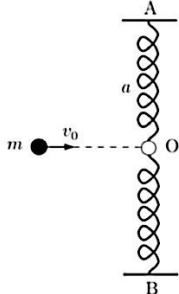


مسئله ۱ - ترمز فنری



در دستگاه شکل مقابل دو فنر مشابه به ضریب k و طول عادی a_0 بین نقاط A و B به فاصله $2a$ از یکدیگر ثابت هستند به طوری که $a > a_0$. جسمی نقطه‌ای به جرم m با سرعت اولیه v_0 عمود بر امتداد فنرها از سمت چپ به سمت نقطه O وسط دو فنر حرکت می‌کند.

(آ) اندازه سرعت و شتاب جرم m را پس از آن که نقطه اتصال دو فنر به اندازه طول x به سمت راست کشیده شد به دست آورید.

(ب) بیشینه طولی که نقطه O به سمت راست کشیده می‌شود را حساب کنید.

(پ) اگر لحظه برخورد جرم m به نقطه O را $t = 0$ بگیریم، عبارتی برای تعیین لحظه t ، که نقطه O به اندازه x کشیده شده است، به دست آورید. ممکن است عبارت یا انتگرالی که به دست می‌آورید، قابل محاسبه و ساده کردن نباشد، در این صورت تا جایی که می‌توانید جواب را ساده‌تر کنید.

(ت) نمودار $F(x)$ ، اندازه نیروی وارد از طرف فنرها به جرم m ، را بر حسب x رسم کنید. هر نوع ویژگی کمی نمودار از جمله شیب نمودار در نواحی مختلف، نقاط کمینه، بیشینه و عطف، مجانب‌ها و ... را مشخص کنید.

(ث) اگر انرژی پتانسیل دستگاه فنرها نسبت به حالتی که فنرها در امتداد AB هستند را با $V(x)$ نشان دهیم، نمودار تابع بدون بعد $u = V(x)/ka^2$ بر حسب متغیر بدون بعد $y = x/a$ را به ازای $a = 2a_0$ رسم کنید. برای این کار مقدار u را با دقت دو رقم بعد از اعشار به ازای $y = 0.2, y = 0.3, y = 0.4, y = 0.5, y = 0.6, y = 0.7$ به دست آورید.

(ج) فرض کنید $mv_0^2 = 0.22ka^2$. با استفاده از نمودار بخش قبل مقدار عددی $y_m = x_m/a$ را با دقت 0.05 به دست آورید که x_m مسافت توقف است.

۲) در نقطه‌ای روی سطح زمین به عرض جغرافیایی θ ایستاده‌ایم و یک سرنخی که به سر دیگر آن جسم کوچکی به جرم m آویزان است ولی با سطح زمین تماس ندارد را در دست گرفته‌ایم.

اگر زمین را کره ساکنی به جرم M و شعاع R در نظر بگیریم که توزیع جرم در آن یکنواخت یا شعاعی باشد نخ در راستای شعاع زمین قرار می‌گیرد. در این وضعیت کشش نخ به عرض جغرافیایی بستگی ندارد و برابر mg است که $g = MG/R^2$ و $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg} \text{ و } R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

در واقع به دلیل دوران زمین با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش، نخ در راستای شعاع زمین قرار نمی‌گیرد، بلکه به اندازه $\Delta\varphi$ انحراف دارد.

نتایجی که به دست می‌آورید تا حد امکان ساده شده باشند.

آ) مقدار عددی g را به دست آورید.

ب) $\tan \Delta\varphi$ را بر حسب کمیت‌های معلوم به دست آورید.

پ) نیروی کشش نخ را بر حسب کمیت‌های معلوم به دست آورید. در استوا و قطب نیروی کشش نخ بر حسب پارامترهای معلوم چقدر است؟

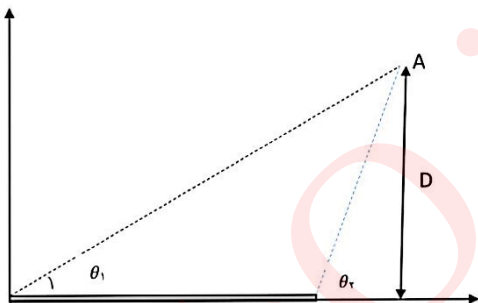
ت) در چه عرض جغرافیایی $\Delta\varphi$ بیشینه است؟

ث) مقدار عددی $R\omega^2/g$ را به دست آورید.

ج) در عرض جغرافیایی دلخواه θ تا مرتبه اول کمیت بدون بعد $R\omega^2/g$ ، $\Delta\varphi$ و نیروی کشش نخ را به دست آورید.

چ) تا مرتبه اول کمیت بدون بعد $R\omega^2/g$ ، عرض جغرافیایی که در آن زاویه انحراف $\Delta\varphi$ بیشینه است و نیز $(\Delta\varphi)_{\text{max}}$ را به دست آورید.

۳) الف) بار Q به طور یکنواخت بر روی میله‌ای به طول L توزیع شده است. مطابق شکل میله بر روی محور x قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در نقطه A را برحسب Q ، L و زوایای θ_1 و θ_2 به دست آورید.



ب) بار Q به طور یکنواخت بر روی صفحه مثلثی شکل ABC توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در راس A را برحسب بار کل، طول ضلع BC و زوایای B و C بیابید.

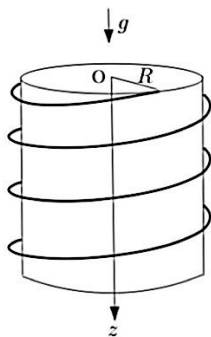
پ) بار Q به طور یکنواخت بر روی یک صفحه مربعی شکل توزیع شده است. نسبت پتانسیل الکتریکی در یک راس به پتانسیل الکتریکی در وسط یک ضلع مربع را به دست آورید.

ت) یک ضلعی منتظم بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. بار Q بر روی سطح N ضلعی به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز این N ضلعی به دست آورید.

راهنمایی:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C$$

مسئله ۴ - مهره و مارپیچ



مفتول نازک و بدون اصطکاک را دور استوانه قائمی به شعاع R پیچیده و سپس استوانه را در آورده‌ایم، به طوری که مفتول با خمی به معادلات $\rho = R$ و $f(\varphi) = 0$ در آن $z = Rf(\varphi)$ در مختصات استوانه‌ای توصیف می‌شود که در آن $f(0) = 0$. جهت مثبت محور z را رو به پایین و در جهت میدان گرانش گرفته‌ایم و شتاب گرانش g است. مهره کوچکی به جرم m بر روی مفتول به پایین سر می‌خورد. برای این مسئله دو گونه شرایط اولیه می‌توان گرفت. می‌توان فرض کرد که از نقطه $z = Rf_0$ و از حال سکون رها شده است و یا از نقطه $z = 0$ با سرعت اولیه v_0 به حرکت در آمده است. روشن است که این دو نوع شرط قابل تبدیل به هم هستند. نقطه O را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی بگیرد.

(آ) کمیت $\dot{\varphi}$ را بر حسب تابع f و مشتقات آن نسبت به φ و پارامترهای g, R و f_0 به دست آورید و آن را $u(\varphi)$ بنامید.

(ب) کمیت $\ddot{\varphi}$ را بر حسب تابع f و مشتقات آن نسبت به φ و پارامترهای g, R و f_0 به دست آورید و آن را $w(\varphi)$ بنامید.

(پ) نیروی N وارد شده از طرف مفتول به مهره را در مختصات دکارتی یا استوانه‌ای بر حسب کمیت‌های داده شده و توابع f, u و w از φ به دست آورید.

(ت) به ازای $f_0 = 0$ و $f = a\varphi$ که در آن a ضریب ثابتی است، تابع $\varphi(t)$ را به دست آورید. همچنین تابع z و بردار N را بر حسب زمان حساب کنید.

(ث) در یک حل خاص از معادله به دست آمده در قسمت آ می‌توان تابع $f(\varphi)$ و ثابت f_0 را طوری تعیین کرد که حلی با $\dot{\varphi}$ ثابت را امکان‌پذیر کند. این کار را انجام دهید و مقدار سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\varphi}$ مربوط به این حل را معین کنید. شرایط اولیه مناسب برای این حل خاص را تعیین کنید.

(ج) برای حل قسمت ث مختصات φ و z و بردار نیروی N از طرف مفتول را به صورت توابعی از زمان به دست آورید

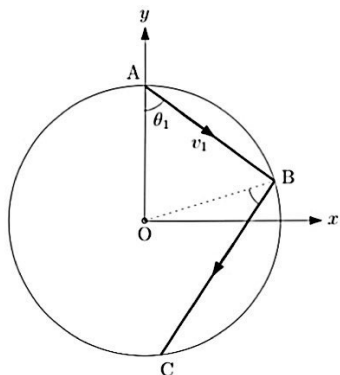
(چ) برای حالت کلی با تابع f دلخواه فرض کنید مفتول از $\varphi = 0$ شروع شده و n بار دور استوانه پیچیده شده باشد. عبارت معینی برای طول مفتول بر حسب تابع f به دست آورید.

(ح) با فرض ذکر شده در قسمت ج عبارت معینی برای زمان حرکت مهره بر روی مفتول از رها سازی تا خروج مهره از مفتول بر حسب تابع f به دست آورید.

(خ) برای تابع f به دست آمده در بخش ت جواب قسمت‌های ج و ح را حساب کنید.

یادآوری:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$



۵) یک میز افقی دایره‌ای ساکن به شعاع R دارای لبه‌ای با دیواره عمودی (به شکل استوانه) است. مطابق شکل، از نقطه A گلوله بسیار کوچکی با سرعت v_1 به سمت نقطه B پرتاب می‌شود. گلوله همواره روی سطح میز که آن را بدون اصطکاک فرض می‌کنیم حرکت می‌کند. اصطکاک بین گلوله و دیواره عمودی نیز در هنگام برخورد گلوله به دیواره قابل چشم‌پوشی است. برخورد گلوله به دیواره‌های میز غیرکشسان است به طوری ضریب برگشت برخورد گلوله با دیواره که در انتهای مسئله تعریف شده e است که $0 < e < 1$.

(آ) زاویه θ_1 بر حسب e چقدر باشد تا گلوله پس از سه برخورد با دیواره و طی یک مسیر چهار ضلعی، مانند $ABCD$ ، مجدداً به نقطه A برخورد کند.

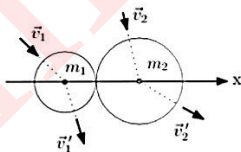
(ب) اندازه سرعت گلوله پس از برخورد به دیواره میز در نقاط B ، C و D را بر حسب v_1 و e به دست آورید.

(پ) زمان طی مسیر $ABCD$ را بر حسب R ، v_1 و e به دست آورید.

(ت) مختصات دکارتی نقاط B ، C و D را بر حسب R و e به دست آورید.

تعریف ضریب برگشت e : مطابق شکل زیر اگر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ سرعت‌های قبل از برخورد و $\vec{v}'_1$ و $\vec{v}'_2$ سرعت‌های بعد از

برخورد دو جسم m_1 و m_2 باشد

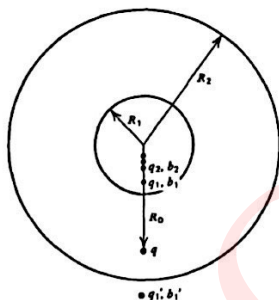


ضریب برگشت e به صورت زیر تعریف می‌شود که $\hat{i}$ بردار یکه در جهت محور x ، راستای عمود بر سطح تماس دو

جسم در لحظه برخورد، است.

$$\vec{v}'_1 \cdot \hat{i} - \vec{v}'_2 \cdot \hat{i} = -e(\vec{v}_1 \cdot \hat{i} - \vec{v}_2 \cdot \hat{i})$$

۶) فرض کنید بار نقطه‌ای q بین دو کره رسانای هم مرکز و به فاصله R_0 از مرکز کره‌ها قرار دارد. شعاع کره‌ها به ترتیب R_1 و R_2 است و هر دو به زمین متصل‌اند. می‌خواهیم با روش تصویر بارهای القا شده روی دو کره را به دست آوریم.



برای این که شرایط مرزی روی دو کره برآورده شوند باید تعداد بی‌نهایت بار نقطه‌ای تصویری در درون کره داخلی و بیرون کره بیرونی در نظر بگیریم. بار تصویری m ام در داخل کره کوچک‌تر را با q_n و فاصله آن تا مرکز کره‌ها را با b_n نشان می‌دهیم. همچنین بار تصویری n ام در بیرون کره بزرگ‌تر را با q'_n و فاصله آن تا مرکز کره‌ها را با b'_n نشان می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$q_{n+1} = f(R_1, b'_n) q'_n, \quad q'_{n+1} = g(R_2, b_n) q_n$$

$$b_{n+1} = h(R_1, b'_n), \quad b'_{n+1} = O(R_2, b_n)$$

که در آن f, g, h و O توابعی از کمیت‌های داخل پرانتز آن‌ها هستند. توجه کنید که در این روابط $q_0 = q'_0 = q$ و

$$b_0 = b'_0 = R_0.$$

آ) مقادیر توابع f, g, h و O را به دست آورید.

یادآوری: اگر بار الکتریکی نقطه‌ای q بیرون یک کره رسانا با شعاع R و به فاصله d از مرکز کره باشد و کره نیز به زمین متصل باشد، برای برقراری شرایط مرزی باید بار تصویری $Q = -q \frac{R}{d}$ را داخل کره در نظر بگیریم که به فاصله

$$D = \frac{R^2}{d} \text{ از مرکز کره است.}$$

ب) با توجه به بخش آ نشان دهید:

$$q_{n+1} - \beta(R_1, R_2)q_{n-1} = 0, \quad b_{n+1} - \gamma(R_1, R_2)b_{n-1} = 0$$

توانع $\beta(R_1, R_2)$ و $\gamma(R_1, R_2)$ را به دست آورید.

ج) جواب‌های توانی به صورت $q_n = A\lambda^n$ و $b_n = B\alpha^n$ را در نظر بگیرید. مقادیر λ و α را طوری پیدا کنید که معادلات بخش ب را برآورده کنند.

د) در بخش ج دو جواب برای هر کدام از λ و α به دست می‌آید. آنها را به ترتیب λ_1, λ_2 و α_1, α_2 می‌نامیم. در واقع جواب نهایی q_n و b_n به صورت ترکیب خطی زیر هستند:

$$q_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$$

$$b_n = B_1\alpha_1^n + B_2\alpha_2^n$$

ضرایب A_1, A_2, B_1, B_2 را با جایگزین کردن مقادیر q_n و b_n به ازای $n=1$ و $n=2$ به دست آورید.

ه) با توجه به بخش د تمام q_n ها و b_n ها را به دست آورید.

و) بار کل القا شده روی کره داخلی را به دست آورید.

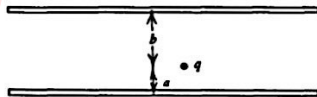
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}, \quad |a| < 1$$

توجه: برای

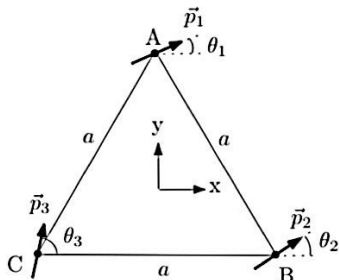
ز) با استفاده از نتایج بخش آ مقادیر q'_n و b'_n را به دست آورید.

ح) بار کل القایی روی کره بیرونی را به دست آورید.

ط) اگر به جای دو کره دو صفحه رسانای بی‌نهایت طولی داشته باشیم که به زمین متصل‌اند و بار نقطه‌ای q به فاصله a از یکی و فاصله b از دیگری مطابق شکل باشد، با توجه به بارهای کل القایی که روی دو کره به دست آورده‌اید، بار کل القایی روی هر یک از دو صفحه رسانا را برحسب a, b و q به دست آورید؟



(۷) مطابق شکل، سه دوقطبی الکتریکی در خلأ بر روی رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a قرار داده شده‌اند. اندازهٔ ممان دوقطبی هر سه دوقطبی یکسان و برابر p است. دوقطبی‌ها در صفحهٔ $x-y$ واقع‌اند و فقط امکان چرخش آزادانه حول محور عمود بر صفحهٔ $x-y$ دارند.



(آ) بردار میدان الکتریکی در هر رأس مثلث، ناشی از دوقطبی‌های واقع بر دو رأس دیگر مثلث را در مختصات دکارتی در وضعیتی که جهت قرارگیری دوقطبی‌ها دلخواه و با زاویه‌های θ_1 ، θ_2 و θ_3 مشخص شده است بنویسید که $i = 1, 2, 3$ به ازای $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$.

(ب) انرژی الکتریکی ناشی از برهم‌کنش دوقطبی‌ها، $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ، در وضعیت نشان داده شده در شکل را بر حسب کمیت‌های معلوم و زاویه‌های θ_1 ، θ_2 و θ_3 بنویسید و نتیجه را تا حد امکان ساده کنید. از خودانرژی دوقطبی‌ها صرف‌نظر کنید.

(پ) در وضعیت تعادل، $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ اکسترمم است. شرط لازم برای این که یک تابع سه متغیره مانند $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ در نقطه‌ای مانند $(\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})$ اکسترمم باشد این است که مشتق‌های جزئی در نقطهٔ مورد نظر صفر باشند یعنی به ازای $i = 1, 2, 3$ داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial \theta_i} \big|_{(\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})} = 0$. هنگام محاسبهٔ مشتق جزئی U نسبت به مثلاً متغیر θ_1 ، دو متغیر دیگر θ_2 و θ_3 را ثابت می‌گیریم. معادلاتی که از حل آن‌ها θ_{0i} های وضعیت تعادل مشخص می‌شوند به دست آورید و تا حد امکان ساده کنید.

(ت) معادلاتی که در قسمت قبل به دست آوردید جواب‌های متعددی دارند. به دستهٔ خاصی توجه می‌کنیم که برای آن‌ها $\cos(\theta_{02} + \theta_{03}) = 0$. این جواب‌ها را به دست آورید. در مواردی که حل معادلهٔ مثلثاتی که از آن θ_{0i} به دست می‌آید زمان‌بر است نوشتن شکل معادله کفایت می‌کند.

ث) وضعیت تعادل پایدار را علاوه بر حل تحلیلی از روی تقارن نیز می‌توان حدس زد. θ_{01} ، θ_{02} و θ_{03} مربوط به این وضعیت کدام‌اند؟

ج) اگر دوقطبی‌های $\vec{p}_1$ ، $\vec{p}_2$ و $\vec{p}_3$ را به ترتیب به اندازه بسیار کوچک δ_1 ، δ_2 و δ_3 از وضعیت تعادل پایدارشان منحرف کنیم حول حالت تعادل پایدار خود نوسان می‌کنند. $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ را تا مرتبه دوم این کمیت‌های کوچک حول حالت تعادل پایدار بسط دهید. مثلاً $\delta_1 \delta_2$ هم یک جمله مرتبه دوم است.

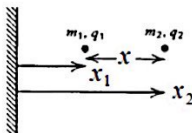
چ) انرژی جنبشی دورانی هر دوقطبی به صورت $\frac{1}{2} I \dot{\theta}_i^2$ است. گرچه بسامدهای زاویه‌ای نوسان‌های جفت‌شده قابل محاسبه هستند لکن برای راحتی فرض کنید دو تا از دوقطبی‌ها در وضعیت تعادل پایدار خود نگه داشته شده‌اند و بسامد زاویه‌ای نوسان سومین دوقطبی را حول وضعیت تعادل پایدارش بر حسب I و سایر کمیت‌های معلوم به دست آورید.

یادآوری:

میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی الکتریکی $\vec{p}$ واقع در مبدأ مختصات، در مکان $\vec{r}$ از فضا به صورت زیر است

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}.$$

۸) دو بار الکتریکی q_1 و q_2 با جرم‌های به ترتیب m_1 و m_2 یکدیگر را از طریق نیروی الکتریکی جذب (دفع) می‌کنند. مطابق شکل مکان‌های دو بار الکتریکی از یک نقطه ثابت با x_1 و x_2 و فاصله بین آنها با $x = x_2 - x_1$ نشان داده می‌شوند.



آ) شتاب‌های $\ddot{x}_1$ ، $\ddot{x}_2$ و $\ddot{x}$ را بر حسب q_1 ، q_2 ، m_1 ، m_2 و x به دست آورید.

ب) فرض کنید بارهای الکتریکی در $t=0$ به فاصله x_0 از یکدیگرند و از حالت سکون رها می‌شوند. سرعت نسبی $v = \frac{dx}{dt}$ را بر حسب q_1 ، q_2 ، m_1 ، m_2 و x_0 به دست آورید. توجه کنید که برای حالت‌های $q_1 q_2 > 0$ و $q_1 q_2 < 0$ جداگانه جواب را تعیین کنید.

ج) رابطه‌ای به دست آورید که مکان نسبی دو بار، x را بر حسب تابعی از زمان t بدهد. توجه کنید که برای حالت‌های $q_1 q_2 > 0$ و $q_1 q_2 < 0$ جداگانه جواب را تعیین کنید.

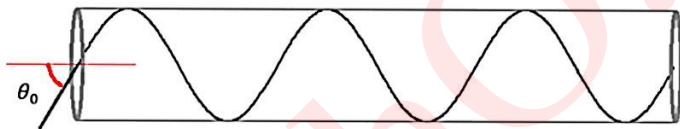
د) برای حالت $q_1 q_2 < 0$ ، در چه زمانی دو بار الکتریکی به هم برخورد می‌کنند؟

راه‌نمایی:

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

۹) در یک استوانه‌ی شیشه‌ای به شعاع R ضریب شکست، تابعی از فاصله تا محور، ρ ، است و ضریب شکست شیشه روی محور برابر n_0 است. اگر نور با زاویه θ نسبت به عمود بر قاعده استوانه وارد آن شود یک مسیر منحنی طی خواهد کرد. اگر یک پرتو خاص نور از خارج استوانه با زاویه‌ی θ_0 به محور آن برخورد کند، دارای مسیری است که معادله آن به صورت $\rho = R \sin\left(2\pi \frac{z}{L}\right)$ داخل استوانه است که L یک طول ثابت و z فاصله از ابتدای استوانه روی محور است. فرض کنید ضریب شکست هوا که تمام ناحیه‌ی خارج این استوانه با آن پر شده برابر با یک است.



الف) ضریب شکست را به صورت تابعی از فاصله از محور، $n(\rho)$ ، به دست آورید.

ب) زاویه‌ی تابش نور به محور، برای این پرتو، θ_0 ، چقدر است؟

پ) اگر زاویه‌ی تابش نور، به محور را تغییر دهیم، مسیر پرتوی داخل استوانه، چه خواهد بود؟ هم برای زوایای کمتر از θ_0 و هم برای زوایای بیشتر از آن، رابطه‌ی مسیر پرتو را به دست آورید.

ت) محدوده‌ی زاویه‌ی تابش نور به محور چقدر باشد، که پرتو نور، هرگز از سطوح جانبی استوانه خارج نشود؟

ث) چه شرطی برای استوانه (R, n_0) یا هر دو داشته باشیم، تا تمام پرتوهایی که به محور می‌تابند، هرگز از سطوح جانبی استوانه خارج نشوند؟