اهداف

شما بعد از مطالعهٔ این فصل باید بتوانید:

- مجموعه را بشناسید.
- هر مجموعه را با نوشتن عضوها، یا نماد ریاضی مشخص کنید.
- عملگرهای بین مجموعه‌ها را بشناسید و در محاسبات جبر مجموعه‌ها مهارت کسب کنید.
- با کمک نمودار وِن، مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنید.
- پیشامد تصادفی را بشناسید و احتمال رخداد بعضی از پیشامدها را محاسبه کنید.

تاریخ ریاضیات

جورج کانتور (۱۸۴۵ م– ۱۹۱۸م)

پایه‌های اصلی نظریهٔ مجموعه‌ها توسط ریاضیدان آلمانی به نام جورج کانتور پایه گذاری شده است. بیشتر ریاضیدانان بر این عقیده‌اند که نظریهٔ مجموعه‌ها پایهٔ ریاضیات مدرن است. منطق ریاضی (Logic) که پایهٔ علوم مهندسی و به ویژه کامپیوتر است، حیات خود را مدیون تلاش‌های کانتور می‌داند.

مقدمه

مفهوم مجموعه در ریاضیات، مفهومی اساسی به شمار می‌آید. مجموعه‌ها تقریباً در هر شاخه‌ای از ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند. وقتی در حال مطالعهٔ ریاضیات هستیم، مجموعه‌ها در یک قدمی ما قرار دارند. هر ساختاری در ریاضیات را می‌توان به شکل مجموعه‌ای از اجزای تشکیل دهندهٔ آن در نظر گرفت. مثلاً وقتی در مورد بخش‌پذیری اعداد و خواص آن مطالعه می‌کنیم، با مجموعهٔ اعداد صحیح و چهارعمل اصلی روبرو هستیم. وقتی هندسه مطالعه می‌کنیم با مجموعه‌ای از شکل‌ها سر و کار داریم که هر شکل، خود مجموعه‌ای از نقاط یا خطوط هستند. در واقع مجموعه، زبان مشترکی است که می‌توان با آن، در مورد هر موضوعی از ریاضیات گفتگو کرد. بنابراین یادگیری مفهوم مجموعه‌ها و خواص آن باعث خواهد شد تا ما هر موضوع مختلف ریاضی و مسائل مربوط به آن را با زبان گویاتری بشناسیم و بیان کنیم.

۱. مجموعه چیست؟

ما انسانها ناخودآگاه تمایل داریم که اشیاء را در ذهنمان دسته بندی کنیم تا به دنیای اطرافمان نظم و ترتیب بدهیم. فرض کنید فردی از شما بپرسد به کدام گروه یا دسته تعلق دارید؟ آیا شما خود را متعلق به گروه دانش آموزان معرفی می‌کنید؟ یا در مورد زادگاهتان حرف می‌زنید؟ در مورد گروه خونی که به آن متعلق هستید چه؟ ذهن ما مشخصات یک چیز را بدون دسته بندی اشیاء نمی‌تواند پیدا کند. به همین دلیل در گفتگوهای روزانه معمولاً جملاتی به کار می‌بریم که مفاهیمی از نوع «گروه»، «دسته» و یا «خانواده» در آن دیده می‌شوند: گروهی از

کوهنوردان ایرانی، دستهٔ نادری از پروانه‌های لطیف بال و یا خانوادهٔ گیاهان دارویی. «مجموعه» کلمه‌ای است که در ریاضی به جای مفهوم گروه، دسته و یا خانواده به کار می‌بریم. مثلاً می‌گوییم:

«همهٔ گیاهان دارویی یک **مجموعه** تشکیل می‌دهند و رازیانه **عضو** این مجموعه است».

برای اینکه مجموعه را بهتر بشناسید، به مثال زیر توجه کنید.

مثال:

نام هر یک از **بستگان** خود را روی یک کاغذ بنویسید.

بهزاد هم سعی کرد نام همهٔ بستگان خود را بنویسد، امّا دچار تردید شد. او شوهر خاله‌ای به نام آقا بابک دارد. بهزاد تردید دارد که اگر بخواهد نام آقا بابک را بنویسد، آیا خویشاوندان آقا بابک را هم باید بنویسد یا خیر.

مثال:

نام هر یک از **بستگان درجهٔ یک** خود را بنویسید.

تعریف **بستگان درجهٔ یک** روشن است و از پدر، مادر، خواهر(ها) و برادر(ها) تشکیل شده است. حالا بهزاد به این سؤال که آیا آقا بابک و خویشاوندانش **عضو** بستگان درجهٔ یک من هستند یا خیر، جواب روشنی دارد: **خیر**. اگر بهزاد همین سؤال را در مورد هر فرد دیگری بپرسد، پاسخی روشنی برای آن وجود دارد. بنابراین **بستگان درجهٔ یک** بهزاد، یک **مجموعه** است.

نکته:

وقتی مجموعه بودن را مورد بررسی قرار می‌دهیم، عضو بودن یا عضو نبودن هر چیزی می‌تواند مورد سؤال قرار گیرد. اگر در مورد هر یک از این سؤال‌ها یک جواب روشن (فقط آری یا فقط نه) وجود داشته باشد، با یک «مجموعه» روبرو هستیم.

بعضی از جملات می‌توانند یک مجموعه را مشخص کنند. یعنی خاصیتی را بیان می‌کنند که تعریف روشنی دارد و می‌توان بدون تردید مشخص کرد که هر چیزی آن خاصیت را دارد یا ندارد. در مثال زیر می‌خواهیم بدانیم کدام جمله یک مجموعه را مشخص می‌کند.

مثال:

الف) **همهٔ چندضلعی‌هایی که بیشتر از ۵تا قطر دارند.** این جمله یک مجموعه را مشخص می‌کند. زیرا با رسم همهٔ قطرهای یک چندضلعی، تردیدی باقی نمی‌ماند که بیشتر از ۵تا (یعنی ۶ یا بیشتر) قطر دارد یا خیر. مثلاً یک مربع عضو این مجموعه نیست چون ۲ تا قطر

دارد. پنج ضلعی هم عضو این مجموعه نیست، زیرا یک پنج ضلعی دقیقاً ۵ تا قطر دارد که بیشتر از ۵ نیست. امّا یک شش ضلعی چون ۹ تا قطر دارد عضو این مجموعه است.

ب) **همهٔ کلمات سه حرفی که در جملهٔ زیر نوشته شده است:**

«عدد سه، یک عدد فرد است»

کلمهٔ سه حرفی تعریف مشخصی دارد. پس این جمله هم یک مجموعه را مشخص می‌کند. مثلاً «سه» یک کلمهٔ دو حرفی است، پس «سه» عضو این مجموعه نیست. ولی «عدد» یک کلمهٔ سه حرفی است و عضو این مجموعه است.

ج) **همهٔ دانش‌آموزان قدبلندی که هم‌کلاسی شما هستند.** این جمله نمی‌تواند یک مجموعه را مشخص کند. زیرا تردید داریم به چه کسی قد بلند گفته می‌شود و چه کسی قد بلند به شمار نمی‌آید. یعنی قدبلند بودن تعریف روشنی ندارد. آیا می‌دانستید میانگین قد در اندونزی ۱٫۵۸ متر و در هلند ۱٫۸۳ متر است؟ یعنی ممکن است شما که در کلاس خود قد کوتاهی دارید، در اندونزی قدبلند محسوب شوید.

د) **همه میوه‌هایی که فقط یک هسته دارند.** خیلی از میوه‌هایی که می‌شناسیم فقط یک هسته دارند. مثلاً هلو، زردآلو، آلبالو، عنبه و غیره. پس به نظر می‌آید با شمردن هسته‌های یک میوه می‌توان بدون تردید پاسخ داد که آیا یک هسته دارد یا خیر. ولی آیا فندق یک هسته دارد یا قسمت خوراکی آن، هسته به شمار نمی‌آید؟ نگران نباشید علم زیست شناسی به این تردید پاسخ می‌دهد و می‌گوید که فندق یک هسته دارد. در نتیجه میوه‌های تک هسته یک مجموعه تشکیل می‌دهند.

ه) گلدباخ ریاضیدان آلمانی حدس زد که «هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت». به هر عدد زوجی که حدس گلدباخ برای آن درست است، عدد گلدباخ می‌گوییم. مثلاً ۶، ۱۲ و ۱۰۰ از اعداد گلدباخ هستند:

$$۶=۳+۳ \qquad ۱۲=۵+۷ \qquad ۱۰۰=۳+۹۷=۱۱+۸۹=۱۷+۸۳=\ldots$$

این حدس تا زمان نوشتن این کتاب هنوز به اثبات نرسیده است. آیا همهٔ اعداد زوج بزرگتر از ۲ که حدس گلدباخ برای آنها درست است، یک مجموعه تشکیل می‌دهد؟ آیا عدد زوج بسیار بزرگی وجود دارد که حدس گلدباخ برای آن نادرست باشد؟ با اینکه پاسخ این سؤال را نمی‌دانیم و همهٔ اعداد گلدباخ را نمی‌شناسیم، ولی همهٔ اعداد گلدباخ یک مجموعه تشکیل می‌دهند. زیرا برای هر عدد زوج یقین داریم که یا گلدباخ هست یا نیست.

نماد عضویت

تعریف:

معمولاً هر مجموعه را با یک حرف بزرگ (انگلیسی) نام گذاری می‌کنیم و به جای اینکه بگوییم « x عضو مجموعهٔ A است» می‌نویسیم:

$$x \in A$$

و برای اینکه بگوییم « x عضو مجموعهٔ A نیست» می‌نویسیم:

$$x \notin A$$

در متون مختلف ممکن است به جای جملهٔ « x عضو مجموعهٔ A است» هر یک از جملات زیر به کار رود که معنی یکسانی دارند:

۱) «مجموعهٔ A شامل x است». مثال: مجموعه رنگ‌های پرچم ایران، شامل رنگ سبز است.

۲) «مجموعهٔ A ، x را دارد». مثال: مجموعه شمارنده‌های هر عددی، عدد ۱ را دارد.

۳) « x در مجموعهٔ A قرار دارد». مثال: $\frac{1}{2}$ در مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک قرار دارد.

۴) « x به مجموعهٔ A تعلّق دارد». مثال: ۱۳۹۹ به مجموعه اعداد اول تعلق دارد.

تست:

فرض کنید مجموعهٔ A شامل همهٔ کلمات فارسی است که نوشتاری بدون نقطه دارد. کدام یک از جملات زیر درست است؟

الف) نقطه $\notin A$ ب) عدد در A قرار دارد. ج) A هیچ را ندارد.

۱) هیچکدام ۲) فقط ب ۳) فقط ب و ج ۴) الف و ب و ج

پاسخ:

کلمهٔ «نقطه» نقطه دارد. پس عضو مجموعهٔ A نیست و الف درست است. کلمهٔ «عدد» نقطه ندارد، پس عضو مجموعهٔ A است و ب درست است. کلمهٔ «هیچ» نقطه دارد، پس عضو مجموعهٔ A نیست و ج درست است. پس گزینهٔ ۴ درست است.

مجموعهٔ تهی

بعضی از جملات خاصیتی را بیان می‌کنند که بدون تردید «هیچ چیزی» آن خاصیت را ندارد. مثلاً:

همهٔ اعداد زوجی که فرد باشند.

بدون تردید هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که هم زوج و هم فرد باشد. یعنی در مورد «عضو نبودن» هیچ عددی تردید نداریم. پس ما با یک **مجموعه** روبرو هستیم که هیچ عضوی ندارد.

تعریف:

به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد «مجموعهٔ تُهی» می‌گوییم و آن را با $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

الف) **مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویهٔ باز دارند.** زاویهٔ باز، زاویه‌ای است که بیش از ۹۰ درجه باشد. پس هیچ مثلثی نمی‌تواند دو زاویهٔ باز داشته باشد. زیرا با وجود زاویهٔ سوم، مجموع زاویه‌های داخلی بیشتر از $۲\times۹۰=۱۸۰$ درجه خواهد شد که تناقض است. پس این مجموعه تهی است.

ب) **مجموعهٔ کوچکترین عدد گویایی که مثبت است.** بین اعداد گویای مثبت، کوچکترین وجود ندارد. زیرا با فرض اینکه عدد x کوچکترین عدد گویای مثبت باشد، $\frac{x}{۲}$ نیز عدد گویای مثبتی است که از x نیز کوچکتر است و با کوچکترین بودن x تناقض دارد. اگر این مجموعه را با A نمایش دهیم، پس $A=\varnothing$ است.

ج) فرض کنید B برابر با **مجموعهٔ بزرگترین عدد طبیعی** است. اگر B عضوی مانند x داشته باشد، یعنی x بزرگترین عدد طبیعی است. امّا $x+۱$ باید بزرگتر از x باشد که با بزرگترین بودن x در تناقض است. بنابراین B هیچ عضوی نباید داشته باشد تا به تناقض نرسیم. پس $B=\varnothing$ است.

تست:

کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی نیست؟

۱) مجموعه مثلث‌هایی که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۲۰۰ درجه است.

۲) مجموعه خط‌هایی که از سه رأس یک مثلث عبور می‌کنند.

۳) مجموعهٔ کوچکترین عدد حسابی.

۴) مجموعهٔ کوچکترین عدد صحیح.

پاسخ:

مجموع زاویه‌های داخلی هیچ مثلثی، ۲۰۰ درجه نیست. پس گزینهٔ ۱ تهی است. سه رأس یک مثلث روی یک خط قرار ندارد. پس گزینهٔ ۲ نیز تهی است. کوچکترین عدد صحیح نیز وجود ندارد. پس گزینهٔ ۴ نیز تهی است. امّا کوچکترین عدد حسابی، عدد ۰ است. پس این مجموعه یک عضو دارد و آن عدد ۰ است و تهی نیست. گزینهٔ ۳ درست است.

تمرین

۱- کدام یک از بندهای زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند و کدام نه؟

الف) همهٔ روزهای خوب هفته است.

ب) همهٔ حروف الفبای فارسی که می‌توانند به تنهایی در یک جمله به کار رود.

ج) قدبلندترین فرد خانوادهٔ شما.

د) عددی که از خودش بزرگتر است.

ه) همهٔ اعدادی که از قرینهٔشان کوچکترند.

و) همهٔ اعدادی که مساوی با قرینه‌شان هستند.

ز) سه تا از بلندترین قله‌های کرهٔ زمین.

ح) سه تا از معروف‌ترین بازیگران سینمای ایران.

ط) همهٔ کلمات این کتاب.

ی) همهٔ حیوانات خطرناک کرهٔ زمین.

۲- ابتدا برای هر یک از مجموعه‌های زیر یک نام انتخاب کنید و سپس با نوشتن یک تساوی (مثل $X=\varnothing$) نشان دهید کدام یک از مجموعه‌ها تهی و کدام ناتهی ($X\neq\varnothing$) است.

الف) مجموعهٔ مثلث‌هایی که فقط دو زاویهٔ باز دارند.

ب) مجموعهٔ مثلث‌هایی که فقط دو زاویهٔ تند دارند.

ج) مجموعهٔ مثلث‌هایی که هیچ زاویهٔ بازی ندارند.

د) مجموعهٔ چهارضلعی‌هایی که هیچ دو ضلع موازی ندارند.

ه) مجموعهٔ چهارضلعی‌هایی که هر چهار زاویهٔ داخلی آن تند است.

۳- با استفاده از نماد $\in$ و $\notin$ مشخص کنید هر یک از اعداد سمت چپ، عضو کدام یک از مجموعه‌های سمت راست هست و عضو کدام نیست.

A = مجموعه اعداد صحیح زوج.	۰
B = مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از یک.	۲
C = مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از صفر.	۱۱
D = مجموعه اعداد اول یک رقمی.	−۲

۴- آیا $\circ \in \varnothing$ است؟ چرا؟

۲. نمایش یک مجموعه

نوشتن عضوها

برای اینکه یک مجموعه را معرفی کنیم، ممکن است بتوانیم همهٔ عضوهای آن را بنویسیم. برای این منظور، عضوهای آن را بین دو علامت آکولاد یعنی «{ }» قرار می‌دهیم و هر عضو را با یک علامت مانند « , » از هم جدا می‌کنیم. مثلاً فرض کنید A برابر با مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ باشد. آنگاه می‌نویسیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ است.

نکته:

مجموعهٔ تهی عضوی ندارد. پس مجموعهٔ تهی را می‌توان با $\{\ \}$ نشان داد. یعنی $\{\ \}=\varnothing$ است.

مجموعه و ترتیب اعضا

کاوه دانش‌آموز پایهٔ نهم است و **عضو** کلاس «الف» می‌باشد. معلم ریاضی برای حضور و غیاب، دانش‌آموزان را به ترتیب نام خانوادگی می‌خواند و کاوه نفر نهم است. ولی معلم ورزش، دانش‌آموزان را به ترتیب قد مرتب کرده است و کاوه نفر بیستم می‌باشد. در هر دو صورت، کاوه عضو کلاس «الف» است. این نشان می‌دهد که با جابجا کردن ترتیب نوشتن اعضای یک مجموعه، آن مجموعه تغییر نمی‌کند.

نکته:

اگر ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه را تغییر دهیم، آن مجموعه تغییری نمی‌کند. یعنی اگر مجموعهٔ A فقط با تغییر ترتیب نوشتن اعضای مجموعهٔ B بدست آید، آنگاه این دو مجموعه با هم برابرند و می‌نویسیم $A=B$.

مثال:

الف) مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ با $\{۵,۴,۳,۲,۱\}$ برابر است. زیرا فقط ترتیب نوشتن عضوها تغییر کرده است.

ب) مجموعه حروف کلمهٔ «تراکم» و مجموعه حروف کلمهٔ «مارکت» با هم برابر است. یعنی {ت، ر، ا، ک، م }={ م، ا، ر، ک، ت }

مثال:

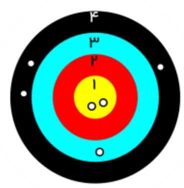
با توجه به تساوی‌های زیر مقدار a، b و c را پیدا کنید.

$$\{۱, a, b, ۷\} = \{۲, ۳, ۷, c\} = \{a, ۷, ۱, ۳\}$$

پاسخ: از برابری مجموعه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که فقط ترتیب نوشتن عضوها تغییر کرده است. مثلاً همانطور که عدد ۱ عضو $\{۱, a, b, ۷\}$ است، پس $\{۲, ۳, ۷, c\}$ هم ۱ را دارد. بنابراین $c = ۱$ است. چون $۲ \in \{۲, ۳, ۷, c\}$ پس $۲ \in \{a, ۷, ۱, ۳\}$ است. بنابراین $a = ۲$ است. در نتیجه $\{۱, a, b, ۷\} = \{۱, ۲, b, ۷\}$ است که نشان می‌دهد $b = ۳$ است.

مجموعه و تکرار اعضا

در یک مسابقهٔ تیراندازی، کاوه شش تیر انداخت. او بعد از هر شلیک ناحیهٔ اصابت گلوله را در یک مجموعه نوشت: $A = \{۴, ۴, ۱, ۳, ۱, ۴\}$



مربی کاوه از او خواست تا مجموعه ناحیه‌هایی که او هدف قرار داده است، نشان دهد. در واقع برای مربی فقط این مهم بود که کدام ناحیه مورد اصابت گلوله قرار گرفته و نه چند بار. کاوه در پاسخ مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۴\}$ را نشان داد.

نکته:

اگر در نوشتن اعضای یک مجموعه عضوی را بیش از یک بار بنویسیم، مجموعه تغییر نمی‌کند. تکراری نوشتن اعضای یک مجموعه، اهمیتی در عضویت آنها ندارد.

مثال:

الف) مجموعه حروف کلمهٔ «فشفشه» یک مجموعهٔ ۳ حرفی است. یعنی { ف، ش، ه } = { ف، ش، ف، ش، ه } است.

ب) مجموعه ارقام عدد ۱۳۹۹ یک مجموعهٔ ۳ عضوی است: $\{۱, ۳, ۹\} = \{۱, ۳, ۹, ۹\}$

مثال:

کلیدهایی یک کاربر رایانه برای نوشتن جملهٔ « mississippi is necessary » فشار می‌دهد را مجموعهٔ T می‌نامیم.

الف) مجموعه‌ی T چند عضوی است؟

پاسخ: $T=\{m,i,s,p,n,e,c,a,r,y,-\}$ است که در آن – نمایش کلید «فاصله» است. پس T یک مجموعهٔ ۱۱ عضوی است.

ب) در مورد اولین و آخرین عضو مجموعهٔ T کدام گزینه درست است؟

۱) $\{m,y\}$ ۲) $\{m,-\}$ ۳) $\{a,y\}$ ۴) یک مجموعه مشخص نمی‌کنند.

پاسخ: برای اعضای یک مجموعه، ترتیب وجود ندارد. بنابراین اولین و آخرین عضو یک مجموعه تعریف مشخصی ندارد و هر عضوی می‌تواند اولین یا آخرین باشد. پس گزینه ۴ درست است.

مجموعه‌ای عضو یک مجموعه

اعضای یک مجموعه می‌تواند از هر نوعی باشند. در واقع به دنبال آن نیستیم که خاصیت مشترکی بین اعضای یک مجموعه پیدا کنیم و فقط عضویت مهم است. به شکل زیر توجه کنید.

هرآنچه که روی میز بالا قرار دارد را مجموعهٔ A می‌نامیم. می‌توانیم فرض کنیم روی میز بالا ۲ چیز وجود دارد:

۱- منوی غذایی که خود یک مجموعهٔ است و مساوی با { کباب، خوراک مرغ، فسنجان } می‌باشد.

۲- خوراک مرغ.

بنابراین $A=\{$ { کباب، خوراک مرغ، فسنجان } ،خوراک مرغ$\}$ و نشان می‌دهد A یک مجموعهٔ ۲ عضوی است. ولی نکتهٔ مهم این است که $A \notin$ فسنجان و $A \notin$ کباب، زیرا روی میز غذای فسنجان یا کباب برای خوردن وجود ندارد!

مثال:

الف) می‌دانیم $\varnothing$ یک مجموعه است که می‌تواند عضو یک مجموعه باشد. مثلاً مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای است که یک عضو دارد:

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

تست:

کدام یک از مجموعه‌های زیر، تهی است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{\{\ \}\}$ ۳) 0 ۴) هیچکدام

پاسخ: $\{0\}$ مجموعه‌ای یک عضوی است که شامل عدد ۰ است. $\{\{\ \}\}$ مجموعه‌ای یک عضوی است که شامل مجموعهٔ تهی یا همان $\{\ \}$ است. در واقع $\varnothing \in \{\{\ \}\}$ است. عدد ۰ که اصلاً یک مجموعه نیست. پس گزینهٔ ۴ درست است.

توصیف عضوها

نوشتن همهٔ عضوهای یک مجموعه ممکن است کار آسانی نباشد و یا حتّی غیر ممکن باشد. در این صورت با بیان یک یا چند خاصیت، عضوهای آن مجموعه را مشخص می‌کنیم. این توصیف باید طوری باشد که فقط اعضای مجموعهٔ مورد نظر را مشخص کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال:

الف) A مجموعه کشورهای همسایهٔ ایران است که خاک مشترک دارند. می‌توانیم به سادگی این مجموعه را با نوشتن اعضای آن مشخص کنیم:

$A = \{$ افغانستان، پاکستان، آذربایجان، ترکمنستان، ترکیه، عراق، ارمنستان $\}$

ب) B مجموعهٔ همهٔ کشورهای جهان است. در سال ۲۰۲۰ میلادی تعداد ۱۹۵ کشور در جهان ثبت شده است. نوشتن همهٔ آنها کار آسانی نیست. امّا غیرممکن هم نیست.

ج) C مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱ است. نوشتن همهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱ غیر ممکن است. زیرا بین هر دو عدد گویا که تا به حال نوشته‌ایم، می‌توان عدد گویای دیگری پیدا کرد (مثلاً میانگین) که تا به حال ننوشته‌ایم! به همین دلیل برای معرفی این مجموعه، به توصیف اعضای آن اکتفا می‌کنیم.

دیدیم که برای بعضی مجموعه‌ها نوشتن همهٔ اعضا کار آسانی نیست. برای اینکه نوشتن عضوها را خلاصه کنیم از نماد سه نقطه (...) استفاده می‌کنیم. سه نقطه (...) به جای عضوهایی نانوشته قرار می‌گیرد که الگوی عضوهای نوشته شده را ادامه می‌دهند. شرط استفاده از این نماد این

است که بدانیم این مجموعه چه اعضایی دارد و چه چیزی عضو آن نیست. به همین دلیل سعی می‌کنیم با نوشتن چند عضو از این مجموعه، الگویی را نمایش دهیم که بهتر بتواند اعضای مجموعه را مشخص کند.

مثال:

الف) اگر بدانیم A مجموعه حروف فارسی است، می‌توانیم بنویسیم، $A=\{$ ی، ه، ...، ج، ب، الف $\}$ است.

ب) مجموعه اعداد صحیح را می‌توانیم به صورت $\mathbb{Z}=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,۳,-۳,...\}$ بنویسیم.

ج) اگر بدانیم B مجموعه اعداد طبیعی مربع کامل است، می‌توانیم بنویسیم $B=\{۱,۴,۹,...\}$ است.

تست

مجموعهٔ $\{۲^{۱۳۹۸}+۲,۲^{۱۳۹۸}+۴,۲^{۱۳۹۸}+۶,...,۲^{۱۳۹۹}\}$ چند عضو دارد؟

۱) $۲^{۱۳۹۷}$ ۲) $۲^{۱۳۹۸}$ ۳) $۲^{۶۹۹}$ ۴) ۶۹۹

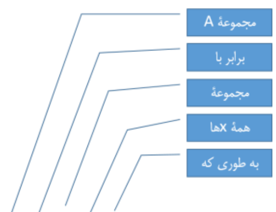
پاسخ: اگر عضوهای این مجموعه از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند، به ترتیب یک عدد زوج با $\boxed{۲^{۱۳۹۸}}$ جمع شده است. از طرفی:

$$۲^{۱۳۹۹}=۲\times۲^{۱۳۹۸}=\boxed{۲^{۱۳۹۸}}+۲^{۱۳۹۸}$$

حالا باید ببینیم $۲^{۱۳۹۸}$ چندمین عدد زوج است که برای همین $۲^{۱۳۹۸}$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم که جواب $۲^{۱۳۹۷}$ است. پس گزینهٔ ۱ درست است.

نماد ریاضی

وقتی می‌خواهیم یک مجموعه را مشخص کنیم، می‌توانیم به توصیف اعضای آن بپردازیم. این توصیف می‌تواند یک قالب استاندارد داشته باشد که در آن از کلمات مشابهی استفاده می‌شود. هر یک از این کلمات مشابه را با نمادی به صورت زیر نشان می‌دهیم که به آن نمایش یک مجموعه با نماد ریاضی می‌گوییم:



$$A = \{ x \mid \text{یک عدد فرد است } x \}$$

در این الگو، x به جای هر عضوی نوشته می‌شود که در حال توصیف آن هستیم. علامت« $|$ » نیز به جای عبارت «که» یا «به طوری‌که» یا «به شرطی که» قرار می‌گیرد. در پایان، عضوها را توصیف می‌کنیم. مثلاً مجموعه اعداد زوج طبیعی را می‌توانیم با سه روش زیر نشان دهیم:

نوشتن عضوها	توصیف عضوها	نماد ریاضی
$\{۲,۴,۶,۸,۱۰,...\}$	مجموعه اعداد طبیعی که مضرب ۲ است.	$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{مضرب ۲ است } x\}$

در روشی که با نماد ریاضی نوشته‌ایم، جملهٔ توصیفی « x مضرب ۲ است» وجود دارد. می‌خواهیم این جمله را نیز با نمادهای ریاضی بیان کنیم تا به زبان ریاضی نزدیکتر شود. می‌دانیم هر مضرب ۲ برابر با حاصلضرب عدد ۲ در یک عدد طبیعی مانند n است:

$$x = ۲n \,, n \in \mathbb{N}$$

بنابراین مجموعه‌ی اعداد زوج را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{مضرب ۲ است } x\} = \{۲n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

در این نمایش از مجموعه اعداد زوج، جملات توصیفی جای خود را به نمادهای ریاضی داده است.

مثال:

الف) $\{۳\times ۱, ۳\times ۲, ۹, ۱۲, ۱۵, ...\} = \{۳n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ب) $\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ...\} = \{n \times (n+۱) \mid n \in \mathbb{N}\}$

ج) مجموعهٔ $A = \{۹, ۹۹, ۹۹۹, ۹۹۹۹, ...\}$ شامل همهٔ اعداد طبیعی است که فقط با رقم «۹» نوشته می‌شوند. همهٔ این اعداد یکی کمتر از اعداد $۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰, ...$ هستند. پس $A = \{۱۰^x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$ است.

د) مجموعهٔ $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$ شامل همهٔ شمارنده‌های عدد ۱۲ است. یک شمارندهٔ ۱۲، عددی است که اگر ۱۲ را به آن تقسیم کنیم، حاصل یک عدد طبیعی است. پس $B = \left\{x \mid \frac{۱۲}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ است.

تمرین

۱- کدام یک از توصیف‌های زیر، مجموعهٔ $\{۲,۴,۶,۸\}$ را مشخص می‌کند؟

الف) چهار عدد زوج متوالی　　　ب) اعداد زوج کمتر از ۱۰

ج) اعداد زوج بین ۱ تا ۹　　　د) چهار مضرب متوالی عدد ۲

۲- مجموعه‌های زیر را یک بار با «نوشتن عضوها» و یک بار با «نماد ریاضی» مشخص کنید:

الف) مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۰　　　ب) مجموعه اعداد طبیعی فرد و کمتر از ۲۰۰

ج) مجموعه روزهای هفته.

د) مجموعه اعداد صحیح زوج که مضرب ۳ هستند.

ه) مجموعه اعداد صحیح زوج که مضرب ۳ نیستند.

و) مجموعه اعداد صحیح فرد که مضرب ۳ نیستند.

ز) مجموعه اعداد طبیعی که مجموع ارقام هر یک از آنها ۱ است.

ح) مجموعه اعداد صحیحی که فاصلهٔ هر یک از آنها تا صفر، کمتر از ۱۰ است.

ط) مجموعه کسرهایی که صورت و مخرج آنها دو عدد طبیعی متوالی است.

۳- مجموعه‌های زیر را که با نوشتن عضوها مشخص شده‌اند، با نماد ریاضی نشان دهید.

الف) $\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$　　　ب) $\{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳\}$　　　ج) $\{۵۵,۵۰,۴۵,\dots,۵\}$

د) $\left\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱,\dots\right\}$　　　ه) $\{۰,۷,۲۶,۶۳,۱۲۴,\dots\}$

و) $\{۲,۱۱,۱۰۱,۱۰۰۱,\dots\}$　　　ز) $\{۰/۱,۰/۱۱,۰/۱۱۱,\dots\}$　　　ح) $\{۰/۴,۰/۴۴,۰/۴۴۴,\dots\}$

ط) $\left\{۱,۲,\frac{۱}{۲},۳,\frac{۱}{۳},۴,\frac{۱}{۴},\dots\right\}$　　　ی) $\left\{۱,\frac{۱}{۲},۳,\frac{۱}{۴},۵,\frac{۱}{۶},\dots\right\}$　　　ک) $\{\{۱\},۱,\{۲\},۲,\{۳\},۳,\dots\}$

ل) $\{-۱,۲,-۳,۴,-۵,\dots\}$　　　م) $\{-۱,۲,-۴,۸,\dots\}$

۴- حداکثر پنج عضو برای هر یک از مجموعه‌های زیر بنویسید.

الف) $\{x\in\mathbb{N} \mid x^۲<۱۰\}$　　　ب) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۲-۱=۸\}$　　　ج) $\{x \mid -x\in\mathbb{N}\}$

د) $\left\{\frac{۱}{x} \,\middle|\, -x\in\mathbb{N}\right\}$　　　ه) $\{x\in\mathbb{N} \mid ۳\sqrt{x}<۲۰\}$　　　و) $\{x \mid x^۲\in\mathbb{N}\}$

ز) $\{x^۲ \mid x\in\mathbb{N}\}$　　　ح) $\left\{۲x \,\middle|\, \frac{x}{۳}\in\mathbb{N}\right\}$　　　ط) $\left\{\frac{x}{۳} \,\middle|\, ۲x\in\mathbb{N}\right\}$

ی) $\{x\in\mathbb{N} \mid x^۲<۰\}$　　　ک) $\left\{۷\times\frac{۱۰^m-۱}{۹} \,\middle|\, m\in W\right\}$

ل) $\left\{\frac{x}{2}\middle|\frac{x}{3}\in\mathbb{Z},\frac{x}{5}\notin\mathbb{Z}\right\}$ 　　 م) $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$

ن) $\left\{2m+5n\,\middle|\,m,n\in\mathbb{N}\right\}$ 　　 ص) $\left\{(-1)^{\frac{x(x+1)}{2}}\times x\,\middle|\,x\in\mathbb{N}\right\}$

۳. مقایسهٔ مجموعه‌ها

زیرمجموعه

برای اینکه مجموعه‌ها را بهتر بشناسیم، به این فکر می‌افتیم که مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنیم. آیا تعداد عضوهای یک مجموعه معیار مناسبی برای مقایسهٔ دو مجموعه است؟ هر دو مجموعهٔ {هیدروژن , اکسیژن} و $\{0,1\}$ دو عضوی است، امّا روشن است که این دو مجموعه با هم مساوی نیستند. زیرا در مجموعهٔ اول، عضویت دو عنصر شیمیایی مشخص شده است. در حالیکه در مجموعهٔ دوم، دو عدد صحیح عضویت دارند. برای مقایسهٔ دو مجموعه از مفهوم زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف:

فرض کنید هر عضو از مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ B نیز باشد. در این صورت می‌گوئیم «A زیرمجموعهٔ B است» و می‌نویسیم:

$$A\subseteq B$$

پس حتی اگر یک عضو مانند x از مجموعهٔ A وجود داشته باشد که عضو مجموعهٔ B نباشد، آنگاه «A زیرمجموعهٔ B نیست» و می‌نویسیم $A\not\subseteq B$.

مثال:

جدول عضویت را برای سه مجموعهٔ $A=\{p,e,n,c,i,l\}$، $B=\{l,i,p\}$ و $C=\{i,c,e\}$ در نظر بگیرید:

	p	e	n	c	i	l
A	✓	✓	✓	✓	✓	✓
B	✓	✗	✗	✗	✓	✓
C	✗	✓	✗	✓	✓	✗

هر عضو مجموعهٔ B عضوی از مجموعهٔ A نیز هست. پس $B\subseteq A$.

هر عضو مجموعهٔ C عضوی از مجموعهٔ A نیز هست. پس $C \subseteq A$.

p عضوی از مجموعهٔ B است که عضو مجموعهٔ C نیست. یعنی $p \in B$ ولی $p \notin C$. نتیجه می‌گیریم که $B \not\subseteq C$.

e عضوی از مجموعهٔ A است که عضو مجموعهٔ B نیست. یعنی $e \in A$ ، $e \notin B$. نتیجه می‌گیریم که $A \not\subseteq B$.

چند نکتهٔ مهم:

۱- هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است. زیرا این جمله به روشنی برای هر مجموعهٔ A درست است: هر عضو مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ A است. پس طبق تعریف $A \subseteq A$. مثلاً $\{۱,۲,۳\} \subseteq \{۱,۲,۳\}$ است.

۲- مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. مثلاً $\{\ \} \subseteq \{۱,۲,۳\}$ است. زیرا اگر $\{\ \}$ زیرمجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ نباشد، آنگاه باید در $\{\ \}$ عضوی پیدا کنیم که در $\{۱,۲,۳\}$ نباشد. چون $\{\ \}$ عضوی ندارد، پس غیرممکن است بتوانیم عضوی در $\{\ \}$ پیدا کنیم که در $\{۱,۲,۳\}$ نباشد. پس $\{\ \} \not\subseteq \{۱,۲,۳\}$ نادرست است و در نتیجه $\{\ \} \subseteq \{۱,۲,۳\}$ درست است.

۴- اگر $A \subseteq B, B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$ است. زیرا وقتی $A \subseteq B$ آنگاه هر عضو A مانند x ، عضوی از B است. از طرفی چون $B \subseteq C$ پس همان x عضو C نیز هست. پس $A \subseteq C$.

۵- اگر برای دو مجموعهٔ A و B بدانیم $A \subseteq B$ درست نیست، آنگاه نمی‌توانیم نتیجه بگیریم $B \subseteq A$ درست است. مثلاً فرض کنید $A = \{۱,۲,۴\}$ و $B = \{۲,۳,۴\}$. در این صورت هم $B \not\subseteq A$ و هم $A \not\subseteq B$.

تست:

با توجه به سه مجموعهٔ A, B, C ، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$A = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ ، } B = \{۳x \mid x \in \mathbb{N}\} \text{ ، } C = \{۶x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

الف) $A \subseteq B \subseteq C$ ب) $C \not\subseteq B \not\subseteq A$ ج) $A \not\subseteq B \not\subseteq C$ د) $C \subseteq A, C \subseteq B$

۱) فقط الف و ب ۲) فقط ج و د ۳) فقط الف و د ۴) فقط ب و ج

پاسخ:

گزارهٔ «الف» نادرست است. زیرا مثلاً $۲ \in A$ ولی $۲ \notin B$ که نشان می‌دهد $A \not\subseteq B$.

گزارهٔ «ب» نیز نادرست است. زیرا هر عضو C مضرب ۶ است، پس بر ۳ قابل قسمت است. پس هر عضو C عضوی از B نیز است. که نشان می‌دهد $C \subseteq B$.

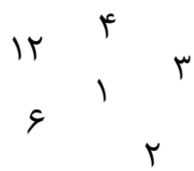
گزارهٔ «ج» درست است. زیرا در کنار $A \not\subseteq B$ که در گزارهٔ «الف» نتیجه گرفتیم، می‌دانیم $B \not\subseteq C$ است. زیرا مثلاً $۳ \in B$ ولی $۳ \not\in C$.

گزارهٔ «د» درست است. زیرا هر عددی که مضرب ۶ است، عضو مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد مضارب ۳ نیز هست.

پس گزینهٔ ۲ درست است.

نمایش هندسی

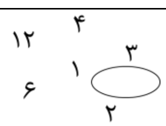
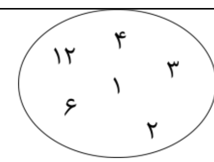
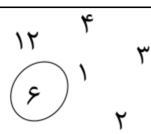
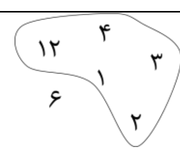
می‌خواهیم برای اینکه مجموعه‌ها را بهتر مقایسه کنیم، آنها را نقاشی کنیم. در این نقاشی، ابتدا عضوهای یک مجموعه را می‌نویسیم. مثلاً فرض کنید A مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ است.



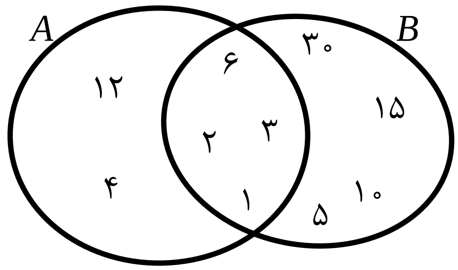
هر خم بستهٔ دلخواه که نقاشی کنیم، نمایش یک زیرمجموعهٔ A است. مثلاً خم بستهٔ زیر، نشان می‌دهد که $\{۱,۲\} \subseteq A$ است:

مثال:

هر شکل زیر یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ را نشان می‌دهد.

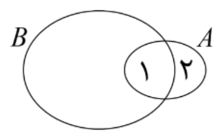
 $\Rightarrow \varnothing \subseteq A$	 $\Rightarrow A \subseteq A$
 $\Rightarrow \{۶\} \subseteq A$	 $\Rightarrow \{۱,۲,۳,۴,۱۲\} \subseteq A$

هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است. پس می‌توانیم مجموعهٔ A را از ابتدا با یک خم بسته نمایش دهیم. اگر B مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۰ باشد، شکل زیر رابطهٔ این دو مجموعه را بهتر نمایش می‌دهد. این نمودارها را اولین بار ریاضی‌دان انگلیسی به نام «جان وِن» پیشنهاد کرد. ما هم به نمایش هندسی زیر، نمودار وِن برای دو مجموعهٔ A و B می‌گوییم.



تست:

در مورد نمودار ون زیر، کدام گزینه درست است؟



۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $\{1\}\in A$ ۴) $B\in A$

پاسخ: اندازهٔ خم بسته در نمودار ون، مهم نیست. بلکه مهم این است که چه عضوهایی داخل خم بسته قرار دارند. بنابراین از نمودار بالا نتیجه می‌شود که $B\subseteq A$. $\{1\}\in A$ نیز نادرست است. زیرا اعضای A دو عدد طبیعی هستند و نه یک مجموعه! گزینهٔ ۲ درست است.

تساوی مجموعه‌ها

وقتی عضویت یا عدم عضویت یک چیز در دو مجموعهٔ A و B یکسان باشد به این معنی است که یا عضو هر دو مجموعه هست و یا عضو هیچ کدام از این دو مجموعه نیست. حالا اگر عضویت یا عدم عضویت هر چیز در دو مجموعهٔ A و B یکسان باشد، به این دو مجموعه «مساوی» می‌گوییم.

مثال:

الف) مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعدادی که رقم یکان آنها زوج است، برابر هستند.

ب) مجموعه اعداد مربع کامل و مجموعه اعدادی که فردتا شمارنده دارند، برابر هستند.

الف) $\{0,1,3,5\}$ با $\{1,3,5\}$ مساوی نیست. زیرا $0\in\{0,1,3,5\}$ در حالیکه $0\notin\{1,3,5\}$. پس تساوی بین این مجموعه برقرار

نیست.

ب) نورا و ایمان خواهر و برادر دوقلو هستند. اگر A مجموعه بستگان درجهٔ یک نورا و B مجموعه بستگان درجهٔ یک ایمان باشد، آنگاه $A \neq B$ است. زیرا مثلاً نورا عضو A نیست (چون خودش از بستگان خودش محسوب نمی‌شود) درحالیکه نورا عضو B هست.

تعریف:

هرگاه هر عضو A، عضوی از B باشد ($A \subseteq B$) و نیز هر عضو B، عضوی از A باشد ($B \subseteq A$) آنگاه می‌گوییم $A = B$ است.

نکات مهم:

۱- اگر $A \neq B$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که هیچکدام از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ دیگری نیست. مثلاً اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ آنگاه $A \neq B$. زیرا $۳ \in A$ ولی $۳ \not\in B$. درحالیکه شرط $B \subseteq A$ همچنان درست است.

۲- اگر دو مجموعه، تعداد اعضای یکسانی داشته باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت که با هم مساوی هستند. مثلاً اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۴\}$ باشد، هر دو مجموعه ۳ عضوی هستند ولی $A \neq B$. زیرا مثلاً $۳ \in A$ ولی $۳ \not\in B$.

تست:

فرض کنید $\left\{a\ ,\ a^۲\right\} = \left\{۱\ ,\ b\ ,\ b^۲\right\}$ است. مقدار $a+b$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) گزینهٔ ۲ یا ۳

پاسخ: چون $۱ \in \left\{۱, b, b^۲\right\}$ آنگاه عدد ۱ نیز باید عضو $\left\{a, a^۲\right\}$ باشد. پس دو حالت وجود دارد:

الف) $a = ۱$ است. بنابراین $a^۲ = ۱$ می‌باشد. پس $\left\{a, a^۲\right\}$ برابر با مجموعه‌ی تک عضوی $\{۱\}$ است. درنتیجه $\left\{۱, b, b^۲\right\}$ نیز باید با $\{۱\}$ برابر باشد. بنابراین $b = b^۲ = ۱$ است. این فقط وقتی درست است که $b = ۱$ باشد.

ب) $a^۲ = ۱$ است. بنابراین یا $a = ۱$ است که در بند قبل به این نتیجه رسیدیم که $b = ۱$ است، و یا $a = -۱$ است. پس $\left\{a, a^۲\right\} = \{-۱, ۱\}$ است. بنابراین $\left\{۱, b, b^۲\right\} = \{-۱, ۱\}$ می‌باشد. پس b یا $b^۲$ برابر با -۱ می‌باشند. این فقط وقتی درست است که $b = -۱$ باشد.

پس به دو جواب رسیدیم: $a=۱\,,b=۱$ و $a=-۱\,,b=-۱$. بنابراین $a+b$ برابر با ۲ یا ۲- است. گزینهٔ ۴ درست است.

تست:

فرض کنید $A=\left\{x-y \,\middle|\, x,y\in\mathbb{N}\right\}$ است. مجموعهٔ A با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) مجموعه اعداد صحیح　　۲) مجموعه اعداد حسابی　　۳) مجموعه اعداد طبیعی　　۴) مجموعه اعداد صحیح منفی

پاسخ: اگر $x,y\in\mathbb{N}$ آنگاه $x-y$ یا مثبت (به شرط $y<x$) یا صفر (به شرط $x=y$) و یا منفی (به شرط $x<y$) است که نشان می‌دهد، $A\subseteq\mathbb{Z}$ است. از طرفی به ازای هر عدد صحیح $n\in\mathbb{N}$ می‌دانیم $n+۱$ هم عددی طبیعی است. چون $۱\in\mathbb{N}$ پس هم $(n+۱)-۱\in A$ و هم $۱-(n+۱)\in A$ و هم $۱-۱\in A$ که نشان می‌دهد $-n,n,۰\in A$ است. پس $\mathbb{Z}\subseteq A$ است. پس نتیجه می‌گیریم $A=\mathbb{Z}$ است. گزینهٔ ۱ درست است.

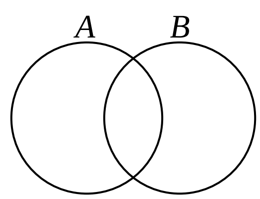
اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، فقط یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید.

حالت اول: « $A=B$ » ، یعنی هر یک از دو مجموعه، زیرمجموعهٔ دیگری باشند. مثلاً $\{۳,۲,۱\}=\{۱,۲,۳\}$.

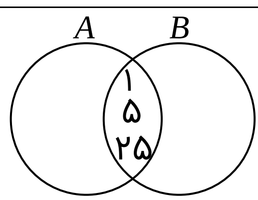
حالت دوم: « $B\subseteq A$, $A\not\subseteq B$ » ، یعنی فقط یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. مثلاً $\{۱,۲,۳\}\subseteq\{۱,۲\}$ و $\{۱,۲\}\not\subseteq\{۱,۲,۳\}$.

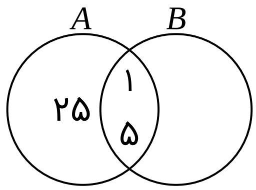
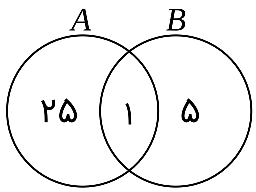
حالت سوم: « $B\not\subset A$, $A\not\subseteq B$ » ، یعنی هیچ یک از مجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ دیگری نباشد. مثلاً $\{۱,۲,۴\}\not\subseteq\{۱,۲,۳\}$ و $\{۱,۲,۳\}\not\subseteq\{۱,۲,۴\}$

به نمودار وِن زیر توجه کنید:



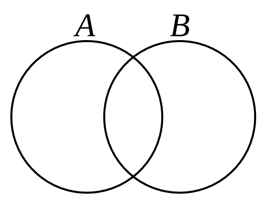
جدول زیر نشان می‌دهد در هر حالتی می‌توانیم اعضای A و B را در این نمودار جا بدهیم.

حالت یک	$A=B$	مثال: $A=\{۱,۵,۲۵\}$ و B مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۵.	

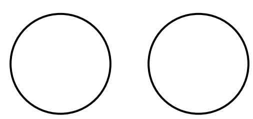
حالت دو	$A \not\subset B \quad , \quad B \subseteq A$	مثال: $A=\{۱,۵,۲۵\}$ و $B=\{۱,۵\}$	
حالت سه	$A \not\subset B \quad , \quad B \not\subset A$	مثال: $A=\{۱,۲۵\}$ و $B=\{۱,۵\}$	

تعریف:

به نمودار زیر «حالت کلّی نمودار ون» برای دو مجموعه می‌گوییم.



نمودار زیر نیز برای دو مجموعه‌ای مناسب است که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. به این دو مجموعه «جدا از هم» می‌گوییم.



تمرین

۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی، کدام مجموعه تک عضوی و تعداد اعضای کدام مجموعه بیش از یک عضو است؟

الف) مجموعه اعداد اول زوج.

ب) مجموعه چندضلعی‌های منتظمی که تعداد قطر آنها با تعداد ضلعشان مساوی است.

ج) مجموعه نقاط مشترک دو خط موازی.

د) مجموعه نقاط مشترک دو خط متقاطع.

ه) مجموعه نقاط مشترک دو خطی که حداقل دو نقطهٔ مشترک دارند.

و) مجموعهٔ بزرگترین عدد طبیعی.

ز) مجموعهٔ کوچکترین عدد طبیعی.

ح) مجموعهٔ کوچکترین عدد گویای مثبت.

۲- امتداد پاره‌خط‌هایی که با آنها هر یک از حروف انگلیسی زیر را می‌نویسیم، در نظر بگیرید. در هر مورد، اشتراک این خطوط را پیدا کنید.

الف) I ب) T ج) A د) H ه) Y و) X

ز) Z ح) W ط) E

۳- در هر مورد نمودار وِن مناسبی برای دو مجموعهٔ A و B رسم کنید.

الف) هر x که عضو A باشد، آنگاه $x \in B$.

ب) هر x که عضو A باشد، آنگاه $x \notin B$.

ج) حداقل یک x وجود دارد که $x \in A$ و $x \in B$.

د) هر x که عضو A نباشد، آنگاه $x \notin B$.

ه) هر x که عضو A نباشد، آنگاه $x \notin B$ و هر x که عضو B نباشد، آنگاه $x \notin A$.

۴- نشان دهید:

الف) $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

ب) $\{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\}$

۵- آیا $\{۵,۴,\varnothing\} = \{۴,۵\}$ است؟

۶- آیا $\{۵,۰,\varnothing\} = \{۰,۵\}$ است؟

۷- آیا $\{۰,۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} = \left\{x \mid \frac{۱۲}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ است؟

۸- کدام جمله درست و کدام نادرست است؟

الف) $\varnothing$ عضو هر مجموعه‌ای است.

ب) $\{\ \}$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

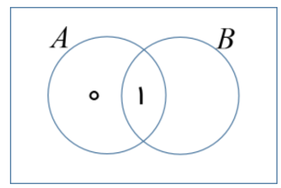
ج) $\{\ \} \in \varnothing$.

د) $\{\ \} \subseteq \varnothing$.

د) فقط یک مجموعه وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

ه) فقط یک مجموعه وجود دارد که یک عضوی است.

۹- با توجه به نمودار زیر، به ادامهٔ سؤالات پاسخ دهید.



الف) آیا $B \in \{\ \}$ است؟

ب) مجموعه‌های A و B را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ج) آیا $B \subseteq A$ یا $A \subseteq B$ یا هیچکدام؟

۱۰- در هر مورد، مشخص کنید که کدام زیر مجموعهٔ دیگری است و یا هیچ یک زیرمجموعهٔ دیگری نیست.

الف) مجموعه پروازهای تهران – پاریس. مجموعه پروازهای شرکت هواپیمایی هما.

ب) مجموعه انسان‌هایی که به زبان انگلیسی صحبت می‌کنند. مجموعه انسان‌هایی که ملیت غیرایرانی دارند.

ج) مجموعه قله‌های کوتاه‌تر از قلهٔ اورست. مجموعه قله‌های کشورمان ایران.

د) مجموعه ایرانیانی که ترک زبان هستند. ترک زبان‌هایی که کشاورز هستند.

ه) مجموعه دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۹ است. مجموعه دانش‌آموزانی که نمرهٔ ریاضی آنها ۱۹ است.

۱۱- مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A را «مجموعهٔ توانی A» می‌نامیم و آن را با A (بخوانید A کلاه) نمایش می‌دهیم. مثلاً برای $A=\{0,1\}$:

$$A=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

الف) اگر $A=\varnothing$، A را بدست آورید.

ب) اگر $A=\{\varnothing,1\}$، A را بدست آورید.

ج) برای هر مجموعهٔ دلخواه X کدام درست و کدام نادرست است؟

۱) $X \in X$ ۲) $X \subseteq X$ ۳) $\varnothing \in X$ ۴) $\varnothing \subseteq X$ ۵) $X = X$

۱۲- نشان دهید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \subseteq B$ است.

۱۳- برای دو مجموعهٔ A و B مثالی بزنید که $A \in B$ باشد.

۱۴- اگر $B \in A$ و $C \in B$ باشد، آیا حتماً $C \in A$ است؟

۱۵- اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$ باشد، آیا حتماً $C \subseteq A$ است؟

۱۶- اگر $A \not\subseteq B \not\subseteq C$ باشد، این درست است که $A \not\subseteq C$ ؟

۱۷- آیا مجموعه‌ای به جای A می‌تواند قرار بگیرد که $A = \varnothing$ باشد؟

۱۸- a را طوری پیدا کنید که $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$ یک مجموعهٔ توانی باشد.

۱۹- فرض کنید A یک مجموعهٔ ۱۰۰ عضوی است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴۹ عضوی آن بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌های ۵۱ عضوی آن؟

٤. عملگرهای مجموعه

مجموعه اعداد طبیعی شامل اعدادی است که فقط برای شمارش به کار می‌بریم. در علم حساب ما از عملگرهای جمع و ضرب استفاده می‌کنیم تا اعداد را با هم ترکیب کنیم. همین که پای یک عملگر به میان می‌آید، ویژگی‌های مهم اعداد ظاهر می‌شوند. مثلاً با وجود عملگر ضرب بحث می‌کنیم که:

اگر عددی مربع کامل باشد، تعداد شمارنده‌های آن فرد است.

می‌خواهیم بین مجموعه‌ها عملگرهایی تعریف کنیم تا بتوانیم آنها را با هم ترکیب کنیم. در اینصورت می‌توانیم با ترکیب دو یا چند مجموعه، مجموعهٔ جدیدی بدست آوریم.

اشتراک

جدول زیر مشخصات فنی ۱۰ خودرو در یک نمایشگاه را نشان می‌دهد. مشتریان با توجه به سلیقهٔ خود، ابتدا زیرمجموعه‌ای از این ۱۰ خودرو را انتخاب می‌کنند.

	پژو ۲۰۶	پژو پارس	دنا	پراید	تندر ۹۰	مزدا	پروتون	سانتافه	آزرا	بی ام و
وزن (کیلوگرم)	۱۰۵۴	۱۱۶۵	۱۲۵۸	۹۱۵	۱۱۰۰	۱۳۴۰	۱۰۵۰	۱۵۶۸	۱۶۳۵	۱۷۹۵

قیمت	پایین	پایین	پایین	پایین	پایین	متوسط	متوسط	زیاد	زیاد	زیاد
مصرف بنزین (لیتر در ۱۰۰ کیلومتر)	۶٫۴	۹٫۱	۷٫۸	۷	۶٫۹	۸٫۴	۱۰٫۱	۱۱٫۱	۹٫۶	۶٫۲
صفر تا صد (ثانیه)	۱۲٫۶	۱۱	۱۲	۱۴٫۵	۱۰٫۲	۹٫۲	۱۱	۱۰٫۹	۸	۶٫۳

خودروهای کوچک شهری، خودروهایی هستند که کمتر از ۱۲۰۰ کیلوگرم وزن دارند:

$H=\{$ پژو ۲۰۶ ، پژو پارس، پراید، تندر ۹۰، پروتون $\}$

خودروهای کم مصرف به خودروهایی می‌گویند که در ۱۰۰ کیلومتر کمتر یا مساوی ۷ لیتر بنزین مصرف کنند:

$T=\{$ پژو ۲۰۶، پراید، تندر ۹۰، بی ام و $\}$

تعریف:

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که با $A\cap B$ نشان می‌دهیم. $A\cap B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که هر یک از آنها هم عضو A **و** هم عضو B هستند. این مجموعه را می‌توانیم به شکل زیر با نماد ریاضی بنویسیم:

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \ \text{و}\ x\in B\}$$

رفت و آمد آقای مرادی در شهر زیاد است. به همین دلیل او به دنبال خودرویی است که کم مصرف باشد. از طرفی عبور و مرور در ترافیک شهری و کوچه‌های باریک باعث شد او به دنبال خودروی کوچک شهری نیز باشد. بنابراین خودروهایی که برای آقای مرادی مناسب است برابر با مجموعه خودروهایی است که هم کم مصرف «**و**» هم کوچک شهری باشند. این مجموعه همان $H\cap T$ است:

$H\cap T=\{$ پژو ۲۰۶ ، پراید، تندر ۹۰ $\}$

مثال:

اگر مجموعه خودروهایی که صفر تا صد آنها کمتر از ۷ ثانیه باشد را با G نمایش دهیم، آنگاه:

الف) منظور از $H\cap T\cap G$ مجموعه خودروهایی است که کم مصرف **و** کوچک شهری **و** صفر تا صد کمتر از ۷ ثانیه هستند.

ب) چون پراید عضو G نیست، پس $H\cap T\cap G=\{$ پژو ۲۰۶ ، تندر ۹۰ $\}$.

نمودار ون به ما کمک می‌کند تا در یک نمایش هندسی، $A\cap B$ را بهتر درک کنیم. $A\cap B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که در ناحیهٔ هاشور خورده قرار دارند:

نکته:

برای مجموعه‌های دلخواه A و B و C، تساوی‌های زیر برقرار است.

۱) $A \cap \varnothing = \varnothing$ ۲) $A \cap A = A$ ۳) $A \cap B = B \cap A$ ۴) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

مثال:

مجموعهٔ A در تساوی زیر کدام است؟

$$\{۱,۲,۳\} \cap A = \{۱,۲,۳\}$$

پاسخ: مجموعهٔ A باید شامل همهٔ اعداد ۱، ۲ و ۳ باشد تا حاصل اشتراک بالا $\{۱,۲,۳\}$ شود. امّا A می‌تواند اعضای دیگری مانند عدد ۴ را نیز داشته باشد. مثلاً $\{۱,۲,۳\} = \underbrace{\{۱,۲,۳,۴\}}_{A} \cap \{۱,۲,۳\}$ است. پس کافی است که $\{۱,۲,۳\} \subseteq A$ باشد.

تست:

اگر با هر سه عدد متوالی طبیعی یک رقمی یک مجموعه بسازیم، اشتراک همهٔ این مجموعه‌ها برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۱,۲,۳\}$ ۴) $\{۱,۲,۳,...,۹\}$

پاسخ: اشتراک دو مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ و $\{۴,۵,۶\}$ برابر با تُهی است. همین کافی است که حاصل اشتراک همهٔ مجموعه‌های مورد نظر تُهی شود. گزینهٔ ۱ درست است.

اجتماع

مانا و نرگس هم کلاسی هستند و در یک روز متولد شده‌اند. امسال تصمیم گرفتند با هم جشن تولد بگیرند. قرار شد هر کدام از آنها، دوستان خود را برای جشن تولد دعوت کنند:

	ملیکا	سعیده	منیره	نیوشا	مریم	فاطمه	یلدا	ژینوس
دوستان مانا	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✓
دوستان نرگس	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗

مجموعه دوستان دعوت شده توسط مانا را با M و برای نرگس را با N نشان می‌دهیم. در این صورت:

$N=\{$ ملیکا ، نیوشا، یلدا $\}$ $\qquad$ $M=\{$سعیده، منیره، یلدا، ژینوس$\}$

تعریف:

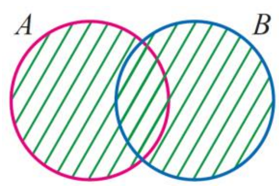
اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که با $A\cup B$ نشان می‌دهیم. $A\cup B$ برابر با مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که هر یک از آنها عضو A **یا** عضو B هستند. این مجموعه را می‌توانیم به شکل زیر با نماد ریاضی بنویسیم:

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \ \text{یا}\ x\in B\}$$

مجموعهٔ $N\cup M$ را افرادی تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها حداقل دوست یکی از این دو نفر (مانا یا نرگس) هستند:

$N\cup M=\{$ملیکا ، سعیده، منیره، نیوشا، یلدا، ژینوس$\}$

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A\cup B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که در ناحیهٔ هاشور خورده قرار دارند:



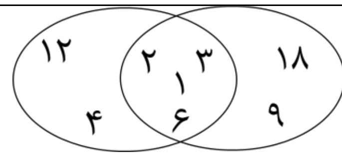
نکته:

برای مجموعه‌های دلخواه A و B و C تساوی‌های زیر برقرار است.

۱) $A\cup\varnothing=A$ $\qquad$ ۲) $A\cup A=A$ $\qquad$ ۳) $A\cup B=B\cup A$ $\qquad$ ۴) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

مثال:

فرض کنید $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,\frac{۱۲}{x}\in\mathbb{N}\right\}$ و $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,\frac{۱۸}{x}\in\mathbb{N}\right\}$ است. نمودار ون زیر رابطهٔ این دو مجموعه را نشان می‌دهد.



بنابراین $A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸\}$ و $A\bigcap B=\{۱,۲,۳,۶\}$ است.

مثال:

مجموعهٔ A در تساوی زیر کدام است؟

$$\{۱,۲,۳\}\bigcup A=\{۱,۲,۳\}$$

پاسخ: اعضای مجموعهٔ A باید عضو مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ باشند تا حاصل اجتماع بالا $\{۱,۲,۳\}$ شود. پس کافی است که $A\subseteq\{۱,۲,۳\}$ باشد. مثلاً $\{۱,۲,۳\}\bigcup\underbrace{\{۱,۲\}}_{A}=\{۱,۲,۳\}$ است.

تفاضل مجموعه‌ها

وزارت مسکن برای کسانی که ازدواج کرده‌اند و خانه ندارند، وام مسکن اعطا می‌کند. در یک مهمانی مجموعه افرادی که ازدواج کرده‌اند را با M و مجموعه افرادی که خانه دارند را با H نمایش داده‌ایم. جدول عضویت آن به صورت زیر است:

	محمود	بهرام	حامی	علیرضا	پدارم	وحید	فرزان	جلیل	آرش
M	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗
H	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗

تعریف:

A منهای B مجموعه‌ای است که با $A-B$ نشان می‌دهیم. $A-B$ برابر با مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از A است که عضو B نیستند.
این مجموعه را می‌توانیم به شکل زیر با نماد ریاضی بنویسیم:

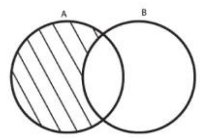
$$A-B=\{x\in A\,|\,x\not\in B\}$$

افرادی که ازدواج کرده‌اند ولی خانه ندارند همان مجموعهٔ $M-H$ است. در واقع $M-H$ شامل افرادی است که عضو M هستند (یعنی ازدواج کرده‌اند) ولی عضو H نیستند (یعنی خانه ندارند). پس:

$$M-H=\{\text{بهرام، علیرضا، وحید}\}$$

دقت کنید که فرزان و آرش خانه ندارند ولی نمی‌توانند وام مسکن دریافت کنند. زیرا ازدواج نکرده‌اند. پس فرزان و آرش عضو $M-H$ نیستند.

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A-B$ برابر با مجموعه عضوهایی است که در ناحیه‌ی هاشور خورده قرار دارند:



نکته:

۱) اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه $A-B=\varnothing$ است.

۲) $A-B$ زیرمجموعهٔ A است.

۳) $A-B$ و B دو مجموعهٔ از هم جدا هستند.

تست:

اگر $A-B=B$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=\varnothing$ ۳) $B=\varnothing$ ۴) همهٔ گزینه‌ها

پاسخ: چون $A-B$ و B دو مجموعهٔ از هم جدا هستند، پس $\left(A-B\right)\cap B=\varnothing$ است. ولی طبق فرض سؤال $A-B=B$ پس:

$$\varnothing=\underbrace{\left(A-B\right)}_{B}\cap B=B\cap B=B$$

که نشان می‌دهد $B=\varnothing$ است. در نتیجه با جایگذاری دوباره در فرض سؤال:

$$\varnothing=A-\underbrace{B}_{\varnothing}=A-\varnothing=A$$

که نشان می‌دهد $A=\varnothing$ است. پس گزینهٔ ۴ درست است.

تعریف:

اگر تعداد اعضای یک مجموعه مساوی با یک عدد صحیح نامنفی باشد، آن مجموعه را **متناهی** می‌گوییم. اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال:

۱) A مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ است. پس $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ است. تعداد اعضای این مجموعه ۶ تا است که عددی صحیح و نامنفی است. پس A مجموعه‌ای متناهی است و $n(A)=6$ می‌باشد.

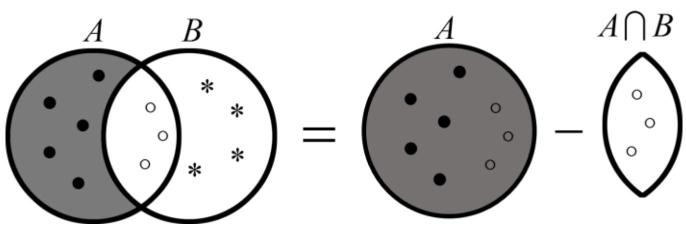
۲) مجموعه اعداد اول کوچکتر از هزار، مجموعه‌ای متناهی است. لازم نیست این مجموعه را با اعضای آن نمایش دهیم تا متناهی بودن آن را با شمردن تعداد اعضایش نشان دهیم. زیرا تعداد اعضای این مجموعه حتماً عددی صحیح و کمتر از ۱۰۰۰ است.

۳) مجموعه تارهای موی سر شما مجموعه‌ای متناهی است. زیرا اگر با دست و دل بازی تخمین بزنیم، می‌توانیم بگوییم این مجموعه حتماً کمتر از یک میلیون عضو دارد. پس متناهی است.

۴) مجموعه مضارب عدد ۴ که برابر با $\{4,8,12,16,20,...\}$ است، مجموعه‌ای **نامتناهی** است. زیرا تعداد اعضای این مجموعه از هر عدد صحیح نامنفی بیشتر است و نمی‌تواند مساوی با یک عدد صحیح باشد.

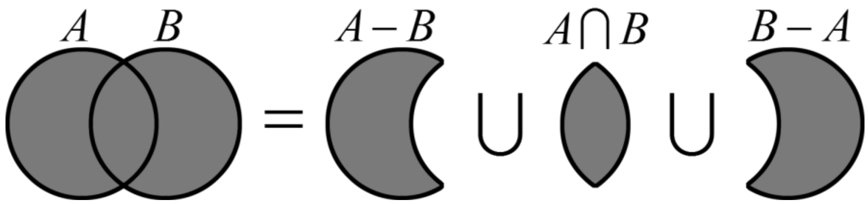
نکتهٔ ۱:

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، شکل زیر نشان می‌دهد که $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ است.



نکتهٔ ۲:

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، $A\cup B$ را می‌توانیم به صورت اجتماع جدا از هم سه مجموعهٔ زیر بنویسیم.



در نتیجه $n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$ است. از طرفی طبق نکتهٔ ۱ می‌توانیم تعداد اعضای $A-B$ و $B-A$ را جایگزین کنیم تا به رابطهٔ ساده‌تری برسیم:

$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A-B)}_{n(A)-n(A\cap B)}+n(A\cap B)+\underbrace{n(B-A)}_{n(B)-n(A\cap B)}$$

$$=n(A)-n(A\cap B)+n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)=\boxed{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

مثال:

مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را با $A=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$ و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۰ را با $B=\{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\}$ نشان می‌دهیم.

$A-B$	$A\cap B$	$B-A$
$\{۹,۱۸\}$	$\{۱,۲,۳,۶\}$	$\{۵,۱۰,۱۵,۳۰\}$
$n(A-B)=۲$	$n(A\cap B)=۴$	$n(B-A)=۴$

$A\cup B$
$\{۱,۲,۳,۵,۶,۹,۱۰,۱۵,۱۸,۳۰\}$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۸-۴=۱۰$

تمرین

۱- با توجه به جدول مشخصات فنی خودروها، مجموعه‌هایی با شرایط زیر پیدا کنید:

الف) کوچک شهری و قیمت پایین — ب) کوچک شهری یا قیمت پایین

ج) کوچک شهری و قیمت پایین و کم مصرف — د) کوچک شهری یا قیمت پایین یا کم مصرف

۲- فرض کنید $A \neq B$ است. در مورد درستی کدام یک از گزاره‌های زیر یقین دارید؟

الف) $A \not\subseteq B$ — ب) $A \cap B = \varnothing$ — ج) $A \not\subseteq B$ یا $B \not\subseteq A$

۳- الف) اگر $X = \{۰\}$ باشد، $n(X)$ چند است؟

ب) اگر $n(A) = n(B)$ باشد، آیا $A = B$ است؟

ج) آیا می‌تواند $n(A \cap B) = ۰$ باشد؟

د) با کمک از نمودار ون، در مورد درستی رابطهٔ زیر بحث کنید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

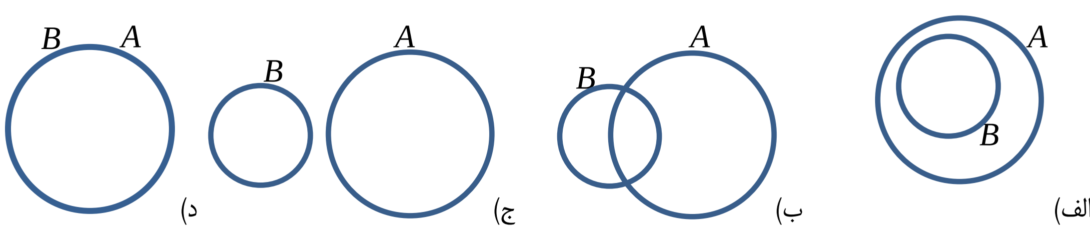
۴- فرض کنید $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$ است. در مورد $A \cap B$ چه می‌توان گفت؟

۵- اگر $A - B = \varnothing$ باشد، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

۶- اگر $A - B = A$ باشد، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

۷- اگر $A - B = B$ باشد، نشان دهید که $A = B = \varnothing$.

۸- در مورد هر یک از بندهای زیر، $A \cup B$ را هاشور آبی و $A \cap B$ را هاشور قرمز بزنید.



۹- با کمک نمودار ون، درستی یا نادرستی هر بند را بررسی کنید.

الف) $A \subseteq A \cap B$ — ب) $B \subseteq A \cup B$ — ج) $A \cap B \subseteq A \cup B$

د) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap B = A$. — ه) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$.

و) اگر $A \cap B = A \cup B$ آنگاه $A = B$.

۱۰- در جای خالی چه مجموعه‌هایی می‌تواند قرار بگیرد تا تساوی برقرار باشد؟

الف) $A\bigcup \boxed{} = A$ ب) $A\bigcap \boxed{} = A$ ج) $A\bigcap \boxed{} = \varnothing$ د) $A\bigcap \varnothing = \boxed{}$

۱۱- اگر $A\bigcup \varnothing = \varnothing$ باشد، چه چیزی در مورد مجموعهٔ A می‌توان گفت؟

۱۲- برای هر بند، سه مجموعه به جای A، B و C مثال بزنید که شرایط مورد نظر برقرار باشد:

الف) $A\bigcup B = A\bigcup C$ امّا $B \neq C$ باشد.

ب) $A\bigcap B = A\bigcap C$ امّا $B \neq C$ باشد.

ج) $C \subseteq A\bigcap B$ و $B \subseteq A\bigcup C$.

د) $A\bigcup B = A\bigcap C$ باشد.

۱۳- P مجموعه‌ای شامل یک نقطهٔ دلخواه، L مجموعهٔ همهٔ نقاط یک خط دلخواه و M مجموعهٔ همهٔ نقاط یک صفحهٔ دلخواه در فضای اطراف ما است. حاصل هر یک از بندهای زیر چه چیزی می‌تواند باشد؟

الف) $P\bigcap L$ ب) $P\bigcup L$ ج) $L\bigcap M$ د) $L\bigcup M$ ه) $L_1\bigcap L_2$ و) $M_1\bigcap M_2$

۱۴- در هر یک از موارد زیر، بررسی کنید آیا نقطهٔ P، خط L و صفحهٔ M وجود دارد که گزارهٔ مورد نظر درست باشد؟

الف) $P\bigcap L = \varnothing$ ب) $P\bigcup L = P\bigcap L$ ج) $L\bigcap M = P$

د) $L\bigcap M = L$ ه) $L\bigcap M = M$ و) $L\bigcap M = \varnothing$

ز) $L_1\bigcap L_2 = P$ ح) $n\left(L_1\bigcap L_2\right) = ۲$

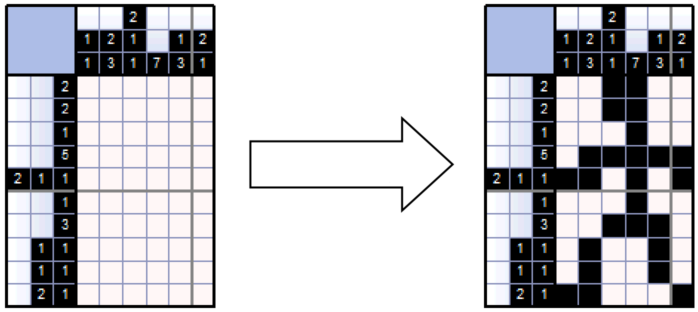
ط) $M_1\bigcap M_2 = M_1$ ی) $M_1\bigcap M_2 = L$ ک) $M_1\bigcap M_2 = P$

ل) $M_1\bigcap M_2 = \varnothing$ م) $L_1\bigcup L_2 = M$

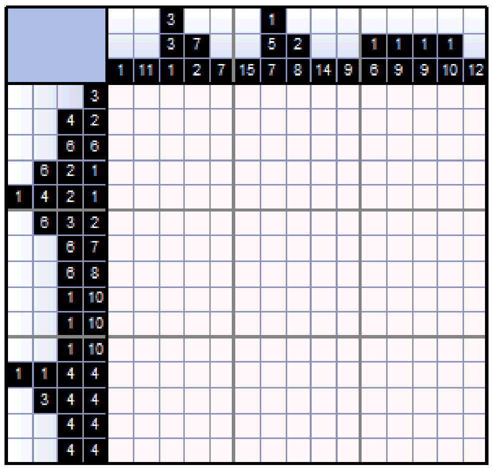
۱۵- در پازل زیر باید بعضی از خانه‌های سفید را سیاه کنید تا نقاشی مرموز این معما پدیدار شود. در هر ردیف تعدادی عدد نوشته شده است که این اعداد به ترتیب تعداد خانه‌های به هم چسبیده (بلوک) را در آن ردیف نشان می‌دهد.

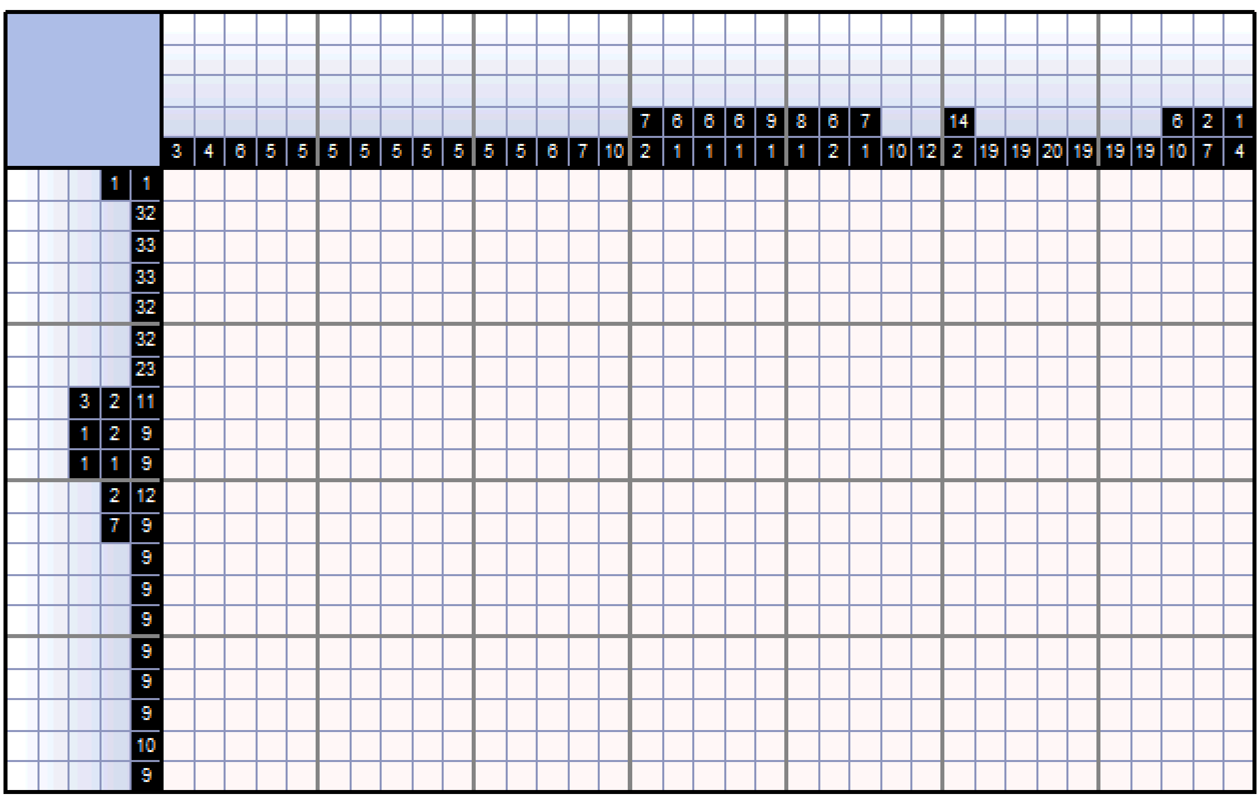
نکته ۱: بین بلوک‌ها در یک ردیف (یا یک ستون) باید حداقل یک خانهٔ سفید وجود داشته باشد تا به هم نچسبند.

نکته ۲: ترتیب بلوک‌ها در یک ردیف (یا یک ستون) باید به ترتیب اعداد همان ردیف (یا ستون) باشند. مثال:



پازل‌های زیر را حل کنید تا نقاشی مرموز را پیدا کنید.





۱۶- در یک کلاس ۱۲۰ نفره، دانش‌آموزان از ۱ تا ۱۲۰ شماره گذاری شده‌اند. شماره‌های زوج در کلاس نجوم، شماره‌های مضرب ۵ در کلاس سینما و شماره‌های مضرب ۷ در کلاس خوش‌نویسی ثبت نام کرده‌اند. چند نفر در هیچ کلاسی ثبت نام نکرده‌اند؟

۱۷- از بین ۲۰۰ نفر شرکت کننده در سمینار رایانه‌ای ، ۱۰۰ نفر موبایل هوشمند داشتند، ۷۰ نفر تبلت و ۱۴۰ نفر لپ تاپ به همراه داشتند. ۴۰ نفر موبایل و تبلت را با هم داشتند، ۳۰ نفر تبلت و لپ تاپ و ۶۰ نفر موبایل و لپ تاپ به همراه داشتند. ۱۰ نفر هر سه را با هم به همراه آورده بودند. چند شرکت کننده هیچ کدام از این سه وسیله را نداشتند؟

۱۸- در یک کلاس ۴۰ نفره، ۱۲ دانش‌آموز هر دو کلاس آلمانی و انگلیسی را ثبت نام کردند. در کلاس آلمانی ۲۲ نفر ثبت نام کردند. اگر هر دانش‌آموز حداقل در یک کلاس ثبت نام کرده باشد، چند دانش‌آموز فقط در کلاس انگلیسی ثبت نام کرده‌اند؟

۱۹- در یک کلاس، ۴۰درصد از دانش‌آموزان در کلاس نقاشی و ۷۰درصد در کلاس موسیقی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱۵درصد از دانش-آموزان در هر دو کلاس ثبت نام کرده باشند، چند درصد از دانش‌آموزان در هیچ کدام از این کلاس‌ها ثبت نام نکرده‌اند؟

۲۰- در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر در شیمی، ۱۴ نفر در فیزیک و ۹ نفر در زیست‌شناسی نمره ۲۰ گرفته‌اند. اگر ۹ نفر هم در شیمی و هم در فیزیک، ۷ نفر هم در شیمی و هم در زیست‌شناسی و ۵ نفر نیز هم در فیزیک و هم در زیست‌شناسی نمره ۲۰ گرفته باشند و بدانیم ۱۲ نفر در هیچ‌یک از این درس‌ها ۲۰ نگرفته‌اند، آن‌گاه چند نفر در هر سه درس ۲۰ گرفته‌اند؟

۲۱- ظاهراً در پایه نهم، اگر خیلی خوب بگردید، چند علاقمند به علم هم می‌توانید پیدا کنید. تعدادشان از این قرار است؛ ۱۸ نفر علاقمند به فیزیک، ۲۱ نفر علاقمند به ریاضی و ۱۴ نفر علاقمند به زیست‌شناسی. نکته عجیب‌تر این که ۹ نفر هم به فیزیک و هم به ریاضی علاقمند هستند. ۶ نفر هم علاقمند به زیست و فیزیک. حال، تعداد علاقمندان به زیست و ریاضی حداکثر چند نفر خواهند بود؟ علاقمندان به هر سه شاخه چطور؟

۲۲- یک کارخانه سازنده خودرو قبل از تحویل خودرو به مشتریان، ۱۰۰ تا از خودروها را به طور تصادفی انتخاب کرده و مورد بازدید فنی قرار می‌دهد. در این بررسی ملاحظه می‌شود از ۴۲ خودرو فاقد نقص فنی، ۲۳ خودرو نقص فرمان، ۲۶ خودرو نقص چراغ، ۳۲ خودرو نقص موتور، ۹ خودرو نقص فرمان و چراغ، ۱۰ خودرو نقص فرمان و موتور و ۱۲ خودرو نقص چراغ و موتور دارند.

الف) تعداد خودروهایی که هر سه نقص را دارند، مشخص کنید.
ب) تعداد خودروهایی را که فقط یک نقص دارند، بیابید.

۲۳- می‌دانیم مجموعه S دارای ۵ عضو و مجموعه F دارای ۷ عضو می‌باشند.

الف) حداقل و حداکثر تعداد اعضای $S \bigcup F$ چند است؟
ب) حداقل و حداکثر تعداد اعضای $S \bigcap F$ چند است؟

۲۴- فرض کنید:

$$\begin{cases} E \cap \{۳,۵,۸,۱۱\} = \{۵,۸\} \\ E \cup \{۴,۵,۱۱,۱۳\} = \{۴,۵,۷,۸,۱۱,۱۳\} \\ E \subset \{۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۳\} \\ ۱۳ \in E \end{cases}$$

E چند عضو دارد؟

۲۵- مجموعهٔ $A-(B-C)$ را با کمک نمودار ون نمایش دهید.

۲۶- اگر بدانیم $B \cap C = \varnothing$ آنگاه ثابت کنید $(A-B)\cup(A-C)=A$.

۲۷- دربارهٔ سه مجموعهٔ A، B و C اطلاعات زیر را داریم:

- $A-B=\{۲,۴,۸\}$
- $B-C=\{۳,۶\}$
- $C-A=\{۱,۵,۹\}$

اگر $A\cup B\cup C$ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی باشد، $A\cap B\cap C$ را بدست آورید.

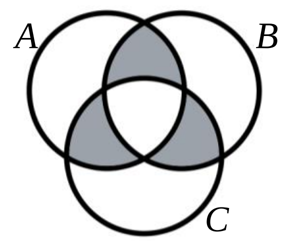
۲۸- با توجه به اطلاعات داده شده، جدول عضویت زیر را با دو علامت $\in$ و $\notin$ پر کنید. اگر در مورد عضویت نمی‌توان تصمیم گرفت از علامت ○ استفاده کنید.

$$A \subset B$$
$$C \not\subset B$$
$$B-A=\{c,d\}$$
$$A-C=\{a,e\}$$
$$A\cup B=\{a,c,d,e\}$$

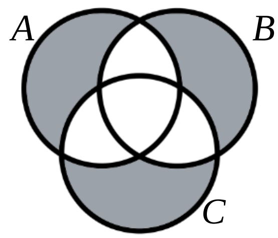
	A	B	C
a			
b			
c			
d			
e			

۲۹- با استفاده از عملگرهای مجموعه، برای هر یک از نمودارهای زیر، عبارتی بر حسب A ، B و C بنویسید که قسمت خاکستری را توصیف کند.

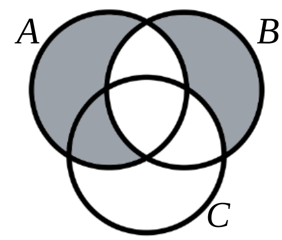
الف)



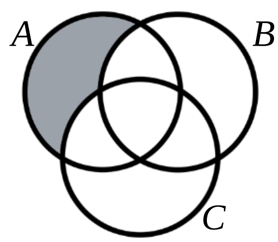
ب)



ج)



د)



۳۰- می‌دانیم $A\bigcup B = C\bigcup D = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ است. تقاطع هر سطر با ستون در جدول زیر، اشتراک مجموعه‌ای است که در همان سطر و ستون آمده است. با توجه به این جدول، به جای X چند مجموعهٔ متفاوت می‌توان نوشت؟

$\bigcap$	A	B
C	$\{۱,۷\}$	$\{۴,۵\}$
D	$\{۲,۳,۹\}$	X

۳۱- فرض کنید $A\subseteq\mathbb{Z}$ باشد که بیش از ۲ عضو دارد. نشان دهید می‌توان دو عضو مختلف از A را پیدا کرد که اگر به جای m و n قرار بگیرند آنگاه $m-n$ عددی زوج است.

۳۲- به دلخواه سه زیرمجموعه‌ی مختلف از مجموعه حروف فارسی انتخاب می‌کنیم و به ترتیب آنها را A، B و C می‌نامیم. توضیح دهید چرا حداقل یک حرف فارسی وجود دارد که یا دقیقاً عضو یکی از این سه مجموعه و یا دقیقاً عضو دوتا از این سه مجموعه است.

۳۳- فرض کنید $\{a,b,c,d\} = \{۶,۷,۸,۹\}$ است. کمترین مقدار عبارت $\dfrac{ab-d}{c}$ را پیدا کنید.

۳۴- فرض کنید $\{a,b,c,d\}\subset\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$ است. بزرگترین مقدار عبارت $\dfrac{a-b\times c}{d-۱}$ چند است؟

۵. احتمال

در زندگی روزمره، ممکن است با چنین جملاتی روبرو شویم:

۱) **دور از انتظار** است که یک سوزن را بتوانیم در انبار کاه پیدا کنیم.

۲) **شک** دارم که او بتواند در آزمون ورودی به دبیرستان قبول شود.

۳) **شاید** امروز باران ببارد.

۴) **بدون تردید**، تیم ملی والیبال ایران امسال قهرمان آسیا خواهد شد.

کلمات «دور از انتظار»، «شاید»، «شک» و «بدون تردید»، میزان اطمینان یا عدم اطمینان ما از رخ دادن یک اتفاق یا **پیشامد** را نشان می‌دهد. مثلاً در مورد جملهٔ شمارهٔ (۱)، منظورمان این است که هیچ امیدی به پیدا کردن یک سوزن در انبار کاه نداریم. ولی در مورد جملهٔ شمارهٔ (۳) از باریدن باران نا امید نیستیم. علم احتمال سعی دارد این میزان از امیدواری یا نا اُمیدی را با یک عدد اندازه گیری کند.

در اوایل قرن بیستم احتمال به صورت نظریه‌ای پیشرفته توسعه یافت، اما مبنای محکمی نداشت. هدف اساسی، قرار دادن آن بر پایه‌های محکم ریاضی بود که این امر فقط با ارائهٔ تعدادی اصول امکان‌پذیر بود. تا آن زمان در میان تعبیرهای گوناگون از احتمال، تعبیر «فراوانی نسبی» رضایت بخش ترین تعبیر بود. بر اساس این تعبیر، احتمال رخ دادن یک پیشامد (مثلاً زوج آمدن یک تاس) را در دنباله‌ای از نتایج «آزمایش‌های تصادفی» اندازه‌گیری می‌کردند. یعنی با تکرار متوالی یک آزمایش تصادفی، مشاهده می‌کردند نسبت تعداد نتایج موفقیت آمیز به کل آزمایش‌ها به مقدار ثابتی نزدیک می‌شود. اما این تعبیر برای رخ دادن یک پیشامد عملاً غیر قابل محاسبه است. زیرا:

اولاً تکرار یک آزمایش، بی‌نهایت بار غیر ممکن است.

ثانیاً دلیلی وجود ندارد که بپذیریم نسبت تعداد نتایج موفق به کل آزمایش‌ها، به عددی ثابت نزدیک شود.

ثالثاً احتمال‌هایی که بر پایه‌ی شناخت‌ها و باورهای شخصی استوارند قابل توجیه نیستند. مثلاً جملاتی مانند " ۹۹ درصد احتمال دارد امشب برف ببارد" ، "۱ درصد هم احتمال ندارد قیمت مسکن پایین بیاید" معنای علمی نخواهد داشت.

آزمایش تصادفی

تعریف:

فرض کنید نتیجهٔ یک آزمایش (مثل انداختن یک سکه) از قبل معلوم نباشد امّا همهٔ نتیجه‌های ممکن برای این آزمایش قابل پیش بینی باشد. به این آزمایش، یک «آزمایش تصادفی» می‌گوییم. به مجموعهٔ نتیجه‌های ممکن و قابل پیش‌بینی این آزمایش، «فضای نمونه» می‌گوییم که معمولاً با S نشان می‌دهیم. به هر نتیجه از یک آزمایش تصادفی (هر عضو فضای نمونه) یک «برآمد» می‌گوییم.

مثال:

الف) وقتی یک سکه را می‌اندازیم، «شیر» و «خط» برآمدهای این آزمایش تصادفی است. { شیر ، خط } = S

ب) وقتی یک تاس می‌ریزیم هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ یک برآمد به حساب می‌آیند. $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

ج) یک قوطی کبریت به تصادف انتخاب می‌کنیم و تعداد چوب کبریت‌های آن را می‌شماریم. این یک آزمایش تصادفی است، زیرا از قبل نمی‌دانیم این قوطی چند چوب کبریت دارد. ولی با فرض اینکه در یک قوطی کبریت بیشتر از ۱۰۰ چوب کبریت جا نمی‌شود، تعداد چوب کبریت‌ها می‌تواند عددی از ۰ تا ۱۰۰ باشد، پس $S=\{۰,۱,۲,...,۱۰۰\}$ می‌تواند باشد.

د) یک تکه گچ را به تصادف به سمت یک تخته سیاه پرتاب می‌کنیم تا با آن برخورد کند. نتیجهٔ این آزمایش تصادفی، نقطهٔ برخورد آن با تخته است. پس فضای نمونهٔ این آزمایش همهٔ نقاط این تخته است.

ه) بازی فوتبال بین دو تیم «عقاب» و «اتحاد» یک آزمایش تصادفی است. نتیجهٔ بازی یعنی یک برآمد این آزمایش تصادفی، می‌تواند تعداد گلی باشد که هر تیم به ثمر رسانده است. اگر فرض کنیم عقاب ۲ گل و اتحاد ۱ گل زده است، آن را نمی‌توانیم با $\{۱,۲\}$ نشان دهیم. زیرا با توجه به اینکه $\{۲,۱\}=\{۱,۲\}$ است، پس اگر عقاب ۱ گل و اتحاد ۲ گل بزند برآمد جدیدی نباید اتفاق افتاده باشد که نادرست است.

با استفاده از نماد «مختصات یک نقطه» برآمدها را طوری تعریف می‌کنیم که با جابجایی مؤلفه‌ها، برآمد نیز بتواند تغییر کند. اگر طول نقطه را تعداد گل «عقاب» و عرض نقطه را تعداد گل «اتحاد» تعریف کنیم، آنگاه فضای نمونه به صورت زیر است.

$$S=\{(x,y)\,|\,x,y\in W\}$$

مثلاً برآمد $(۲,۱)$ یعنی عقاب ۲ گل و اتحاد ۱ گل زده است و برآمد $(۱,۲)$ یعنی عقاب ۱ گل و اتحاد ۲ گل به ثمر رسانده است.

ه) یک خانواده که ۳ فرزند دارند را تصادفاً انتخاب می‌کنیم و جنس فرزندان را به ترتیب نزولی سن می‌نویسیم. اگر B نمایش جنس پسر و G نمایش جنس دختر باشد، آنگاه:

$$S=\{BBB,BBG,BGB,BGG,GBB,GBG,GGB,GGG\}$$

مثلاً برآمد BGG یعنی فرزند اول پسر، فرزند دوم دختر و فرزند سوم دختر است.

پیشامد

تعریف:

فرض کنید مجموعهٔ S یک فضای نمونه برای یک آزمایش تصادفی است. به هر یک از زیرمجموعه‌های S یک «پیشامد» می‌گوییم.

مثال:

یک خانواده که دقیقاً ۳ فرزند دارند به تصادف انتخاب می‌کنیم و و همانطور که دیدیم فضای نمونه به صورت زیر است.

$$S=\{BBB,BBG,BGB,BGG,GBB,GBG,GGB,GGG\}$$

الف) این اتفاق که فرزند وسط پسر باشد، یک **پیشامد** است و برابر با یک **زیرمجموعهٔ** از S است:

$$\{BBB,BBG,GBB,GBG\}\subseteq S$$

ب) پیشامد اینکه این خانواده تنها ۲ دختر داشته باشد:

$$\{BGG,GBG,GGB\}\subseteq S$$

ج) این اتفاق که تعداد فرزندان دختر با پسر برابر باشد، یک پیشامد است، ولی هیچوقت رخ نمی‌دهد:

$$\varnothing\subseteq S$$

بنابراین $\varnothing$ همیشه یک پیشامد برای هر آزمایش تصادفی است.

اگر برآمد یک آزمایش تصادفی عضو پیشامد مورد نظر باشد، می‌گوییم آن پیشامد **رخ داده است**. مثلاً در انتخاب تصادفی یک خانواده که دقیقاً ۳ فرزند دارند، پیشامد اینکه تعداد فرزندان دختر بیشتر از پسر باشد را A می‌نامیم:

$$A=\{BGG,GBG,GGB,GGG\}$$

فرض کنید یک خانواده به تصادف انتخاب کرده‌ایم و نام فرزندان این خانواده به ترتیب سن ملیکا، علی و سارا باشد. در این صورت پیشامد A رخ داده است، زیرا نتیجهٔ این آزمایش GBG است که عضو A می‌باشد.

مثال:

در آزمایش پرتاب دو سکه، هر برآمد شامل ۲ عدد است. مثلاً منظور از $(۲,۳)$ یعنی پرتاب اول ۲ و پرتاب دوم ۳ آمده است. بنابراین فضای نمونه شامل $۶\times۶=۳۶$ عضو زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۲,۱),(۲,۲),\ldots,(۶,۶)\}$$

فرض کنید دو سکه را به تصادف پرتاب کرده‌ایم و $(۱,۶)$ آمده است.

الف) پیشامد اینکه تاس اول ۶ بیاید $\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ است ولی این پیشامد رخ نداده است.

ب) پیشامد اینکه اختلاف دو تاس ۵ باشد $\{(۱,۶),(۶,۱)\}$ است و این پیشامد رخ داده است.

ج) پیشامد اینکه اختلاف دو تاس ۶ باشد $\varnothing$ است. $\varnothing$ پیشامدی است که هیچ‌وقت رخ نمی‌دهد. چون عضوی ندارد.

محاسبهٔ احتمال

به میزان اطمینان یا عدم اطمینان از رخ دادن یک پیشامد، احتمال رخ دادن آن پیشامد می‌گوییم. احتمال رخ دادن یک پیشامد، عددی بین ۰ تا ۱ است که می‌تواند خود ۰ یا ۱ نیز باشد. هر چه احتمال به ۱ نزدیکتر باشد، با اطمینان بیشتری امید داریم تا این پیشامد رخ دهد. هر چه احتمال به ۰ نزدیکتر باشد، کمتر انتظار داریم تا این پیشامد به وقوع بپیوندد. اگر پیشامدی نمی‌تواند رخ دهد، احتمال آن ۰ و اگر حتماً به وقوع می‌پیوندد احتمال آن ۱ است.

تعریف:

در بسیاری از مواقع انتظار ما در مورد اینکه نتیجهٔ یک آزمایش کدام برآمد است، برای همهٔ برآمدها یکسان است. یعنی امید یکسانی به همهٔ برآمدها داریم تا نتیجهٔ آزمایش مورد نظر باشند. در این صورت می‌گوییم این فضای نمونه، شامل برآمدهای «هم شانس» است.

مثال:

جعبه‌ای شامل ۱ مهره‌ی قرمز (R) و ۱۰۰ مهره‌ی آبی (B) است. ۱ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم و رنگ آن را اعلام می‌کنیم. بنابراین یک فضای نمونه برای این آزمایش مجموعهٔ زیر است:

$$T=\{R,B\}$$

با توجه به فضای نمونهٔ T، روشن است که احتمال رخ دادن پیشامد $\{R\}$ خیلی کمتر از احتمال رخ دادن پیشامد $\{B\}$ است. واضح است اگر مهره‌ها را شماره گذاری کنیم، انتظار ما از قرمز بودن یا آبی بودن مهرهٔ خارج شده تغییر نمی‌کند. ولی فضای نمونهٔ ما به مجموعهٔ زیر تغییر کرده است:

$$S=\{R_۱,B_۱,B_۲,B_۳,\dots,B_{۱۰۰}\}$$

روشن است که احتمال خارج شدن هر یک از این ۱۰۱ مهره با هم مساوی است. بنابراین S شامل برآمدهای هم شانس است، درحالیکه T مجموعه‌ای از دو برآمد غیرهم‌شانس می‌باشد.

تعریف:

فرض کنید S یک فضای نمونه برای یک آزمایش تصادفی باشد. اگر S شامل برآمدهای هم شانس باشد، در این صورت احتمال رخ دادن یک پیشامد مانند A که با $P(A)$ نشان می‌دهیم برابر با نسبت زیر است:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

بنابراین در مثال اخیر، احتمال اینکه مهرهٔ خارج شده قرمز باشد برابر با $\frac{۱}{۱۰۱}$ و احتمال اینکه آبی باشد برابر با $\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$ است.

مثال:

هر یک از اعداد طبیعی دو رقمی را روی یک کارت به طور جداگانه می‌نویسیم و یک کارت را به تصادف انتخاب کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟

ب) A پیشامد این است که عدد روی کارت مضرب ۴ باشد. A چند عضوی است؟

ج) احتمال رخ دادن پیشامد A چند است؟

د) چقدر احتمال دارد که پیشامد A رخ ندهد؟

پاسخ:

الف) تعداد اعضای فضای نمونهٔ این آزمایش برابر با $۹۹-۱۰+۱=\boxed{۹۰}$ است. پس $n(S)=۹۰$.

ب) تعداد مضارب طبیعی عدد ۴ که کوچکتر یا مساوی ۹۹ هستند برابر با خارج قسمت تقسیم ۹۹ بر ۴ است:

$$\begin{array}{r|l} ۹۹ & ۴ \\ \cline{2-2} -۹۶ & \boxed{۲۴} \\ \cline{1-1} ۳ & \end{array}$$

تعداد مضارب طبیعی عدد ۴ که کوچکتر یا مساوی ۹ هستند برابر با خارج قسمت تقسیم ۹ بر ۴ است:

$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۴ \\ \cline{2-2} -۸ & \boxed{۲} \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

حاصل تفریق $\boxed{۲۲} = ۲۴ - ۲$ برابر با تعداد مضارب دورقمی ۴ است. بنابراین $n(A) = ۲۲$ است.

ج) چون فضای نمونهٔ S شامل برآمدهای هم شانس است، بنابراین احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۴ باشد برابر است با:

$$\frac{۲۲}{۹۰} = \boxed{\frac{۱۱}{۴۵}}$$

د) پیشامد اینکه A رخ ندهد را با A' (بخوانید "A پریم") نشان می‌دهیم. بنابراین A و A' دو زیرمجموعهٔ جدا از هم هستند که اجتماع این دومجموعه برابر با S است:

$$A \cap A' = \varnothing$$
$$A \cup A' = S$$

پس A' شامل عضوهایی است که مضرب ۴ نیستند. بنابراین این پیشامد $\boxed{۶۸} = ۹۰ - ۲۲$ عضو دارد و احتمال رخ دادن این پیشامد برابر است با:

$$\frac{۹۰-۲۲}{۹۰} = \frac{۹۰}{۹۰} - \frac{۲۲}{۹۰} = \boxed{۱ - \frac{۲۲}{۹۰}} = \boxed{\frac{۳۴}{۴۵}}$$

تمرین:

۱) در یک آزمایش تصادفی می‌خواهیم یک عدد طبیعی یک رقمی انتخاب کنیم. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) فضای نمونه را پیدا کنید.

ب) A پیشامد این است که عدد انتخاب شده زوج باشد. A را بدست آورید.

ج) B پیشامد این است که عدد انتخاب شده مربع کامل باشد. B را بدست آورید.

د) C پیشامد این است که عدد انتخاب شده عددی مرکب باشد. C را بدست آورید.

ه) D پیشامد این است که C رخ نداده باشد. D را بدست آورید.

ه) E پیشامد این است که A یا B رخ داده باشد. E را بدست آورید.

و) F پیشامد این است که B و C رخ داده باشد. F را بدست آورید.

ز) برآمد یک آزمایش عدد ۲ است. کدام پیشامدهای بالا رخ داده است؟

ح) برآمد آزمایش چه عددی باشد تا فقط یکی از پیشامدهای بالا رخ دهد؟

۲) جعبه‌ای شامل ۱ مهره‌ی قرمز و ۱۰۰ مهره‌ی آبی است. به نظر شما احتمال کدام پیشامد ۰ و کدام پیشامد ۱ و کدام پیشامد عددی بین ۰ و ۱ است؟

الف) ۲ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم. پیشامد اینکه هر دو مهره آبی باشد.

ب) ۲ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم. پیشامد اینکه هر دو مهره قرمز باشد.

ج) ۲ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم. پیشامد اینکه حداقل یکی از مهره‌ها آبی باشد.

د) ۲ مهره از این جعبه خارج می‌کنیم. پیشامد اینکه حداقل یکی از مهره‌ها قرمز باشد.

۳) در یک آزمایش تصادفی پیشامد A و پیشامد B را در نظر گرفته‌ایم. اگر $A \subseteq B$ باشد، در مورد درستی هر یک از گزاره‌های زیر چه می‌توان گفت؟

- اگر پیشامد A رخ دهد، پیشامد B نیز رخ می‌دهد.
- اگر پیشامد B رخ دهد، پیشامد A نیز رخ می‌دهد.
- ممکن است پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد B رخ ندهد.
- احتمال رخ دادن پیشامد A کمتر از پیشامد B است.

۴) دو تاس به تصادف می‌ریزیم. احتمال پیشامدهای زیر را با هم مقایسه کنید:

A : پیشامد اینکه حاصلضرب عدد دو تاس فرد باشد.

B: پیشامد اینکه مجموع عدد دو تاس زوج باشد.

۵) در یک آزمایش تصادفی احتمال رخ دادن پیشامد A با احتمال رخ دادن پیشامد B مساوی است. آیا نتیجه می‌شود که $A=B$ است؟

۶) یک خانواده با ۴ فرزند را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را با هم مقایسه کنید:

A : پیشامد اینکه تعداد فرزندان دختر با پسر مساوی باشد.

B : پیشامد اینکه فقط یک فرزند پسر داشته باشند.

C: پیشامد اینکه فقط سه فرزند پسر داشته باشند.

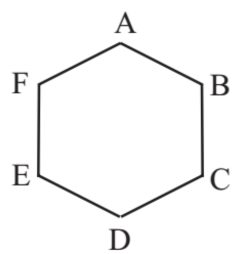
۷) احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) سه بار یک سکه را می‌اندازیم. پیشامد اینکه حداقل دو شیر بیاید.

ب) ۱۰ بار یک سکه را می‌اندازیم. پیشامد اینکه حداقل یک خط بیاید.

ج) از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه بر ۳ قابل قسمت باشد.

۸) سه رأس از رئوس یک شش ضلعی منتظم به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مثلثی با این سه رأس، قائم الزاویه باشد چقدر است؟



۹) در یک آزمایش تصادفی ۳ پیشامد A، B و C را در نظر گرفته‌ایم که اشتراک هر دو پیشامد تهی است.

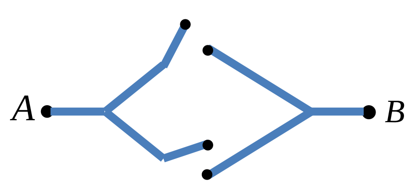
الف) آیا می‌تواند $P(A)=۰/۴$، $P(B)=۰/۴$ و $P(C)=۰/۴$ باشد؟

ب) آیا می‌تواند $P(A)=۰/۸$، $P(B)=۰/۶$ و $P(C)=-۰/۲$ باشد؟

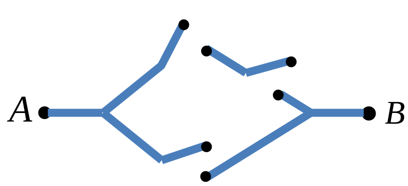
ج) آیا می‌تواند $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(C)=\frac{۱}{۴}$ باشد؟

د) اگر $P(A)=۱$ باشد، در مورد $P(B)$ و $P(C)$ چه می‌توان گفت؟

۱۰) هر شکل زیر یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که هر کلید با احتمال یکسانی باز یا بسته می‌شود. در هر مورد حساب کنید چقدر احتمال دارد تا جریان الکتریکی بین A و B برقرار شود؟



الف)



ب)

۱۱) اگر یک عدد ۳ رقمی به تصادف انتخاب شود، احتمال رخ دادن پیشامدهای زیر را حساب کنید:

الف) پیشامد اینکه رقم یکان این عدد ۵ نباشد.

ب) پیشامد اینکه دقیقاً یک رقم آن بزرگتر از ۵ باشد.

ج) پیشامد اینکه حداقل یک رقم آن زوج داشته باشد.

د) پیشامد اینکه هیچ رقم آن ۱ نباشد.

۱۲) در یک کاسه ۳ مهرهٔ قرمز، ۸ مهرهٔ زرد و ۱۳ مهرهٔ سبز و در کاسهٔ دیگر ۵ مهرهٔ قرمز، ۷ مهرهٔ زرد و ۶ مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از هر کاسه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این دو مهره همرنگ باشند چقدر است؟

۱۳) در یک ظرف ۱۰ توپ وجود دارد که با اعداد ۱ تا ۱۰ شماره گذاری شده است. ۴ توپ به تصادف بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه دومین توپ از نظر بزرگی عدد، ۸ باشد چقدر است؟

۱۴) در یک جعبه ۷ لامپ سالم و ۲ لامپ سوخته وجود دارد. ۲ لامپ از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه هنوز در این جعبه لامپ سوخته وجود داشته باشد چقدر است؟

۱۵) در یک کیسه ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. دو مهره از این کیسه خارج می‌کنیم:

الف) اگر مهرهٔ اول آبی باشد، احتمال اینکه مهرهٔ دوم قرمز باشد چقدر است؟

ب) اگر رنگ مهرهٔ اول را ندانیم، با چه احتمالی مهرهٔ دوم قرمز است؟

۱۶) سه رأس از یک شش ضلعی منتظم را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مثلث حاصل از این سه رأس، متساوی الاضلاع باشد؟

۱۷) دو پیشامد A و B طوری هستند که $A \bigcup B = S$ و $A \bigcap B = \varnothing$ است. اگر $۲ \times P(A) = ۳ \times P(B)$ باشد، احتمال رخ دادن هر یک از این دو پیشامد را بدست آورید.

۱۸) دو عدد دو رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این دو عدد پشت سر هم نباشند چقدر است؟

۱۹) اگر در مورد دو پیشامد A و B بدانیم $P\left(A \bigcup B\right) = P\left(A \bigcap B\right)$ ، آنگاه در مورد درستی کدام گزاره یقین دارید؟

الف) $P\left(A\right) = P\left(B\right)$ ب) $P\left(A\right) < P\left(B\right)$ ج) $A = B = S$

۲۰) در یک سال که کبیسه نیست، احتمال اینکه ۵۳ تا سه شنبه یا ۵۳ چهارشنبه داشته باشیم چقدر است؟