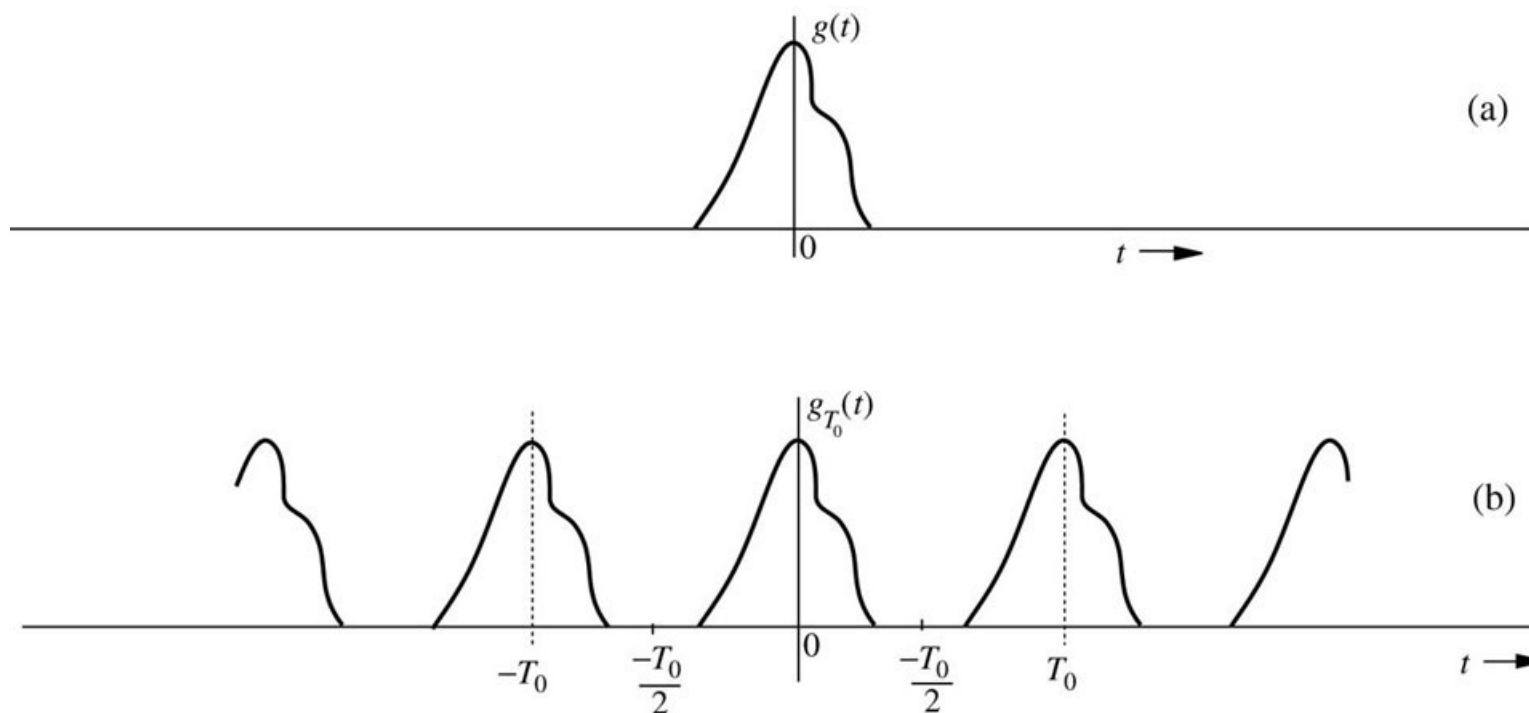
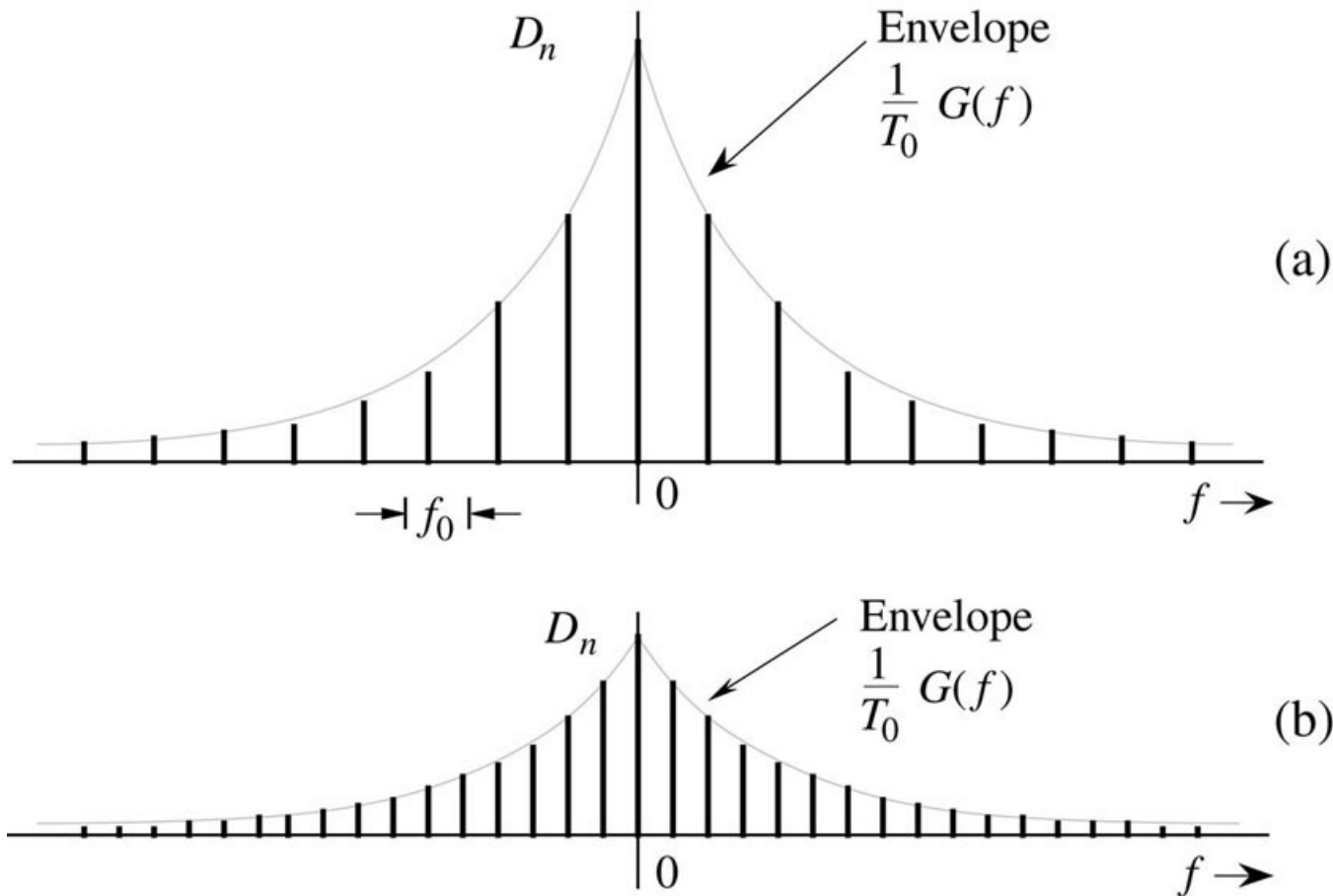


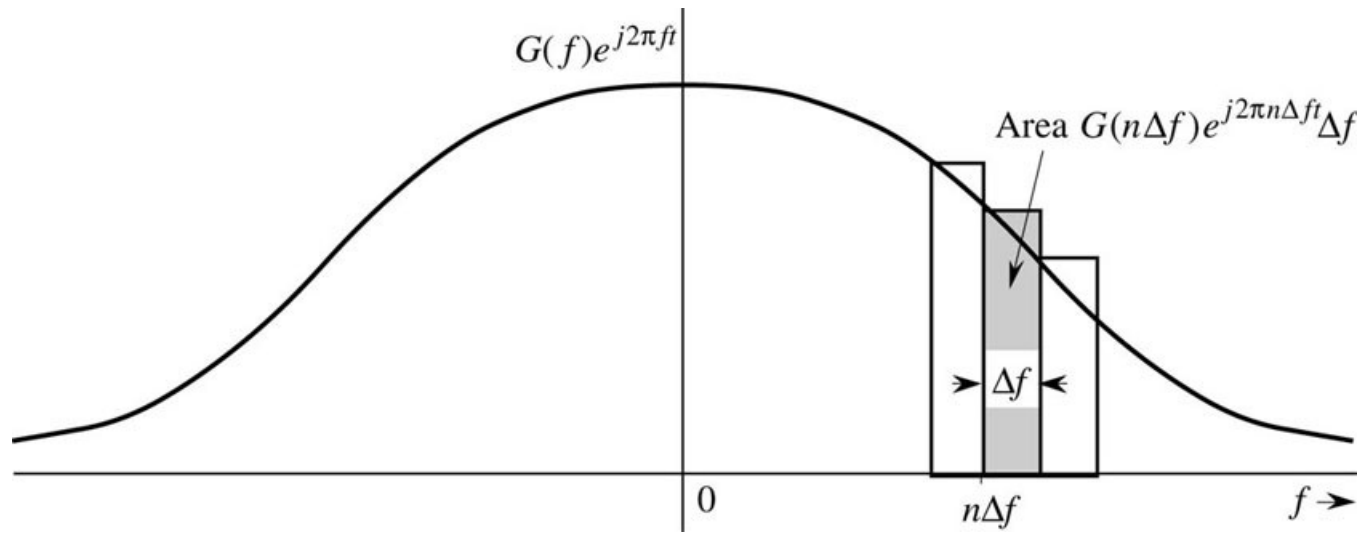
فصل سوم: تحلیل و انتقال سیگنال‌ها

نمایش سیگنال‌های غیر متناوب با استفاده از انتگرال فوریه:



$\frac{1}{T_0} G(f)$ پوش (envelope) ضرایب سری فوریه تابع متناوب $g_{T_0}(t)$ است.





نمایش انتگرال فوریه تابع غیر متناوب $g(t)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

تبدیل مستقیم فوریه:

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

تبدیل معکوس فوریه:

$$\begin{aligned} g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$$

تابع $G(f)$ در حالت کلی تابعی مختلط از متغیر f است:

$$G(f) = |G(f)|e^{j\theta_g(f)}$$

اندازه (amplitude) $G(f)$: $|G(f)|$

زاویه یا فاز (phase) $G(f)$: $\theta_g(f)$

یادآوری: تبدیل فوریه تابع $g(t)$ یعنی $G(f)$ توصیف و مشخصه حوزه فرکانس تابع $g(t)$ است.

یادآوری: خاصیت تقارن مزدوج تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی:

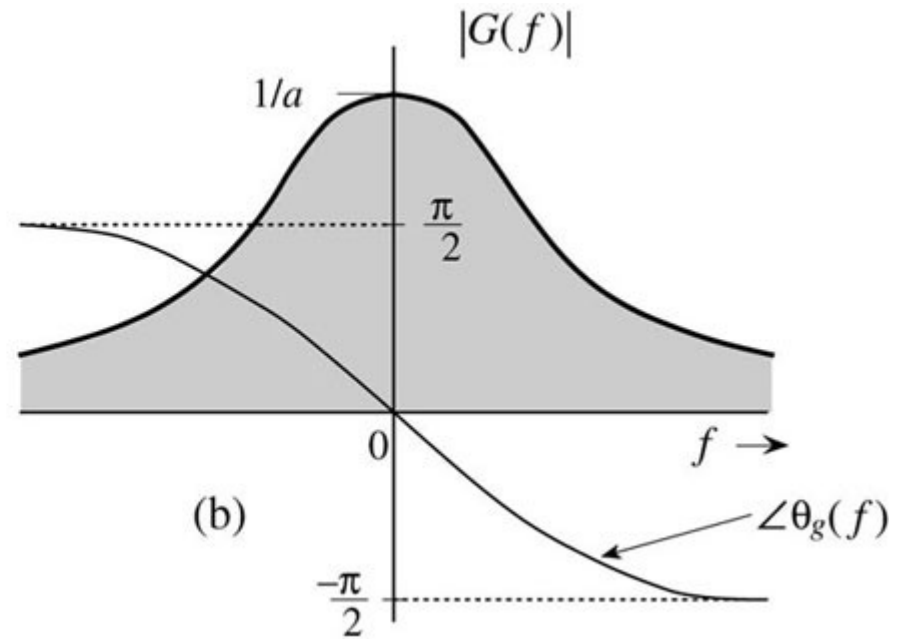
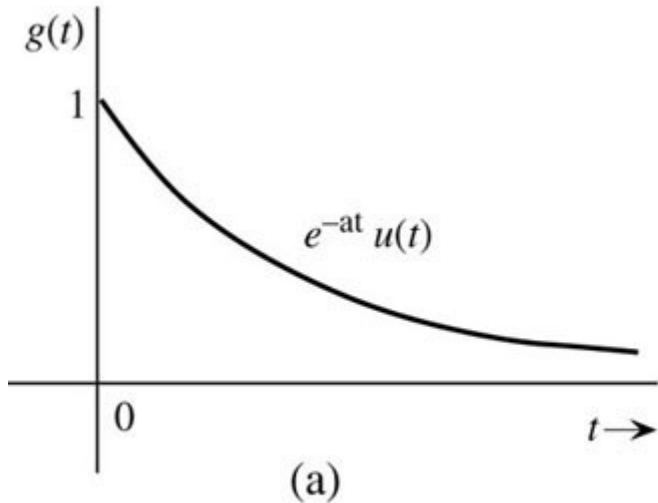
$$g(t) \text{ real} : G(-f) = G^*(f)$$

$$\begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| \\ \theta_g(-f) = -\theta_g(f) \end{cases}$$

اندازه طیف، تابعی زوج است.
زاویه (فاز) طیف، تابعی فرد است.

مثال: تبدیل فوریه تابع $e^{-at} u(t)$ را بیابید.

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right)$$



شرایط وجود تبدیل فوریه:

$$(۱) \text{ اگر تابع } g(t) \text{ مطلقاً انتگرال پذیر باشد: } \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

(۲) و اگر تابع $g(t)$ فقط تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد و همچنین تعداد محدودی نقطه ناپیوسته (که در آن‌ها هم حدهای چپ و راست متناهی باشند)

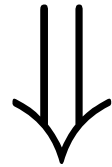
در اینصورت انتگرال فوریه تابع $g(t)$ در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به متوسط حدهای چپ و راست در آن نقطه، همگرا می‌شود.

اگر این شرایط برقرار باشد، انتگرال فوریه تابع حتماً همگراست، ولی توابعی هم هستند که این شرایط در موردشان نقض می‌شود، ولی تبدیل فوریه دارند.

$$\text{مثل تابع } \frac{\sin(at)}{t}$$

خاصیت خطی تبدیل فوریه (قضیه سوپر پوزیسیون)

$$\begin{cases} g_1(t) \iff G_1(f) \\ g_2(t) \iff G_2(f) \end{cases}$$



$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \iff a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

که ضرایب a_1 و a_2 ثابتهای حقیقی یا مختلط دلخواهی هستند.

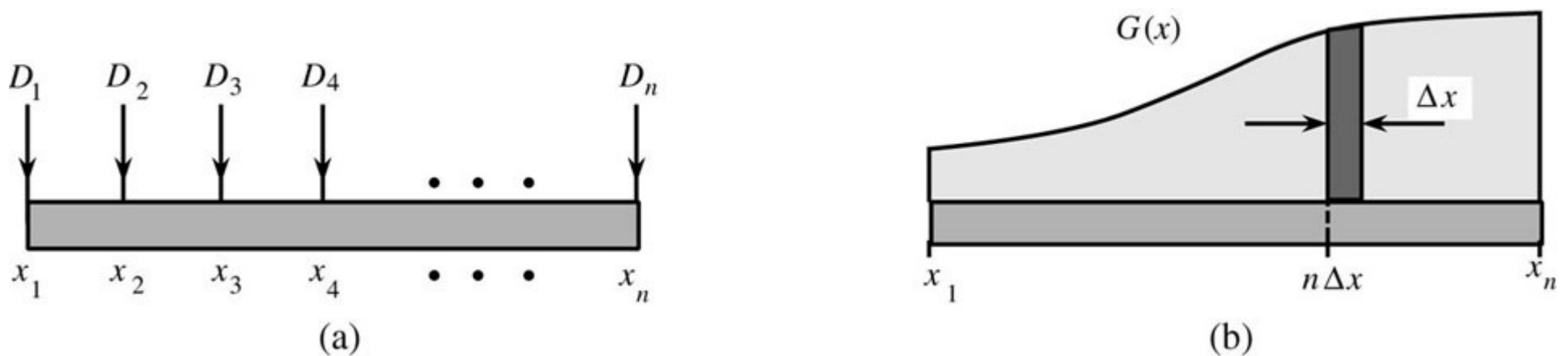
تعمیم:

$$\sum_k a_k g_k(t) \iff \sum_k a_k G_k(f)$$

تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع چگالی طیف بر واحد فرکانس است.

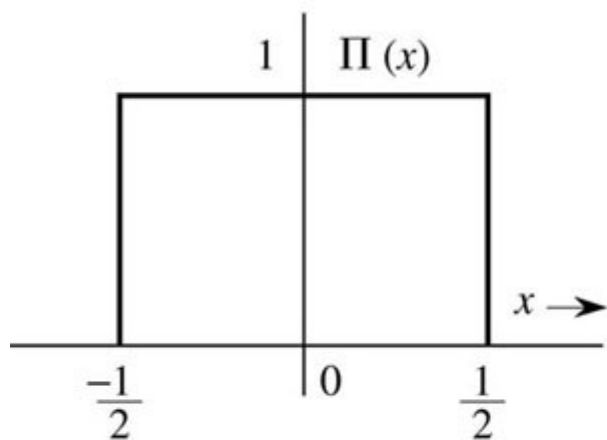
$$g(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{(j2\pi f)t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

سهم اجزای تشکیل دهنده $g(t)$ در یک باند فرکانسی به اندازه df (با واحد هرتز) به اندازه $G(f)df$ است. پس $G(f)$ در واقع چگالی طیف سیگنال در واحد پهنای باند (فرکانس با واحد هرتز) است که به طور معمول چگالی را ذکر نمی‌کنند و به گفتن طیف یا طیف فوریه سیگنال اکتفا می‌کنند.

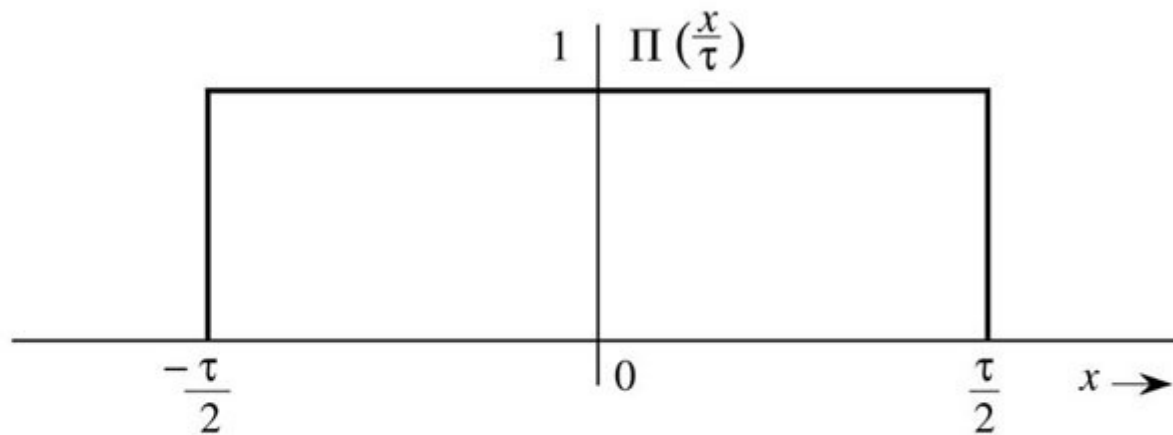


تبدیل فوریه توابع مهم و مفید

تابع مستطیلی واحد (Unit Rectangular Function): تابع پی (پای)



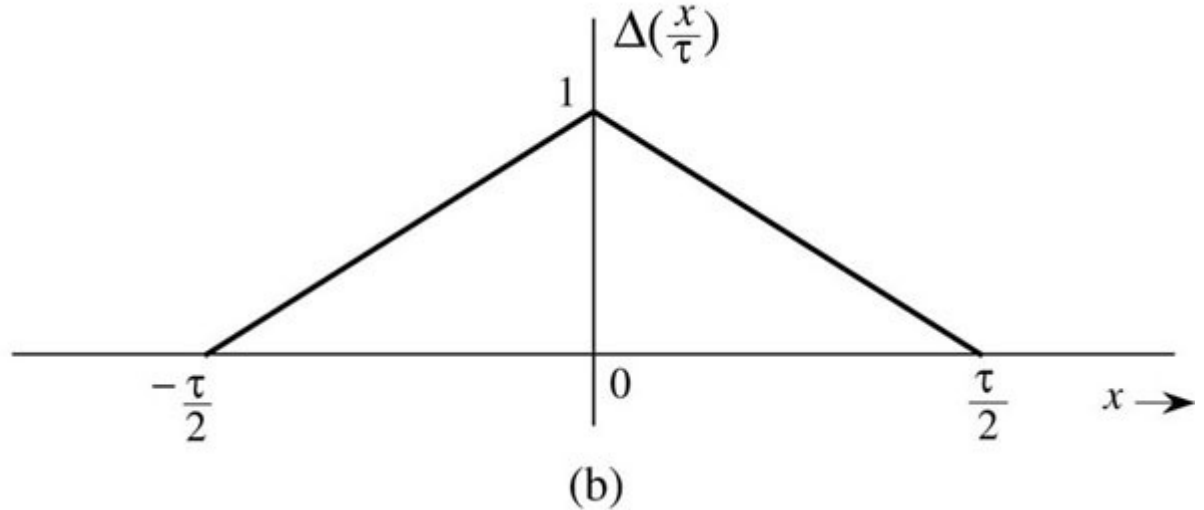
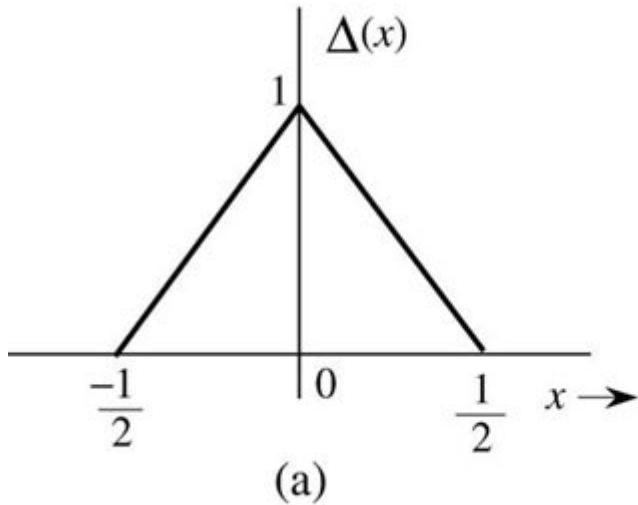
(a)



(b)

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0.5 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع مثلثی واحد (Unit Triangular Function):



$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع سینک (Sinc):

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

خواص تابع سینک:

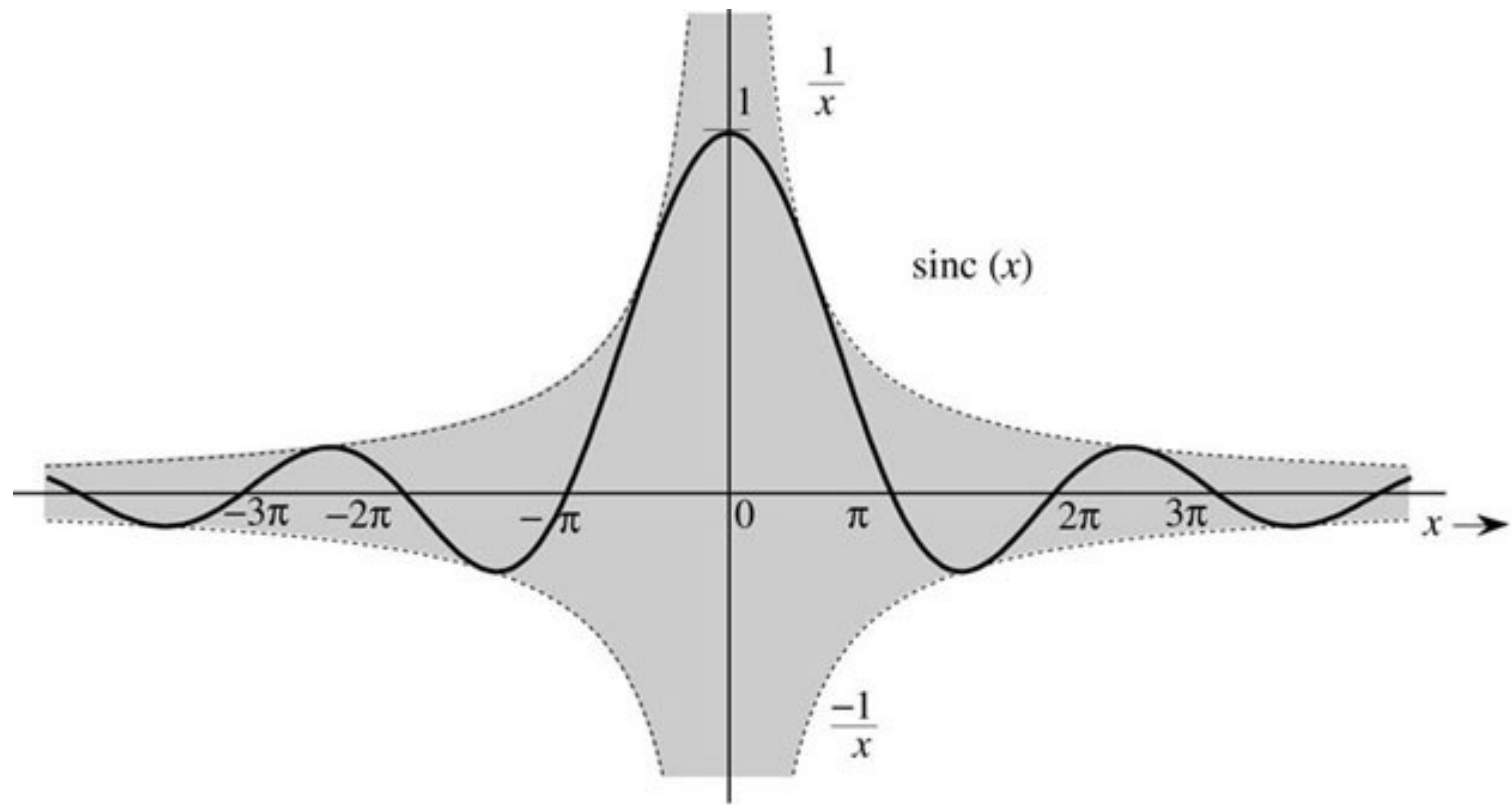
(۱) تابع زوج است.

(۲) در $x = 0$ مقدار یک دارد: $\text{sinc}(0) = 1$

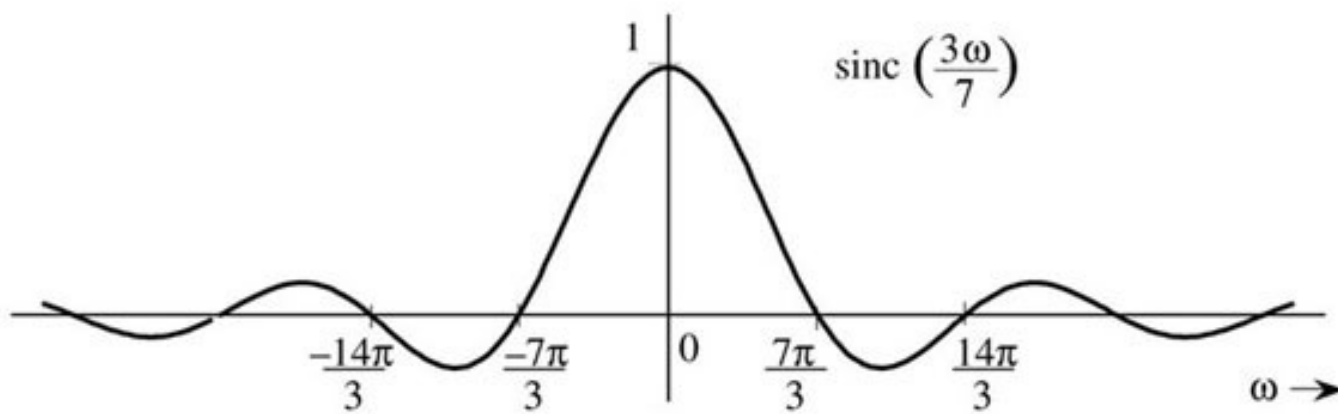
(۳) به جز $x = 0$ هر جای دیگری که $\sin x$ صفر می‌شود، مقدارش صفر است. بنابراین در تمام ضرایب صحیح مثبت و منفی و غیر صفر π صفر می‌شود.

یعنی در $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

(۴) رفتار نوسانی تابع $\sin x$ با دوره تناوب 2π را دارد که به دلیل ضرب شدن در تابع یکنوا نزولی $1/x$ ، اندازه این نوسانات مطابق تابع $1/x$ کاهش می‌یابد.



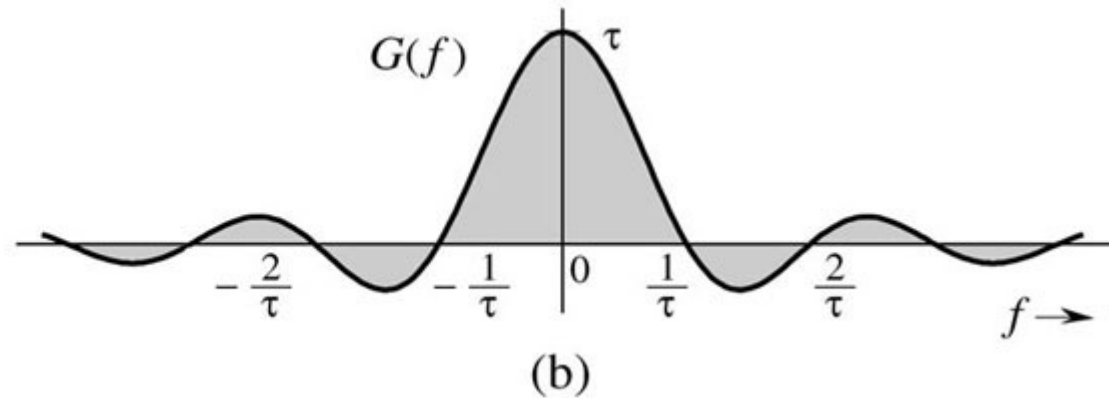
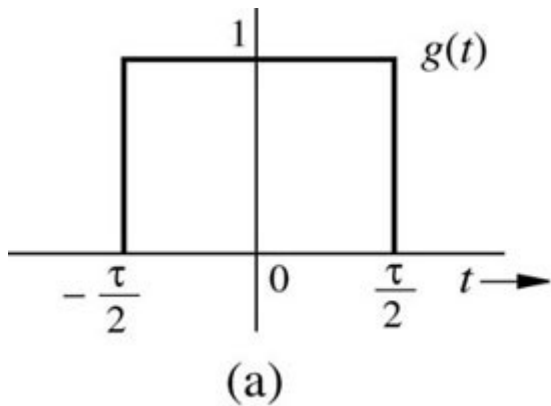
(a)



(b)

مثال: تبدیل فوریه $g(t)$ ، تابع مستطیلی واحد زیر را به دست آورید:

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff G(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$

تعریف پهنای باند Bandwidth

پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالا ترین) فرکانس و کمترین فرکانس موجود در طیف سیگنال.

از طرفی بیشتر سیگنال‌ها همه فرکانس‌ها از صفر تا بینهایت را در خود دارند. بنابراین پهنای باند همه این سیگنال‌ها طبق تعریف بالا بینهایت می‌شود. پس تعریف را تغییر می‌دهیم تا هدف از تعریف برآورده شود:

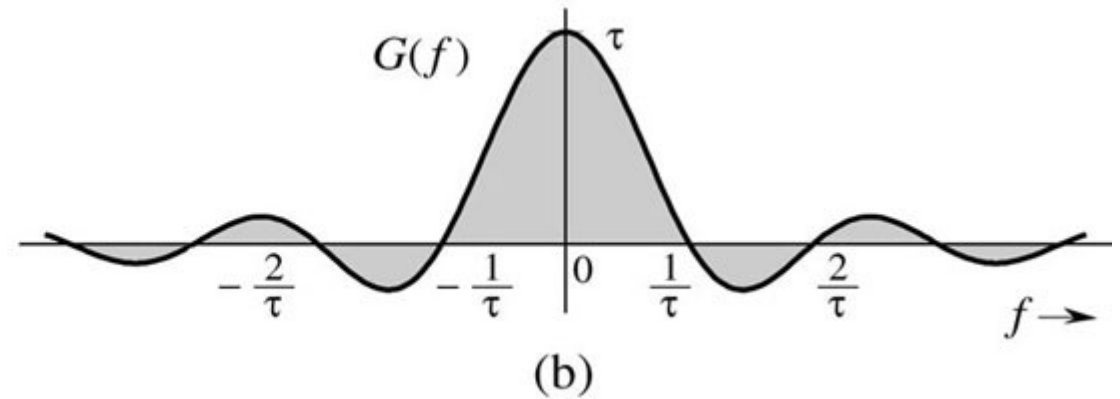
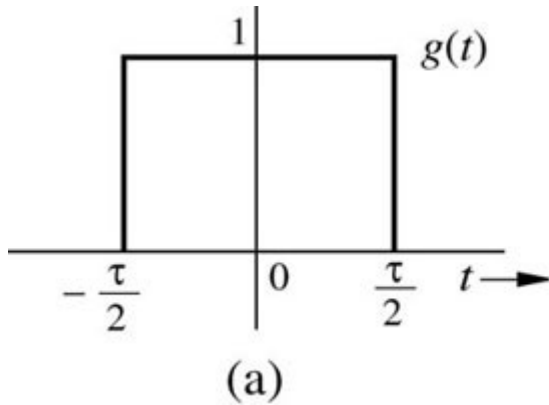
پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالا ترین) فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه (*significant*) و کمترین فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه موجود در طیف سیگنال.

نکته ۱: بسته به کاربرد و دقت مورد نیاز می‌توان «با اهمیت» را در هر مورد مشخص کرد.

مثلاً در یک مورد در طیف سیگنال فرکانسی را مهم فرض می‌کنند که اندازه در طیف از 2% بیشترین مقدار آن کمتر نباشد.

یا مثلاً در یک مورد دیگر در طیف سیگنالی را مهم فرض می‌کنند که زاویه در طیف سیگنال، حداکثر 5% بیشترین مقدار تأخیر را ایجاد کند.

نکته ۲: در محاسبه پهنای باند فقط فرکانس فیزیکی (یعنی نیمه مثبت محور f در نظر گرفته می‌شود).

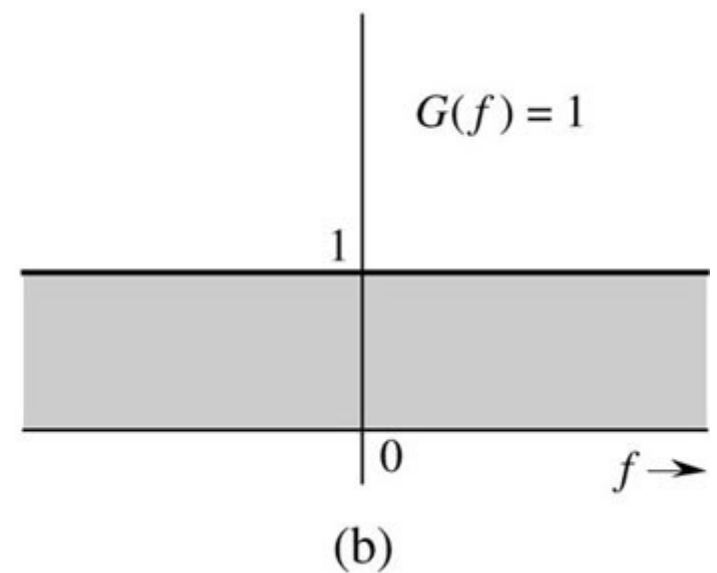
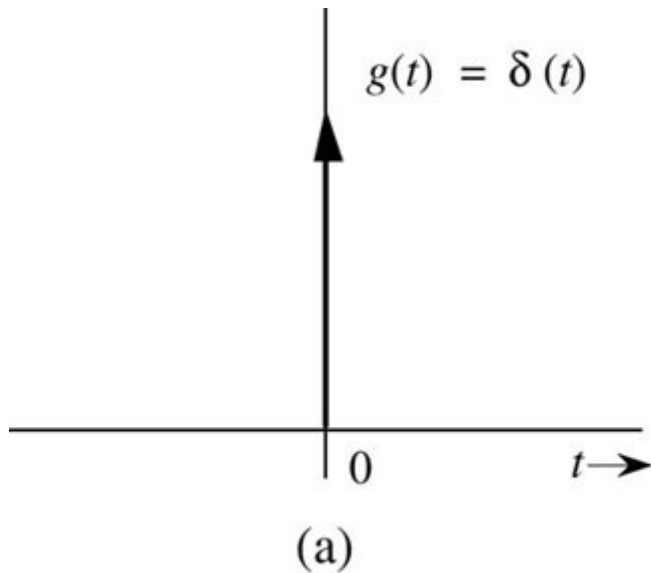


با یک تقریب نسبی قابل قبول برای بیشتر موارد عملی، برای تابع $\Pi(t/\tau)$ ، بیشترین سهم طیف را در لب (lobe) اول طیف قرار دارد، پس پهنای باند را با این تقریب $B = 1/\tau$ Hz در نظر می‌گیریم.

مسأله: یکبار با تقریب 5% و یکبار 1% بیشترین اندازه طیف، پهنای باند سیگنال $\Pi(t/\tau)$ را به دست آورید.

مثال: تبدیل فوریه تابع ضربیه واحد:

$$g(t) = \delta(t) \iff G(f) = 1$$

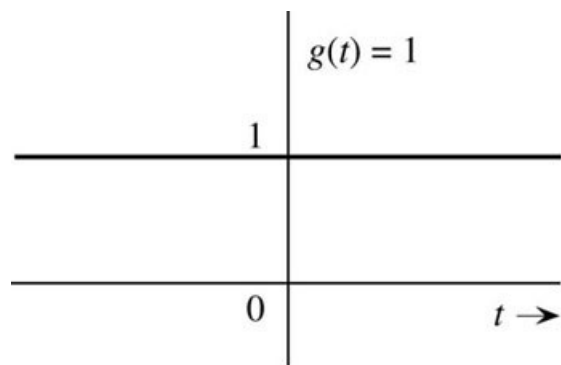


مثال: تبدیل معکوس تابع $G(f) = \delta(f)$ را پیدا کنید:

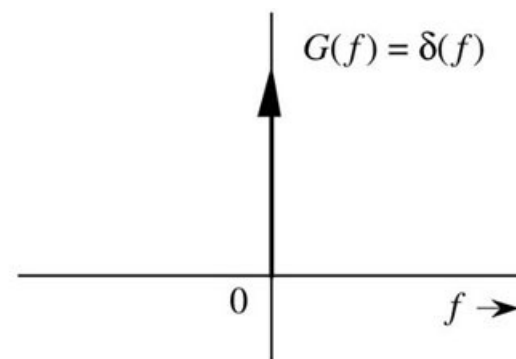
$$g(t) = 1 \iff G(f) = \delta(f)$$

یا چون $\delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$ بنابراین:

$$g(t) = 1/2\pi \iff G(f) = \delta(2\pi f)$$



(a)



(b)

مثال: تبدیل فوریه معکوس $G(f) = \delta(f - f_0)$:

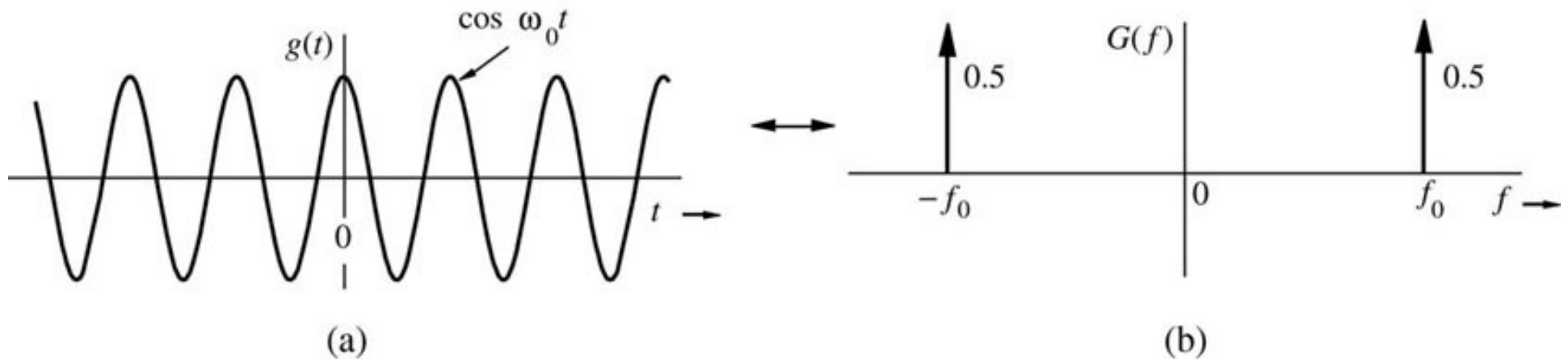
$$g(t) = e^{j2\pi f_0 t} \iff G(f) = \delta(f - f_0)$$

و بطور مشابه:

$$g(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \iff G(f) = \delta(f + f_0)$$

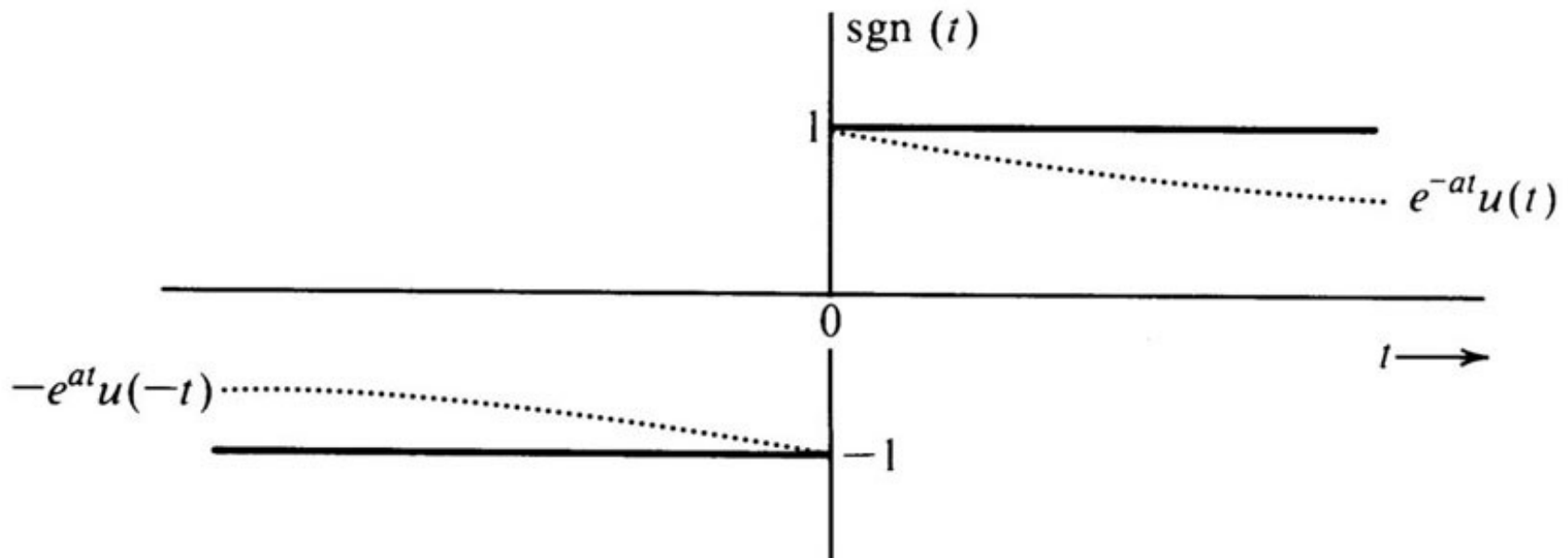
مثال: تابع سینوسی با فرکانس f_0 ، $\cos 2\pi f_0 t$:

$$\cos 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



مثال: تبدیل فوریه تابع $\text{sgn}(t)$ تابع علامت (sign):

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(t) \iff \frac{1}{j\pi f}$$

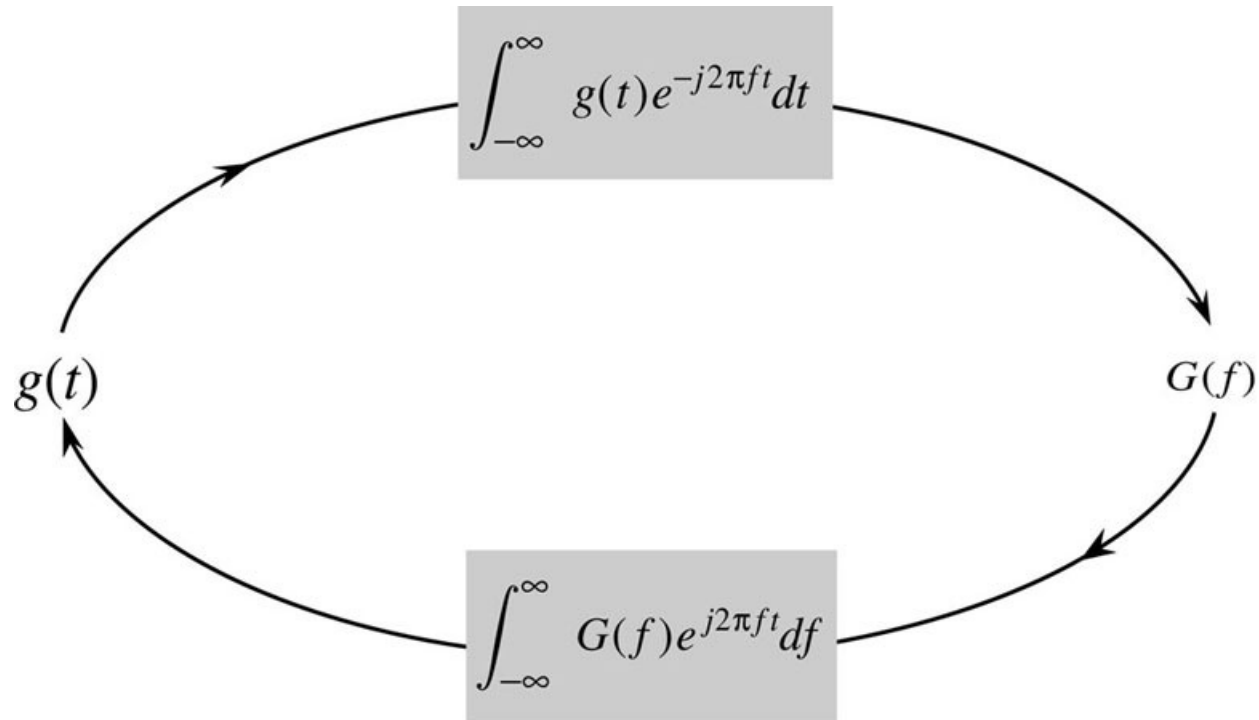
نتیجه: تبدیل فوریه تابع $u(t)$:

$$u(t) = (1/2)(\text{sgn}(t) + 1)$$

$$u(t) \iff \frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

بعضی خواص تبدیل فوریه

(۱) رابطه حوزه زمان - فرکانس



(۲) خاصیت دوگانگی (Duality):

$$g(t) \iff G(f)$$



$$G(t) \iff g(-f)$$

و با استفاده از خاصیت قرینه کردن زمان یا فرکانس که کمی بعد اثبات خواهد شد نتیجه می شود که:



$$G(-t) \iff g(f)$$

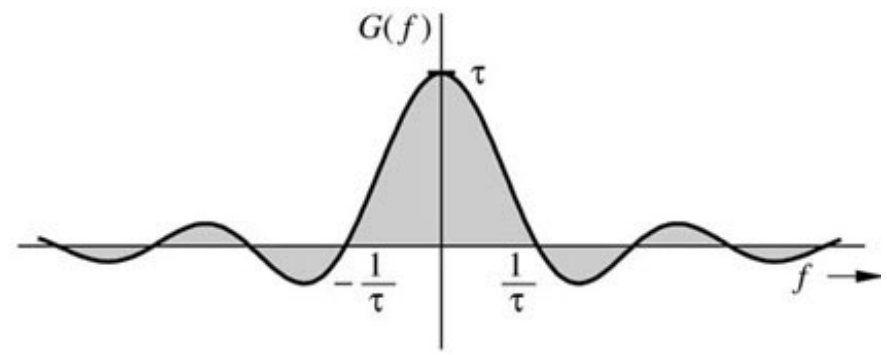
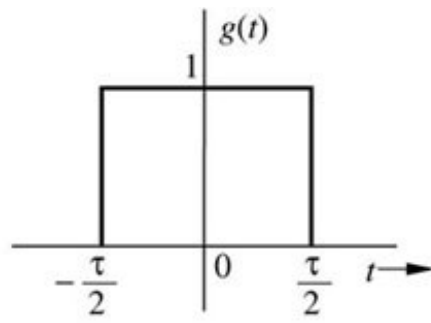
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$

$$\Downarrow$$

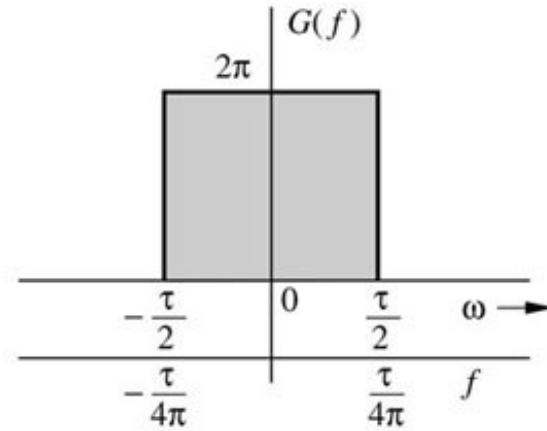
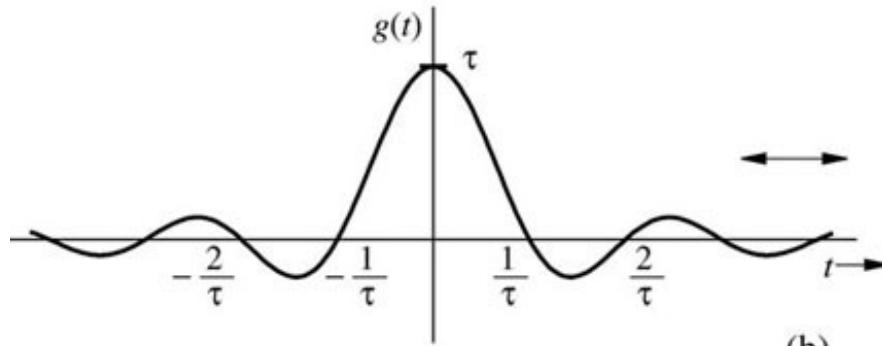
$$\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha t) \iff \Pi\left(\frac{-f}{\alpha}\right) = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \iff \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



(a)



(b)

شکل را اصلاح کنید (!) و شکل جدید را بکشید.

خاصیت تغییر مقیاس زمان:

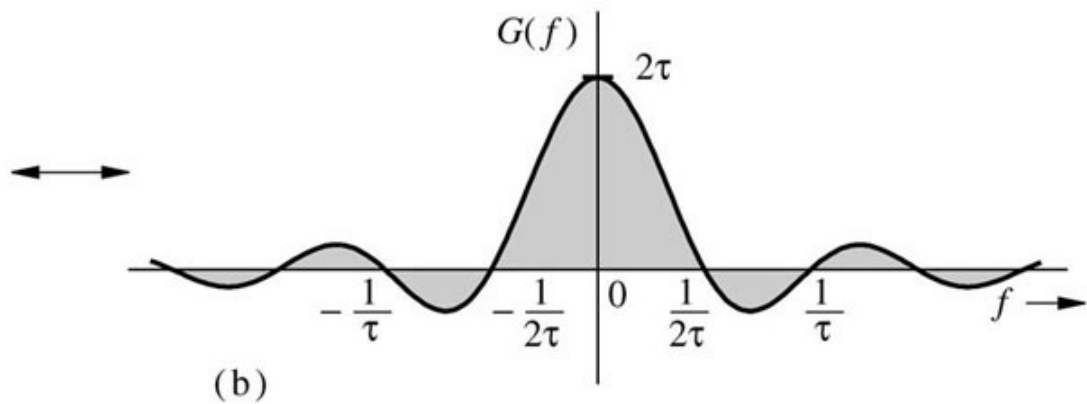
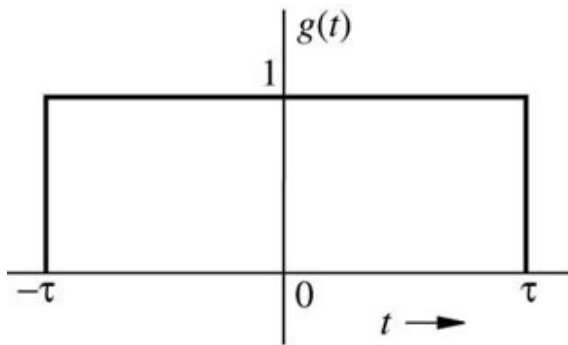
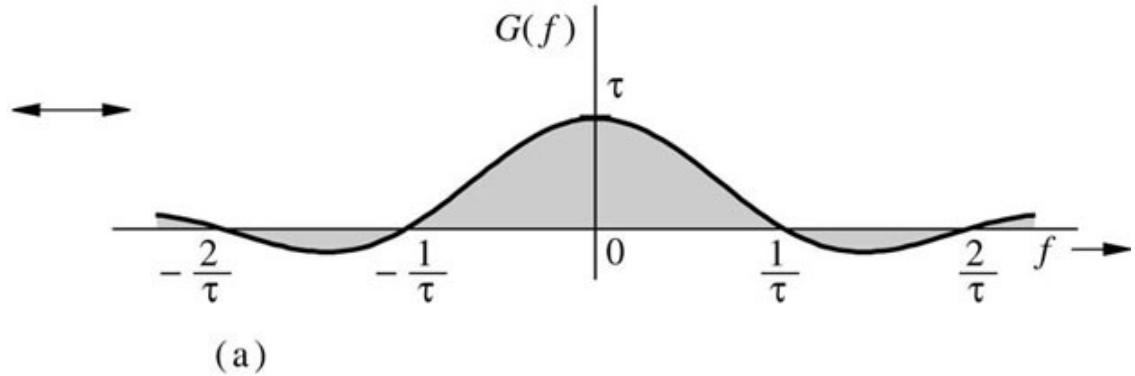
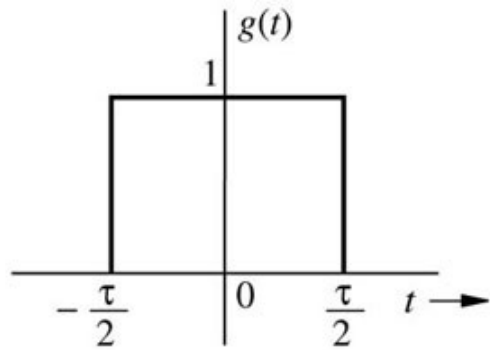
$$g(t) \iff G(f)$$

\Downarrow

$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

نتیجه: اگر $a = -1$:

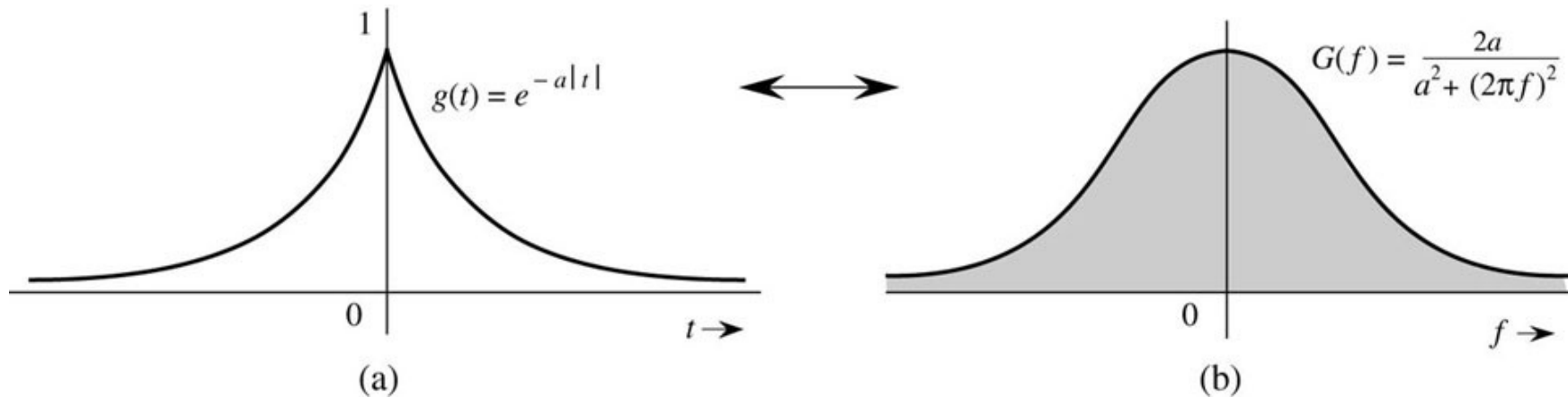
$$g(-t) \iff G(-f)$$



هرچه سیگنال در زمان پهن تر باشد در حوزه فرکانس باریک تر است و برعکس.
 پهنای باند (bandwidth) سیگنال (با واحد هرتز) با عرض یا مدت زمان
 (duration) (با واحد ثانیه) نسبت عکس دارد.

$$e^{-at}u(t) \iff \frac{1}{a + j2\pi f} \implies e^{at}u(-t) \iff \frac{1}{a - j2\pi f}$$

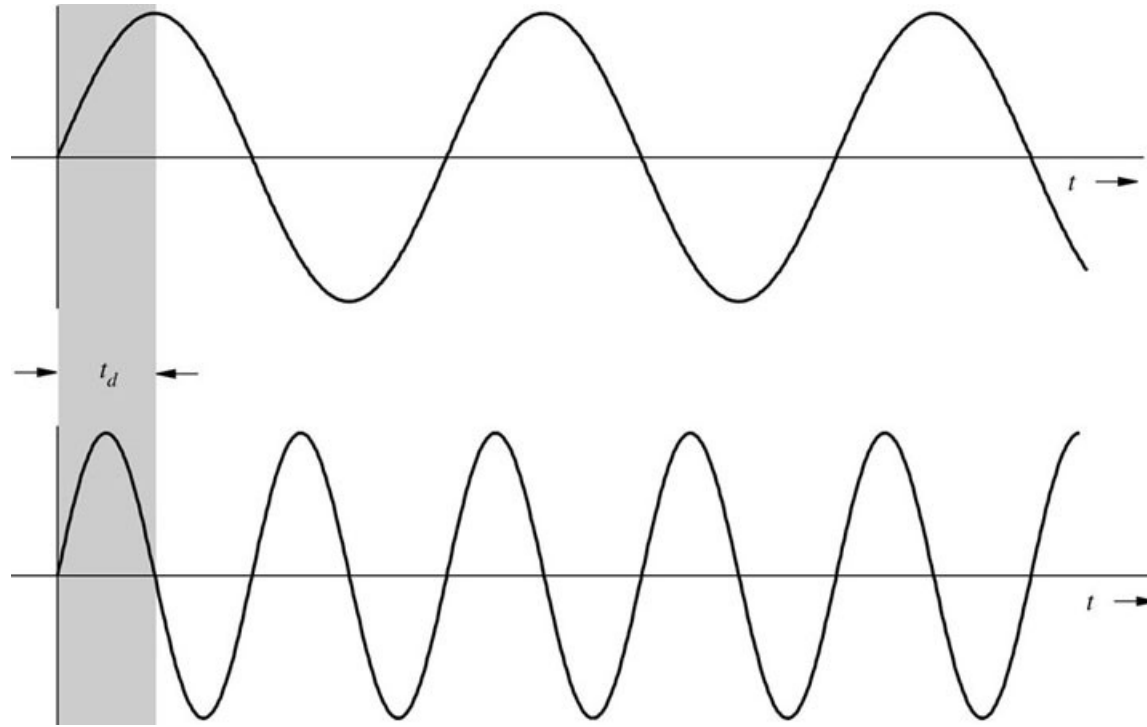
$$e^{-a|t|} \iff \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$



خاصیت انتقال زمانی:

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ &\Downarrow \\ g(t - t_0) &\iff e^{-j2\pi f t_0} G(f) \end{aligned}$$

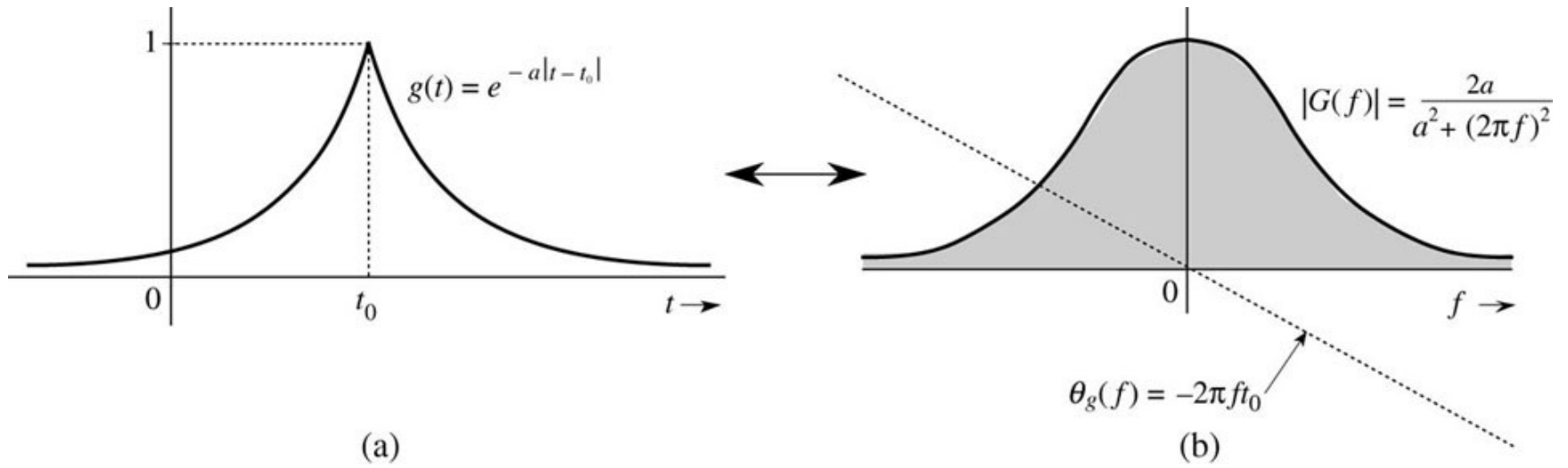
تأخیر در سیگنال به اندازه t_0 ، اندازه طیف سیگنال را تغییر نمی‌دهد و فاز آن را به اندازه $-j2\pi f t_0$ تغییر می‌دهد. این تغییر فاز تابعی خطی نسبت به f است. یعنی برای یک تأخیر مشخص در سیگنال، فرکانسهای بالاتر موجود در طیف در معرض تغییر فاز بیشتری قرار می‌گیرند تا فرکانسهای کوچکتر.



تأخیر ثابت t_d برای سینوسی بالا معادل تغییر فاز $\pi/2$ و برای سینوسی پایین که فرکانسش دو برابر است معادل تغییر فاز π است.

مثال: تبدیل فوریه $e^{-a|t-t_0|}$ را بیابید.

$$e^{-a|t-t_0|} \iff \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$



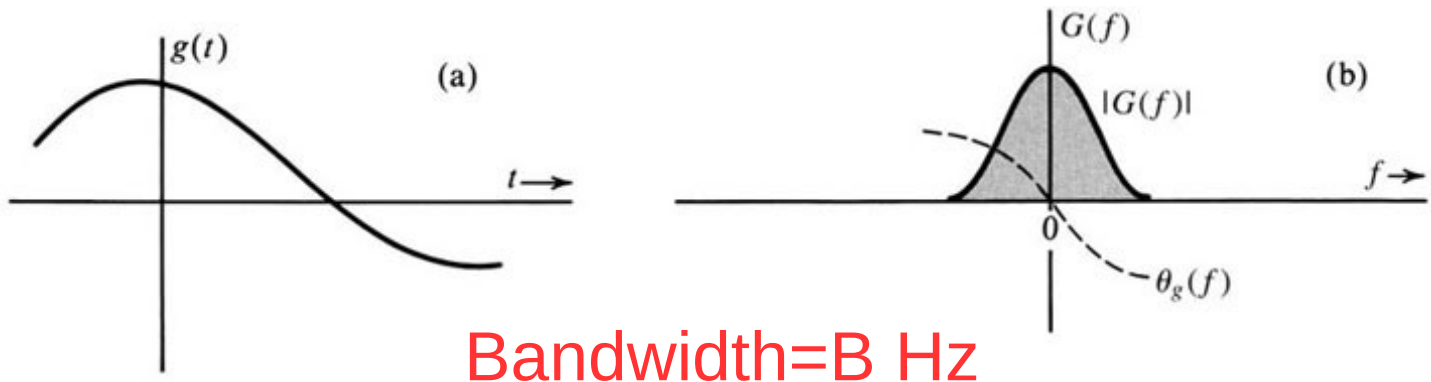
خاصیت انتقال فرکانسی:

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ &\Downarrow \\ e^{j2\pi f_0 t} g(t) &\iff G(f - f_0) \end{aligned}$$

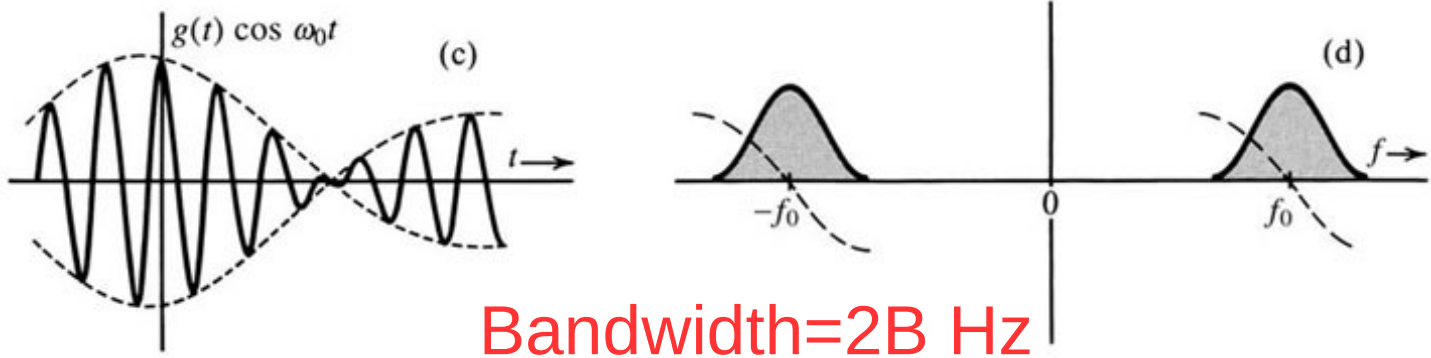
تابع $e^{j2\pi f_0 t}$ یک تابع حقیقی نیست و مقادیر آن مستقیماً قابل تولید نیست. بنابراین عمل انتقال فرکانسی در عمل با ضرب کردن تابع در توابع سینوسی انجام می‌شود.

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [G(f - f_0) + G(f + f_0)]$$

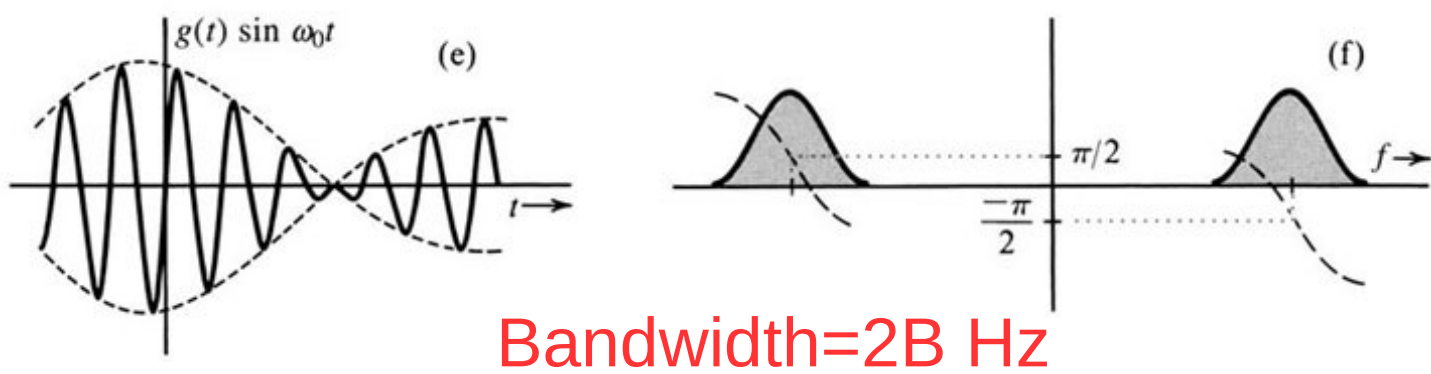
$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [G(f - f_0)e^{-j\pi/2} + G(f + f_0)e^{j\pi/2}]$$



Bandwidth = B Hz



Bandwidth = $2B$ Hz



Bandwidth = $2B$ Hz

تبدیل فوریه توابع متناوب:

$$e^{j2\pi f_0 t} \iff \delta(f - f_0) \quad \text{یادآوری:}$$

به فرض $g(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T_0 باشد:

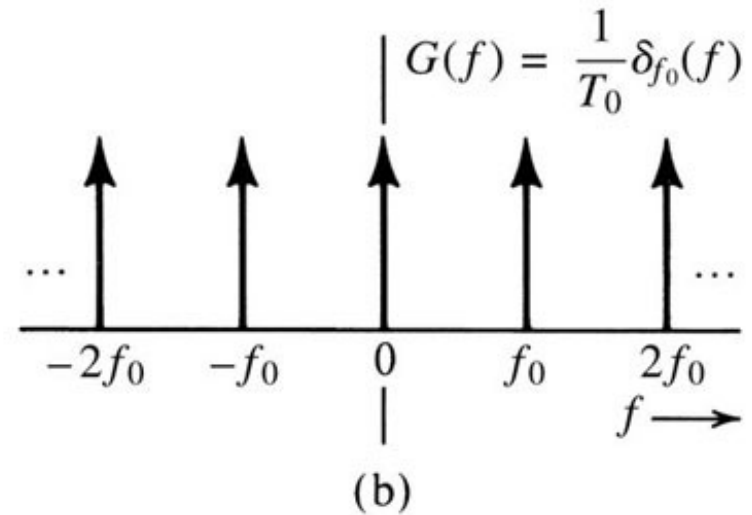
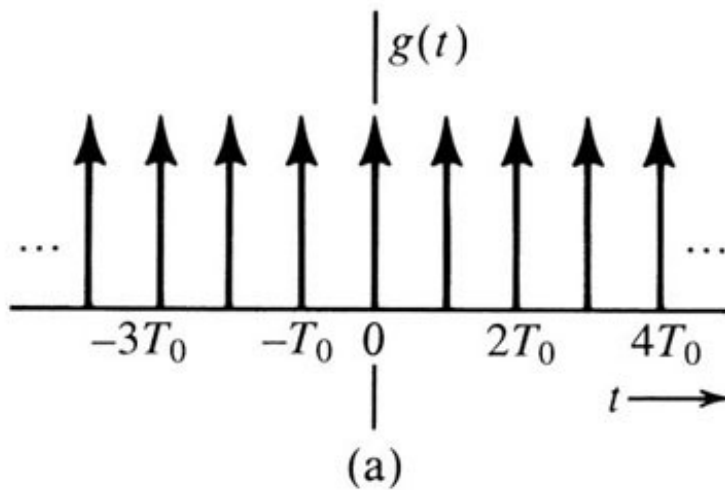
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2n\pi f_0 t}$$

⇓

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f - nf_0)$$

مثال: تبدیل فوریه قطار ضربه:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad , \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$



قضیه کانولوشن

یادآوری: کانولوشن دو تابع $g(t)$ و $w(t)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)w(\tau)d\tau$$

حال اگر:

$$g_1(t) \iff G_1(f) \quad g_2(t) \iff G_2(f)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \iff G_1(f).G_2(f)$$

کانولوشن حوزه زمان

$$g_1(t).g_2(t) \iff G_1(f) * G_2(f)$$

کانولوشن حوزه فرکانس
(ضرب در حوزه زمان)

یادآوری خاصیت پهنا در کانولوشن (width property):

اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به ترتیب دارای پهنای W_1 و W_2 باشند، $f_1(x) * f_2(x)$ دارای پهنای $W_1 + W_2$ خواهد بود.

نتیجه: اگر $g_1(t)$ و $g_2(t)$ به ترتیب دارای پهنای باند B_1 و B_1 هرتز باشند، (یعنی پهنای $G_1(f)$ و $G_2(f)$)، پهنای باند $g_1(t) \cdot g_2(t)$ (یعنی پهنای $(G_1(f) * G_2(f))$) خواهد بود. [در اینجا معنای دقیق پهنای باند مورد نظر است و نه معنی تقریبی آن]

بنابراین پهنای باند $g^2(t)$ ، $2B$ هرتز و پهنای باند $g^n(t)$ ، nB هرتز می باشد.

خاصیت مشتق‌گیری زمانی و انتگرال‌گیری زمانی:

$$g(t) \iff G(f) \quad \text{اگر}$$

آنگاه (خاصیت مشتق‌گیری):

$$\frac{d}{dt}g(t) \iff j2\pi f G(f)$$

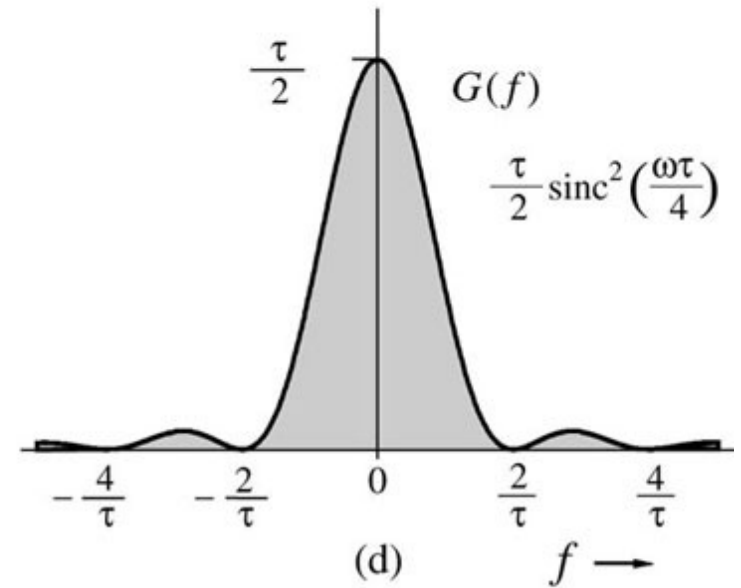
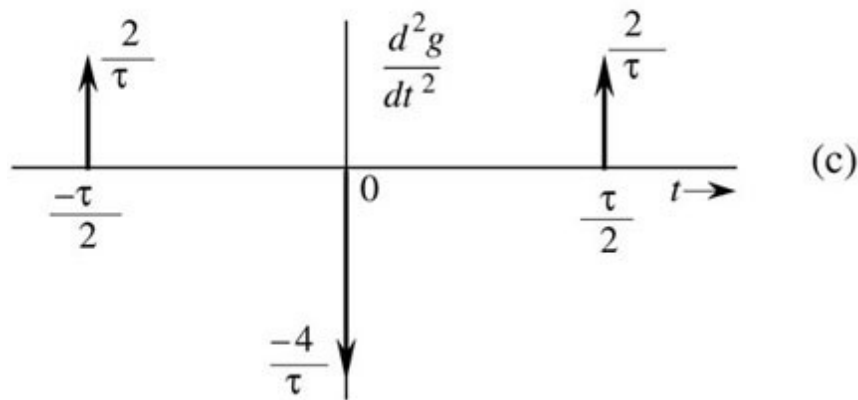
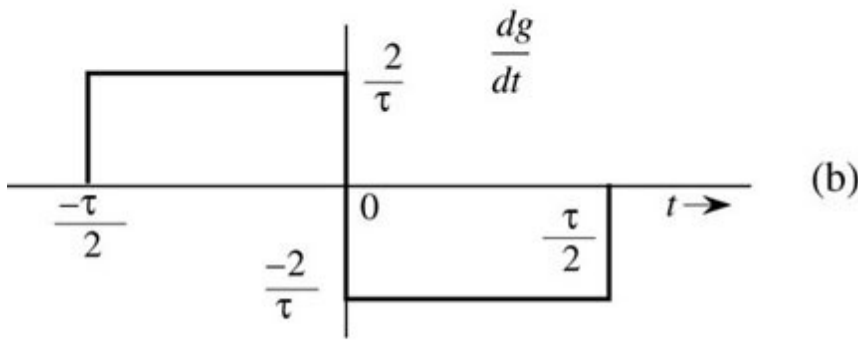
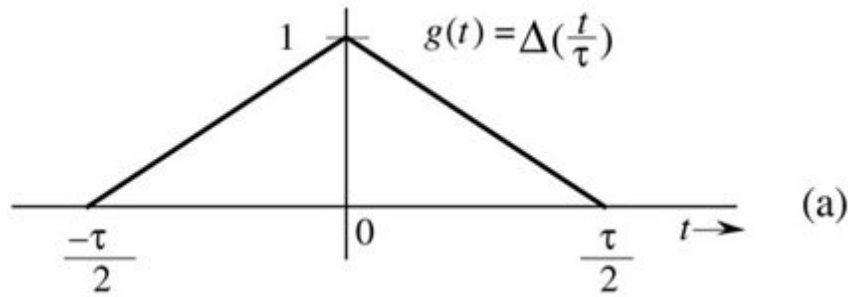
و (خاصیت انتگرال‌گیری):

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

تعمیم خاصیت مشتق‌گیری:

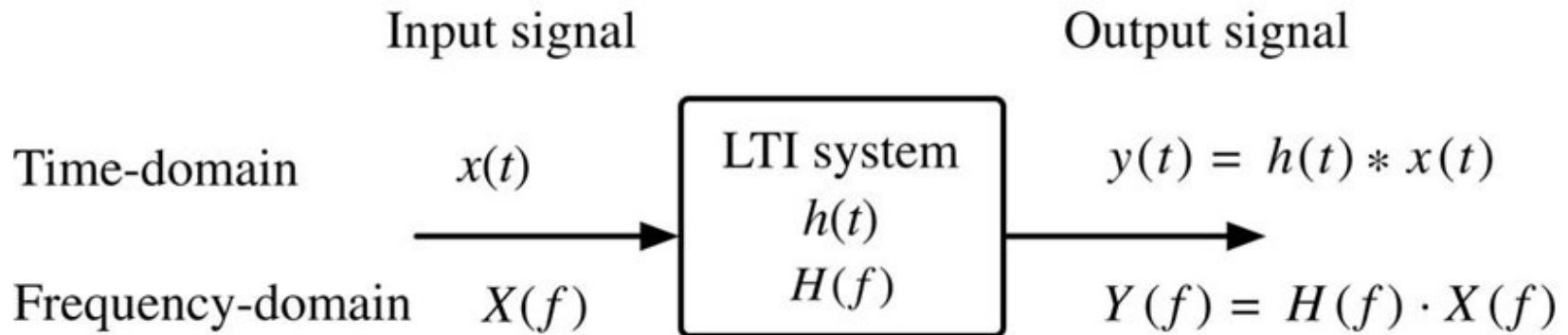
$$\frac{d^n}{dt^n}g(t) \iff (j2\pi f)^n G(f)$$

مثال: با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری حوزه زمان، تبدیل فوریه پالس مثلثی $\Delta(t/\tau)$ را به دست آورید.



انتقال سیگنال از یک سیستم خطی

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI)، هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس قابل توصیف است. در حوزه فرکانس با پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ و در حوزه فرکانس با پاسخی $H(f)$.



فرض بر این است که سیستم‌های مورد بررسی، پایدار هستند یعنی ورودی‌های کراندار (Bounded Input) خروجی کراندار (Bounded Output) ایجاد می‌کنند (پایداری BIBO).

در حوزه زمان :

به فرض $h(t)$ پاسخ ضربه است. یعنی:

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

آنگاه:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

در حوزه فرکانس: به فرض تبدیل فوریه ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم:

$$x(t) \iff X(f) \quad y(t) \iff Y(f) \quad h(t) \iff H(f)$$

آنگاه با توجه به خاصیت تبدیل فوریه کانولوشن:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

به $H(f)$ ، تابع انتقال سیستم (transfer function) و یا پاسخ فرکانسی سیستم (frequency response) می‌گویند.

$$H(f) = |H(f)|e^{j\theta_h(f)},$$

$|H(f)|$: پاسخ اندازه سیستم (Amplitude response)

$\theta_h(f)$: پاسخ فاز سیستم (Phase response)

اعوجاج سیگنال (Signal Distortion) هنگام انتقال

$$|Y(f)| e^{j\theta_y(f)} = |X(f)| |H(f)| e^{j(\theta_x(f) + \theta_h(f))}$$

	ورودی سیستم	خروجی سیستم
اندازه	$ X(f) $	$ X(f) \cdot H(f) $
فاز	$\theta_x(f)$	$\theta_x(f) + \theta_h(f)$

یک مؤلفه موجود در طیف ورودی، در اندازه در ضریب $|H(f)|$ ضرب می‌شود و در فاز با زاویه $\theta_h(f)$ جمع می‌شود.

انتقال بدون اعوجاج (Distortionless Transmission)

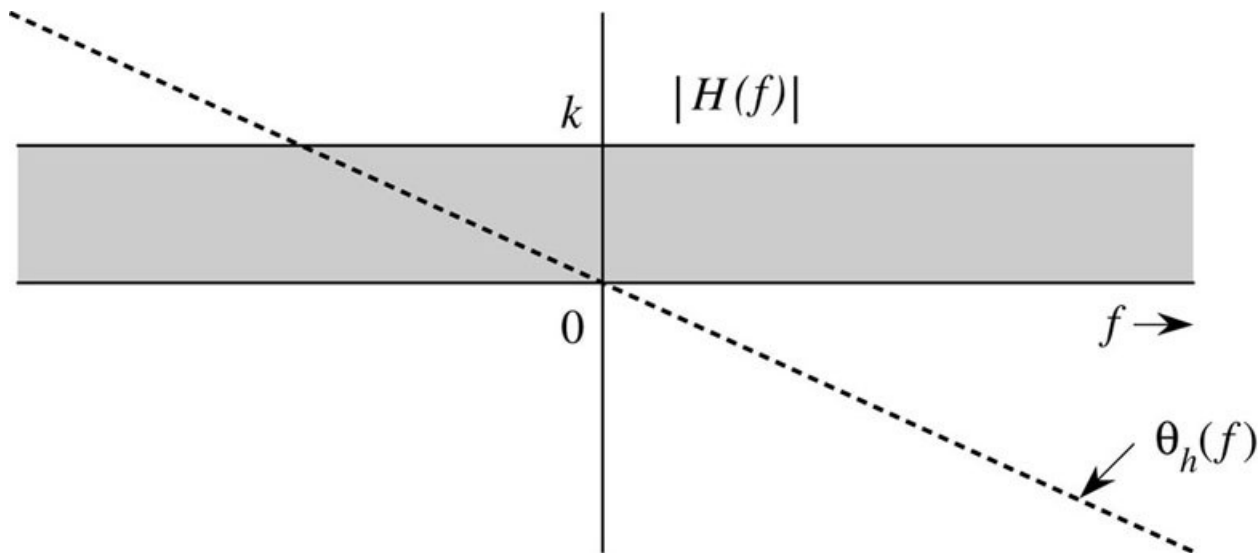
یک سیستم (مثلاً یک تقویت‌کننده و یا یک کانال مخابراتی) را بدون اعوجاج می‌گوییم اگر سیگنال خروجی همان سیگنال ورودی باشد الا اینکه حداکثر در یک ضریب ثابت ضرب شود و نسبت به ورودی تأخیر زمانی داشته باشد.

خروجی سیستم بدون اعوجاج در حوزه زمان: $y(t) = k \cdot x(t - t_d)$

پاسخ فرکانسی یا تابع انتقال سیستم بدون اعوجاج:

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_d}$$

$$\begin{cases} |H(f)| = k \\ \theta_h(f) = -2\pi f t_d \end{cases}$$



اندازه پاسخ فرکانسی سیستم بدون اعوجاج، یک ضریب ثابت است.
 فاز پاسخ فرکانسی یک سیستم بدون اعوجاج، یک تابع خطی است که از مبدأ
 می‌گذرد و شیب آن نسبت به فرکانس f برابر با $-2\pi f t_d$ است که t_d
 تأخیری است که سیستم در سیگنال ورودی ایجاد می‌کند.
 نکته: در حالت کلیتر، فاز یک سیستم بدون اعوجاج می‌تواند مضارب صحیحی از
 π هم داشته باشد.

$$\theta_h(f) = n\pi - 2\pi f t_d$$

در حالت کلی، اگر پاسخ فاز یک سیستم، $\theta_h(f)$ باشد، تأخیر اعمال شده توسط این سیستم بر مؤلفه‌ای از سیگنال ورودی با فرکانس f ، عبارت است از:

$$t_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_h(f)}{df}$$

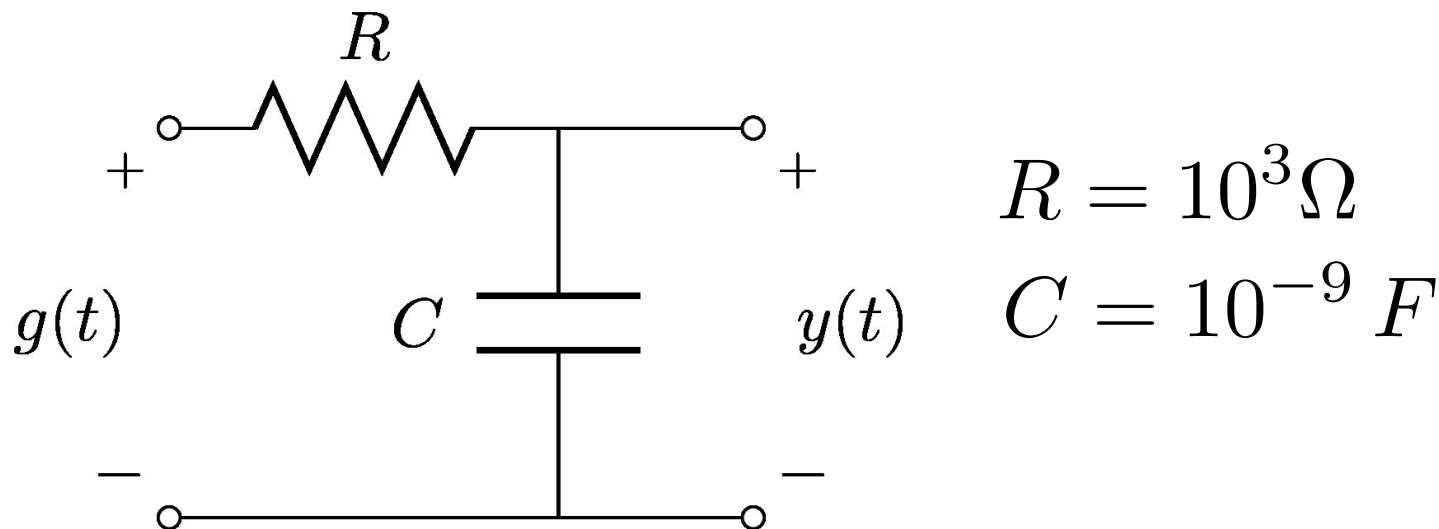
پس برای اینکه تمام مؤلفه‌های فرکانسی موجود در سیگنال ورودی، به یک اندازه تأخیر داشته باشند (که در غیر اینصورت سیگنال دچار اعوجاج خواهد شد)، پاسخ فاز یک سیستم بدون اعوجاج، باید تابعی خطی از فرکانس باشد.

نتیجه: برای بدون اعوجاج بودن، یک شرط روی اندازه و یک شرط روی فاز پاسخ فرکانسی لازم است. اگر فقط اندازه پاسخ فرکانسی ثابت باشد (به این سیستمها **تمام-گذر** یا **all-pass** می‌گویند) مؤلفه‌های سیگنال در فرکانس‌های مختلف می‌تواند دچار تأخیرهای متفاوت شود و سیگنال را معوج کند.

مثال: اگر $g(t)$ و $y(t)$ به ترتیب ورودی و خروجی فیلتر پایین گذر زیر باشد:
 الف) پاسخ فرکانسی سیستم $H(f)$ را به دست آورید و $|H(f)|$ و $\theta_h(f)$ و $t_d(f)$ را رسم کنید.

ب) برای یک انتقال بدون اعوجاج از این فیلتر، چه شرطی برای پهنای باند ورودی لازم است اگر تغییر 2% در پاسخ اندازه و تغییر 5% در تأخیر زمانی قابل قبول باشد.

ج) در این صورت تأخیر انتقال چقدر است و خروجی چیست؟



برای **سیگنال‌های صوتی** به دلیل طبیعت و جنس حساسیت گوش انسان: اعوجاج در اندازه اهمیت زیادی دارد و اعوجاج در فاز (غیر خطی بودن پاسخ فاز) اهمیت کمی دارد.

برای **سیگنال‌های ویدئویی** به دلیل حساسیت چشم: اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد و در مقابل اعوجاج در فاز بر کیفیت ویدئو چشمگیرتر و مهمتر است.

برای **سیگنال‌های دیجیتال** که در مخابرات دیجیتال ارسال می‌شوند: اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد ولی اعوجاج در فاز مهمتر است زیرا باعث گسترده و پخش پالس‌ها و در هم فرو رفتن و تداخل پالس‌های مجاور می‌شود که باعث ایجاد خطا می‌گردد.