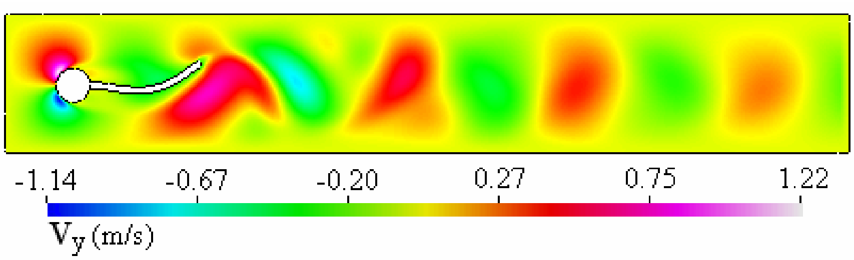
شکل ۳-۱۳- کانتور توزیع فشار سیال برای آزمون FSI2



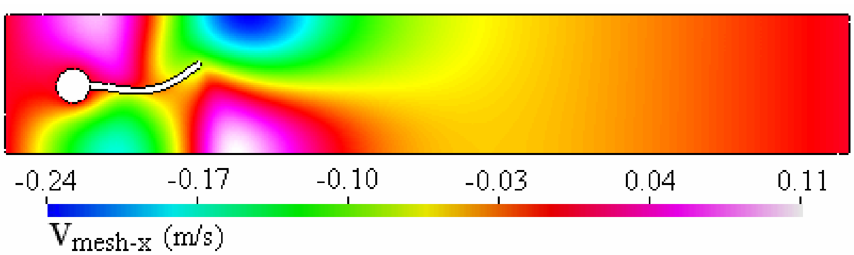
شکل ۳-۱۴- کانتور توزیع سرعت کل سیال برای آزمون FSI2



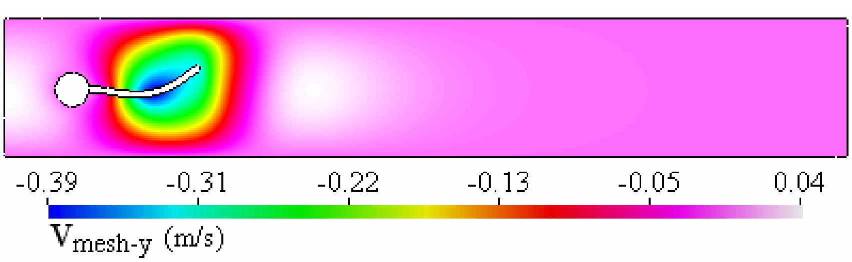
شکل ۳-۱۵- کانتور توزیع مؤلفه افقی سرعت سیال برای آزمون FSI2



شکل ۳-۱۶- کانتور توزیع مؤلفه عمودی سرعت سیال برای آزمون FSI2



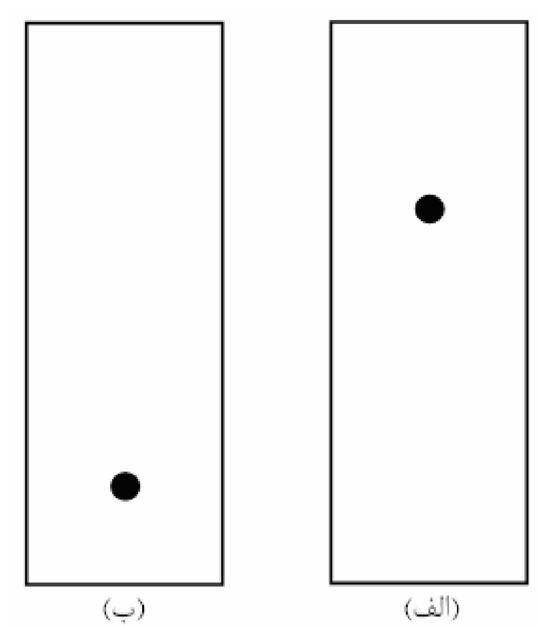
شکل ۳-۱۷- کانتور توزیع مؤلفه افقی سرعت شبکه سیال برای آزمون FSI2



شکل ۳-۱۸- کانتور توزیع مؤلفه عمودی سرعت شبکه سیال برای آزمون FSI2

۳-۱۱-۲- سقوط یک دیسک صلب در مخزن سیال

در این آزمون, یک دیسک صلب در مخزنی که از سیال تراکم‌ناپذیر و لزج پر شده است سقوط می‌کند. نیروی جسمی گرانش هم بر دیسک و هم بر سیال مخزن عمل می‌کند اما از آنجا که چگالی دیسک از چگالی سیال بیشتر است دیسک به سمت پایین مخزن سقوط می‌کند. موقعیت دیسک در داخل مخزن در لحظه آغاز سقوط و همچنین بعد از گذشت زمانی دلخواه از آغاز سقوط به ترتیب در شکلهای (۱۹- الف) و (۱۹- ب) نشان داده شده است.



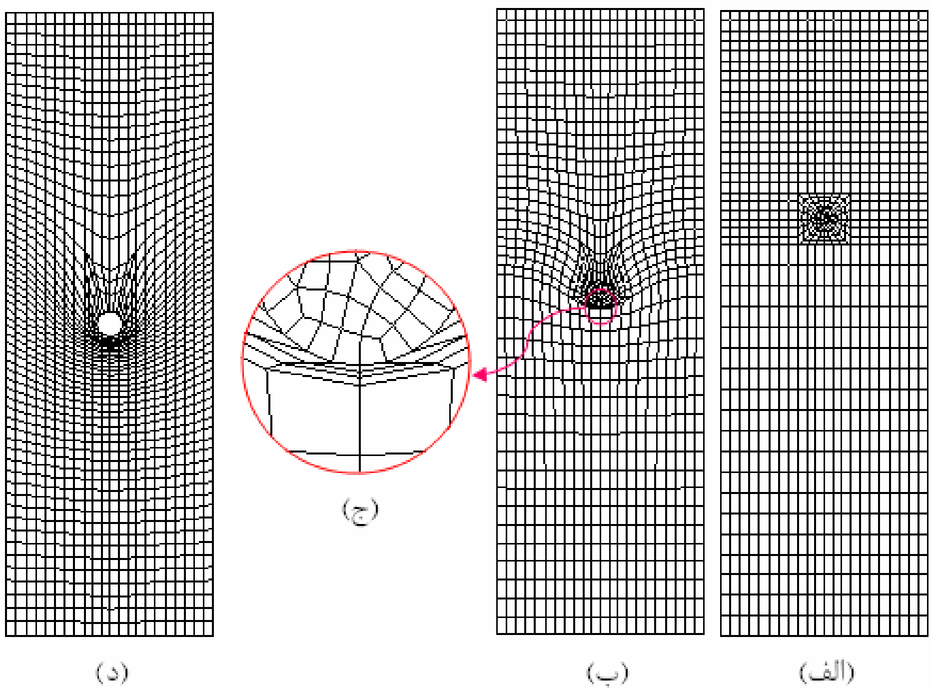
شکل ۳-۱۹- موقعیت دیسک سقوط کننده در لحظه اول (الف) و زمانی دلخواه بعد از آغاز سقوط (ب)

پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی مسأله در جدول (۳-۱۱) فهرست شده‌اند. پارامترهای d , h و b به ترتیب نماینده قطر دیسک, ارتفاع و عرض مخزن هستند.

جدول ۳-۱۱- پارامترهای بکار رفته برای شبیه‌سازی سقوط دیسک در مخزن

پارامتر	ρ_f	ρ_s	μ	d	h	b	g	Δt
واحد	g/cm^3	g/cm^3	g/(cm s)	cm	cm	cm	cm/s^2	s
مقدار	۱/۰۰	۱/۲۵	۰/۱۰	۰/۲۵	۶	۲	۹۸۰	۰/۰۰۱

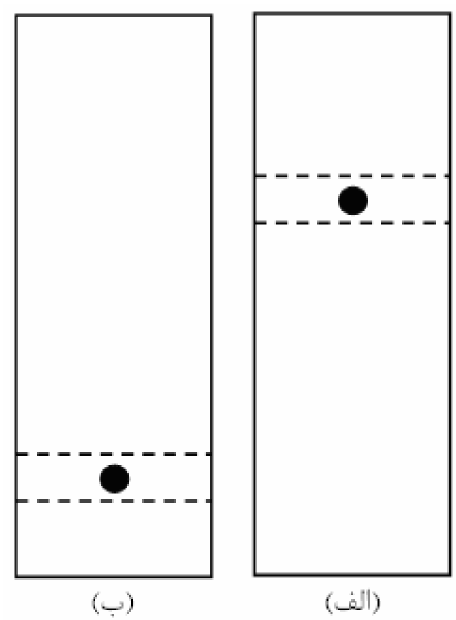
نسخه‌ای درشت از شبکه اجزاء محدود بکار رفته برای شبیه‌سازی مسأله در شکل (۳-۲۰- الف) نشان داده شده است. برای حرکت شبکه سیال از روش قیاس محیط الاستیک که در بخشهای قبل توضیح داده شد استفاده گردید. شبیه‌سازی تا لحظه $t = 0.196$ s ادامه یافت اما در این زمان بدلیل واپیچش بیش از اندازه شبکه سیال متوقف گردید. شبکه نهايي حاصل از این شبیه‌سازی (در لحظه $t = 0.196$ s) در شکل (۳-۲۰- ب) ارائه شده است. نمايي بزرگ شده از ناحیه واپیچش شبکه نیز در شکل (۳-۲۰- ج) آمده است. شبکه نهايي حاصل از شبیه‌سازی همین مسأله با نرم‌افزار ANSYS Multiphysics در شکل (۳-۲۰- د) به نمایش در آمده است.



شکل ۳-۲۰- شبکه‌بندی اولیه مسأله (الف) شبکه نهايي (ب) و نمای بزرگ شده آن (ج) شبکه نهايي حاصل از ANSYS (د)

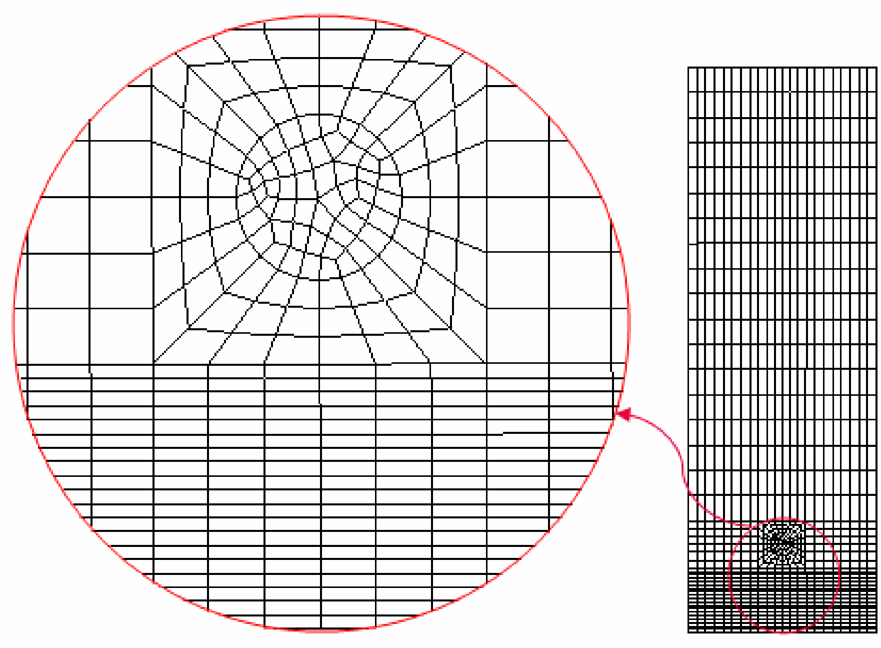
برای حل مشکل واپیچش شبکه در این مثال دو خط داخلی فرضی یکی در بالا و دیگری در پایین دیسک تعریف می‌کنیم. این خطوط فرضی که روی اضلاع ردیفی از المانهای سیال کشیده می‌شوند در شکل (۳-۲۱- الف) برای وضعیت اولیه بصورت خط‌چین نشان داده شده‌اند. این خطوط قسمتی از شبکه سیال که ناحیه جامد را در برگرفته است از مابقی شبکه جدا می‌کنند. در هر تکرار از حل کوپل مسأله

FSI, حرکت این خطوط فرضی از شبکه را مساوی جابجايي ناحیه جامد که از حل معادلات دینامیک جامد بدست می‌آید قرار می‌دهیم. به این ترتیب این خطوط فرضی همراه با دیسک جامد حرکت کرده و بخشی از شبکه سیال نیز که بین این دو خط فرضی قرار گرفته بصورت صلب با ناحیه جامد حرکت می‌کند. شکل (۳-۲۱- ب) دیسک جامد و خطوط فرضی را در زمانی دلخواه بعد از سقوط نشان می‌دهد. با استفاده از این خطوط فرضی می‌توان شبیه‌سازی را تا زمانی که دیسک به کف مخزن بسیار نزدیک می‌شود پیش برد.



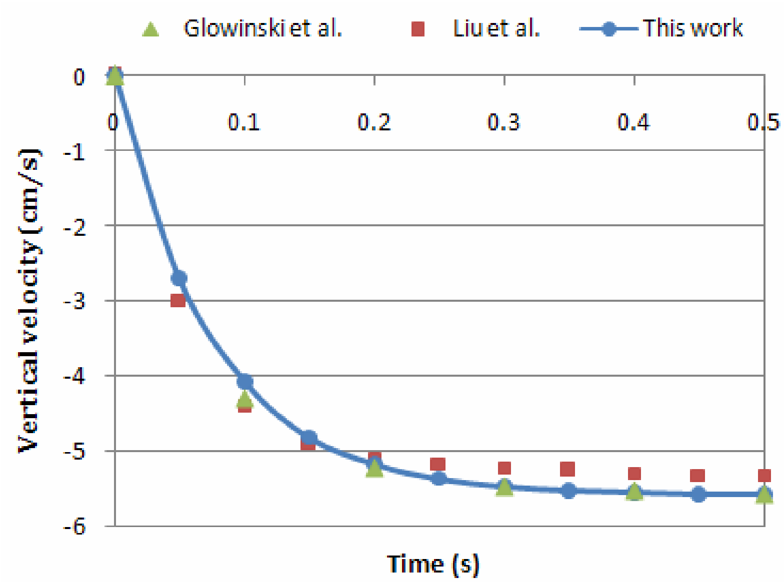
شکل ۳-۲۱- خطوط فرضی تعریف شده در شبکه سیال

شبکه حاصل از این روش در زمان $t = 0.6$ s که دیسک در نزدیکی کف مخزن قرار دارد در شکل (۳-۲۲- الف) نمایش داده شده است. شکل (۳-۲۲- ب) نمايي بزرگ شده از شبکه سیال را که در این وضعیت بین دیسک و کف مخزن قرار گرفته نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود علی‌رغم اینکه دیسک بسیار به کف مخزن بسیار نزدیک است شبکه سیال کیفیت خود را به میزان خوبی حفظ کرده است. این مسأله انعطاف‌پذیری روش بکار رفته برای حرکت شبکه را در منظم نگهداشتن شبکه سیال در جابجاییهای بزرگ جامد نشان می‌دهد.

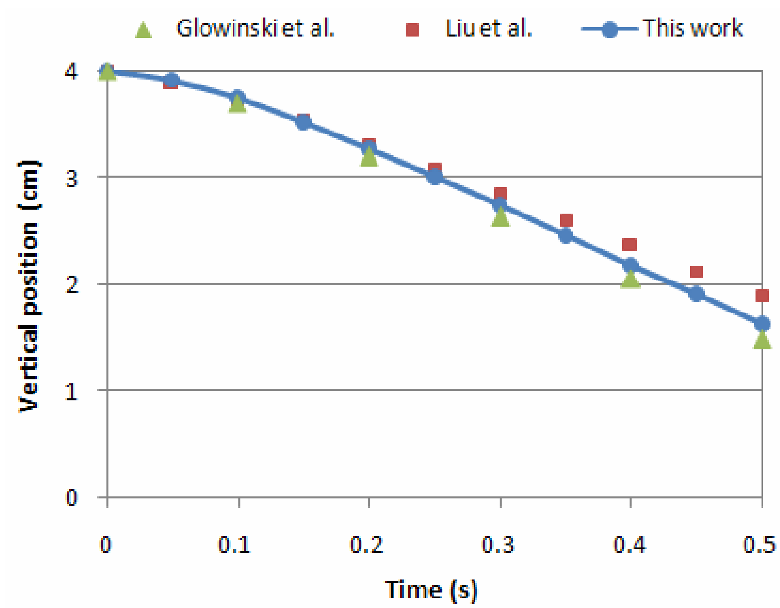


شکل ۳-۲۲- شبکه حاصل از حرکت شبکه با خطوط فرضی

مرکز دیسک در لحظه $t=0$ در موقعیت $(x,y)=(1,4)$ قرار دارد. از آنجا که گرانش هم بر دیسک جامد و هم بر سیال وارد می‌شود دیسک بدلیل چگالی بالاتر به طرف پایین سقوط می‌کند. با افزایش سرعت دیسک, نیروی پسای وارده از طرف سیال به دیسک بیشتر شده و در مقابل نیروی گرانش وارده بر دیسک مقاومت می‌کند. وقتی نیروی گرانش و پسا به تعادل رسیدند سرعت دیسک در یک مقدار مشخص ثابت می‌شود که این سرعت را سرعت حد می‌نامند. شکلهای (۳-۲۳) و (۳-۲۴) سرعت عمودی و موقعیت عمودی مرکز دیسک را که در این تحقیق بدست آمده‌اند با نتایج مراجع [۴۲و۱۴۷] که به ترتیب از روشهای ناحیه موهومی (گلوینسکی و همکاران) و اجزاء محدود غوطه‌ور (لیو و همکاران) استفاده کرده‌اند مقایسه می‌کند. همانطور که مشخص است همخوانی خوبی بین نتایج این تحقیق و مراجع [۴۲و۱۴۷] وجود دارد. پارامترهای بکار رفته در این شبیه‌سازی در جدول (۳-۱۱) ارائه شده‌اند. اندازه گام زمانی بکار رفته $\Delta t = 0.001\ \mathrm{s}$ بوده و برای شبکه‌بندی بخشهای سیال و جامد به ترتیب از ۱۸۷۳۰ و ۱۰۴۴ المان چهارضلعی چهارگرهی استفاده گردید.

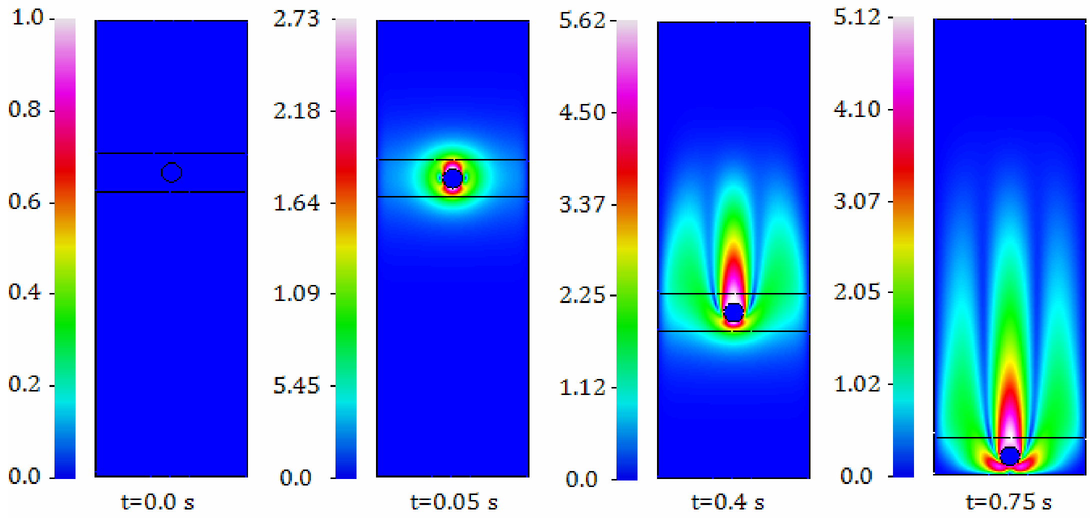


شکل ۳-۲۳- سرعت عمودی مرکز دیسک صلب

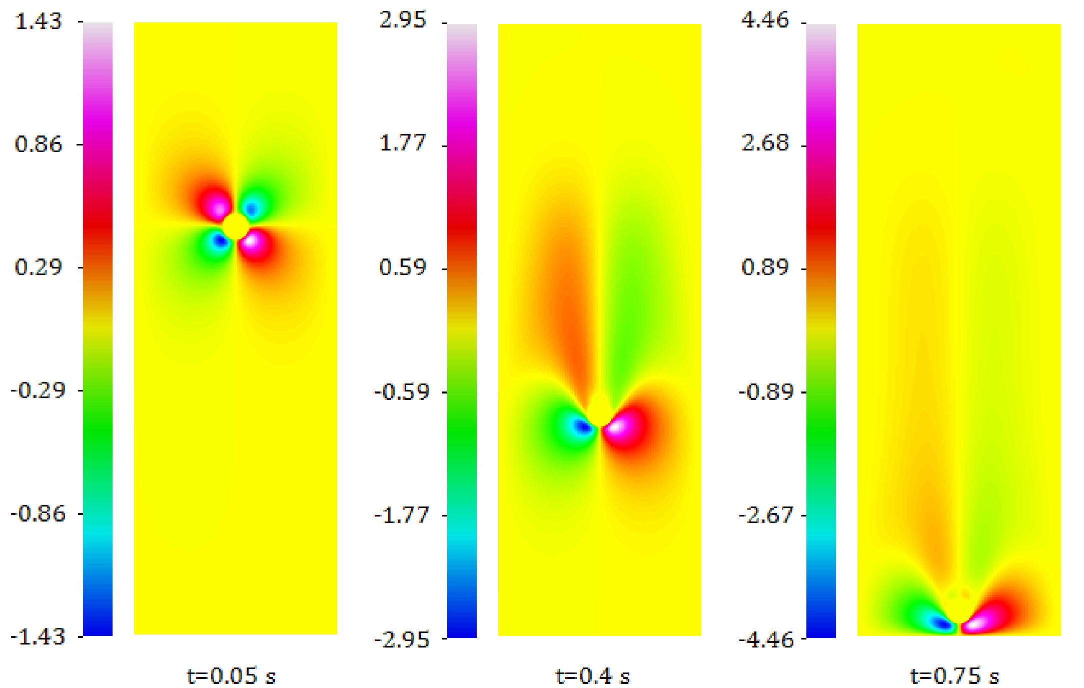


شکل ۳-۲۴- موقعیت عمودی مرکز دیسک صلب

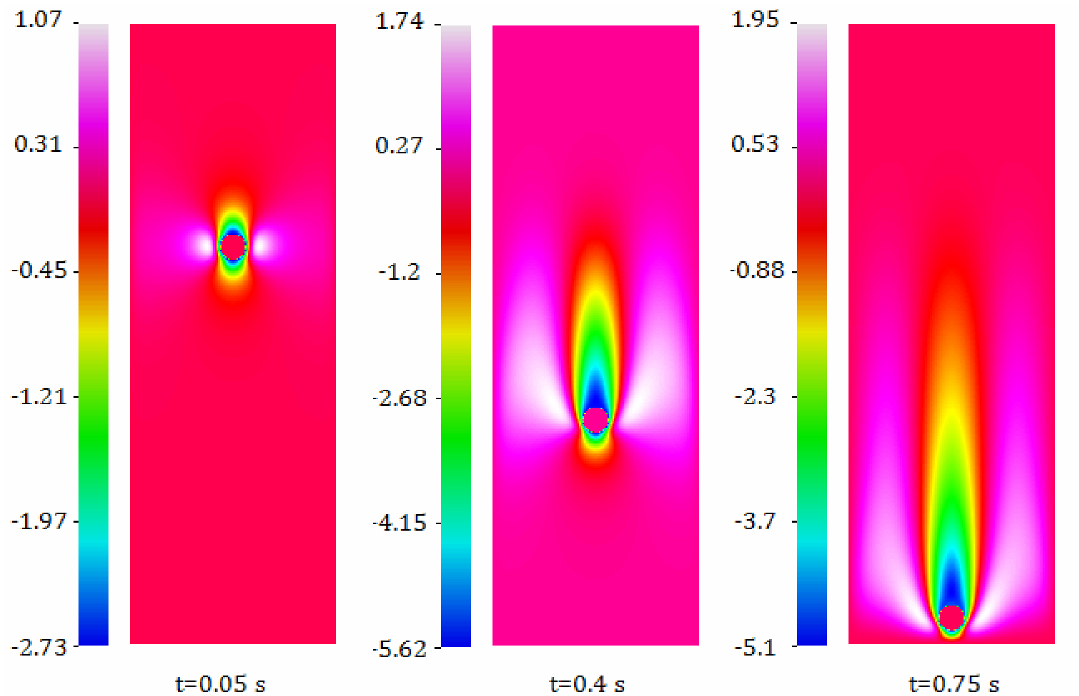
شکل (۳-۲۵) کانتور توزیع سرعت کل سیال را در لحظه‌های مشخص از زمان نشان می‌دهد. خطوط داخلی فرضی نیز در این شکل نمایش داده شده‌اند. کانتور توزیع مؤلفه‌های سرعت و نیز توزیع فشار به ترتیب در شکلهای (۳-۲۶), (۳-۲۷) و (۳-۲۸) ارائه شده‌اند.



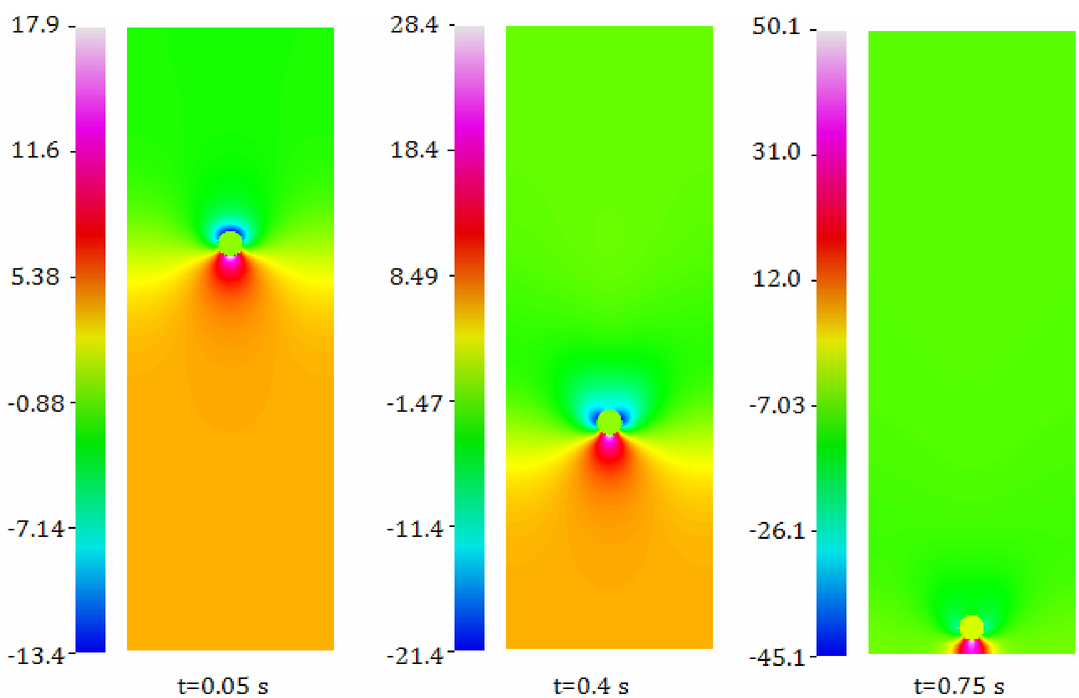
شکل ۳-۲۵- توزیع سرعت کل در ناحیه سیال بدلیل سقوط دیسک صلب



شکل ۳-۲۶- توزیع سرعت افقی در سیال



شکل ۳-۲۷- توزیع سرعت عمودی در سیال



شکل ۳-۲۸- توزیع فشار ناشی از سقوط دیسک صلب در سیال