

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون ترکیبیات = بخش اول

چهارشنبه ۲۹ مرداد ۱۳۹۳ دبیران: رضایی، اسدی، جیل عاملی مدت زمان آزمون: ۲ ساعت

پرسشی نخست، محاکمه‌ی وزیر المپیاد! ۳۵ امتیاز

مجلس کشور شنگولستان، در پی حرکتی نادر، می‌خواهد وزیر المپیاد کشور را محاکمه کند! روش محاکمه به این صورت است که ابتدا اعداد $0, 1, 2, 3, \dots, 2^{2n}$ روی تخته نوشته می‌شود. سپس رئیس مجلس 2^{2n-1} عدد را از روی تخته پاک می‌کند. در مرحله‌ی بعدی، وزیر 2^{2n-2} عدد را از روی تخته پاک می‌کند. دوباره مجلس 2^{2n-3} عدد را از روی تخته پاک می‌کند و بازی همین‌طور ادامه پیدا می‌کند. پس از $2n$ حرکت، بازی تمام می‌شود و ۲ عدد روی تخته باقی می‌ماند. وزیر باید به اندازه‌ی اختلاف ۲ عدد باقی‌مانده، به مجلس جریمه پردازد. رئیس مجلس، خود یک المپیادی قهار بوده است و صرفن به خاطر مسائل رقابتی دوران جوانی، این محاکمه را به راه انداخته است. وزیر المپیاد کشور نیز، یک المپیادی بسیار باهوش است. بنابراین هر ۲ فرد، بهترین بازی ممکن را انجام می‌دهند. در پایان بازی وزیر چند تومان به مجلس خواهد پرداخت؟

پرسشی دوم، عشق و ترکیبیات! ۳۵ امتیاز

فرض کنید n ، عددی طبیعی باشد. تعداد بیت‌های ۱ عدد n در نمایش دودویی را $f(n)$ می‌نامیم؛ مثلاً $f(5) = 2$. هم‌چنین تعداد اعداد صحیح $0 \leq r \leq n$ ، که $\binom{n}{r}$ ، عددی فرد است را $g(n)$ می‌نامیم؛ مثلاً $g(5) = 4$. ثابت کنید:

$$g(n) = 2^{f(n)}$$

پرسشی سوم، ارباب حلقه‌ها! ۳۵ امتیاز

(ا) فرض کنید n یک عدد طبیعی فرد باشد. ۲ مربع لاتین متعامد (عمود بر هم) از مرتبه‌ی n مثال بزنید. (۱۵ امتیاز)

(ب) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. گراف $K_{n,n}$ را در نظر بگیرید. یک رنگ‌آمیزی یالی معتبر از آن را، رنگارنگ می‌گوییم اگر بتوان یال‌های گراف را به n تطابق کامل افراز کرد؛ طوری که هر تطابق از هر رنگ، دقیقن یک یال داشته باشد.

ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n ، گراف $K_{n,n}$ یک رنگ‌آمیزی یالی معتبر با n رنگ دارد که رنگارنگ باشد. (۲۰ امتیاز)