بسم الله

جزوه درس

مدارهای الکتریکی ۱

تهیه کننده: زرگری نژاد

فصل اول: مقدمه

۱. مقدمه:

مدار الکتریکی، مدل ریاضی توصیف کننده یک سیستم واقعی است که رفتار آن را تخمین می‌زند. مدارهای الکتریکی مهمترین اصل در یادگیری رشته مهندسی برق و کامپیوتر می‌باشند که در طراحی و کار با تمام سیستم‌های حقیقی کاربرد دارند.

عبارت «مدار الکتریکی»، عموماً به یک سیستم واقعی الکتریکی به همراه مدل نمایشگر آن گفته می‌شود. تئوری مدار یک حالت خاص از تئوری الکترومغناطیس می‌باشد که هدف آن مطالعه بارهای الکتریکی ثابت و متحرک است.

اگرچه مطالعه دقیق الکترومغناطیس به عنوان یک درس پیش‌نیاز برای درس مدارهای الکتریکی الزامی نیست، اما مطالعه مطالب مربوط به الکترومغناطیس در درس فیزیک لازم می‌باشد. اما فرض‌های زیر این امکان را به ما می‌دهند تا از تئوری مدارهای تئوری الکترومغناطیس برای مطالعه یک سیستم فیزیکی که تنها با یک مدل مداری نشان داده شده است، استفاده کنیم:

1. سیگنال‌های الکتریکی در یک سیستم تأثیرگذاری آنی را دارند یعنی از آنجا که این سیگنال‌ها تقریباً با سرعت نور حرکت می‌کنند، لذا در یک سیستم فیزیکی کوچک، در همه نقاط تأثیرگذاری این سیگنال‌ها همزمان فرض می‌شود.

2. مجموع بار در هر یک از اجزای سیستم الکتریکی، صفر است.

3. القای مغناطیسی بین اجزای سیستم وجود نخواهد داشت.

۲. سیستم استاندارد بین المللی واحدها (SI)

(The International system of Units)

سیستم استاندارد بین المللی واحدها بر اساس هفت مقدار پایه گذاری شده است. این مقادیر به همراه واحد و نماد هر کدام در جدول 1.1 آمده است.

مقدار	واحد	نماد
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
جریان الکتریکی	آمپر	A
دمای ترمودینامیکی	درجه کلوین	K
مقدار ماده	مول	mol
شدت درخشندگی	کاندلا	cd

جدول ۱.۱

علاوه بر مقادیر اصلی فوق ترکیبی از این مقادیر می‌تواند مقادیر جدیدی را ایجاد نماید. جدول ۲.۱ مشتقات مقادیر جدول ۱.۱ را نمایش می‌دهد.

مقدار	واحد	نماد
فرکانس	هرتز (Hz)	s^{-1}
نیرو	نیوتن (N)	$kg.m/s^2$
کار یا انرژی	ژول (J)	$N.m$
توان	وات (W)	J/s
بار الکتریکی	کولن (C)	$A.s$
پتانسیل الکتریکی	ولت (V)	J/C
مقاومت الکتریکی	اهم (Ω)	V/A
هدایت الکتریکی	زیمنس (S)	A/V
ظرفیت الکتریکی	فاراد (F)	C/V
شار مغناطیسی	وبر (Wb)	$V.s$
ضریب القا	هانری (H)	Wb/A

جدول ۲.۱

اندازه واحدهای SI در بعضی از مسائل بسیار کوچک و یا بسیار بزرگ می‌باشد، بطوریکه کار با آنها را مشکل می‌کند. پیشوندهای استاندارد متناسب با توان عدد ۱۰ مطابق جدول ۳.۱ در کنار عدد اصلی این واحدها برای ساده سازی قرار می‌گیرند.

پیشوند	نماد	توان عدد ۱۰
آتو	a	10^{-18}
فمتو	f	10^{-15}
پیکو	p	10^{-12}
نانو	n	10^{-9}
میکرو	μ	10^{-6}
میلی	m	10^{-3}
سانتی	c	10^{-2}
دسی	d	10^{-1}
دکا	da	10
هکتو	h	10^{2}
کیلو	k	10^{3}
مگا	M	10^{6}
گیگا	G	10^{9}
ترا	T	10^{12}

معمولاً مهندسین برق و کامپیوتر از توان‌هایی که مضربی از عدد ۳ هستند استفاده می‌کنند. همچنین سعی می‌شود که اینها در عدد اصلی بین ۱ تا ۱۰۰۰ قرار گیرد.

▶ مثال ۱.۱:

اگر سیگنالی با ۸۰٪ سرعت نور از یک کابل عبور کند، چه طولی از کابل را در حین [illegible] در 1ns می‌پیماید؟

C: سرعت نور $= 3\times10^{8}\, m/s$ ← v: سرعت سیگنال $= 0.8\times3\times10^{8} = 2.4\times10^{8}\, m/s$

$v = x/t$ ← سرعت $[m/s]$ ، فاصله $[m]$ ، زمان $[s]$; $2.4\times10^{8} = \dfrac{x}{10^{-9}} \Rightarrow x = 24\times10^{-2}\, m/s$

$$1^{inch} = 2.54\ cm \rightsquigarrow 1^{m} = 100 \times \frac{1}{2.54} = 39.37\ inch$$

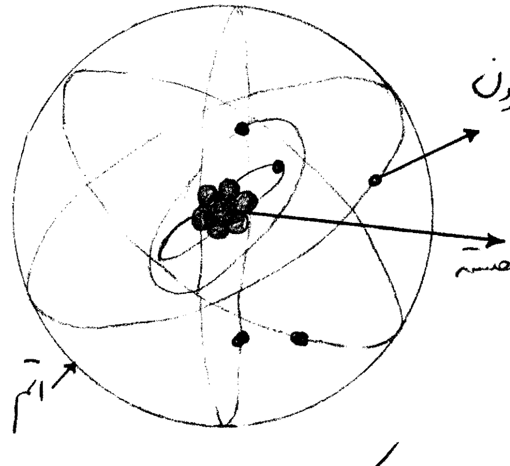
$$\rightsquigarrow V = 24 \times 10^{-2} \times 39.37 = 9.45\ (inch/s)$$

۲. متغیرهای شبکه:

از آنجا که ارتباط اجزای ایده‌آل مدار را می‌توان برای تخمین کمی رفتار سیستم استفاده نمود، این ارتباطات را بصورت معادلات ریاضی توصیف می‌کنند. کمیت‌های این معادلات مقادیر قابل اندازه‌گیری هستند که متغیرهای شبکه نامیده می‌شوند.

الف) بار الکتریکی:

اتم‌های یک ماده از ذرات بنیادین الکترون، پروتون و نوترون تشکیل شده‌اند. تعداد الکترون‌ها و پروتون‌های هر اتم با یکدیگر برابر است. پروتون دارای بار مثبت و الکترون دارای بار منفی می‌باشد. بنابراین اتم از نظر الکتریکی خنثی است.



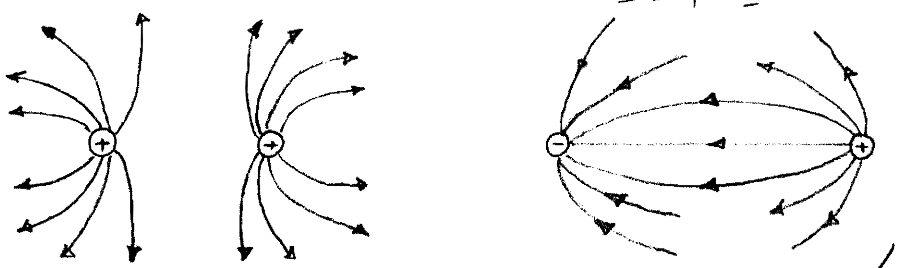
اگر تعداد الکترون‌های یک اتم بیشتر از پروتون‌های آن باشد، اتم از نظر الکتریکی دارای بار منفی خواهد بود.

اگر تعداد پروتون‌های یک اتم بیشتر از الکترون‌های آن باشد اتم از نظر الکتریکی دارای بار مثبت خواهد بود.

بار الکتریکی هر ماده با $q(t)$ نمایش داده می‌شود و واحد آن کولن (C) می‌باشد.

- هر کولن بار معادل با مجموع بار الکتریکی 6.3×10^{18} الکترون می‌باشد.
- بار هر الکترون معادل با 1.6×10^{-19} در نظر گرفته می‌شود.
- خصوصیات الکتریکی هم با جداسازی بارهای مثبت و منفی و هم با حرکت این بارها بوجود می‌آید.

مهم‌ترین اثر بارهای الکتریکی، توانایی آن‌ها در تولید نیروهای جاذبه یا دافعه می‌باشد. بارهای الکتریکی همنام یکدیگر را دفع و بارهای الکتریکی غیرهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

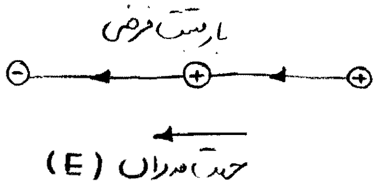


جذب و دفع بارهای الکتریکی توسط جاذبه نیروهای جاذبه و دافعه ایجاد شده می‌باشد که نیروی وارد بر هر یک از ذرات به مقدار مساوی است.

ب) میدان الکتریکی:

هر بار الکتریکی که در نزدیکی بار دیگری قرار گیرد، به آن بار نیرویی به صورت جاذبه یا دافعه وارد خواهد شد. به عبارتی در اطراف هر بار الکتریکی محدوده‌ای وجود دارد که به بارهای الکتریکی موجود در آن محدوده نیرو وارد می‌کند. به نیروی وارده نیروی الکتریکی و به این محدوده میدان الکتریکی گوییم. هرچه از بار الکتریکی دورتر شویم تأثیر میدان یعنی نیروی الکتریکی کمتری خواهیم داشت.

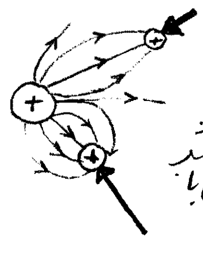
میدان الکتریکی را با خطوط جهت‌دار نشان می‌دهند. برای تعیین جهت میدان یک بار مثبت فرضی را در میدان قرار داده و جهت نیروی وارد شده بر آن بار فرضی را جهت میدان در نظر می‌گیرند.



- میدان الکتریکی با E نمایش داده می‌شود.

ج) انرژی الکتریکی:

اگر بخواهیم بار الکتریکی را در یک میدان الکتریکی و در خلاف جهت آن جابجا کنیم، نیاز به انجام کار و صرف انرژی می‌باشد.



- انرژی الکتریکی می‌تواند از انواع دیگر انرژی‌ها از قبیل شیمیایی، مغناطیسی و مکانیکی و... ایجاد شود.
- انرژی الکتریکی را با $W(t)$ نشان داده و واحد آن ژول (J) می‌باشد.

: طول پیکان نشان دهنده شدت نیرو می‌باشد

د) جریان الکتریکی:

• در صورتیکه یک بار الکتریکی بین دو صفحه به حرکت دربیاید، به نرخ حرکت این بار برحسب زمان را جریان الکتریکی گوییم.

• جریان الکتریکی را با $i(t)$ نمایش داده و واحد آن آمپر (A) می باشد: $i = \frac{dq}{dt}$

• در واقع جریان یک سیم دارای تعداد بار عبوری از یک سطح مقطع صفحه در واحد زمان می باشد.
$\rightsquigarrow q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$

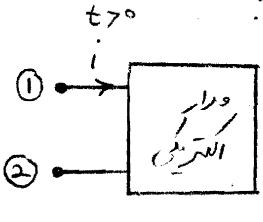
$[A] = \left[\frac{C}{S}\right]$: آمپر $\equiv$ کولن / ثانیه

▸ مثال ۲.۱:

برای $t<0$ هیچ باری در پایانه ۱ شکل زیر وجود ندارد. در $t=0$ یک جریان $5A$ از سر ۱ وارد می شود.

الف) رابطه بار جمع شده را برای $t>0$ بدست آورید.

ب) اگر جریان بعد از 10^s متوقف شود، چه مقدار بار در سر ۱ جمع شده است؟



الف) $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} 5\,d\tau = 5t^{C}$

$\rightsquigarrow q(t) = 5t \;,\; t>0$

ب) $t = 10^{s} \rightsquigarrow q(t) = q(10) = 5\times 10 = 50^{C}$

ه) ولتاژ الکتریکی:

با حرکت یک بار الکتریکی در میدان الکتریکی انرژی پتانسیل آن افزایش می یابد. انرژی یک بار الکتریکی مثبت در حال حرکت بین دو نقطه از میدان را ولتاژ الکتریکی یا اختلاف پتانسیل گویند.

• اختلاف ولتاژ را با $v(t)$ نمایش می دهند و واحد آن نیز ولت (V) می باشد.

مشابه تعریف اختلاف ولتاژ ۱ ولت، بیانگر آن است که برای حرکت بار الکتریکی به مقدار ۱ کولن بین دو نقطه مورد نظر ۱ ژول انرژی مورد نیاز است:

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)}$$

$$[v] = \left[\frac{J}{C}\right] \quad : \quad \text{ولت} \equiv \frac{\text{ژول}}{\text{کولن}}$$

و) توان الکتریکی:

تغییرات کار یا انرژی الکتریکی را برحسب زمان، توان الکتریکی می‌نامیم.

- توان الکتریکی با $p(t)$ نمایش داده می‌شود و واحد آن W (وات) می‌باشد.

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

$$[W] = \left[\frac{J}{s}\right] \quad : \quad \text{وات} \equiv \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}}$$

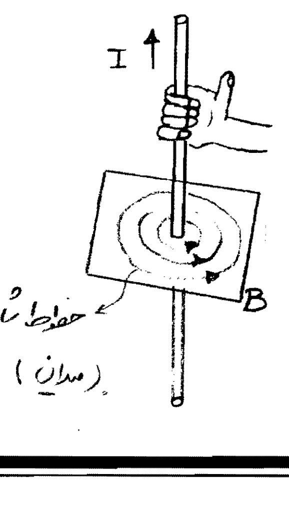
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$$

- با توجه به رابطه ولتاژ و جریان داریم:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dw(t)}{dq(t)}}_{v(t)} \cdot \underbrace{\frac{dq(t)}{dt}}_{i(t)} = v(t) \cdot i(t)$$

ز) شار مغناطیسی:

عبور جریان الکتریکی از یک سیم هادی منجر به ایجاد میدان مغناطیسی در اطراف آن خواهد شد. جهت این میدان را می‌توان با قانون دست راست تعیین آورد.



هرچه به سیم نزدیکتر شویم، تراکم خطوط بیشتر می‌شود. اگر یک سطح بسته محدود به دور آن بگیریم تعداد خطوط میدانی که از این سطح بسته عبور می‌کند را شار مغناطیسی گویند.

- شار مغناطیسی را با $\Phi(t)$ نشان می‌دهند و واحد آن وبر (Wb) می‌باشد.

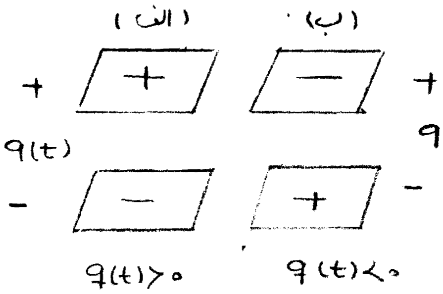
تغییرات شار مغناطیسی سبب القای ولتاژ الکتریکی خواهد شد.

$$v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad \phi(t)=\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

$$[v]=\left[\frac{Wb}{s}\right]$$ ؛ ولت $\equiv$ وبر / ثانیه

۳. تعیین جهت های مبنا برای متغیرهای الکتریکی:

الف) جهت های مبنا برای متغیر بار الکتریکی:

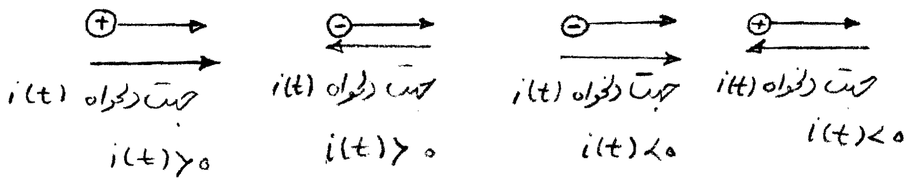


بین دو صفحه دارای بارهای مثبت و منفی مانند شکل های روبرو صفحه ای که دارای بار مثبت بیشتری است با علامت مثبت به شکل $q(t)$ می باشد. پس اگر بخواهیم $q(t)$ را با علامت خاص تعریف کنیم اگر علامت + بر روی صفحه ای که بار مثبت بیشتری دارد قرار گیرد، $q(t)>0$ و بالعکس خواهد بود.

ب) جهت های مبنا برای متغیر جریان الکتریکی:

بر طبق تعریف جهت جریان در جهت حرکت بار مثبت می باشد. بنابراین اگر جهت حرکت الکترون ها را بدانیم جهت جریان خلاف جهت حرکت الکترون ها (در جهت حرکت بار مثبت فرضی) می باشد.

برای تعیین علامت جریان الکتریکی اگر جهتی را به طور دلخواه برای جریان در نظر بگیریم و این جهت هم راستا با حرکت بار مثبت باشد $i(t)>0$ و اگر در خلاف آن باشد (هم جهت با حرکت الکترون) $i(t)<0$ خواهد بود.

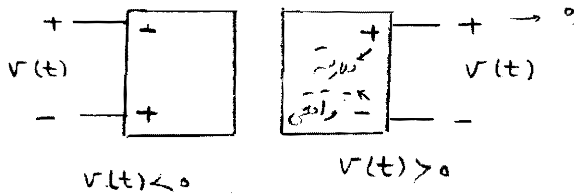


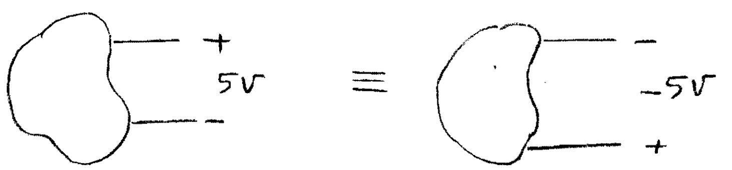
معادل است با

دو نمایش مختلف برای نشان دادن جریان یک مسیر

ج) جهت مبنا برای ولتاژ الکتریکی:

اگر پلاریته‌ای که به ولتاژ دو نقطه بطور دلخواه اختصاص می‌دهیم با پلاریته ولتاژ واقعی آن دو نقطه یکسان باشد، $v(t)>0$ و اگر خلاف آن باشد $v(t)<0$ خواهد بود.





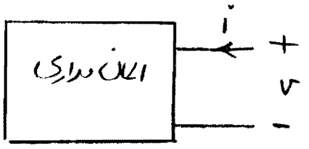
دو حالت مختلف برای نشان دادن ولتاژ بین دو نقطه

د) علامت قراردادی برای توان الکتریکی:

برای نشان دادن روش تعیین علامت توان الکتریکی از قرارداد علامت گذاری پسیو استفاده می‌کنیم:

◀ قرارداد علامت گذاری پسیو:

هرگاه جهت مبنا برای جریان در یک عنصر در جهت کاهش ولتاژ مبنا باشد (مطابق شکل)، در رابطه ای که ولتاژ و جریان را به هم مربوط می‌سازد، از علامت مثبت استفاده می‌شود. در غیر اینصورت علامت این رابطه منفی خواهد بود.



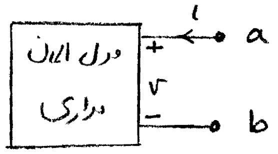
از آنجا که $p(t)=v(t)i(t)$ تعریف رابطه بین جریان و ولتاژ المان‌های مداری است برای تعیین علامت آن می‌توان از قانون علامت گذاری پسیو استفاده نمود.

طبق قانون علامت گذاری پسیو اگر جریان از سر مثبت ولتاژ به المان وارد شود علامت توان مثبت و اگر از سر منفی ولتاژ وارد شود علامت توان منفی خواهد بود.

علامت توان ربطی به علامت جریان و ولتاژ ندارد. برای تعیین علامت‌های جبری توان، ولتاژ و جریان از روش زیر استفاده می‌کنیم:

گام اول:

ابتدا یک مدل المان را با جریان و ولتاژ دلخواه بصورت مدل مبنا تعیین می‌کنیم. (مدل استفاده شده در شکل زیر بهترین مدل می‌باشد اما اجباری نیست)



گام دوم:

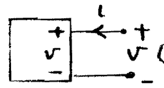
اکنون با استفاده از مدل فوق و قانون علامت گذاری سو علامت جبری توان این المان را مشخص می‌کنیم. از آنجا که جریان از سر مثبت ولتاژ به المان وارد می‌شود علامت توان مثبت خواهد بود (جریان در جهت افت ولتاژ می‌باشد)

گام سوم:

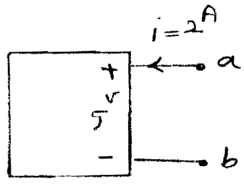
اکنون المانی را که می‌خواهیم مقدار توان را برای آن محاسبه کنیم با مدل فوق مقایسه می‌کنیم. اگر جریان به سر مثبت ولتاژ وارد شود علامت جبری آن را مثبت و در غیر اینصورت منفی در نظر می‌گیریم.

مثال ۳.۱.

در هر یک از حالات زیر توان المان داده شده را محاسبه نمایید:

برای تمام مدارها از مدل مداری  استفاده می‌کنیم

(الف)

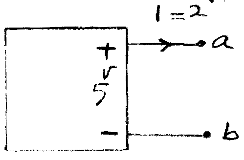


$$p(t) = v(t)\,I(t) = +(+5)(+2) = +10 \text{ W}$$

علامت توان با توجه به مدل + می‌باشد.

جریان مدار از سر مثبت وارد می‌شود

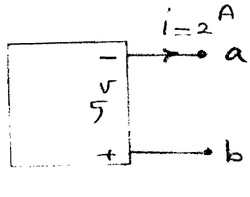
(ب)



$$P(t) = +(+5)(-2) = -10 \text{ W}$$

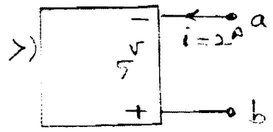
جریان مدار از سر منفی وارد می‌شود

(ج)



$$P(t) = +(+5)(+2) = +10 \text{ W}$$

جریان به سر مثبت وارد می‌شود



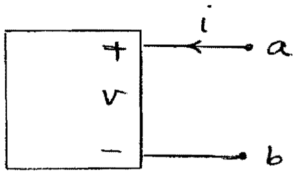
$$p(t) = +(+5)(-2) = -10 \ W$$

▶ نکته مهم: اگر توان المانی در مدار مثبت باشد ($P \geq 0$) این عنصر یا المان مداری از مدار توان جذب می‌کند،
همچنین اگر توان المانی در مدار منفی باشد ($P<0$) این عنصر یا المان مداری به مدار توان تزریق می‌کند
(یا بعبارتی در مدار توان تولید می‌کند.)
عنصری که در مدار توان تولید کند را عنصر اکتیو و به عنصری که از مدار توان دریافت می‌کند عنصر پسیو گویند

بنابراین در مثال ۳.۱ ، المان‌های الف و ج در مدار توان جذب و المان‌های ب و د در مدار توان تولید می‌کند.

▶ مثال ۴.۱ :

در المان مداری شکل زیر مقدار ولتاژ و جریان به شکل زیر است:

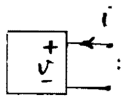


$$v(t) = \begin{cases} 10 e^{-5000t} \ \text{KV} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \quad ; \quad i(t) = \begin{cases} 20 e^{-5000t} & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

الف) توانی که در المان مداری شکل روبرو مهیا می‌شود را در لحظه $t = 1^{ms}$ بدست آورید.

ب) کل انرژی دریافتی آن را برحسب ژول محاسبه نمایید.

مدل مداری:



الف) $p(t) = +v(t)\, i(t) = +(+10000 e^{-5000t}) \cdot (+20 e^{-5000t})$

$$= 2 \times 10^5 e^{-10000t} \ W$$

$$p(0.001) = 2 \times 10^5 e^{-10000 \times 0.001} = 0.908 \ W$$

جذب می‌کند

ب) $w(t) = w(0) + \int_0^\infty p(\tau) d\tau = 0 + \int_0^\infty 2 \times 10^5 e^{-10000t'} dt'$

$$= \frac{2 \times 10^5}{-10000} e^{-10000t} \Big|_0^\infty = 20 \ J$$

▶ $w(0)$ برابر صفر است چون قبل از $t=0^+$
ولتاژ و جریانی در مدار وجود نداشته است.

۴. خصوصیات عناصر ایده آل و بنیادی مدار:

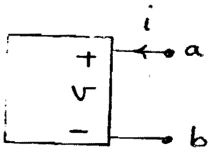
سه خاصیت مهم اجزای ایده آل و بنیادی مدارهای الکتریکی که در این جزوه با عبارت "المان مداری" بکار برده می‌شوند به شرح زیر است:

۱. هر کدام از این اجزا تنها دو سر دارند که این سرها محل اتصال این المان‌ها به المان‌های دیگر مداری می‌باشد.
۲. براساس جریان عبوری از آنها و ولتاژ دو سرشان قابل توصیف هستند.
۳. این اجزا قابل تفکیک به المان‌های دیگر مداری نیستند.

◄ نکات مهم:

۱. واژه بنیادی بخاطر خاصیت سوم بکار برده می‌شود. همچنین واژه ایده آل به جهت اینکه این المان‌ها بصورت فیزیکی وجود واقعی ندارند استفاده می‌شود.

۲. ولتاژ دو سر یک المان با دو علامت + و ـ نشان داده می‌شود. این علامت بدین معناست که سر + دارای ولتاژ مثبت نسبت به سر ـ می‌باشد و اختلاف ولتاژ بین سرهای مثبت و منفی برابر ولتاژ نشان داده شده در دو سر المان می‌باشد.



$v_a =$ ولتاژ نقطه a

$v_b =$ ولتاژ نقطه b

$\rightsquigarrow v_a - v_b = v_{ab} = v$

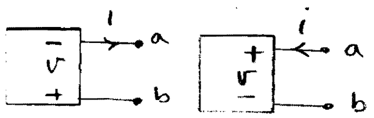
$v_a > v_b \rightsquigarrow v_{ab} > 0$

۳. جریان عبوری از این المان با یک پیکان نشان داده می‌شود. جهت پیکان بیانگر جهت عبور جریان می‌باشد.

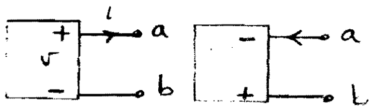
۴. اگر توان کل المان‌های یک مدار برابر صفر باشد یعنی در این مدار تعادل توان برقرار است. اگر در مداری تعادل توان برقرار نباشد، محاسبات مداری انجام شده قطعاً اشتباه می‌باشد.

کل توان مصرفی توسط المان‌های مدار = کل توان تولیدی توسط المان‌های مدار

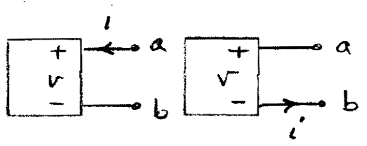
۵. المان‌های زیر دو به دو با یکدیگر معادل هستند.



(۱)



(۲)



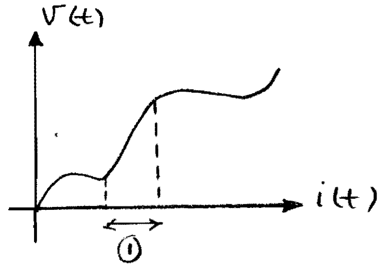
(۳)

۵. تقسیم بندی انواع عناصر شبکه های الکتریکی:

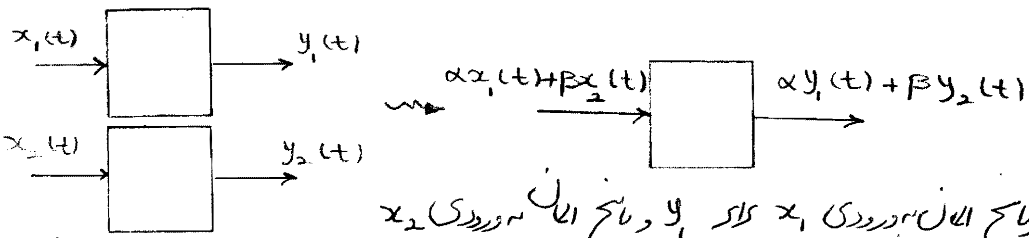
الف) خطی بودن در مقابل غیرخطی بودن یک عنصر:

زمانی که رابطه بین ورودی و خروجی یک عنصر بصورت خطی باشد، به آن عنصر خطی گویند. در غیر اینصورت عنصر غیرخطی خواهد بود. در مدارهای الکتریکی هر المان مداری دارای ورودی و خروجی، ولتاژ و یا جریان می باشد (یعنی اگر ورودی ولتاژ باشد، خروجی جریان است و بالعکس)

در عمل عنصر خطی وجود ندارد و عناصر غیرخطی در بخشی از رابطه ورودی - خروجی آنها که می توان تقریب خطی بکار برد استفاده می شود. (ناحیه ① شکل روبرو)



برای تشخیص خطی بودن یا نبودن یک المان بصورت زیر عمل می کنیم:



یعنی اگر پاسخ المان به ورودی x_1 برابر y_1 و پاسخ المان به ورودی x_2 برابر y_2 باشد، پاسخ المان به ورودی $\alpha x_1+\beta x_2$ نیز برابر $\alpha y_1+\beta y_2$ باشد.

▶ مثال ۵.۱:

کدام یک از المان های زیر خطی هستند؟

الف) $i(t) \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow v(t)=\alpha i(t)+\beta$

$i_1(t) \rightarrow v_1(t)=\alpha i_1(t)+\beta$

$i_2(t) \rightarrow v_2(t)=\alpha v_2(t)+\beta$

; $A i_1(t)+B i_2(t) \rightarrow v(t)=\alpha[A i_1(t)+B i_2(t)]+\beta$

$\neq v_1(t)+v_2(t)$ غیرخطی

ب) $v(t) \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow i(t)=K\frac{dv(t)}{dt}$

$v_1(t) \rightarrow i_1(t)=K\frac{dv_1(t)}{dt}$

$v_2(t) \rightarrow i_2(t)=K\frac{dv_2(t)}{dt}$

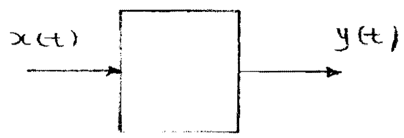
; $\alpha v_1(t)+\beta v_2(t) \rightarrow i(t)=K\frac{d}{dt}[\alpha v_1(t)+\beta v_2(t)]$

$\Rightarrow i(t)=\alpha \underbrace{K\frac{dv_1(t)}{dt}}_{i_1}+\beta\underbrace{K\frac{dv_2(t)}{dt}}_{i_2}$ خطی

ب) تغییرپذیری یا تغییرناپذیری با زمان یک عنصر:

اگر مشخصه های یک عنصر با زمان تغییر نکند، به آن عنصر تغییرناپذیر با زمان گویند. در عمل تغییرناپذیری یک خصوصیت بارز برای عناصر مداری بحساب می آید.

برای بررسی این خصوصیت بصورت زیر عمل می کنیم:



$x(t) \to y(t) \rightsquigarrow x(t \pm t_0) \to y(t \pm t_0) \rightsquigarrow$ عنصر تغییرناپذیر با زمان است.

مثال ۶.۱:

کدام یک از عناصر زیر تغییرناپذیر با زمان هستند؟

الف) $v(t) = \sin(i(t))$

$v(t-t_0) = \sin(i(t-t_0))$

$i(t-t_0) \to \sin(i(t-t_0)) = v(t-t_0)\ \checkmark$ عنصر تغییرناپذیر با زمان

ب) $v(t) = t\, i(t)$

$v(t-t_0) = (t-t_0)\, i(t-t_0)$

$i(t-t_0) \to t\, i(t-t_0) \neq v(t-t_0)\ \times$ عنصر تغییرپذیر با زمان

ج) عنصر فشرده در مقابل عنصر گسترده:

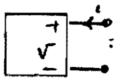
به عنصری که ابعاد فیزیکی آن در عملکرد آن تأثیری نداشته باشد عنصر فشرده گویند. در غیر اینصورت عنصر مداری مورد نظر گسترده خواهد بود.

۶. مثال های عملی:

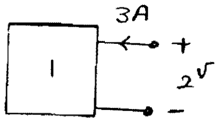
◄ مثال ۱.۷:

در سه عنصر دو سر ارائه شده در شکل های زیر، توان الکتریکی را محاسبه کنید.

مدل مرجع:

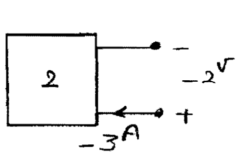


الف)



$$P=v.i=+(2V)(3A)=+6\ W$$

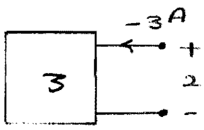
ب)



$$P=v.i=+(-2)(-3)=6\ W$$

$v=-2$ در اینجا است.

ج)



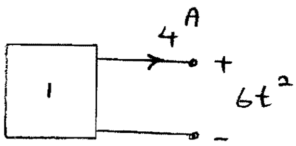
$$P=v.i=+(2)(-3)=-6\ W$$

عنصر ۱ و ۲ عناصر پسیو و عنصر ۳ عنصری اکتیو می باشد

◄ مثال ۱.۸:

توان جذب شده و انرژی انتقالی در زمان 10^s را توسط هر یک از عناصر ارائه شده در شکل های زیر بدست آورید.
(انرژی اولیه را صفر در نظر بگیرید.)

الف)



(مدل مرجع مانند مثال فوق)

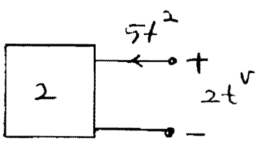
$$P(t)=v(t).i(t)=+(6t^2)(-4)=-24t^2\ W$$

$$\rightarrow P(10)=-2400\ W$$

$$W(t)=W(0)+\int^t p(t')dt'=\int_0^t -24t'^2dt'=-\frac{24t'^3}{3}\Big|_0^t=-8t^3$$

$$\rightarrow W(10)=-8000\ J$$

ب)

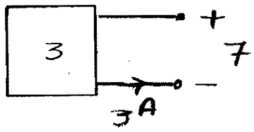


$$P(t)=v(t)\,i(t)=+(2t)(5t^2)=10t^3\ W$$

$$P(10)=10000\ W$$

$$W(t)=W(0)+\int_0^t 10t'^3dt'=\frac{10t'^4}{4}\Big|_0^t=2.5t^4$$

$$W(10)=25000\ J$$

ح)


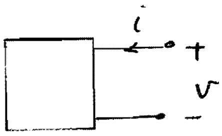
$$P = v \cdot i = +7 \times 3 = 21 \quad W$$

$$W(t) = W(0) + \int_0^t 21\, dt' = 21\, t \quad J$$

$$W(10) = 210 \ J$$

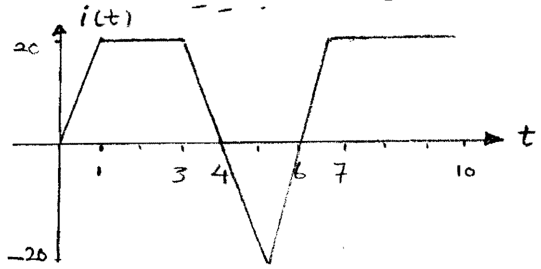
مثال ۱.۹:

ولتاژ و جریان سرهای المان مداری شکل زیر در نمودارهای زیر نشان داده شده است:

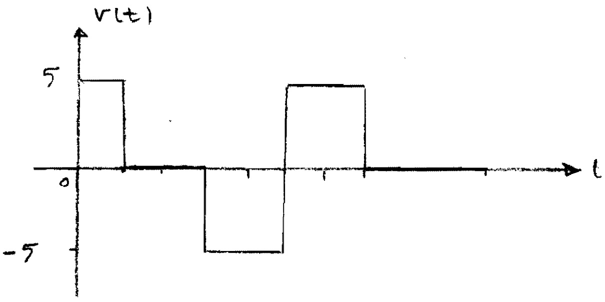


الف) نمودار توان برحسب زمان را برای $0 \leq t \leq 10^s$ رسم نمایید

ب) کل انرژی که به المان تا زمان های $t = 1, 6, 10^s$ داده می‌شود را محاسبه نمایید.

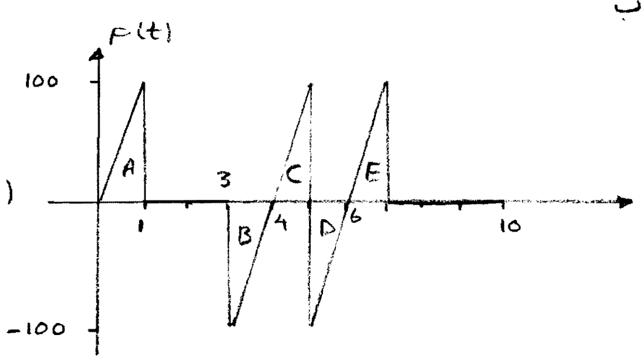


$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$



ب) $$W(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_0^t p(\tau)\, d\tau$$

الف)



$$W(1) = S_A = \frac{1 \times 100}{2} = 50 \ J$$

$$W(6) = \cancel{S_A} - \cancel{S_B} + \cancel{S_C} - \cancel{S_D} = 0 \ J$$

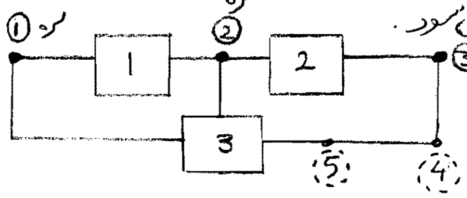
$$W(10) = S_A - S_B + S_C - S_D + S_E$$

$$= 50 \ J$$

◄ فصل دوم : قوانین کیرشهف

۱. آشنایی با تعاریف مهم :

الف) مفهوم گره : به نقاط اتصال المان ها در مدار گره گفته می شود.

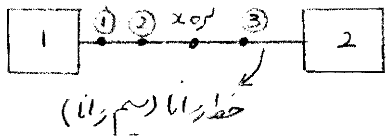


هر قطعه از خطی که دو المان را به یکدیگر متصل می کند را می توان بعنوان گره در نظر گرفت.

بعنوان مثال نقاط ④ و ⑤ در مدار شکل فوق گره جدیدی را تعریف نمی کنند و در واقع همان گره ③ می باشند.

برای نقاطی که بیش از دو عنصر را به یکدیگر متصل می کند نقطه گره را می توان روی هر یک از خطوطی که المان های متصل به گره را بهم وصل می کند در نظر گرفت.

ب) خطوط رسانا : خطوطی که برای اتصال المان ها به یکدیگر بکار می روند را خطوط رسانا گویند. تمام نقاط یک خط رسانا که بین دو المان و یا بیشتر قرار دارد هم پتانسیل هستند یعنی ولتاژ این نقاط یکسان می باشد.

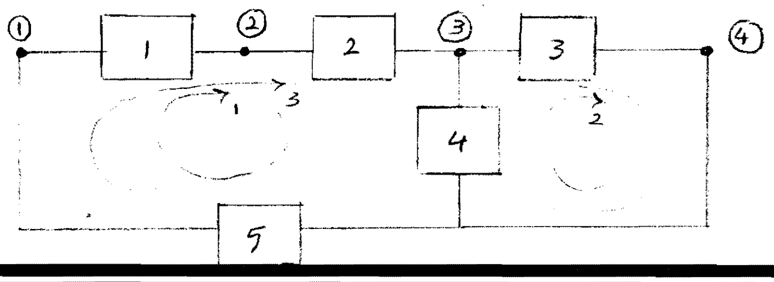


$$V_1 = V_2 = V_3 = V_x$$
$$i_1 = i_2 = i_3 = i_x$$

◄ برای نقاط هم پتانسیل تنها یک گره می توان تعریف نمود.

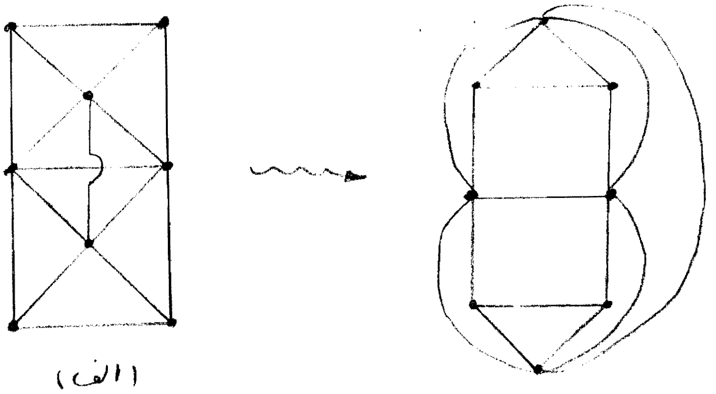
ج) شاخه: به هر عنصر یا المان در مدار که تنها دو سر دارد یک شاخه گویند. هر شاخه مدار بین دو گره واقع شده است. در مدار شکل اول المان های ۱ و ۲ و ۳ هر یک شاخه محسوب می شوند.

د) مسیر بسته : مسیر بسته، مسیری است که با شروع از یک گره انتخابی از المان های بسیاری مدار عبور کند و دوباره به همان گره باز گردد. همچنین در مسیر از ابتدا تا انتها از هیچ گره ای بیش از یکبار عبور نکند.

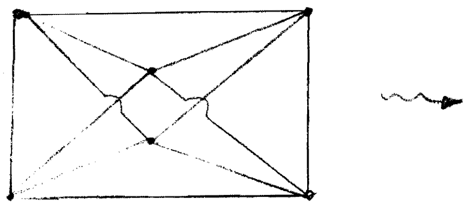


در شکل زیر دو سه مسیر بسته محتمل نشان داده شده است.

ه) مدار مسطح: مداری که بتوان بدون شاخه‌های متقاطع آن را روی صفحه رسم نمود را مدار مسطح گویند. در شکل‌های زیر مدار الف مسطح و مدار ب غیر مسطح می‌باشند. (برای سادگی مدار را بصورت گراف نشان داده‌ام)



(الف)



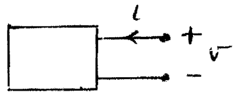
این مدار را نمی‌توان بصورت مسطح رسم نمود.

ب

۲. قوانین کیرشهف:

برای هر المان در یک مدار الکتریکی می‌توان ولتاژ و جریان مشخص نمود. علامت ولتاژ و جهت جریانی که برای هر المان در مدار مشخص می‌کنیم کاملاً دلخواه می‌باشد. اما از هر مدلی برای یک المان مدار استفاده می‌شود بهتر است برای تمام المان‌های مدار نیز از همان مدل استفاده گردد.

در این بخش از مدل زیر استفاده می‌کنیم.

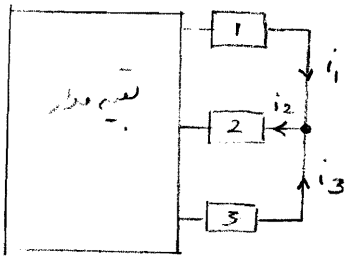


قوانین کیرشهف به اصول تحلیل مدارهای الکتریکی می‌باشند که روابط بین ولتاژهای المان‌های مختلف مدار و رابطه بین جریان‌های مختلف مدار را مشخص می‌کند. قوانین کیرشهف تنها برای مدارهای مسطح قابل اجرا هستند.

الف) قانون جریان کیرشهف: (KCl)

▶ جمع جبری جریان‌های الکتریکی تمام شاخه‌های متصل شده به هر گره، در هر لحظه برابر صفر می‌باشد.

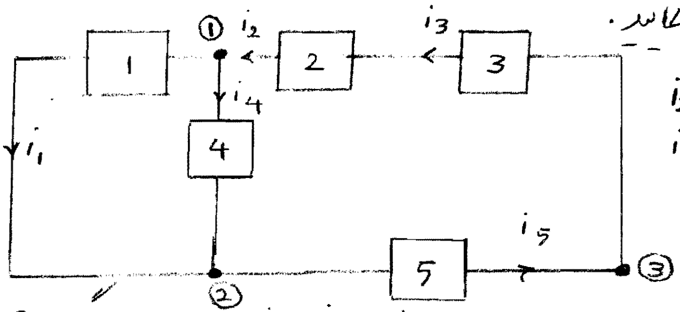
برای اعمال قانون جریان کیرشهف جریان های ورودی به هر گره را با علامت جبری مثبت و جریان های خروجی از هر گره را با علامت جبری منفی نشان می دهیم.



$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) = 0$$

مثال ۱.۲ :

در مدار شکل زیر جریان های مجهول را محاسبه نمایید.



$i_2 = 2$
$i_4 = 1$

KCL در گره ① : $i_2 - i_4 - i_1 = 0 \rightsquigarrow 2 - 1 = i_1 = 1$

KCL در گره ② : $i_1 + i_4 + i_5 = 0 \rightsquigarrow 1 + 1 = i_5 = 2$

KCL در گره ③ : $i_5 - i_3 = 0 \rightsquigarrow i_3 = 2$

نکته مهم: براساس رابطه بین جریان الکتریکی و بار الکتریکی در زیر آمده است:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \rightsquigarrow q(t) = \int i(t)\,dt$$

و با استفاده از قانون جریان کیرشهف داریم:

مثال: $i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) = 0$

$$\rightsquigarrow \int i_1(t)\,dt - \int i_2(t)\,dt + \int i_3(t)\,dt = 0$$

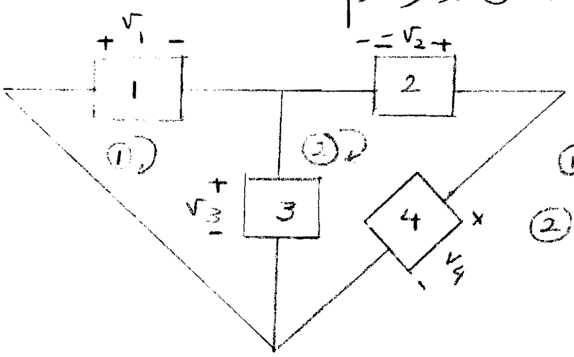
$$\rightsquigarrow q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) = 0$$

← مجموع بارهای الکتریکی ورودی و خروجی از هر گره با هم برابرند.

ب) قانون ولتاژ کیرشهف: (KVL)

جمع جبری ولتاژ تمام شاخه های هر مسیر بسته (حلقه) در هر لحظه از زمان برابر صفر می باشد.

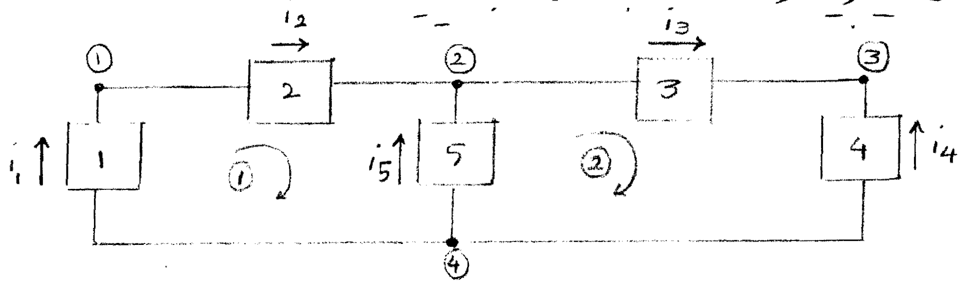
در عبور از مسیر بسته (حلقه) برای اعمال قانون ولتاژ کیرشهف اگر به سر مثبت المان وارد شویم علامت جبری ولتاژ را مثبت و اگر از سر منفی وارد شویم علامت جبری ولتاژ را منفی در نظر می‌گیریم.



KVL در حلقه ① $\quad +v_1(t) + v_3(t) = 0$

KVL در حلقه ② $\quad -v_2(t) + v_4(t) - v_3(t) = 0$

◀ مثال ۲.۲ : در مدار شکل زیر جریان و ولتاژهای مجهول را محاسبه نمائید:



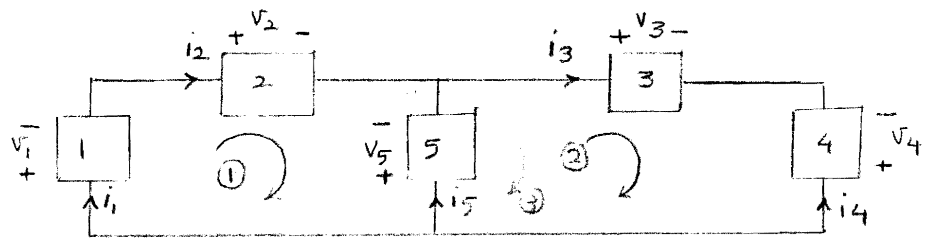
$i_1 = 3$
$i_5 = 2$
$v_1 = 3$
$v_2 = 4$
$v_4 = 1$

KCl در گره ① $\quad i_1 - i_2 = 0 \rightsquigarrow i_2 = 3^A$

KCl در گره ② $\quad i_2 + i_5 - i_3 = 0 \rightsquigarrow 3 + 2 - i_3 = 0 \rightsquigarrow i_3 = 5^A$

KCl در گره ③ $\quad i_3 + i_4 = 0 \rightsquigarrow i_4 = -5^A$

اکنون با توجه به مدل مداری مرجع که در شکل زیر آمده است پلاریته ولتاژ المان‌ها را مشخص می‌کنیم:



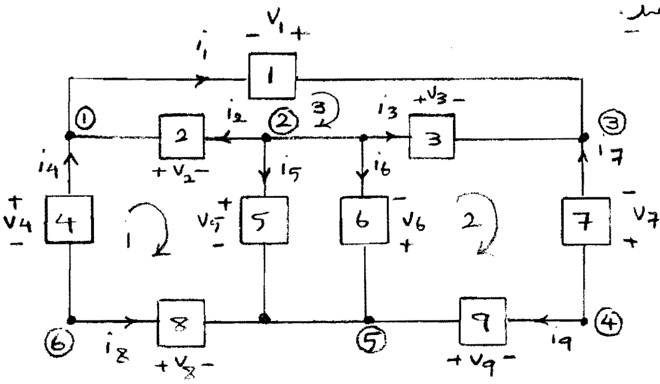
KVL در حلقه ① : $\quad v_1 + v_2 - v_5 = 0 \rightsquigarrow 3 + 4 - v_5 = 0 \rightsquigarrow v_5 = 7^V$

KVL در حلقه ② : $\quad v_5 + v_3 - v_4 = 0 \rightsquigarrow 7 + v_3 - 1 = 0 \rightsquigarrow v_3 = -6^V$

KVL در حلقه ③ : $\quad v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0 \rightsquigarrow 3 + 4 - 6 - 1 = 0$ ✓

۴. مثال‌های تکمیلی :

مثال ۳.۲: در مدار شکل زیر تعادل توان را نشان دهید.



	i (mA)	v (kV)
1	?	?
2	60	2.6
3	-50	-4.2
5	30	1.8
6	?	-1.8
7	-30	?
8	-20	3.2
9	?	-2.4

برای محاسبه توان ولتاژ و جریان تمام المان‌ها باید مشخص باشد. برای بدست آوردن مقادیر مجهول از KCl و KVl استفاده می‌کنیم:

① KCl در گره : $i_4+i_2=i_1 \rightsquigarrow i_4+60=i_1$

② KCl در گره : $-i_2-i_5-i_6-i_3=0 \xrightarrow{\times(-1)} 60+30+i_6-50=0 \rightsquigarrow i_6=-40\ mA$

③ KCl در گره : $i_3+i_7+i_1=0 \rightsquigarrow -50-30+i_1=0 \rightsquigarrow i_1=80\ mA \rightsquigarrow i_4=20\ mA$

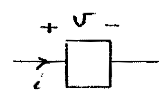
④ KCl در گره : $-i_7-i_9=0 \rightsquigarrow i_9=+30\ mA$

① KVL در حلقه : $-v_4+v_2+v_5-v_8=0 \rightsquigarrow -v_4+2.6+1.8-3.2=0 \rightsquigarrow v_4=1.2\ kV$

② KVL در حلقه : $v_6+v_3-v_7-v_9=0 \rightsquigarrow -1.8-4.2-v_7+2.4=0 \rightsquigarrow v_7=-3.6\ kV$

③ KVL در حلقه : $-v_1-v_3-v_2=0 \rightsquigarrow -v_1+4.2-2.6=0 \rightsquigarrow v_1=1.6\ kV$

مدل مداری:



$\rightsquigarrow P_1=+(v_1)(-i_1)=1.6\times(-80)=-128\ W$

$P_2=+(v_2)(-i_2)=2.6\times(-60)=-156\ W$

$P_3=+v_3 i_3=(-50)(-4.2)=210\ W$

$P_4=+(v_4)(-i_4)=1.2\times(-20)=-24\ W$

$P_5=+v_5 i_5=30\times1.8=54\ W$

$P_6=+(v_6)(-i_6)=-1.8\times(+40)=-72\ W$

$P_7=+v_7 i_7=-30\times(-3.6)=108\ W$

$P_8=+v_8 i_8=-20\times3.2=-64\ W$

$P_9=+(v_9)(-i_9)=-2.4\times(-30)=72$

$P_{کل}=0\ W$

توان تولیدی $=444\ W$

توان مصرفی $=444$

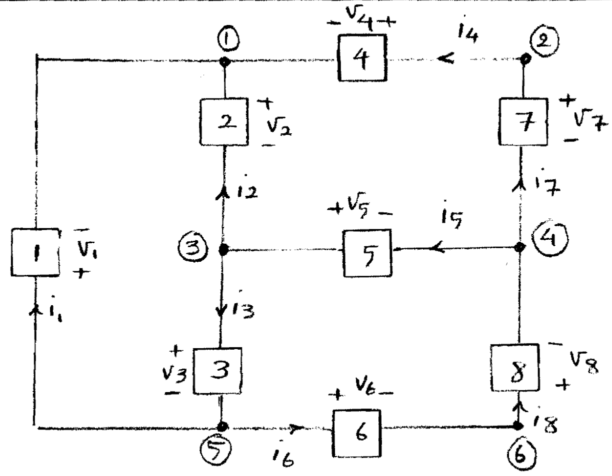
مثال ۴.۲: در مدار شکل زیر:

الف) تعداد گره‌ها

ب) تعداد شاخه‌ها

ج) تعداد حلقه‌ها

د) جریان و ولتاژهای مجهول را محاسبه نمائید.



	v(KV)	i(mA)
1	490	−22.5
2	600	−30
3	300	?
4	105	?
5	?	30
6	165	82.5
7	585	?
8	?	?

الف) تعداد کل گره‌ها برابر ۶ می‌باشد

ب) تعداد کل شاخه‌ها برابر تعداد المانها 8 می‌باشد

ج) حلقه‌های مدار فوق به شرح زیر است:

حلقه ①: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

حلقه ②: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 1$

حلقه ③: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 2$

حلقه ④: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

حلقه ⑤: $3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3$

د)

① در گره KCl : $i_1 + i_2 + i_4 = 0 \rightarrow i_4 = 22.5 + 30 = 52.5$ mA

③ در گره KCl : $i_5 = i_2 + i_3 \rightarrow 30 = -30 + i_3 \rightarrow i_3 = 60$ mA

② در گره KCl : $i_7 = i_4 \rightarrow i_7 = 52.5$ mA

④ در گره KCl : $i_8 = i_5 + i_7 \rightarrow i_8 = 52.5 + 30 = 82.5$ mA

③ در حلقه KVL : $-V_2 - V_4 + V_7 - V_5 = 0 \rightarrow V_5 = -120$ KV

⑤ در حلقه KVL $-V_3 + V_5 - V_8 - V_6 = 0 \rightarrow V_8 = -585$ KVL

تمرین: در مثال ۴.۲ نشان دهید که تعادل توان برقرار است.

فصل سوم: منابع الکتریکی، مقاومت ها و مدارهای ساده مقاومتی

۱. منابع الکتریکی و انواع مختلف آن:

یک منبع الکتریکی، وسیله‌ای است که می‌تواند انرژی غیرالکتریکی را به الکتریکی و بالعکس تبدیل کند. مثلاً یک باتری در حال خالی شدن انرژی شیمیایی را به الکتریکی تبدیل می‌کند، درحالیکه باتری درحال شارژ انرژی الکتریکی را به انرژی شیمیایی تبدیل می‌کند.

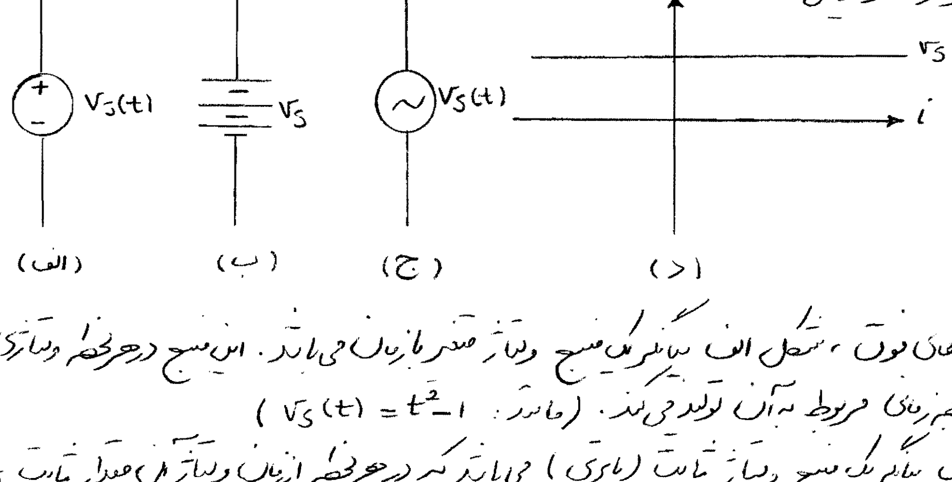
نکته مهم درخصوص این منابع این است که معمولاً ولتاژ یا جریان آنها ثابت می‌ماند، این درحالیست که توانایی جذب و یا تولید توان الکتریکی توسط آنها تا بیکران وجود دارد. این خصوصیت که یکی از موارد مطلوب در تحلیل مدار شمار می‌آید، منجر به ساخت منابع ایده آل ولتاژ و جریان بعنوان دو المان بنیادی مدار می‌گردد.

بطور کلی دو نوع منبع الکتریکی در درس مدارهای الکتریکی تعریف می‌گردد: ۱. منابع الکتریکی مستقل، ۲. منابع الکتریکی وابسته.

منابع الکتریکی مستقل، ولتاژ و یا جریانی مستقل از ولتاژ و جریان المانهای دیگر مدار در خود تولید می‌کنند. این در حالیست که منابع الکتریکی وابسته، ولتاژ و جریانی وابسته به ولتاژ و جریان دیگر المانهای مدار تولید می‌کنند.

الف) منبع ولتاژ مستقل:

منابع ولتاژ مستقل، المانهایی از مدار الکتریکی هستند که صرفنظر از جریانی که از آنها عبور می‌کند، ولتاژ مشخصی را در دو سر خود تولید می‌کنند.



(الف) (ب) (ج) (د)

در شکل‌های فوق، شکل الف بیانگر یک منبع ولتاژ متغیر با زمان می‌باشد. این منبع در هر لحظه ولتاژی متناسب با ضابطه‌ی مربوط به آن تولید می‌کند. (مانند: $V_S(t)=t^2-1$)

شکل ب بیانگر یک منبع ولتاژ ثابت (باتری) می‌باشد که در هر لحظه از زمان ولتاژ آن مقدار ثابتی می‌باشد.

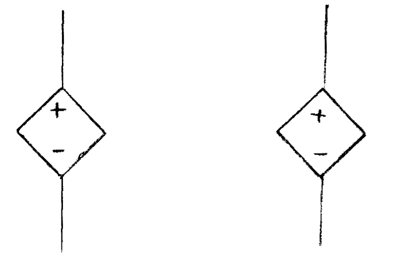
شکل ج نیز بیانگر یک منبع ولتاژ سینوسی است. (مانند $V_S(t)=A\sin t$)

به منابع شکل های الف و ج منابع متغیر با زمان یا ac و به منبع شکل ب منبع ثابت یا DC گویند.

همانطور که از نمودار ولتاژ بر حسب جریان این سه نوع منبع مشخص است، به ازای هر جریان عبوری از این منابع ولتاژ دو سر تغییر نخواهد کرد.

ب) منبع ولتاژ وابسته:

منابع ولتاژ وابسته، ولتاژی متناسب با ولتاژ و جریان المان های دیگر مدار در دو سر خود تولید می شود. اگر ولتاژ بوجود آمده متناسب با ولتاژ المان دیگری در مدار باشد به آن منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ (و یا کنترل شونده با ولتاژ) و اگر متناسب با جریان المان دیگری در مدار باشد به آن منبع ولتاژ وابسته به جریان (و یا کنترل شونده با جریان) گویند.

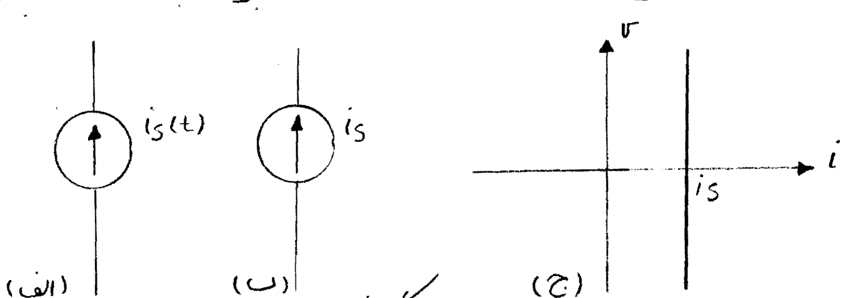


$v_s = \alpha v_x$ (الف) — $v_s = \beta i_x$ (ب)

منابع وابسته را با شکل لوزی نشان می دهند. در شکل روبرو منبع شکل الف یک منبع وابسته به ولتاژ v_x و شکل ب یک منبع وابسته به جریان i_x را نشان می دهد که در آن v_x و i_x به ترتیب ولتاژ و جریان یک المان دیگر مدار می باشند.

ج) منبع جریان مستقل:

منابع جریان مستقل، المانهایی از مدار الکتریکی هستند که صرفنظر از ولتاژ دو سرآنها جریان ثابتی را از خود عبور می دهند

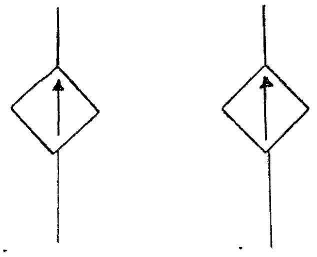


(الف) (ب) (ج)

در شکل فوق، شکل الف بیانگر یک منبع جریان متغیر با زمان و شکل ب بیانگر یک منبع جریان ثابت می باشد. شکل ج نمودار ولتاژ بر حسب جریان یک منبع ولتاژ مستقل را نشان می دهد، به ازای هر ولتاژی که در دو سر منبع جریان قرار داده شود، جریان ثابتی از آن عبور خواهد کرد.

د) منبع جریان وابسته :

منابع جریان وابسته، جریانی متناسب با ولتاژ و جریان المان های دیگر مدار از خود عبور می دهند. اگر جریان عبوری متناسب با ولتاژ المان دیگری در مدار باشد به آن منبع جریان وابسته به ولتاژ و اگر متناسب با جریان المان دیگری باشد به آن منبع جریان وابسته به جریان گویند. (به ترتیب منبع جریان کنترل شونده با ولتاژ و منبع جریان کنترل شونده با جریان)

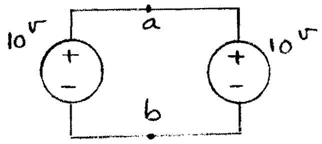


$i_s=\alpha v_x$ (الف) $\qquad$ $i_s=\beta i_x$ (ب)

منبع شکل الف یک منبع وابسته به ولتاژ v_x و شکل ب یک منبع وابسته به جریان i_x را نشان می دهد.

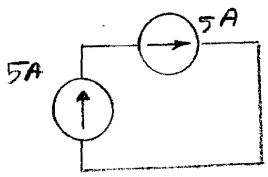
▲ مثال ۱.۳ : با استفاده از تعاریف منابع مستقل، مشخص کنید که کدام مدار نادرست متصل شده است؟

الف)



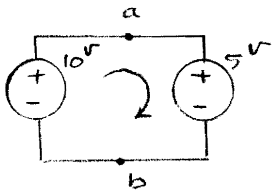
این اتصال صحیح می باشد زیرا ولتاژ دو سر هر یک از منابع 10^v است که محدودیتی برای منبع دیگر ایجاد نمی کند.

ب)



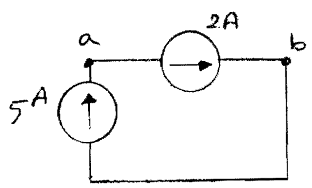
این اتصال نیز صحیح است جریان عبوری از هر دو منبع یکسان است.

ج)



این اتصال نادرست است: KVL : $-10+5\neq0$ ✗

د)



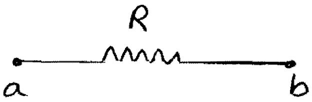
این اتصال نادرست است: KCL در ⓐ : $5A-2A\neq0$ ✗

► **نکته بسیار مهم:** به علت اینکه منبع ولتاژ ایده آل، ولتاژ دلخواهی را صرف نظر از جریان عبوری از آن در دو سر خود تولید می کند، تعیین جریان عبوری مشخص به عنوان تابعی از ولتاژ برای آن غیرممکن است.

بطور مشابه نیز تعیین ولتاژ دو سر منبع جریان ایده آل، به عنوان تابعی از جریان عبوری از آن غیرممکن می باشد.

۲. مقاومت الکتریکی:

مقاومت خاصیتی از اجسام است که از عبور جریان الکتریکی از آنها جلوگیری می کند. المانی از مدار که برای مدل سازی این خاصیت بکار می رود را مقاومت الکتریکی می نامند و آن را با حرف R نشان می دهند. مدل مداری یک مقاومت بصورت زیر می باشد:



اگر اجسام مقاومت قابل اندازه گیری در برابر جریان الکتریکی دارند و مقدار این مقاومت به جنس ماده، شکل و هندسه آنها بستگی دارد. این مقدار را با واحد اهم (Ω) بیان می کنیم.

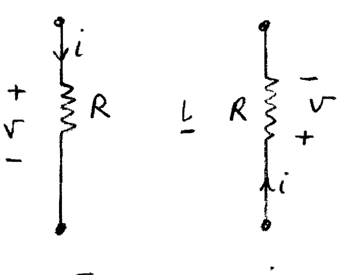
► قانون اهم:

رابطه بین ولتاژ و جریان یک مقاومت از قانون اهم تبعیت می کند. براساس این قانون معادله جبری بین ولتاژ و جریان مقاومت بصورت:

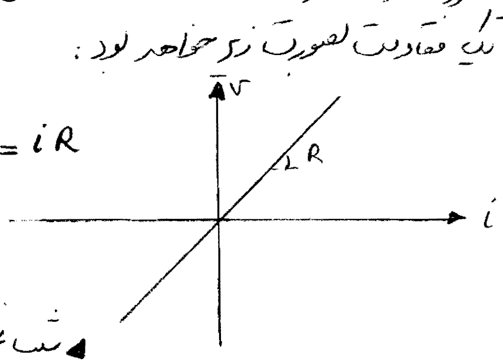
► قانون اهم: $\boxed{V = iR}$

می باشد که در این رابطه V برحسب ولت، i برحسب آمپر و R برحسب اهم (Ω) می باشد.

در سراسر این جزوه مدل مداری استفاده شده همان مدل می باشد. بنابراین شماتیک جریان و ولتاژ یک مقاومت بصورت زیر خواهد بود:



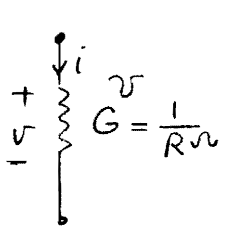
$V = iR$



► شیب نمودار ولتاژ برحسب جریان مقدار R را بدست می دهد.

در برخی از مسائل بجای مقاومت R از مقدار عکس آن که رسانایی نام دارد استفاده می‌شود. واحد رسانایی مهو (℧) یا زیمنس می‌باشد. (عکس ohm برابر mho)

نماد مداری رسانایی همان نماد مقاومت بوده و آن را با حرف G نمایش می‌دهیم:

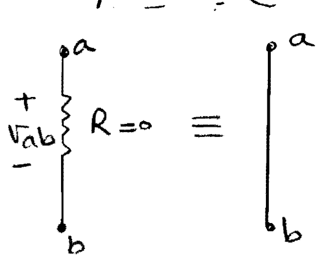


$$G = \frac{1}{R}\ ℧$$

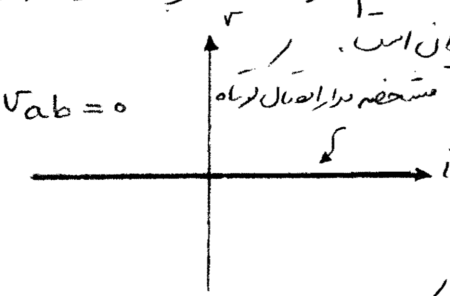
▶ قانون اهم: $v = iR = \frac{i}{G}$

▶ **حالات خاص:**

الف) اتصال کوتاه: اگر مقاومت یک سیم رسانا صفر باشد به این حالت خاص اتصال کوتاه گویند. طبق قانون اهم اگر مقاومت صفر باشد ولتاژ دو سر سیم برابر صفر بوده در واقع پتانسیل تمام نقاط آن یکسان است.

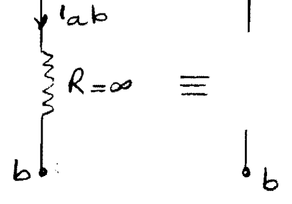


$v_a = v_b \rightsquigarrow v_{ab} = 0$

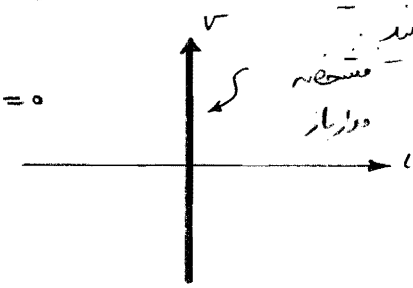


همانطور که از مشخصه می‌توان دید به ازای هر جریان عبوری در حالت اتصال کوتاه اختلاف پتانسیل در دو سر آن صفر خواهد بود. این یعنی هر نقطه از این سیم رسانا دارای هر ولتاژی باشد، ولتاژ تمام نقاط این سیم برابر همان خواهد بود.

ب) مدار باز: اگر مقاومت یک سیم رسانا بی‌نهایت باشد به این حالت خاص که هیچ جریانی از این سیم نمی‌تواند عبور کند مدار باز گویند.



$i_{ab} = 0$



همانطور که از مشخصه می‌توان دید به ازای هر ولتاژی که در دو سر حالت مدار باز وجود داشته باشد جریان عبوری از آن صفر خواهد بود.

۱.۲ : محاسبه توان مقاومت:

با توجه به فرمول محاسبه توان می توان توان مقاومت را محاسبه کرد:

$$P_R(t) = V_R(t) \cdot i_R(t)$$
$$V_R(t) = R\, i_R(t)$$

$$\rightsquigarrow (1)\quad P_R(t) = R\, i_R(t) \cdot i_R(t) = R\, i_R^2(t)$$
$$(2)\quad P_R(t) = V_R(t) \cdot \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_R^2(t)}{R}$$

◄ توان مقاومتی :

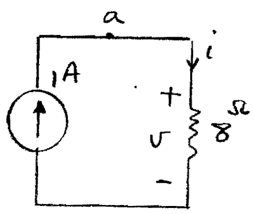
$$\rightsquigarrow \boxed{P_R(t) = R\, i_R^2(t) = \frac{V_R^2(t)}{R}}$$

◄ **نکته مهم:** همانطور که از دو فرمول محاسبه توان مقاومت الکتریکی مشخص است، توان مقاومت هیچوقت نمی تواند منفی شود. بنابراین مقاومت الکتریکی یک المان مداری پسیو است.

$$R > 0 \rightsquigarrow R\, i^2(t) \geq 0$$
$$\frac{v^2(t)}{R} \geq 0 \rightsquigarrow P_R(t) \geq 0$$

◄ **مثال ۲.۳:** در هر یک از مدارهای زیر مقدار توان مقاومت را محاسبه کنید:

(الف)

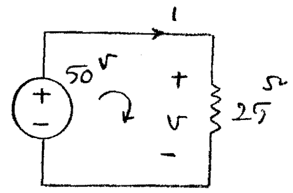


a در نقطه KCL : $i = 1^A$

$\rightsquigarrow V = 8 \times 1 = 8^V$

$P = 8 \times 1^2 = 8^W$ یا $P = \frac{8^2}{8} = 8\ W$

(ب)

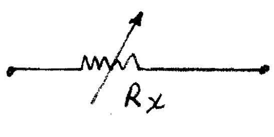


KVL : $V = 50^V \rightsquigarrow i = \frac{50}{25} = 2^A$

$P = 25 \times 2^2 = 100^W$ یا $P = \frac{50^2}{25} = 100\ W$

◄ **نکته:** در محاسبه توان برای مقاومت احتیاجی به کاربرد قانون علامت قراردادی پسیو نداریم. (زیرا توان همواره مثبت می باشد.)

◄ **نکته:** مقاومتی که مقدار مقاومت الکتریکی آن متغیر با زمان باشد را مقاومت متغیر می نامند و آن را بصورت زیر نمایش می دهند.

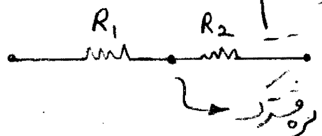


۳. اتصال مقاومت‌ها:

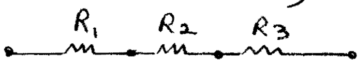
در این بخش دو نوع اتصال مقاومت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف) اتصال سری:

هرگاه دو المان تنها دارای یک گره مشترک باشند به نوع اتصال این دو المان سری گوییم:



(الف)

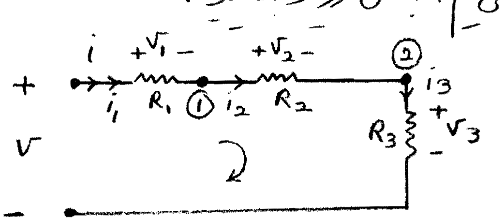


(ب)

در شکل الف دو مقاومت R_1 و R_2 که دارای یک گره مشترک هستند سری می‌باشند. در شکل ب مقاومت R_1 و R_2 با هم سری و مقاومت R_2 و R_3 نیز با یکدیگر سری هستند. در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که دو مقاومت R_1 و R_3 نیز سری هستند. شکل ب اتصال سری سه مقاومت و شکل ج اتصال سری n مقاومت را نشان می‌دهد.

(ج)

اکنون رابطه بین جریان و ولتاژ مقاومت‌های سری را بررسی می‌کنیم. به شکل زیر توجه نمائید:



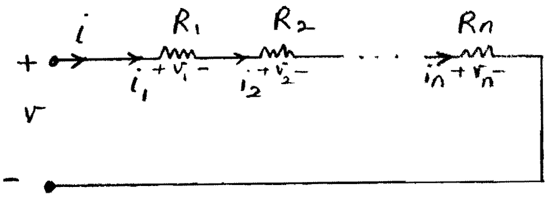
KCL در گره ①: $i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$

KCL در گره ②: $i_2 - i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_3$

$$\Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i$$

KVL در حلقه مدار: $-v + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v = v_1 + v_2 + v_3$

◄ **نکته مهم:** جریان تمام مقاومت‌های سری با یکدیگر برابر می‌باشد. همچنین ولتاژ کل دو سر مقاومت‌های سری برابر با جمع ولتاژهای تک تک مقاومت‌ها است.



اتصال سری

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

$$i = i_1 = i_2 = \cdots = i_n$$

اکنون با استفاده از روابط فوق مقاومت معادل مجموعه مقاومت های سری را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n \\ i = i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n \end{cases} \rightsquigarrow \cancel{i}R_{eq} = \cancel{i_1}R_1 + \cancel{i_2}R_2 + \cancel{i_3}R_3 + \cdots + \cancel{i_n}R_n$$

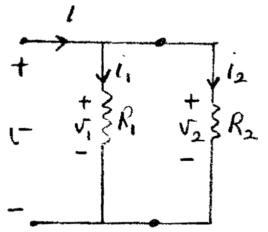
$$\rightsquigarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

◄ **نکته:** مقاومت معادل مجموعه مقاومت های سری برابر با جمع جبری تک تک مقاومت های این مجموعه می باشد.

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{مقاومت معادل مجموعه مقاومت های سری}}$$

ب) اتصال موازی:

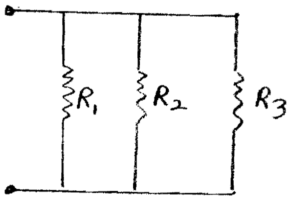
هرگاه دو مقاومت دارای دو گره مشترک باشند به اتصال این دو مقاومت موازی گویند:



(الف)

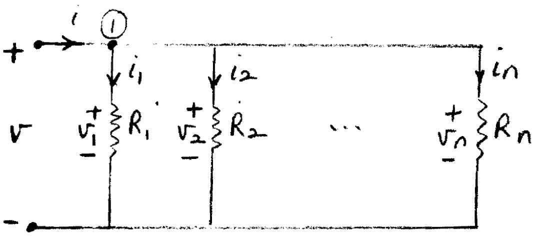
شکل الف اتصال موازی دو مقاومت و شکل ب اتصال موازی سه مقاومت را نشان می دهد.

برای نشان دادن آنکه دو مقاومت موازی هستند از علامت " || " استفاده می کنیم.



(ب)

اکنون با استفاده از شکل زیر که اتصال موازی n مقاومت را نشان می دهد رابطه بین ولتاژ و جریان مقاومت های موازی را بررسی می کنیم:



① در گره KCL: $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$

اگر برای تک تک حلقه ها KVL را بنویسیم داریم:

$$v = v_1 = v_2 = \cdots = v_n$$

◄ **نکته مهم:** در اتصال موازی مقاومت ها ولتاژ کل دو سر مجموعه برابر ولتاژ تک تک مقاومت ها و جریان آن برابر جمع جریان های تک تک مقاومت هاست.

اتصال موازی:

$$V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$$
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \sum_{i=1}^{n} i_i$$

اکنون با استفاده از روابط فوق مقاومت معادل مجموعه مقاومت‌های موازی را محاسبه می‌کنیم:

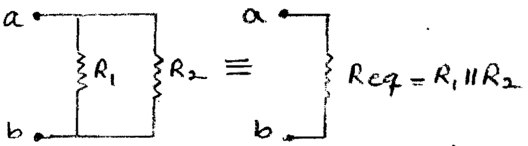
$$\begin{cases} V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n \\ i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n \end{cases} \rightsquigarrow \frac{\cancel{V}}{R_{eq}} = \frac{\cancel{V_1}}{R_1} + \frac{\cancel{V_2}}{R_2} + \cdots + \frac{\cancel{V_n}}{R_n}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

◄ نکته: مقاومت معادل مجموعه مقاومت‌های موازی برابر با مقدار زیر است:

$$R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$ مقاومت معادل مجموعه مقاومت‌های موازی

◄ نکته کاربردی:
مقاومت معادل دو مقاومت موازی بصورت زیر می‌باشد،



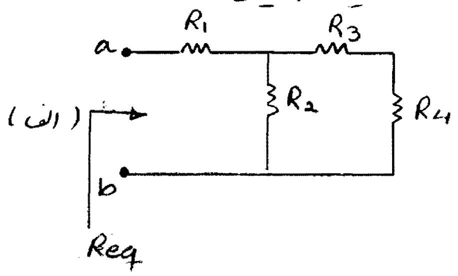
$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

◄ نکته کاربردی:
اگر بجای مقدار مقاومت مقدار رسانایی را داشته باشیم معادل مجموعه مقاومت‌های موازی بصورت مجموع جبری رسانایی تک تک مقاومت‌ها بدست می‌آید.

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

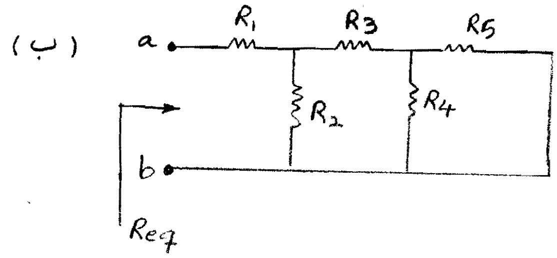
◄ مثال ۳.۳: مقاومت معادل دیده شده از سرهای a و b را برای مدارهای زیر محاسبه نمایید:

(الف)



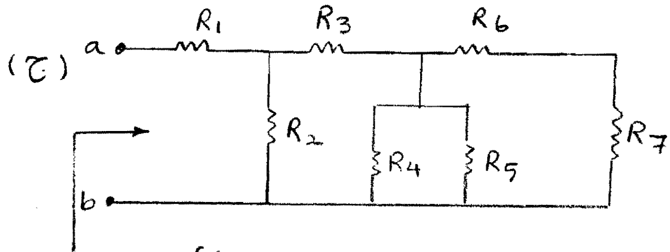
$$R_{eq} = \Big[\underbrace{(R_3 + R_4)}_{\text{سری}} \underbrace{\|}_{\text{موازی}} R_2\Big] \overbrace{+}^{\text{سری}} R_1$$

(ب)



$$R_{eq} = \left[\left((R_4 \parallel R_5) + R_3\right) \parallel R_2\right] + R_1$$

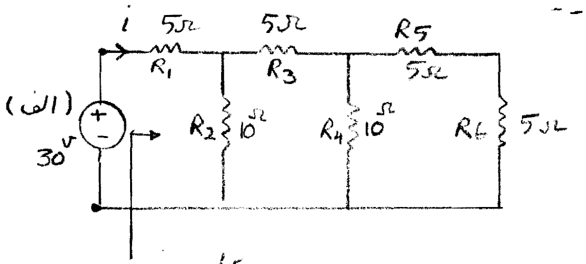
(ج)



$$R_{eq} = \left[\left[\left((R_6 + R_7) \parallel R_4 \parallel R_5\right) + R_3\right] \parallel R_2\right] + R_1$$

◄ مثال ۲.۳: در مدارهای زیر مقدار مجهول i و v را محاسبه نمایید.

(الف)

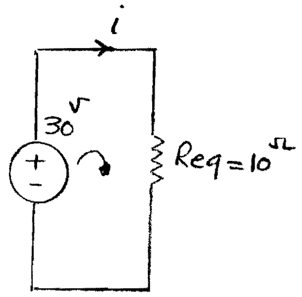


اگر مقاومت معادل دیده شده از سرهای منبع ولتاژ را محاسبه کنیم با قانون اهم جریان محاسبه می‌شود:

$$R_{eq} = \left(\left[\left((R_5 + R_6) \parallel R_4\right) + R_3\right] \parallel R_2\right) + R_1$$

$$= \left(\left[\left((5+5) \parallel 10\right) + 5\right] \parallel 10\right) + 5 = 10^{\Omega}$$

$$\frac{10 \times 10}{10+10} = 5$$



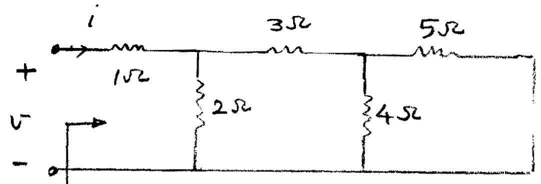
درحلقه KVL : $-30 + V_{R_{eq}} = 0 \longrightarrow V_{R_{eq}} = 30 = i\,R_{eq} = i \times 10 \longrightarrow i = 3^{A}$

◄ نکته: اگر دو مقاومت مشابه موازی داشته باشیم، مقاومت معادل نصف مقدار یکی از مقاومت ها خواهد بود.

$$R \parallel R = \frac{R \times R}{R+R} = \frac{R}{2}$$

◄ نکته: هر دو المان موازی دارای ولتاژهای یکسان و هر دو المان سری دارای جریان های یکسان می‌باشند.

ب)

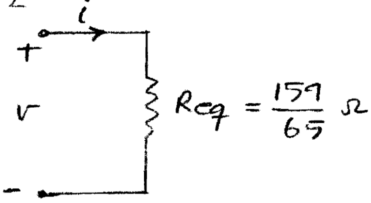


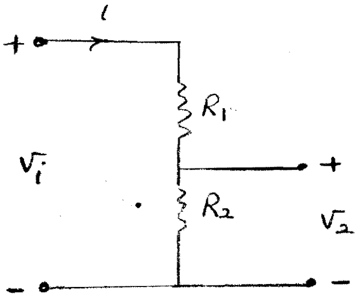
$i = 65^{A}$

$$R_{eq} = \left[\left(\underbrace{(5 \parallel 4)}_{\frac{5\times4}{9}} + 3\right) \parallel 2\right] + 1 = \left[\left(\frac{20}{9} + 3\right) \parallel 2\right] + 1 = \left(\frac{47}{9} \parallel 2\right) + 1$$

$$= \frac{47/9 \times 2}{\frac{47}{9} + 2} + 1 = \frac{159}{65}\ \Omega$$

$$v = i R_{eq} = 65 \times \frac{159}{65} = 159^{V}$$





نکته کاربردی مهم: مدار شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \rightsquigarrow v_i = i R_{eq} = i(R_1 + R_2)$$

$$i_{R_1} = i_{R_2} = i \rightsquigarrow v_2 = i R_2$$

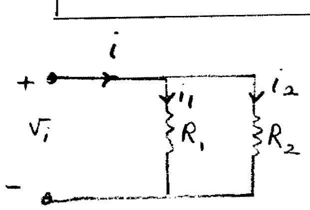
$$\rightsquigarrow v_2 = \frac{v_i}{R_1 + R_2} \cdot R_2$$

به مدار فوق مدار تقسیم ولتاژ گویند. اگر ولتاژ دو سر دو مقاومت سری را داشته باشیم ولتاژ هر یک از آن ها به نسبت های زیر بدست می آید:

$$\boxed{v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_i \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i}$$

تقسیم ولتاژ

نکته کاربردی مهم: مدار شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$v_1 = v_2 = v_i$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\rightsquigarrow v_i = i_1 R_1 = i_2 R_2 = i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

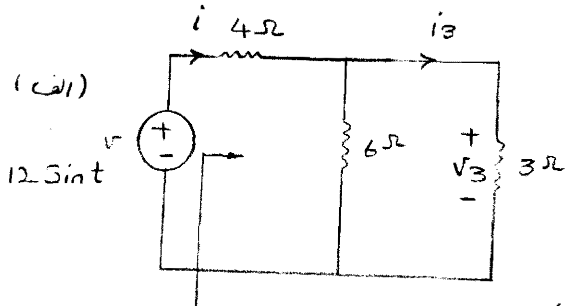
اگر جریان ورودی به دو مقاومت موازی را داشته باشیم جریان هر یک از مقاومت‌ها به نسبت زیر بدست می‌آید:
به این مدار، مدار تقسیم جریان گویند:

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, i \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, i}$$

تقسیم جریان

◄ مثال ۵.۲: در مدارهای زیر مقادیر مجهول را محاسبه نمایید:

(الف)



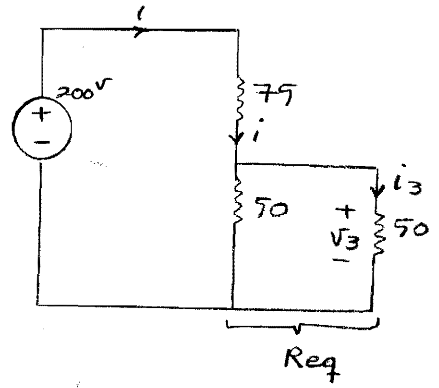
$$Req = (6 \parallel 3) + 4 = \frac{6\times 3}{6+3} + 4 = 2+4 = 6\ \Omega$$

$$\rightarrow i = \frac{v_i}{Req} = \frac{12\,\text{Sin}t}{6} = 2\,\text{Sin}t\ A$$

تقسیم جریان: $i_3 = \frac{6}{6+3} \times i = \frac{6}{9} \times 2\,\text{Sin}t = \frac{4}{3}\,\text{Sin}t\ A$

$$V_3 = 3 i_3 = 4\,\text{Sin}t\ V$$

(ب)



$$Req = 50 \parallel 50 = 25\ \Omega$$

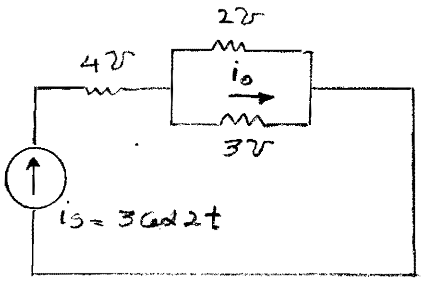
$V_3 = \frac{25}{75+25} \times 200 = 50\ V$ تقسیم ولتاژ

$$i_3 = \frac{V_3}{50} = 1\ A$$

$i_3 = \frac{50}{50+50} \times i$ تقسیم جریان

$$\rightarrow i = 2\ A$$

(ج)



جریان ورودی به دو شاخه موازی همان i_s است:

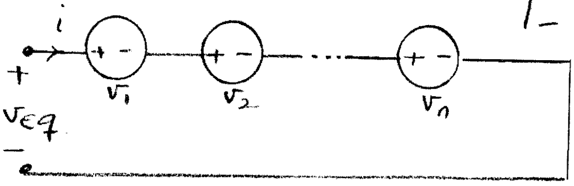
$$i_o = \frac{1/2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\, i_s = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} \times 3\cos 2t = \frac{9}{5}\cos 2t\ A$$

۴. اتصال منابع الکتریکی :

در این بخش اتصال سری و موازی منابع را هم مورد بررسی قرار می‌دهیم :

الف) اتصال منابع ولتاژ به یکدیگر:

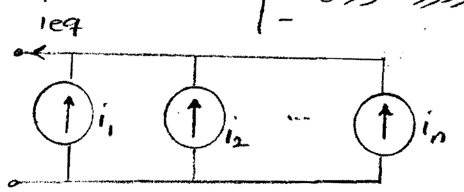
از آنجا که در اتصال موازی ولتاژ دو سر مجموعه ثابت باقی می‌ماند اتصال موازی منابع ولتاژ تأثیری در مدار ندارد. بنابراین تنها اتصال سری منابع است که مورد بررسی قرار می‌دهیم :



$$v_{eq} = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

ب) اتصال منابع جریان به یکدیگر:

از آنجا که در اتصال سری جریان عبوری از مجموعه ثابت باقی می‌ماند اتصال سری منابع جریان تأثیری در مدار ندارد. بنابراین تنها اتصال موازی منابع جریان را در مدار مورد بررسی قرار می‌دهیم :



$$i_{eq} = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_{i=1}^{n} i_i$$

نکات مهم :

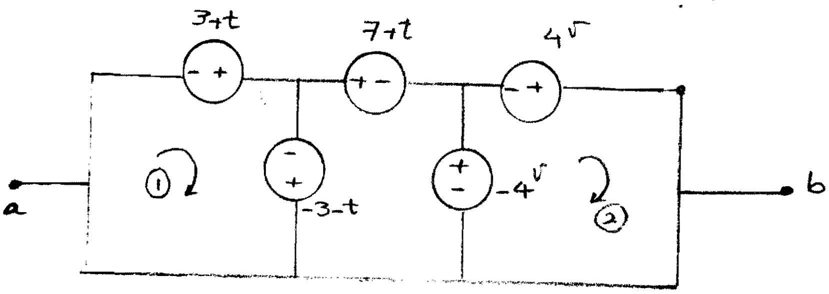
۱. منابع ولتاژ را معمولاً بصورت سری با دیگر المان‌های مدار قرار می‌دهند.

۲. هر المان موازی با منبع ولتاژ در مدار تأثیری نخواهد داشت و در هنگام تحلیل مدار می‌توان آن را حذف نمود.

۳. منابع جریان را معمولاً بصورت موازی با دیگر المان‌های مدار قرار می‌دهند.

۴. هر المان سری با منبع جریان در مدار تأثیری نخواهد داشت و در هنگام تحلیل مدار می‌توان آن را حذف نمود.

▶ مثال ۳. ۶ : منبع ولتاژ معادل سرهای a و b را بیابید :

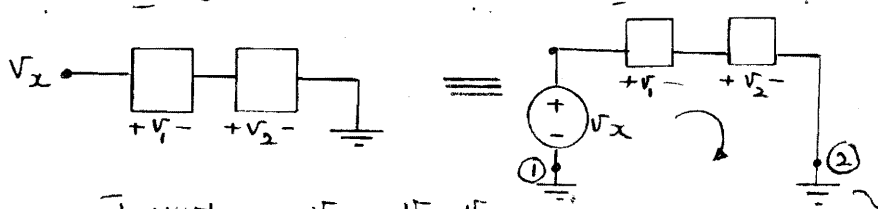


برای محاسبه ولتاژ V_{ab} ابتدا ولتاژ V_a و V_b را محاسبه می‌کنیم :

① در حلقه KVL : $-V_a-(3+t)-(-3-t)=0 \rightsquigarrow V_a=0$

② در حلقه KVL : $-(-4)-4+V_b=0 \rightsquigarrow V_b=0 \rightsquigarrow V_{ab}=V_a-V_b=0^V$

▶ نکته : اگر ولتاژ نقطه ای را بصورت V_x نمایش دهند برای نوشتن KVL شامل این نقطه بصورت زیر عمل می‌کنیم :



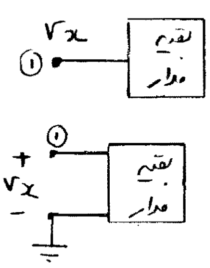
اتصال به زمین

$\rightsquigarrow$ در حلقه KVL : $-V_x+V_1+V_2=0$

$\rightsquigarrow V_x=V_1+V_2$

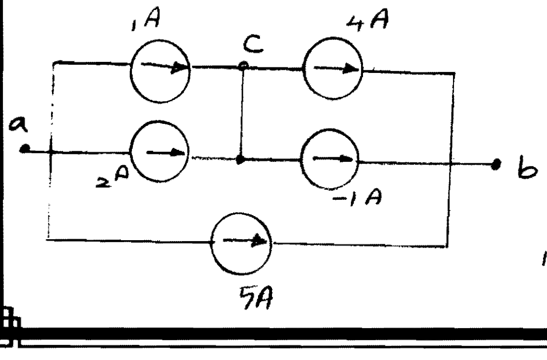
اتصال یک نقطه از مدار به زمین یعنی ولتاژ آن نقطه را برابر با صفر در نظر گرفته ایم. در مدار فوق نقاط ① و ② هر دو به زمین متصل شده از این رو این مدار را می‌توان بصورت یک حلقه بسته در نظر گرفت.

▶ نکته : نمایش های زیر هر دو بیانگر یک ولتاژ ثابت V_x در نقطه ① می‌باشند :



در واقع وقتی ولتاژ را بصورت اختلاف پتانسیل دو نقطه نشان می‌دهیم یعنی اختلاف ولتاژهای دو نقطه برابر V_x است. یعنی می‌توان ولتاژ یک نقطه را صفر (اتصال به زمین) و ولتاژ نقطه دیگر را برابر با V_x در نظر گرفت.

▶ مثال ۳. ۷ : منبع جریان معادل سرهای a و b را بیابید :

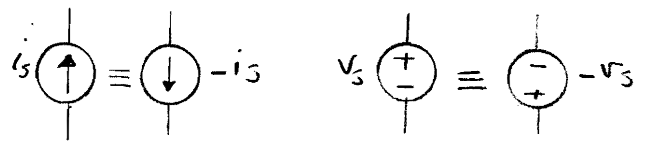


$i_{ac}=1+2=3^A$ $\rightsquigarrow$ این دو منبع 3^A با هم سری هستند از این رو تنها یکی را در مدار لحاظ می‌کنیم

$i_{cb}=4-1=3^A$

$i_{ab}=3+5=8^A$

▲ نکته کاربردی: المانهای زیر با یکدیگر معادل هستند:

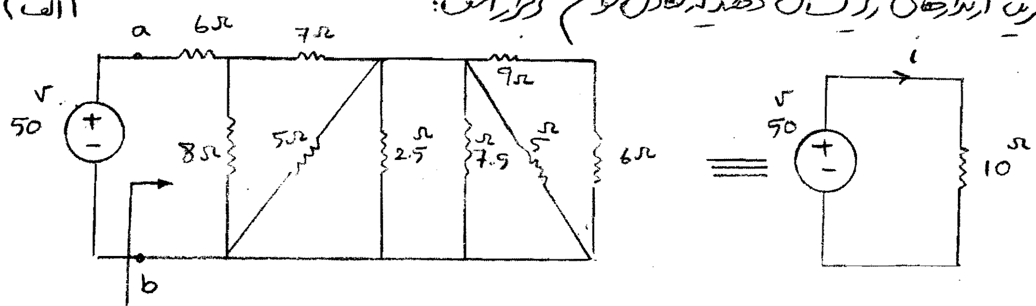


(الف)   (ب)

۵. مثال های تکمیلی :

▲ مثال ۲.۸ : در هر یک از مدارهای زیر نشان دهید که تعادل توان برقرار است:

(الف)



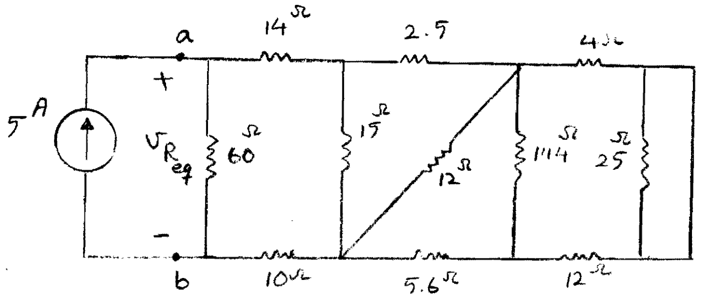
$$R_{eq} = \left[\left(\left[\underbrace{(6+9)}_{15}\|5\|7.5\|2.5\|5\right]+7\right)\|8\right]+6 = 10$$

$v_R = 50^V \rightsquigarrow P_R = \frac{v_R^2}{10} = 250^W$ $\rightsquigarrow P_{کل} = 0$ ✓

$v_R = Ri \rightsquigarrow i = 5^A \rightsquigarrow P_v = +(50)(5) = -250^W$

با استفاده از مدل واری $\boxed{+v-}$ در محاسبه منبع ولتاژ توان را می نویسیم که جریان منبع ولتاژ در جهت افزایش ولتاژ آن می باشد پس طبق قانون ساده تر اندازی جریان را منفی در نظر می گیریم.

(ب)



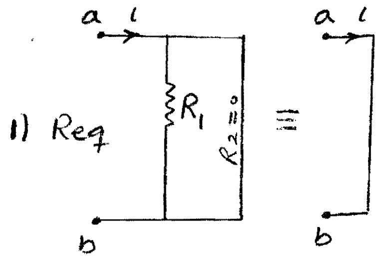
مقاومت 25 که دو سر آن سیم قرار دارد اتصال کوتاه شده و نقشی در مدار ندارد.

$$R_{eq} = \left(\left[\left(\left[\left(\overbrace{\underbrace{(4+12)}_{16}\|144}^{14.4}\right)+5.6\right]\|12\right)+2.5\right)\|15\right]+14+10\right)\|60$$

$= 20^\Omega \rightsquigarrow P_R = i^2 R_{eq} = 5^2 \times 20 = 500^W$ $v_R = iR_{eq} = 100^V$

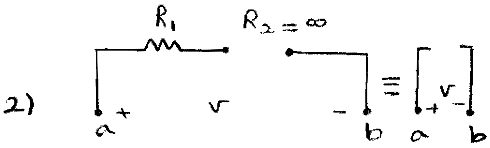
$P_i = +(100)(-5) = -500$

▶ نکته کاربردی :



$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0^{\Omega}$$

• اگر دو سر یک مقاومت اتصال کوتاه شود مقاومت نقشی در مدار نداشته و می توان آن را حذف نمود



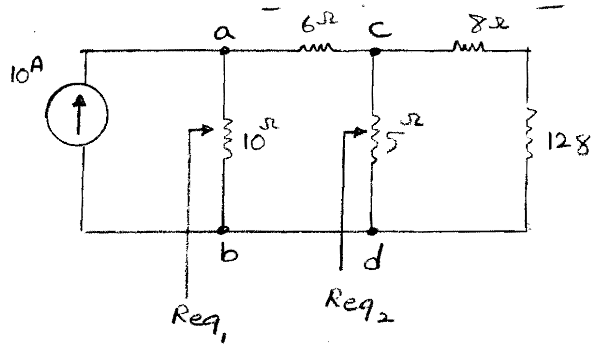
$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \infty$$

هر مقاومت که باعث مدار باز سری شود نقشی در مدار ندارد.

۳) هر عنصری در مداری که دو سر آن یک سیم متصل شود، نقشی در مدار نخواهد داشت.

۴) هر عنصری در مدار که باعث مدار باز سری شود نقشی در مدار نخواهد داشت.

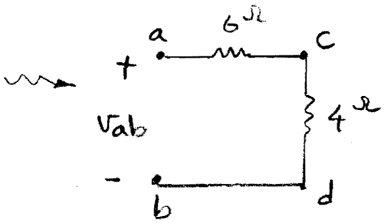
▶ مثال ۳.۸ : مقدار توانی را که در مقاومت 5^{Ω} در مدار شکل زیر تلف می شود را بدست آورید.



$$R_{eq_1} = \left(\left(\left[(8+12) \parallel 5\right] + 6\right) \parallel 10\right) = 5^{\Omega}$$

$$\rightsquigarrow V_{ab} = i R_{eq_1} = 10 \times 5 = 50^V$$

$$R_{eq_2} = (8+12) \parallel 5 = 4^{\Omega}$$



تقسیم ولتاژ
$$V_{cd} = \frac{4}{6+4} \times V_{ab} = 20^V$$

V_{cd} در واقع ولتاژ دو سر مجموعه موازی 5 و (8+12) است پس ولتاژ مقاومت 5^{Ω} همان V_{cd} می باشد.

$$P_{5\Omega} = \frac{V_{5\Omega}^2}{5} = \frac{20^2}{5} = 80\ W$$

فصل چهارم: روش های تحلیل مدارهای مقاومتی

تاکنون مدارهای ساده مقاومتی را با ترتیب معادلات بدست آمده از قوانین اهم و کیرشهف تحلیل کرده ایم. منظور از تحلیل مدار محاسبه ولتاژ و جریان تمامی شاخه های مدار می باشد. هرچه تعداد شاخه های مدار بیشتر باشد، استفاده از این قوانین سخت تر خواهد بود زیرا تعداد معادلات زیادتر خواهد شد.

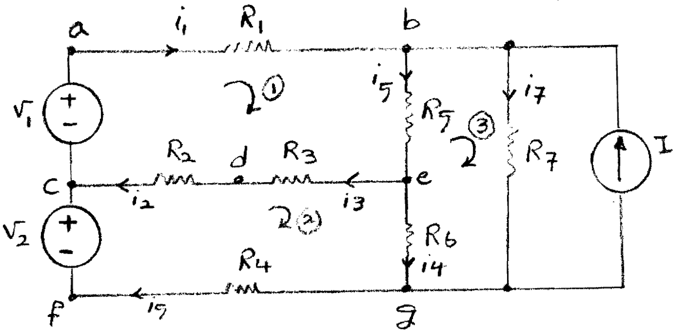
در این فصل دو ابزار قدرتمند دیگر برای تحلیل مدارهای الکتریکی معرفی خواهند شد: ۱. روش تحلیل گره ۲. روش تحلیل مش. این دو ابزار (دو روش) سیستماتیک با کمترین تعداد معادلات همزمان را معرفی خواهند کرد.

۱. آشنایی با چند اصطلاح فنی:

الف) گره اصلی: گره اصلی، گره ای است که در آن سه یا تعداد بیشتری المان متصل باشد.

ب) شاخه اصلی: مسیر بین دو گره اصلی مدار که در آن هر المان تنها یک بار حضور داشته باشد.

ج) مش: حلقه ای از مدار که شامل حلقه دیگری نباشد.



مثال ۱.۴: در مدار شکل زیر:
الف) تمام گره ها
ب) تمام گره های اصلی
ج) تمام شاخه ها
د) تمام شاخه های اصلی
هـ) تمام مش ها
را مشخص نمایید.

الف) a, b, c, d, e, f, g

ب) c, b, e, g

ج) $V_1, V_2, R_1 : R_7, I$

د) $V_1 - R_1$, $R_2 - R_3$, $V_2 - R_4$, R_5, R_6, R_7, I

هـ) $V_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2$, $V_2 - R_2 - R_3 - R_6 - R_4$, $R_5 - R_6 - R_7$, $R_7 - I$

نکته مهم: اگر مداری دارای n گره اصلی و b شاخه اصلی باشد ($b > n$) با استفاده از KCL تنها می توان $n-1$ معادله مستقل جریان بدست آورد. برای محاسبه $b-(n-1)$ جریان شاخه باقیمانده از KVL استفاده می شود.

▲ مثال ۲.۴: در مدار شکل مثال ۱.۴ جریان های شاخه های مقاومتی $R_1 - R_7$ را بدست آورید.

از آنجا که R_2 و R_3 در مقاومت سری هستند ← $i_2 = i_3$ ← تعداد معادلات مورد نیاز = 6

b در KCl: $i_1 - i_5 - i_7 + I = 0$

c در KCl: $i_4 + i_2 = i_1$ ⟵ تعداد گره اصلی = $n = 4$

e در KCl: $i_5 - i_3 - i_6 = 0$ ⟵ تعداد معادلات مستقل جریان = $n - 1 = 3$

اکنون به 3 معادله مستقل دیگر نیاز داریم:

① روش KVL: $-V_1 + R_1 i_1 + R_5 i_5 + R_3 i_3 + R_2 i_3 = 0$ $(i_2 = i_3)$

② روش KVL: $-V_2 - R_2 i_3 - R_3 i_3 + R_6 i_6 + R_4 i_4 = 0$

③ روش KVL: $R_7 i_7 - R_6 i_6 - R_5 i_5 = 0$

حل 6 معادله با 6 مجهول به راحتی امکان پذیر می باشد. هدف ما این است که مدار را تنها با $n-1$ معادله و یا با $b-(n-1)$ معادله تحلیل نماییم. برای رسیدن به این هدف از روش های جدید استفاده خواهیم کرد.

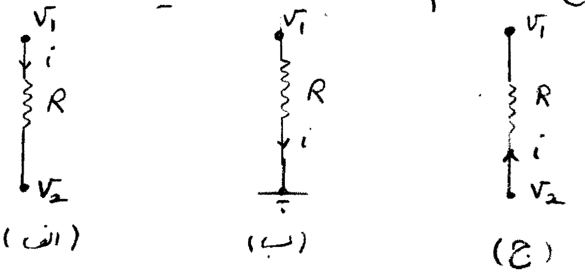
۲. روش تحلیل گره:

اگر مداری دارای n تا گره اصلی باشد، با استفاده از روش تحلیل گره و با نوشتن $(n-1)$ معادله می توان مدار را تحلیل نمود. برای استفاده از روش تحلیل گره بصورت زیر عمل می نماییم:

۱. ابتدا گره های اصلی مدار را مشخص می نماییم.
۲. یکی از گره های مدار را بعنوان گره مبنا درنظر می گیریم. ولتاژ گره مبنا را برابر با صفر (زمین) درنظر می گیریم. (معمولاً گره ای که بیشترین شاخه به آن متصل است را بعنوان گره مبنا درنظر می گیرند.)
۳. به سایر گره های اصلی مدار مجهول ولتاژ را اختصاص می دهیم. $(V_1, V_2, \ldots)$
٤. برای هر گره اصلی بجز گره مبنا با استفاده از قانون اهم و ولتاژهای اختصاص داده شده به هر گره یک معادله KCl می نویسیم.
۵. با حل $n-1$ معادله بدست آمده $(n-1)$ ولتاژ مجهول گره بدست می آید که در نتیجه آن مدار حل خواهد شد.

▲ برای هر شاخه که جهت جریان آن مشخص نیست جریان را خارج شونده درنظر می گیریم.

▶ نکته مهم: اگر از مدل $\boxed{v^{+}_{-}}$ به عنوان مدل مرجع استفاده کنیم برای هر شاخه مقاومتی داریم:

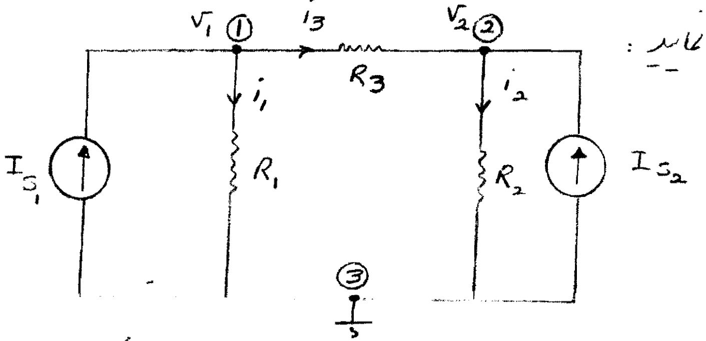


الف) $i = \frac{V_1 - V_2}{R}$

ب) $i = \frac{V_1 - 0}{R} = \frac{V_1}{R}$

ج) $i = \frac{V_2 - V_1}{R}$

برای درک بهتر روش ولتاژ گره به مثال های زیر توجه نمایید:



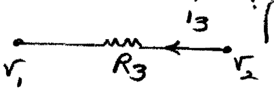
▶ مثال ۳.۴: جریان های سه مقاومت شکل روبرو را برحسب جریان های منابع مستقل محاسبه کنید.

ابتدا گره اصلی را مشخص می‌کنیم. گره 3 که بیشترین شاخه به آن متصل است را به عنوان گره مبنا (زمین) می‌گیریم.

گره ①: $I_{S_1} - i_1 - i_3 = 0 \rightsquigarrow I_{S_1} - \left(\frac{V_1 - 0}{R_1}\right) - \left(\frac{V_1 - V_2}{R_3}\right) = 0 \quad (1)$

گره ②: $I_{S_2} + i_3 - i_2 = 0 \rightsquigarrow I_{S_2} + \left(\frac{V_1 - V_2}{R_3}\right) - \left(\frac{V_2}{R_2}\right) = 0 \quad (2)$

▶ توجه کنید که جهت جریان مقاومت‌ها کاملاً اختیاری است، اما جریان را با استفاده از ولتاژ دو سر مقاومت و جهتی که مشخص کرده‌اید بنویسید. به عنوان مثال اگر جهت جریان R_3 را برعکس فرض کنیم:



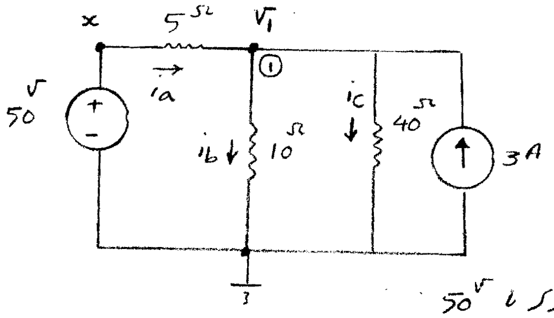
گره ①: $I_{S_1} + i_3 - i_1 = 0 \rightsquigarrow I_{S_1} + \frac{(V_2 - V_1)}{R_3} - \frac{V_1}{R_1} = 0$

که با معادله (۱) یکسان خواهد بود. با مرتب سازی معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_2}{R_3} = I_{S_1} & (1) \\ -\frac{V_1}{R_3} + V_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = I_{S_2} & (2) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{S_1} \\ I_{S_2} \end{bmatrix}$$

با حل معادله ماتریسی فوق مقادیر V_1 و V_2 بدست می‌آیند.

◄ مثال ۴.۴ : با استفاده از روش ولتاژ گره، جریان شاخه‌های a، b و c را در مدار شکل زیر بدست آورده سپس توان هریک از منابع را محاسبه کنید.



مدار دارای 2 گره اصلی می‌باشد که گره پایین را به عنوان گره مبدا انتخاب می‌کنیم.

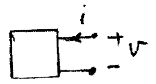
◄ نکته: ولتاژ نقطه x با توجه به اینکه گره پایینی ولتاژ صفر دارد برابر با 50^V است. بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت 5^Ω برابر با $V_x - V_1$ یعنی $50 - V_1$ است. (در جهت i_a)

KCL در گره ① : $i_a + 3 - i_b - i_c = 0 \rightsquigarrow \frac{50 - V_1}{5} + 3 - \frac{V_1}{10} - \frac{V_1}{40} = 0$

$\rightsquigarrow 13 = V_1\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right)$

$\rightsquigarrow V_1 = 40^V$

$\rightsquigarrow i_a = \frac{50 - V_1}{5} = 2^A \;;\; i_b = \frac{V_1}{10} = 4^A \;;\; i_c = \frac{V_1}{40} = 1^A$

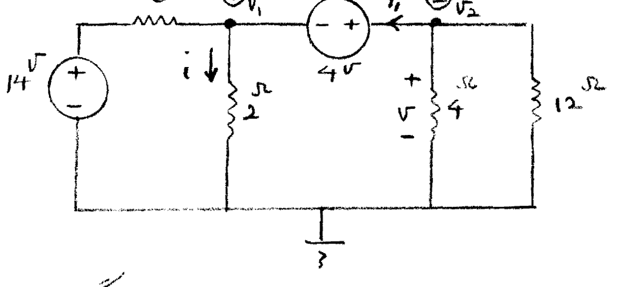


مدل مرجع

$\rightsquigarrow P_{50V} = +(50)(-2) = -100\ W$ توان تولید می‌کند.

$P_{3A} = +(40)(-3) = -120\ W$ 〃 〃 〃

◄ مثال ۵.۴ : در مدار شکل زیر با استفاده از روش تحلیل گره متغیرهای ولتاژ را محاسبه نمایید.



در این نوع مدارها برای نوشتن KCL در گره‌های ① و ② جریان شاخه منبع 4^V را نداریم. برای حل این مشکل یک جریان دلخواه به این شاخه اختصاص داده و KCL ها را می‌نویسیم.

KCL در گره ① : $\frac{V_1 - 14}{6} + \frac{V_1}{2} = i_1$

← جریان مقاومت 6^Ω را خارج شونده در نظر گرفتیم

اکنون i_1 را حذف می‌کنیم : $V_1\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + V_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{14}{6}$

KCL در گره ② : $i_1 + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2}{12} = 0$

همانطور که مشاهده می‌کنیم تنها یک معادله مستقل بدست آمده است. برای بدست آوردن معادله دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

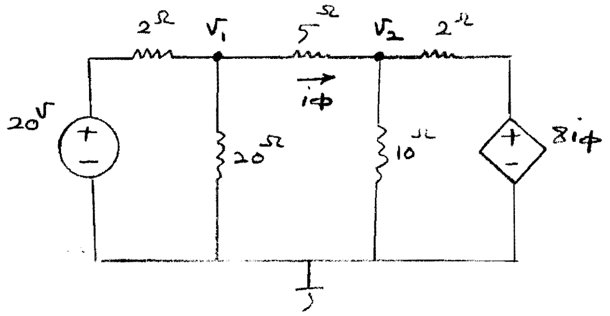
اختلاف ولتاژ بین گره 2 و 1 برابر 4^V است. $\longleftarrow$ $V_2 - V_1 = 4$

$\rightsquigarrow V_1 = 1$ $\quad\quad$ $\rightsquigarrow V = 5^V$

$V_2 = 5^V$ $\quad\quad$ $i = \frac{V_1}{2} = 0.5^A$

۱.۲ : روش ولتاژ گره در مدارهای شامل منابع وابسته :

منابع وابسته مقدار ولتاژ یا جریان وابسته به ولتاژ یا جریان یکی از عناصر مدار را دارند. بنابراین مقدار ولتاژ یا جریان آنها مجهول است. این مقدار مجهول نیازمند یک معادله جدید است. با چند مثال روش حل مدارهای شامل منبع وابسته را توضیح می دهیم.



مثال ۶.۴ : در مدار شکل روبرو توان مقاومت 5^{Ω} را محاسبه نمایید.

برای هر گره تمام جریان ها را خارج شونده در نظر می گیریم.

① در گره KCL : $\frac{V_1 - 20}{2} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0$ $\quad\quad$ (1)

② در گره KCL : $\frac{V_2 - 8i_\phi}{2} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_1}{5} = 0$ $\quad\quad$ (2)

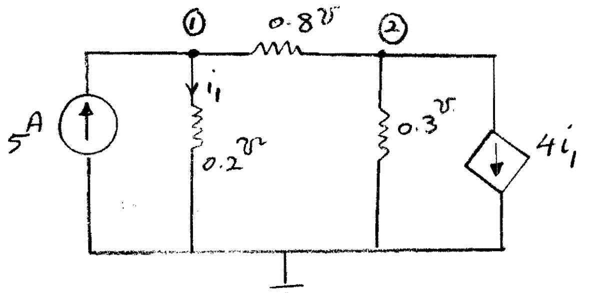
با توجه به مجهول اضافی i_ϕ نیاز به یک معادله جدید داریم:

$$i_\phi = i_{5\Omega} = \frac{V_1 - V_2}{5}$$

$\rightsquigarrow$ (در معادله 2) $\frac{V_2}{2} - 4i_\phi + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_1}{5} = 0 \rightsquigarrow V_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) - 4\left(\frac{V_1 - V_2}{5}\right) - \frac{V_1}{5} = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 0.75V_1 - 0.2V_2 = 10 \\ -V_1 + 1.6V_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} V_1 = 16^V \\ V_2 = 10^V \end{matrix} \rightsquigarrow i_\phi = \frac{16 - 10}{5} = 1.2^A$$

$$P_{5\Omega} = 5i_\phi^2 = 7.2^W$$



مثال ۷.۴ : در مدار شکل روبرو V_1 را محاسبه نمایید.

$\blacktriangleright V = Ri = \frac{i}{G} \rightsquigarrow i = \frac{V}{R} = V.G$

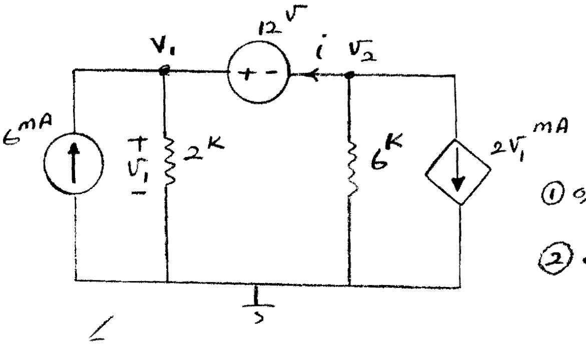
① در گره KCL : $5 - 0.2V_1 - 0.8(V_1 - V_2) = 0$ $\quad\quad$ (1)

② در گره KCL : $(V_2 - V_1) \times 0.8 + 0.3V_2 + 4i_1 = 0$ $\quad\quad$ (2)

از طرفی: $i_1 = 0.2 V_1$ $\xrightarrow{\text{در معادله ۲}}$ $0.8(V_2 - V_1) + 0.3V_2 + 0.8V_1 = 0$

$\rightarrow V_1 = 5^A$

▶ مثال ۴.۸: در مدار شکل زیر مقدار V_1 را مشخص کنید.



$V_1 - V_2 = 12^V$ معادله اضافی

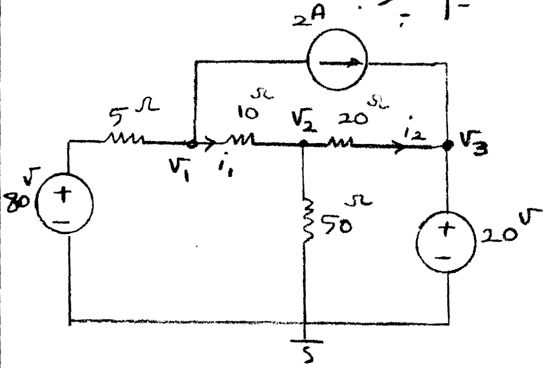
KCL در گره ①: $6 + i = \frac{V_1}{2}$ (1)

KCL در گره ②: $i + \frac{V_2}{6} + 2V_1 = 0$ (2)

$\xrightarrow{\text{ترکیب ۱ و ۲}}$ $\frac{V_1}{2} - 6 + \frac{V_2}{6} + 2V_1 = 0$ $\rightarrow$ $V_1\left(\frac{1}{2} + 2\right) + \frac{V_2}{6} = 6$, $V_1 - V_2 = 12$ $\rightarrow$ $V_1 = 3^V$, $V_2 = -9^V$

در این مسأله احتیاجی به نوشتن یک معادله اضافی برای منبع وابسته نداشتیم. چرا؟

▶ مثال ۴.۹: در مدار شکل زیر جریان های i_1 و i_2 را بدست آورید.



از همان ابتدا می‌دانیم که V_3 برابر 20^V است بنابراین احتیاجی به نوشتن KCL در گره 3 نداریم.

KCL در گره ①: $\frac{V_1 - 80}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} + 2 = 0$

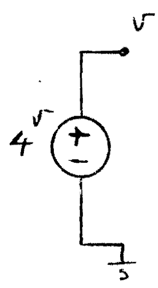
KCL در گره ②: $\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2 - \overset{V_3}{20}}{20} + \frac{V_2}{50} = 0$

$\rightarrow V_1 = \frac{2480}{41}^V$, $V_2 = \frac{1700}{41}^V$

$\rightarrow i_1 = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{78}{41}^A$

$i_2 = \frac{V_2 - 20}{20} = \frac{44}{41}^A$

▶ نکته: توجه کنید:



$V = 4^V$

۳. روش جریان مش :

اگر مداری دارای n گره اصلی و b شاخه اصلی باشد ، با استفاده از روش جریان مش و با نوشتن $b-(n-1)$ معادله می‌توان مدار را تحلیل نمود. برای استفاده از روش جریان مش بصورت زیر عمل می‌کنیم :

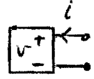
۱. ابتدا مش های مدار را مشخص می‌کنیم.

۲. به هر مش یک جریان اختصاص می‌دهیم. جریان مش، جریانی است که در فضای احاطه شده توسط یک مش وجود دارد و بیان آن در مدار معمولاً بصورت یک خط پیکان دار بسته و یا تقریباً بسته است که دور تا دور مش را طی می‌کند.

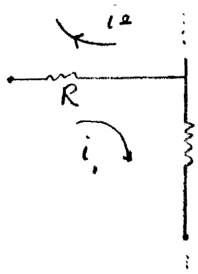
- جهت پیکان نشان دهنده جهت مرجع جریان روش می‌باشد. (جهت جریان مش اختیاری است.)
- جریان های مش در قوانین کیرشهف صدق می‌کنند.

۳. برای هر مش یک KVL می‌نویسیم. برای نوشتن KVL اگر به سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم ولتاژ منفی می‌گذاریم و بالعکس.

۴. با حل $b-(n-1)$ معادله بدست آمده مجهولات مدار که همان جریان های مش هستند بدست می‌آید.

- برای نوشتن ولتاژ هر شاخه از مدل مرجع  استفاده می‌کنیم

- **نکته مهم:** با استفاده از مدل مرجع فوق داریم:

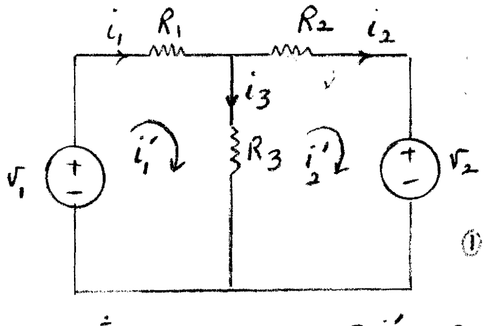


$V_R = R(i_1 - i_2)$ ① در جهت مش KVL

$V_R = R(i_2 - i_1)$ ② در جهت مش KVL

برای درک بهتر روش جریان مش به مثال های زیر توجه نمایید.

- **۴.۱۰ :** جریان های i_1-i_3 را در مدار شکل زیر بدست آورید.



ابتدا مش های مدار را مشخص کرده و جریان آنها را روی مدار نشان می‌دهیم

در جهت مش ①

① روش KVL : $-V_1 + R_1 i_1' + R_3(i_1' - i_2') = 0$

② روش KVL : $R_3(i_2' - i_1') + R_2 i_2' + V_2 = 0$

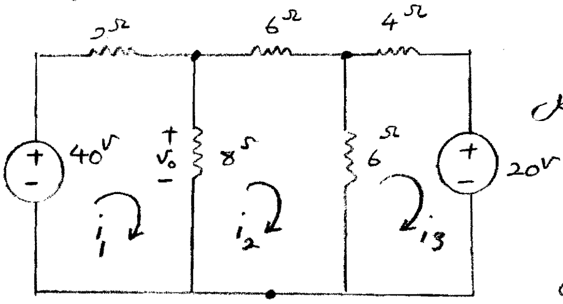
$$\rightsquigarrow (R_1+R_3)\,i_1' - R_3\,i_2' = V_1$$
$$+R_3\,i_1' - (R_3+R_2)\,i_2' = V_2$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -R_3-R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات فوق i_1' و i_2' بدست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} i_1 = i_1' \\ i_2 = i_2' \\ i_3 = i_1' - i_2' \end{cases}$$

▶ نکته: حل دستگاه معادلات به روش کرامر می‌باشد. (مراجعه به پیوست)

▶ مثال ۴.۱۱: با استفاده از روش جریان مش ولتاژ V_0 در مدار شکل زیر را محاسبه نمایید.



ابتدا مش‌های مدار را مشخص کرده و سپس به آنها جریان اختصاص می‌دهیم.

$$\begin{matrix} n=3 \\ b=5 \end{matrix} \rightsquigarrow b-(n-1) = 5-2 = 3 \rightsquigarrow$$ به ۳ معادله نیاز داریم.

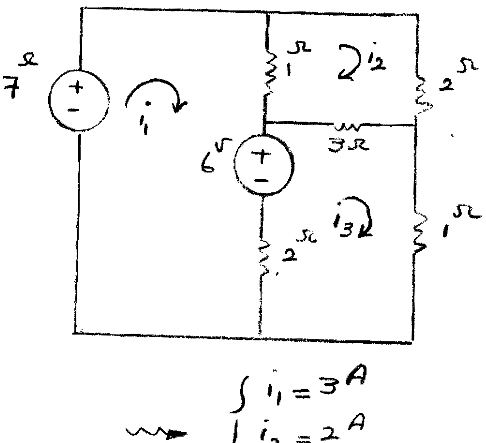
① KVL در مش: $-40 + 2i_1 + 8(i_1 - i_2) = 0$ $\qquad 10i_1 - 8i_2 = 40$

② KVL در مش: $8(i_2 - i_1) + 6i_2 + 6(i_2 - i_3) = 0$ $\rightsquigarrow -8i_1 + 20i_2 - 6i_3 = 0$

③ KVL در مش: $6(i_3 - i_2) + 4i_3 + 20 = 0$ $\qquad -6i_2 + 10i_3 = -20$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} i_1 = 5.6^A \\ i_2 = 2^A \\ i_3 = -0.8^A \end{cases} \rightsquigarrow V_0 = 8(i_1 - i_2) = 8(5.6 - 2) = 28.8^V$$

▶ مثال ۴.۱۲: با استفاده از روش جریان مش جریان‌های مش نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.



① مش: $-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$

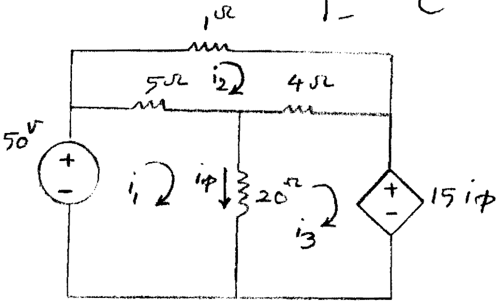
② مش: $1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$

③ مش: $3(i_3 - i_2) + i_3 + 2(i_3 - i_1) - 6 = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} i_1 = 3^A \\ i_2 = 2^A \\ i_3 = 3^A \end{cases}$$

۱.۳ : روش جریان مش در مدارهای شامل منابع وابسته :

از آنجا که مقدار ولتاژ یا جریان منابع وابسته مجهول و وابسته به ولتاژ و جریان شاخه دیگری از مدار است، علاوه بر معادلاتی که از روش جریان مش بدست می آید باید به تعداد منابع وابسته معادله به معادلات مش اضافه کنیم. با چند مثال روش حل مدارهای شامل منابع وابسته را توضیح می دهیم.



◀ مثال ۱۳.۴ : با استفاده از روش جریان مش ، توان تلف شده در مقاومت 4Ω را محاسبه کنید.

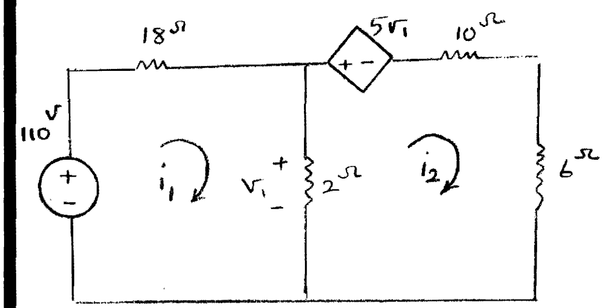
① مش : $-50 + 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3) = 0$

② مش : $5(i_2 - i_1) + i_2 + 4(i_2 - i_3) = 0$

③ مش : $20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15 i_\phi = 0$

اکنون باید یک معادله دیگر برای حذف i_ϕ از معادلات فوق بدست آوریم. با دقت در مدار داریم: $i_\phi = i_1 - i_3$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 25 i_1 - 5 i_2 - 20 i_3 = 50 \\ -5 i_1 + 10 i_2 - 4 i_3 = 0 \\ -5 i_1 - 4 i_2 + 9 i_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} i_1 = 29.6 \\ i_2 = 26^A \\ i_3 = 28^A \end{cases} \rightsquigarrow i_{4\Omega} = i_3 - i_2 = 2^A, \quad P_{4\Omega} = 4 i_{4\Omega}^2 = 16\ W$$



◀ مثال ۱۴.۴ : در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل روبرو V_1 را محاسبه نمائید.

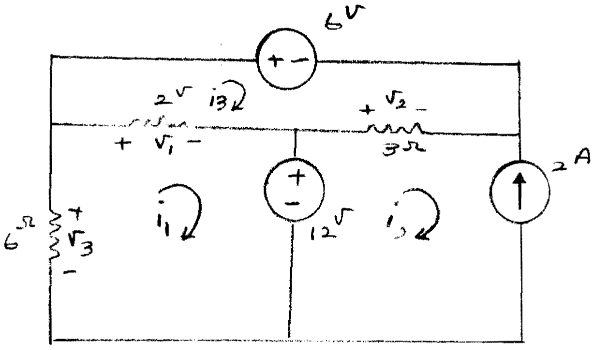
معادله اضافی: $V_1 = 2(i_1 - i_2)$

مش 1 : $-110 + 18 i_1 + 2(i_1 - i_2) = 0$

مش 2 : $2(i_2 - i_1) + 5V_1 + 16 i_2 = 0 \rightsquigarrow 2(i_2 - i_1) + 5 \times 2(i_1 - i_2) + 16 i_2 = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} i_1 = 5^A \\ i_2 = -5^A \end{cases} \rightsquigarrow V_1 = 2(5+5) = 20^V$$

▲ مثال ۴.۱۵ : در مدار شکل زیر مقادیر v_1 - v_3 را محاسبه نمایید.



با دقت در این مدار متوجه می‌شویم که جریان مش ۲ مشخص است و نیازی به نوشتن معادله مش ۲ برای محاسبه آن نداریم.
جریان مش دو برابر با جریان شاخه منبع است اما از آنجا که جهت این دو جریان عکس یکدیگر می‌باشد داریم: $i_2 = -2^A$

مش ① : $6i_1 + 2(i_1 - i_3) + 12 = 0$

مش ③ : $6 + 3(i_3 - \underbrace{i_2}_{-2}) + 2(i_3 - i_1) = 0 \rightsquigarrow 3(i_3 + 2) + 2(i_3 - i_1) = -6$

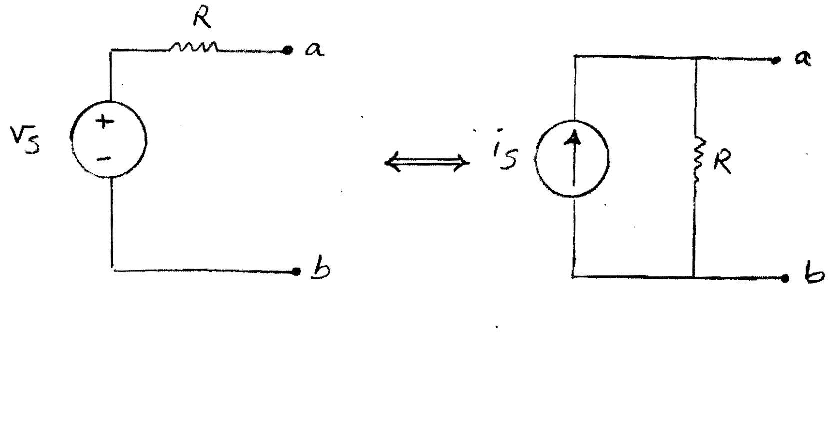
$$\rightsquigarrow \begin{cases} i_1 = -\frac{7}{3}\,A \\ i_3 = -\frac{10}{3}\,A \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 = 2(i_1 - i_3) = 2\left(-\frac{7}{3} + \frac{10}{3}\right) = 2^V \\ v_2 = 3(i_3 + 2) = 4^V \\ v_3 = 14^V \end{cases}$$

▲ **نکته مهم:** اگر یکی از شاخه‌های مش منحصراً از مدار منبع جریان باشد جریان آن مش معلوم است و نیازی به نوشتن معادله آن مش نداریم.

۴. تبدیل منبع:

اگرچه روش‌های ولتاژ گره و جریان مش دو ابزار قدرتمند برای تحلیل مدار هستند، اما روش‌های دیگری نیز برای ساده سازی و تحلیل مدار وجود دارند که با استفاده از آنها تحلیل‌های فوق ساده‌تر خواهند شد. روش تبدیل منبع یکی از این روش‌ها می‌باشد.

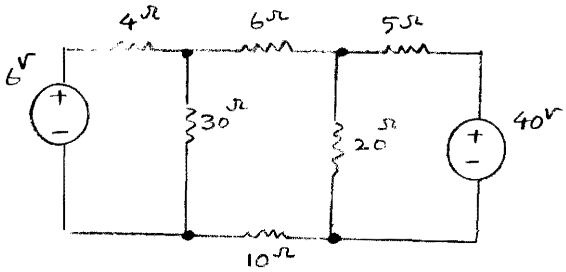
در روش تبدیل منبع، یک منبع ولتاژ سری با یک مقاومت را به یک منبع جریان موازی با همان مقاومت تبدیل می‌کنیم:



$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

▲ این تبدیل دوطرفه می‌باشد.

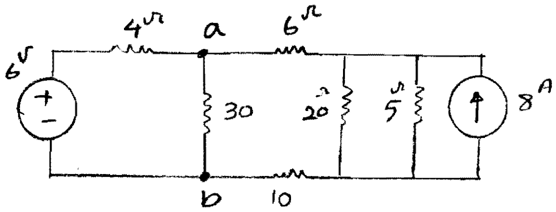
◄ مثال ۴.۱۶ : در مدار شکل زیر توان منبع 6^V را محاسبه کنید.



تعداد معادله روش ولتاژ گره $n=4 \rightsquigarrow$ 3 می باشد

$b=6 \rightsquigarrow b-(n-1)=3$

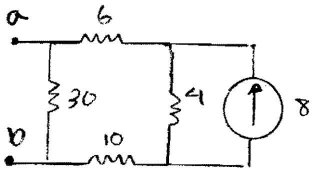
تعداد معادله روش جریان مش = 3

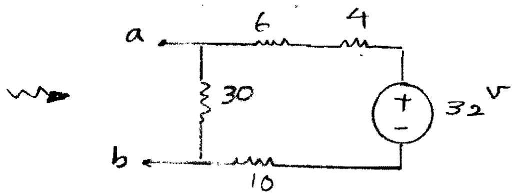


استفاده از هریک از روش های فوق برای حل مدار امکان پذیر است اما در این مثال با استفاده از روش تبدیل منبع بدون نیاز به معادلات جریان مدار را کشف می کنیم:

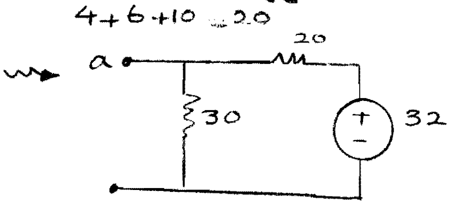
$20 \| 5 = \frac{20\times5}{20+5} = 4^{\Omega}$

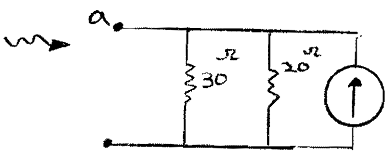
◄ چون هدف توان منبع 6^V است، منبع 6^V را تغییر نمی دهیم.





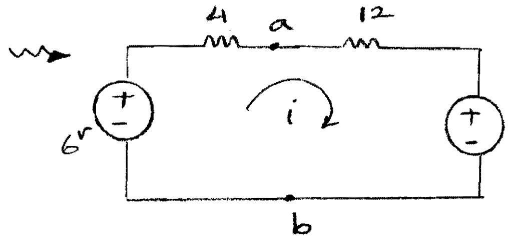
$4+6+10 = 20^{\Omega}$





$\frac{32}{20} = 1.6$

$20 \| 30 = 12^{\Omega}$



$1.6\times12 = 19.2$

روش KVL : $-6+16i+19.2=0$

$\rightsquigarrow i=-0.825$

$P_{6V} = +(6)(-i) = +6\times0.825 = 4.95^{W}$ توان جذب می کند

i از سر مثبت منبع خارج می شود

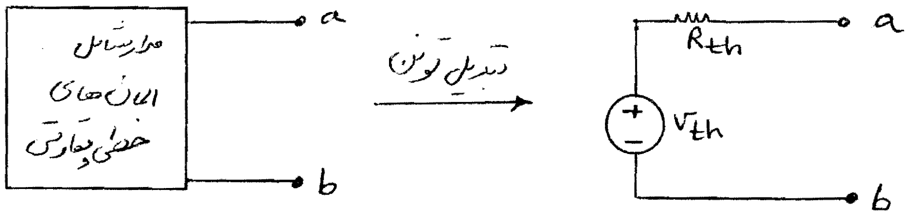
۵. مدار معادل تونن و مدار معادل نورتن :

در تحلیل مدارهای الکتریکی آنچه در دو سر خروجی مدار اتفاق می افتد مهم است. بطور مثال وقتی یک دستگاه تونستر را به برق برق متصل می‌کنیم، ولتاژ و جریان شاخه‌های داخلی مدار اهمیتی برای ما ندارد و تنها ولتاژ و جریان خروجی آن مهم است.

تبدیلات تونن و نورتن دو روش ساده سازی مداری دیگر هستند که در مدار سرهای خروجی مدار تمرکز دارند و اهمیت فراوانی در تحلیل مدار دارند. اگرچه در این بخش از این تبدیلات برای مدارهای مقاومتی استفاده می‌کنیم اما آنها را در هر مداری که در آن المان های خطی استفاده شده باشد می‌توان بکار برد.

الف) مدار معادل تونن :

مدار معادل تونن عبارت است از یک منبع ولتاژ مستقل V_{th} که با یک مقاومت R_{th} بطور سری متصل شده است.
در تبدیل تونن این مدار جایگزین هر مداری می‌شود که از دو سر مشخص مدار دیده می‌شود :

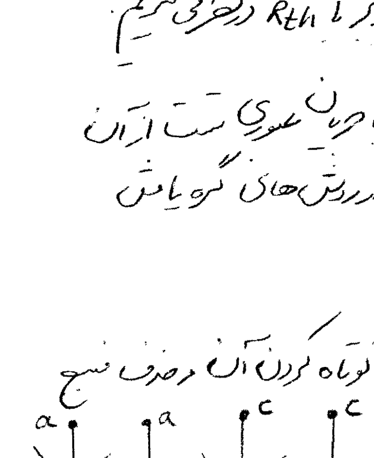


برای محاسبه مدار معادل تونن بصورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. اگر مدار شامل منابع مستقل باشد برای محاسبه R_{th}، مدار معادل مقاومتی دیده شده از دو سر a و b را با حذف منابع مستقل مدار محاسبه می‌کنیم و مقاومت معادل بدست آمده را برابر با R_{th} در نظر می‌گیریم.

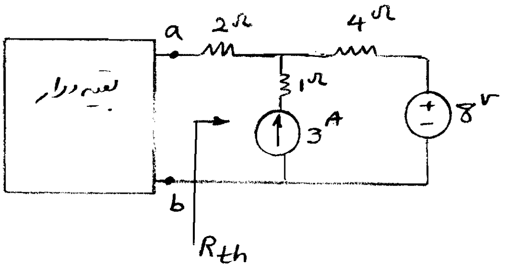
۲. اگر مدار شامل منابع وابسته باشد به دو سر a و b یک منبع ولتاژ تست با جریان بطور دلخواه تست از آن اتصال داده و منابع مستقل مدار را حذف می‌کنیم. با تحلیل مدار به هر یک از روش‌های گفته شده نسبت $\frac{V_t}{i_t}$ را محاسبه کرده و برابر R_{th} قرار می‌دهیم.

نکته : حذف منبع ولتاژ به معنای بی اثر کردن آن در مدار یعنی اتصال کوتاه کردن آن و حذف منبع جریان در مدار یعنی بی اثر کردن آن و مدار باز کردن آن می‌باشد.

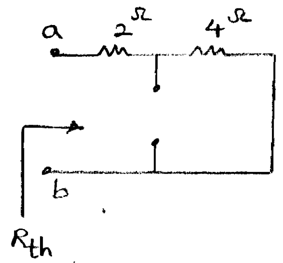


۳. برای تعیین V_{th} ، دو سر a و b را مدار باز نموده و تأثیر منابع ولتاژ و جریان مدار را بر روی دو سر a و b بعنوان V_{th} در نظر می گیریم. (یعنی ولتاژ دو سر a و b را با توجه به منابع موجود در مدار محاسبه می کنیم و برابر با V_{th} قرار می دهیم.)

◄ مثال ۴. ۱۷ : مدار معادل تونن دیده شده از سرهای a و b را محاسبه نمایید.

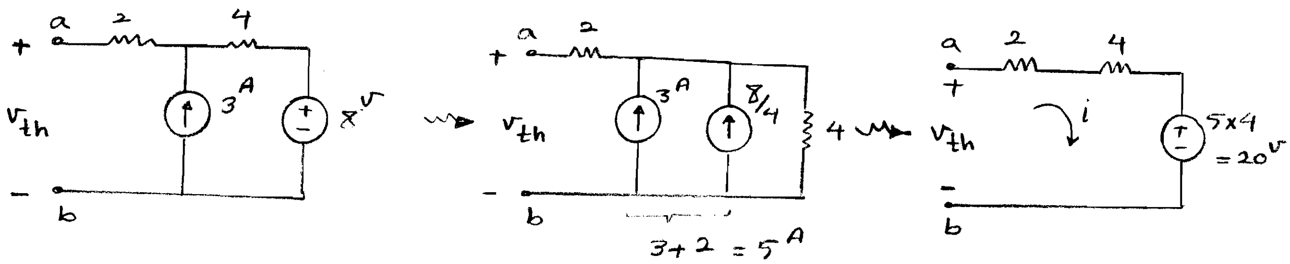


① محاسبه R_{th} : ابتدا منابع مستقل مدار را حذف می کنیم. دقت کنید که مقاومت 1Ω به علت اینکه با منبع جریان سری شده است تأثیری در مدار ندارد.



$\rightsquigarrow R_{th} = 2+4 = 6^\Omega$

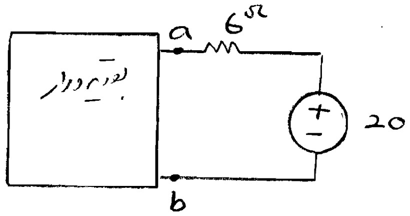
② محاسبه V_{th} : ابتدا دو سر a و b را مدار باز می کنیم:



$$KVL: \quad -V_{th} + 6i + 20 = 0$$

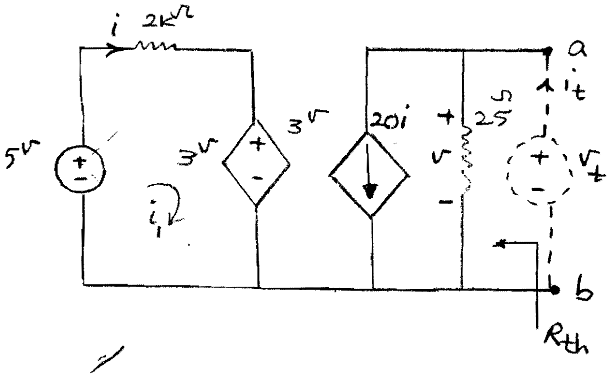
چون دو سر a و b اتصال کوتاه است پس حلقه بسته در مدار نداریم که جریانی از آن عبور کند بنابراین $i=0$ است.

$\rightsquigarrow V_{th} = 20^V$



⟵ مدار معادل تونن

◄ نکته مهم: اگر شاخه ای از مدار داخل حلقه بسته نباشد جریانی از آن شاخه عبور نمی کند.



مثال ۴. ۱۸ : مدار معادل تونن دیده شده از سرهای a و b مدار زیر را بدست آورید.

① محاسبه R_{th} : برای محاسبه R_{th} در این مدار که شامل منبع وابسته است یک منبع V_t با جریان i_t به دو سر a و b اعمال می‌کنیم:

KCL در گره a : $i_t = \frac{V_t}{25} + 20i$

KVL در حلقه ① : $2000 i_1 + 3V = 0$

$V = V_t \;,\; i_1 = i \;\rightsquigarrow\; i = -\frac{3V_t}{2000}$

$\rightsquigarrow\; i_t = \frac{V_t}{25} - \frac{60V_t}{2000} \;\rightsquigarrow\; i_t = V_t\left(\frac{8-6}{200}\right) \;\rightsquigarrow\; V_t = 100\, i_t$

$\rightsquigarrow\; R_{th} = \frac{V_t}{i_t} = 100\,\Omega$

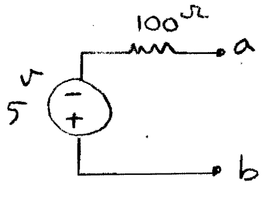
② محاسبه V_{th} : دو سر a و b در این مدار، مدار باز است. بنابراین کافیست برای محاسبه V_{th} ، V_{ab} را محاسبه کنیم.

$V_{th} = V_{ab} = V \;\rightsquigarrow\;$ KCL در a : $\frac{V}{25} + 20i = 0$

KVL در حلقه ① : $-5 + 2000i + 3V = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{1}{25}V + 20i = 0 \\ 3V + 2000i = 5 \end{cases}$$

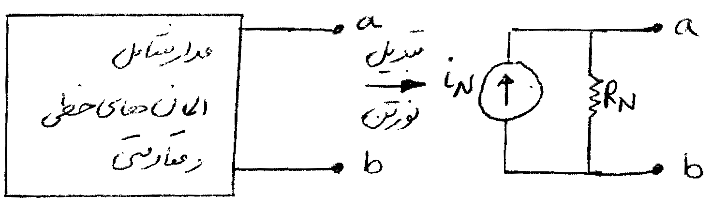
$\rightsquigarrow\; V = -5^{V} = V_{th}$



مدار معادل تونن

ب) مدار معادل نورتن :

مدار معادل نورتن عبارت است از یک منبع جریان که بطور موازی با یک مقاومت قرار گرفته است. در تبدیل نورتن این مدار جایگزین هر مداری می‌شود که از دو سر مشخص مدار دیده می‌شود.



برای بدست آوردن مدار معادل نورتن بصورت زیر عمل می‌کنیم:

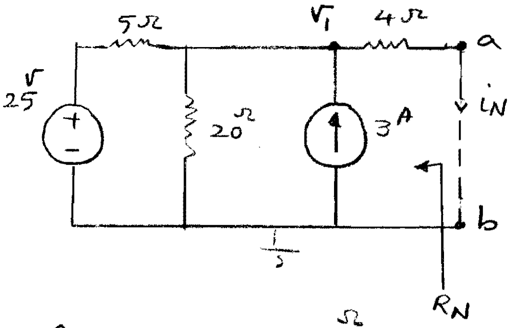
۱. روش محاسبه R_N همانند روش محاسبه R_{th} می‌باشد: $(R_{th}=R_N)$

۲. برای محاسبه i_N، ابتدا دو سر a و b را اتصال کوتاه نموده و سپس با تحلیل مدار جریان عبوری از سر a به b را محاسبه کرده و برابر i_N قرار می‌دهیم.

◄ نکته بسیار مهم: مدارهای معادل تونن و نورتن در واقع دو مدار قابل تبدیل توسط تبدیل منبع به یکدیگر هستند. بنابراین برای محاسبه هر یک از آنها می‌توان یکی را محاسبه و به دیگری تبدیل نمود.

◄ نکته کاربردی: معمولاً برای بدست آوردن مدار معادل نورتن، ابتدا مدار معادل تونن را محاسبه نموده و سپس با تبدیل منبع مدار معادل نورتن آن را محاسبه می‌کنیم.

◄ مثال ۴.۱۹: مدار معادل نورتن مدار شکل روبرو را که از سرهای a و b دیده می‌شود، بیابید.

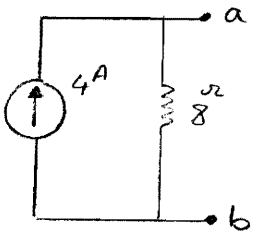


$R_N = 4 + 20\|5 = 8^{\Omega}$

با استفاده از روش گره داریم:

① KCl در گره: $\dfrac{V_1-25}{5}+\dfrac{V_1}{20}+\dfrac{V_1}{4}=3 \rightsquigarrow V_1=16^{V}$

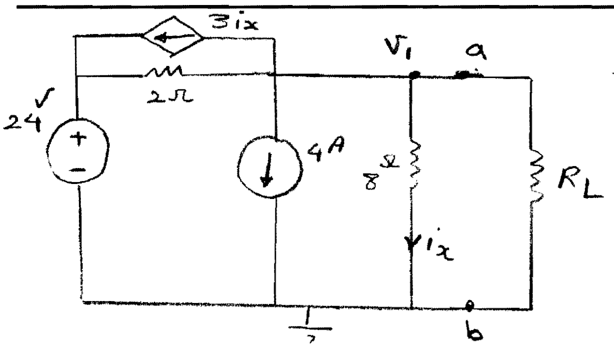
$\rightsquigarrow i_N=\dfrac{V_1}{4}=4^{A}$



◄ نکته مهم: فرض کنید که یک شبکه مقاومتی شامل منابع وابسته و مستقل خطی به سرهای یک بار R_L متصل است. در این صورت برای آنکه حداکثر توان ممکن به R_L منتقل گردد باید مقدار R_L به گونه‌ای انتخاب گردد که

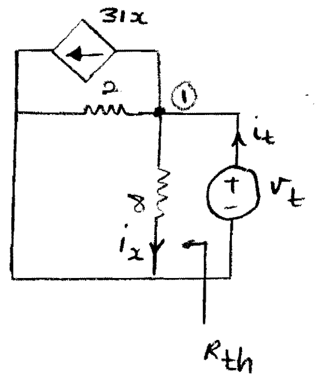
► $R_L = R_{th}$

که در آن R_{th}، مقاومت تونن معادل دیده شده از سرهای R_L می‌باشد.



مثال ۴-۲۰: در مدار شکل روبرو R_L را طوری طراحی کنید که حداکثر توان ممکن به آن منتقل شود.

برای محاسبه R_L باید R_{th} را محاسبه کنیم:



استفاده از روش ولتاژ گره ← KCL در ①:

$$i_t = \frac{V_1}{8} + \frac{V_1}{2} + 3i_x$$

$$i_x = \frac{V_1}{8}$$

$$V_1 = V_t$$

$$\Rightarrow i_t = V_t\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)$$

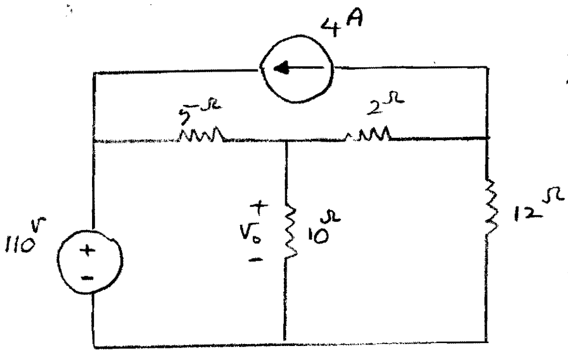
$$\Rightarrow V_t = i_t \Rightarrow R_{th} = 1\Omega \Rightarrow R_L = 1\Omega$$

۶. جمع آثار:

سیستم‌های خطی از قانونی به نام جمع آثار پیروی می‌کنند:

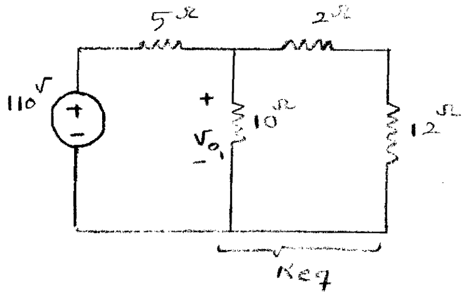
◄ قانون جمع آثار: اگر یک سیستم خطی دارای بیش از یک منبع ورودی باشد، خروجی کامل سیستم (مدار) برابر جمع خروجی‌های سیستم به ازای تک تک منبع‌های ورودی است.

یعنی برای بدست آوردن خروجی کل سیستم باید هر بار یکی از منابع را به مدار وصل و بقیه را حذف کنیم و به ازای هر منبع خروجی را محاسبه کنیم. سپس با جمع تک تک این خروجی‌ها، خروجی کل بدست می‌آید.



◄ مثال ۴-۲۱: با استفاده از قانون جمع آثار، مقدار ولتاژ V_0 را در مدار شکل روبرو محاسبه نمایید.

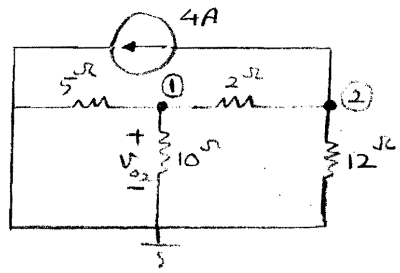
برای اعمال قانون جمع آثار مدار را بصورت جداگانه برای هر منبع ورودی مجزا تحلیل می‌کنیم.



① حذف منبع جریان :

$$R_{eq} = (12+2) \parallel 10 = \frac{14 \times 10}{24} = \frac{35}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم ولتاژ}} V_{o_1} = \frac{\frac{35}{6}}{\frac{35}{6}+5} \times 110 = 70^V$$



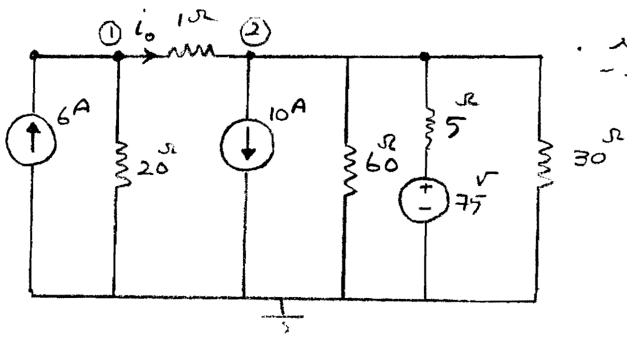
② حذف منبع ولتاژ : روش ولتاژ گره :

$$\text{در ① KCl} : \frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{2} = 0$$

$$\text{در ② KCl} : 4 + \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2}{12} = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} V_1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}V_2 = 0 \\ \frac{1}{2}V_1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)V_2 = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} V_1 = \\ V_2 = \end{matrix} \rightsquigarrow V_{o_2} = V_1 =$$

$$\rightsquigarrow V_o = V_{o_1} + V_{o_2} = 70 +$$



◀ مثال ۲۲.۴ : جریان i_0 در مدار شکل زیر را محاسبه کنید.

مدار زیر را از دو روش می‌توان تحلیل نمود :

۱. تحلیل گره

۲. جمع آثار

◀ روش اول : روش تحلیل گره ⟶

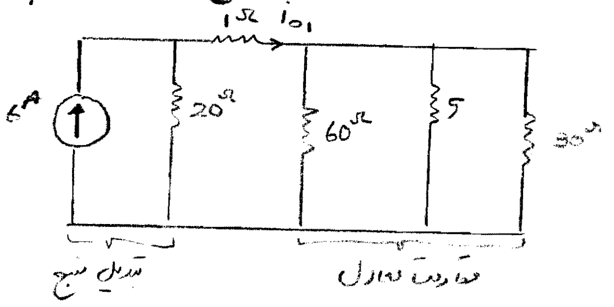
$$\text{در ① KCl} : 6 = \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{1}$$

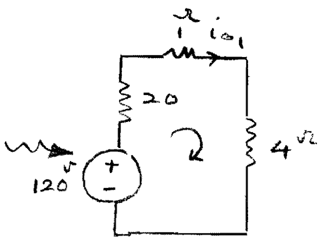
$$\text{در ② KCl} : \frac{V_2 - V_1}{1} + 10 + \frac{V_2}{60} + \frac{V_2}{30} + \frac{V_2 - 75}{5} = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} V_1 = \\ V_2 = \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow i_0 = \frac{V_1 - V_2}{1} =$$

جمع آثار : روش دوم ◄

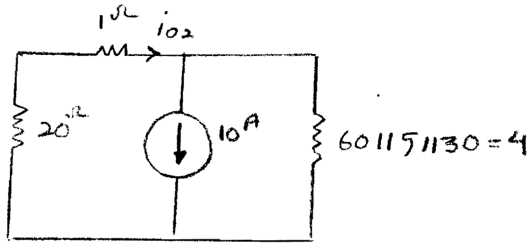
① حضور منبع 6^A :

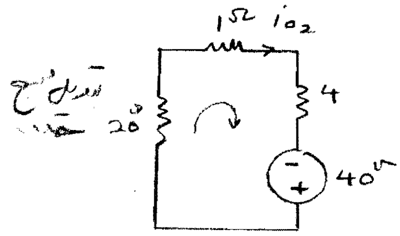




$$KVL \rightsquigarrow -120 + 25 i_{o1} = 0 \rightsquigarrow i_{o1} = \frac{120}{25} = 4.8^A$$

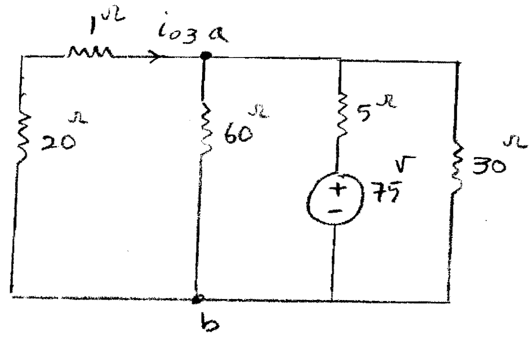
② حضور منبع 10^A :





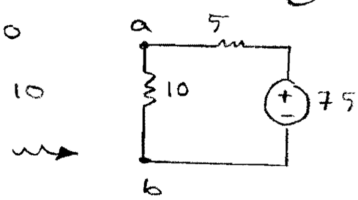
$$25 i_{o2} - 40 = 0 \rightsquigarrow i_{o2} = \frac{40}{25} = 1.6^A$$

③ حضور منبع 75^V



$30 \| 60 = 20$

$20 \| 21 \simeq 10$



$$V_{ab} = \frac{10}{10+5} \times 75 = 50^V$$

$$i_{o3} = \frac{-V_{ab}}{21} = \frac{-50}{21} \simeq -2.5$$

$$\rightsquigarrow i_o = i_{o1} + i_{o2} + i_{o3} = 4.8 + 1.6 - 2.5 = 3.9^A$$

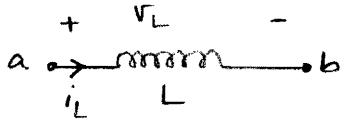
◄ فصل پنجم: آشنایی با ظرفیت، ضریب القا و ضریب القای متقابل:

۱. مقدمه:

این فصل را با معرفی دو عنصر دیگر از المان های مداری و ایده‌آل مدار آغاز می‌کنیم. روش های تحلیل مدار که در فصل سوم و چهارم معرفی گردید برای این دو عنصر نیز کاربرد دارند. بنابراین پس از آشنایی با رفتار دو سر این دو المان (جریان عبوری و ولتاژ دو سر) می‌توانیم با قوانین کیرشهف اتصال مداری این المان ها با دیگر المان های مدار را تحلیل نماییم.

۲. سلف (خود القا):

سلف، یک المان الکتریکی است که در برابر تغییرات جریان الکتریکی از آن حساسیت نشان می‌دهد. این المان از یک سیم پیچی که به دور یک هسته (مغناطیسی یا غیرمغناطیسی) پیچیده شده است، تشکیل شده است. رفتار سلف بر اساس پدیده‌ای به نام میدان مغناطیسی می‌باشد.



ضریب القا که با حرف "L" در مدار نشان داده می‌شود، پارامتری از مدار است که برای توصیف سلف بکار می‌رود. واحد ضریب القا، هانری (H) می‌باشد. با استفاده از مدل مرجع داریم:

ولتاژ دو سر سلف: $\boxed{V_L = L\frac{di_L}{dt}}$

که در آن V_L، L و t به ترتیب برحسب ولت، هانری و ثانیه بیان می‌شوند. با توجه به رابطه ولتاژ و جریان سلف نکات زیر باید مورد توجه قرار گیرد:

◄ نکته مهم: اگر جریان سلف ثابت (DC) باشد، تغییرات این جریان برابر صفر و ولتاژی در دو سر آن القا نخواهد شد. در این حالت V_L برابر صفر و سلف مانند اتصال کوتاه عمل خواهد کرد.

◄ نکته مهم: جریان سلف هرگز نمی‌تواند تغییرات ناگهانی داشته باشد.

◄ نکته مهم: جریان سلف برحسب ولتاژ برابر است با:

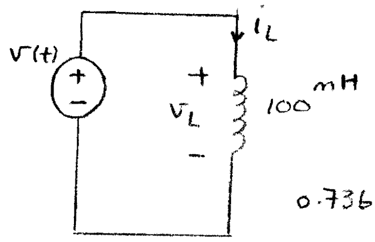
$$\boxed{i_L = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} V_L\,dt' + i(t_0)}$$

که در آن $i(t_0)$ جریان اولیه سلف در $t=t_0$ می‌باشد.

مثال ۱.۵: یک پالس ولتاژ با معادله زیر به یک سلف 100mH اعمال می‌شود:

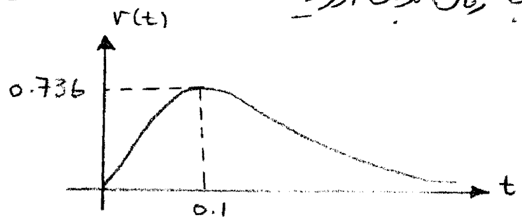
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 20te^{-10t} & t>0 \end{cases}$$

همچنین برای $t<0$ جریان سلف صفر می‌باشد ($i_L(0)=0$).



الف) شکل موج ولتاژ برحسب زمان سلف را رسم نمایید

ب) جریان سلف را برحسب زمان بدست آورید.



الف)

$$v(t)=20te^{-10t}$$

$$\Rightarrow v'(t) = -200te^{-10t}+20e^{-10t} = 20e^{-10t}(-10t+1)$$

نقطه ماکزیمم $\Rightarrow v'(t)=0 \Rightarrow t=0.1\ s \Rightarrow$

$$t=0.1 \Rightarrow v(0.1)=0.736$$

$$t=0 \Rightarrow v(0)=0$$

$$t=\infty \Rightarrow v(\infty)=0$$

ب) $$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t')\,dt' + i_L(0)$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{100\times10^{-3}}\int_0^t 20t'e^{-10t'}\,dt$$

$$= \overset{2}{\cancel{200}}\left[\frac{-e^{-10t'}}{\cancel{100}}(10t'+1)\right]_0^t = 2(1-10te^{-10t}-e^{-10t})\ \ A \quad t>0$$

۱.۲. توان و انرژی سلف:

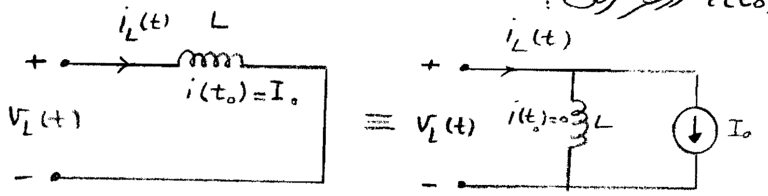
رابطه توان و انرژی سلف را مستقیماً می‌توان از رابطه ولتاژ و جریان آن بدست آورد. با در نظر گرفتن قانون علامت گذاری پسیو داریم:

$P=v_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt}$	توان سلف
$W = \frac{1}{2}L i_L^2$	انرژی سلف

◄ مقدار انرژی ذخیره شده در سلف، تنها به مقدار جریان عبوری از سلف بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن جریان بستگی ندارد.

◄ **نکات مهم در خصوص سلف :**

۱. جریان اولیه سلف در لحظه t_0 یعنی جریانی که در لحظه t_0 و قبل از اتصال سلف به منبع ورودی مورد نظر ما از سلف عبور می‌کرده است. هر سلف خطی با جریان اولیه $i(t_0)$ را می‌توان بصورت یک سلف بدون جریان اولیه موازی با منبع جریان $i(t_0)$ در نظر گرفت:



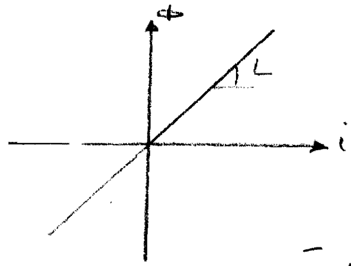
(به جهت منبع دقت نمائید)

۲. از آنجائی که جریان سلف نمی‌تواند تغییر ناگهانی داشته باشد. اگر در t_0^- جریان سلف را بدانیم جریان سلف در t_0^+ هم مشخص می‌باشد:

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$$

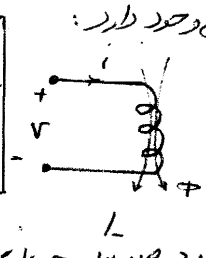
۳. معمولاً لحظه t_0 را برابر با صفر در نظر می‌گیرند. یعنی لحظه‌ای که منبع ورودی به مدار اعمال می‌شود، مبدأ زمان در نظر گرفته می‌شود.

۴. در سلف خطی، میان جریان الکتریکی عبوری از سلف و شار الکتریکی ایجاد $\phi(t)$ توسط سلف یک رابطه خطی وجود دارد:

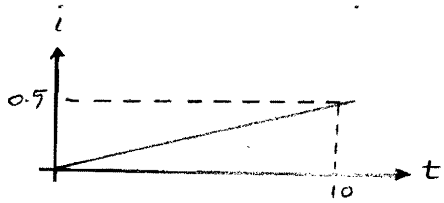


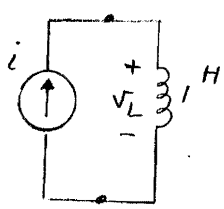
$$\phi = L i_L \rightsquigarrow \boxed{V_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}}$$

قانون فارادی



◄ مثال ۲.۵ : در صورتیکه جریان اعمال شده به سلف زیر بصورت نمودار زیر باشد مطلوبست:





الف) تغییرات $\phi(t)$ و $V(t)$

ب) $\phi(10)$

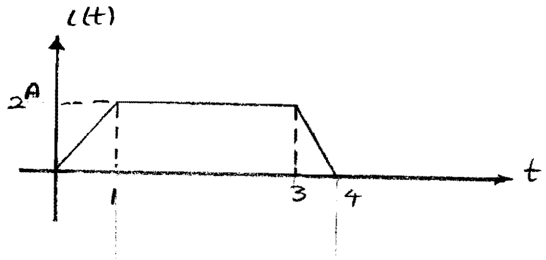
ج) $V(10)$

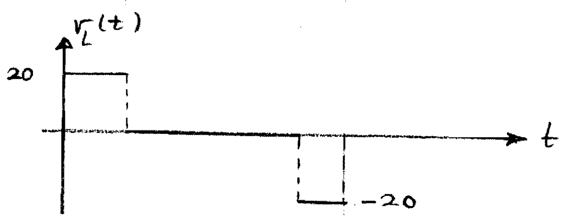
همانطور که از نمودار مشخص است:

$$i_L(t) = \frac{1}{20}t \rightsquigarrow \phi(t) = L i_L(t) = \frac{1}{20}t \ \text{Wb} \rightsquigarrow \phi(10) = 0.5 \ \text{Wb}$$

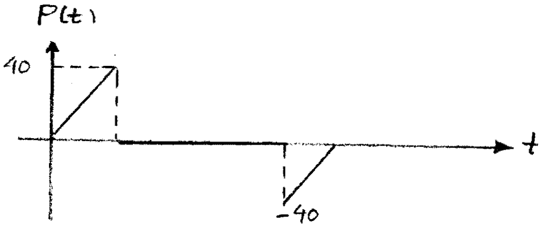
$$\rightsquigarrow V(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{20} \rightsquigarrow V(10) = \frac{1}{20} \ \text{V}$$

مثال ۵.۳ : یک سلف 10^H را در نظر بگیرید که جریان الکتریکی آن مطابق شکل زیر باشد. برای این سلف $v(t)$، $p(t)$ و $w(t)$ را رسم نمایید.





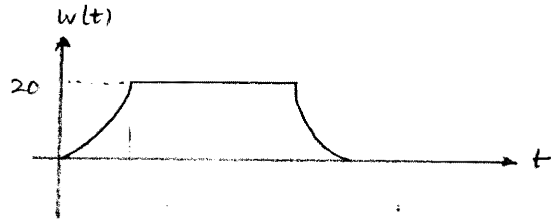
$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 10\frac{di_L}{dt}$$



$$P(t) = v(t)\,i(t)$$

$$0 \leq t \leq 1 \rightsquigarrow \begin{matrix} i(t) = 2t^A \\ v(t) = 20^v \end{matrix} \rightsquigarrow P(t) = 40t^W$$

$$1 < t < 3 \rightsquigarrow \begin{matrix} i(t) = 2^A \\ v(t) = 0^v \end{matrix} \rightsquigarrow P(t) = 0^W$$



$$3 \leq t \leq 4 \rightsquigarrow \begin{matrix} i(t) = -2t+8 \\ v(t) = -20^v \end{matrix} \rightsquigarrow P(t) = 40t - 160$$

$$w(t) = \int P(t)\,dt$$

$$0 \leq t \leq 1 \rightsquigarrow w(t) = 20t^2 + C_1$$

$$1 < t < 3 \rightsquigarrow w(t) = C_2$$

$$3 \leq t \leq 4 \rightsquigarrow w(t) = 20t^2 - 160t + C_2$$

$$P(0) = 0 \rightsquigarrow W(0) = 0 \rightsquigarrow C_1 = 0 \rightsquigarrow 0 \leq t \leq 1 \rightsquigarrow W(t) = 20t^2$$

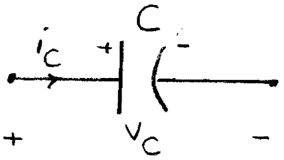
$$W(1) = 20 \rightsquigarrow C_2 = 20 \rightsquigarrow 1 < t < 3 \rightsquigarrow W(t) = 20$$

$$W(3) = 20 \rightsquigarrow 20 \times 9 - 160 \times 3 + C_2 = 20 \rightsquigarrow C_2 = 320$$

$$\rightsquigarrow 3 \leq t \leq 4 \rightsquigarrow w(t) = 20t^2 - 160t + 320 = 20(t^2 - 8t + 16)$$
$$= 20(t-4)^2$$

۳. خازن:

خازن یک عنصر الکتریکی است که از دو هادی تشکیل شده است. این دو هادی توسط یک عایق و یا یک ماده دی الکتریک از یکدیگر جدا شده اند. به عبارتی، خازن یکی از المان های مدارهای الکتریکی است که می تواند بار الکتریکی را در خود ذخیره کند. رفتار خازن ها براساس پدیده ای به نام میدان الکتریکی استوار است.



ظرفیت خازن که با حرف "C" در مدارات نشان داده می شود یا پارامتری از مدارات است که برای توصیف خازن به کار می رود. واحد ظرفیت خازن فاراد (F) می باشد. بارهای الکتریکی نمی توانند در خازن جابجا شوند، اما با اعمال یک ولتاژ به سر خازن بارهای الکتریکی در دو طرف دی الکتریک و در صفحات خازن از هم جدا می شوند. با تغییر ولتاژ در زمان، جابجایی بارها در خازن نیز با زمان تغییر می کند و منجر به ایجاد پدیده ای به نام جریان جابجایی می گردد.

با استفاده از مدل مرجع داریم:

$$\boxed{i_c = C\frac{dv_c}{dt} \qquad \text{جریان خازن}}$$

که در آن i، v، C و t به ترتیب با واحدهای آمپر، ولت، فاراد و ثانیه بیان می شوند. با توجه به رابطه ولتاژ و جریان سلف نکات زیر باید مورد توجه قرار گیرد:

▸ نکته مهم: اگر ولتاژ دو سر خازن ثابت باشد (DC)، جریان خازن صفر خواهد بود (تغییرات ولتاژ خازن صفر است.) در این حالت i برابر صفر و خازن بصورت مدار باز عمل می کند.

▸ نکته مهم: ولتاژ دو سر خازن نمی تواند تغییرات ناگهانی داشته باشد.

▸ نکته مهم: ولتاژ خازن برحسب جریان آن برابر است با:

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_c(t')\,dt' + v(t_0)$$

که در آن $v(t_0)$ ولتاژ اولیه خازن می باشد.

▸ مثال ۴.۵: پالس ولتاژی با معادله زیر به دو سر یک خازن $0.5\mu F$ اعمال می شود. رابطه جریان این خازن را بدست آورید.

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t & 0 < t \leq 1 \\ 4e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} \rightsquigarrow i_c(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ 0.5\times10^{-6}\times4 & 0 < t \leq 1 \\ 0.5\times10^{-6}(-4e^{t-1}) & t > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2\times10^{-6} & 0 < t \leq 1 \\ -2e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

۱.۴. توان و انرژی خازن:

با استفاده از قانون علامت گذاری پسیو، توان و انرژی خازن بصورت زیر بدست می آید:

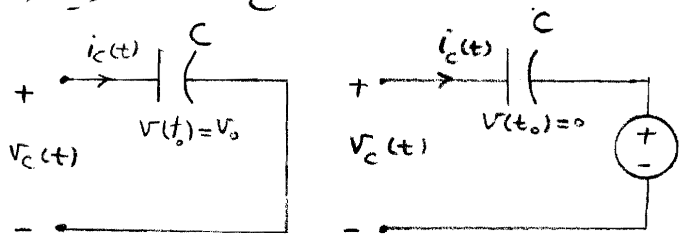
توان خازن: $$P = V_c i_c = C V_c \frac{dV_c}{dt}$$

انرژی خازن: $$W = \frac{1}{2} C V_c^2$$

▶ بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن، تنها به مقدار ولتاژ دو سر آن بستگی داشته و به نحوه رسیدن به آن ولتاژ ربطی ندارد.

▶ **نکات مهم درخصوص خازن:**

۱. ولتاژ اولیه خازن در لحظه t_0 یعنی ولتاژی که در دو سر خازن در لحظه t_0 و قبل از اتصال منبع مورد نظر قرار داشته است. هر خازن با ولتاژ اولیه را می توان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ V_0 و یک خازن بدون ولتاژ اولیه در نظر گرفت.



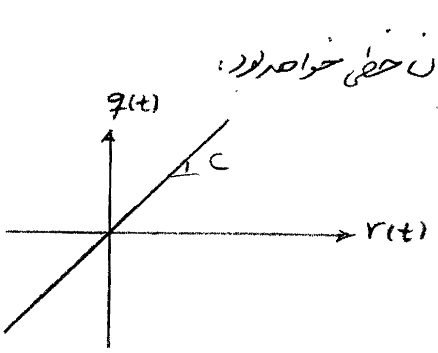
(به پلاریته منبع دقت کنید)

۲. از آنجا که ولتاژ خازن تغییر ناگهانی نمی تواند داشته باشد، اگر در لحظه t_0 ولتاژ خازن را بدانیم، ولتاژ خازن در لحظه t_0^+ هم مشخص می باشد:

$$V_c(0^-) = V_c(0^+)$$

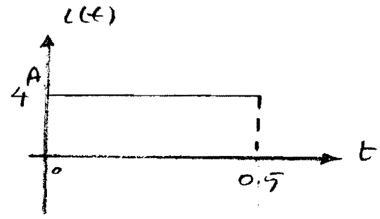
۳. معمولاً لحظه t_0 را برابر با صفر در نظر می گیریم.

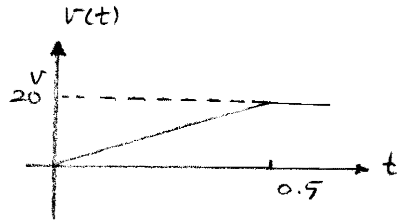
۴. در خازن خطی، رابطه بین بار الکتریکی ذخیره شده در خازن و ولتاژ دو سر آن خطی خواهد بود:



$$\Rightarrow q(t) = C V_c(t) \Rightarrow i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

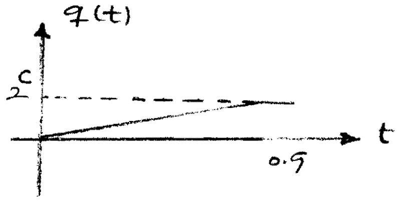
مثال ۵.۵ : یک خازن 0.1F را در نظر بگیرید که به آن پالس جریان زیر اعمال می‌شود. برای این خازن شکل موج های $v(t)$ ، $q(t)$ ، $p(t)$ و $w(t)$ را رسم نمایید. $(V_0=0)$



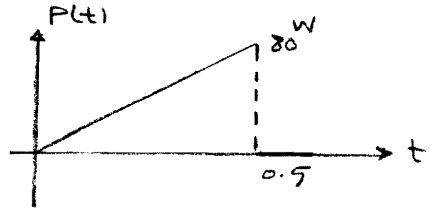


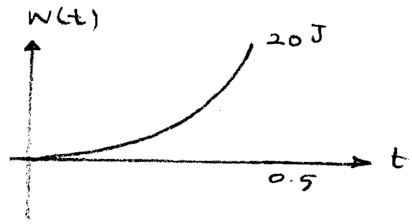
$$V_c(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt+V_0$$
$$=\frac{1}{0.1}\int_0^{0.5}4dt+0=40t\Big|_0^{0.5}$$
$$=20t$$

$$q(t)=Cv(t)=2t \qquad 0\leq t\leq 0.5$$



$$p(t)=v(t)\,i(t)=4\times 20t=80t \qquad 0\leq t\leq 0.5$$

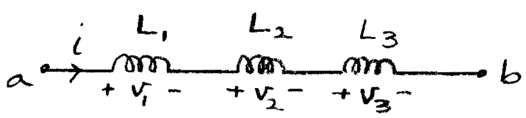




$$w(t)=\int p(t)=\int_0^{0.5}80t'=40t^2$$

۴. اتصال سری و موازی خازن ها و سلف ها:

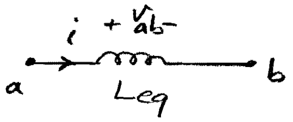
الف) اتصال سری سلف ها به یکدیگر:



با توجه به اینکه اتصال سلف ها بصورت سری می باشد جریان در همه آنها یکسان خواهد بود

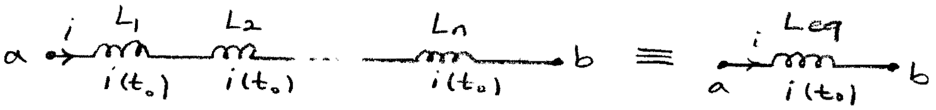
$$\begin{cases} v_1=L_1\dfrac{di}{dt} \\ v_2=L_2\dfrac{di}{dt} \\ v_3=L_3\dfrac{di}{dt} \end{cases} \rightarrow V_{ab}=v_1+v_2+v_3$$
$$=(L_1+L_2+L_3)\frac{di}{dt}=L_{eq}\frac{di}{dt}$$

بنابراین اگر بخواهیم از سر دو a و b سلفی را بعنوان سلف معادل درنظر بگیریم، ضریب خود القای این سلف معادل بصورت جمع تک تک ضرایب خود القای سلف های موجود در مجموعه خواهد بود:



◀ نکته: اگر سلف های سری جریان اولیه $i(t_0)$ داشته باشند، سلف معادل نیز همان جریان اولیه $i(t_0)$ را خواهد داشت.

بنابراین:

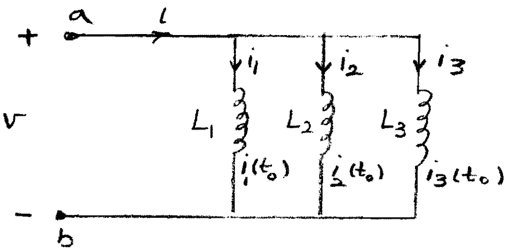


$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

اتصال سری سلف ها

$$i_{eq}(t_0) = i(t_0)$$

ب) اتصال موازی سلف ها:

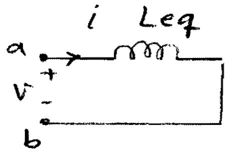


با توجه به اتصال موازی سلف ها، ولتاژ دو سر تمام سلف ها با ولتاژ دو سر a و b برابر v خواهد بود:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \rightsquigarrow \quad i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0)$$

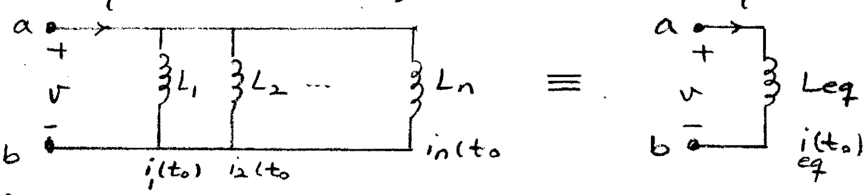
$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_2(t_0)$$

$$i_3 = \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_3(t_0)$$



$$\rightsquigarrow i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + \left(i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)\right) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_{eq}(t_0)$$

بنابراین:

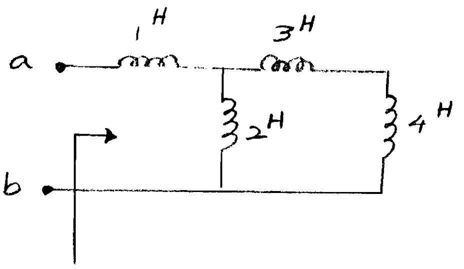


$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

اتصال موازی سلف ها

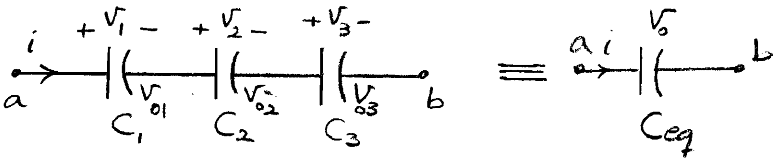
$$i_{eq}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} i_i(t_0)$$

مثال ۵.۹. سلف معادل مجموعه زیر را بدست آورید :



$$L_{eq} = [(3+4) \parallel 2] + 1$$
$$= (7 \parallel 2) + 1 = \frac{7 \times 2}{7+2} + 1 = \frac{14}{9} + 1 = 2.55^{H}$$

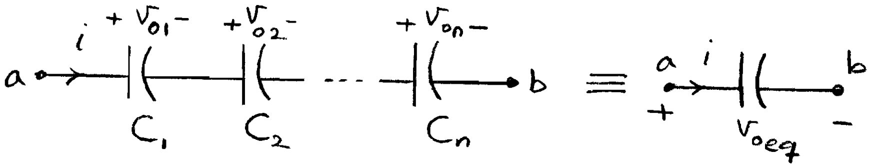
ج) اتصال سری خازن ها :



$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_{10} \\ v_2 = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_{\circ} \\ v_3 = \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v \end{cases} \rightsquigarrow v_{ab} = v_1 + v_2 + v_3 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt' + V_{01} + V_{02} + V_{03}$$

$$= \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,dt + V_{\circ}$$

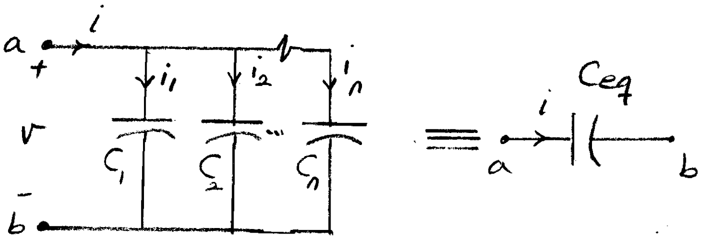
بنابراین :



$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad V_{\circ eq} = \sum_{i=1}^{n} V_{\circ i}}$$

اتصال سری سلف ها :

د) اتصال موازی خازن ها :

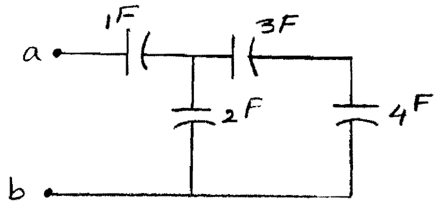


بطور مشابه برای خازن های موازی داریم

نکته: ولتاژ اولیه خازن معادل برابر ولتاژ اولیه هر یک از خازن های موازی مجموعه است.

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad V_{\circ eq} = V_{01} = V_{02} = \dots = V_{0n}}$$

اتصال موازی خازن ها :



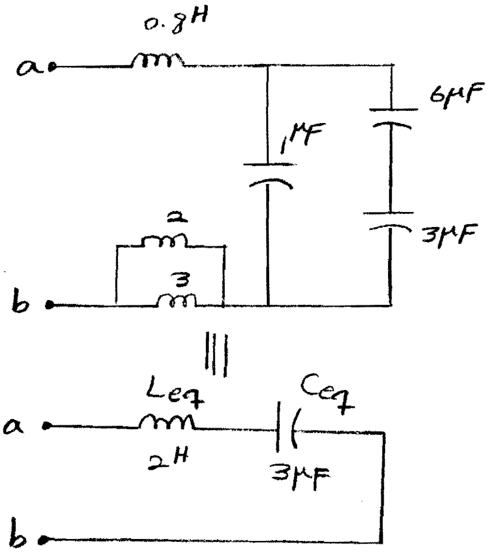
◄ مثال ۵.۷ : در مدار شکل زیر خازن معادل دو سر a و b را محاسبه کنید:

$$C_{eq} = \left[(4+3) \parallel 2\right] + 1$$

$$\underset{\text{سری}}{4+3} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{12}{7}$$

$$\rightsquigarrow \frac{12}{7} \parallel 1 = \frac{12}{7} + 1 = \frac{19}{7}$$

$$\rightsquigarrow C_{eq} = \frac{19}{7} \underset{\text{سری}}{+} 1 = \left(\frac{7}{19} + 1\right)^{-1} = 0.7878^{F}$$



◄ مثال ۵.۸ : مدار الکتریکی شکل زیر را تا حد ممکن ساده کنید:

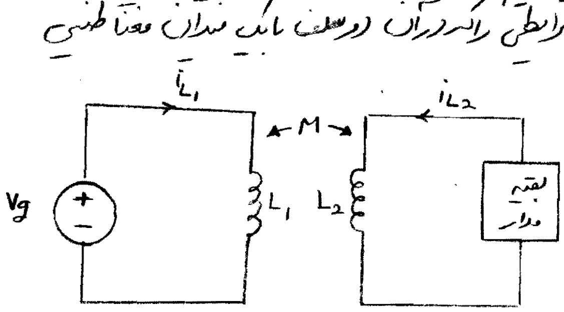
$$L_{eq} = 0.8 + (3 \parallel 2) = 0.8 + \frac{3 \times 2}{3+2} = 2^{H}$$

$$C_{eq} = (1 \parallel (6+3)) = 1 + 2 = 3^{\mu F}$$

$$\underset{\text{سری}}{6+3} = \frac{6 \times 3}{6+3} = 2$$

۵. القای متقابل:

در بخش ۱ میدان مغناطیسی را عامل مؤثر در رفتار سلف معرفی نمودیم و سلف را عنصری که جریان متغیر با زمان را به ولتاژ متغیر با زمان تبدیل می کند در نظر گرفتیم. اکنون شرایطی را که در آن دو سلف با یک میدان مغناطیسی به یکدیگر متصل هستند را در نظر بگیرید.



در این حالت ولتاژی که در سلف دوم القاء می شود را می توان با جریان متغیر سلف اول بوسیله پارامتری به نام "القای متقابل" مرتبط ساخت.

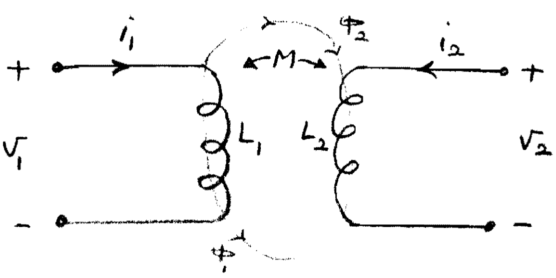
مدار فوق دو سیم پیچی (سلف) را که بطور مغناطیسی تزویج شده اند را نشان می دهد که در آن خود القای سیم پیچ ها

را با L_1 و L_2 و القای متقابل بین آنها را با M نامگذاری کردیم. پیکان دوطرفه M نشانگر ظرفیت القای متقابل در سیم پیچ می باشد و واحد این پارامتر نیز هانری می باشد.

ساده ترین راه برای تحلیل مدارهایی که دارای القای متقابل هستند، استفاده از جریان مش می باشد. اما قبل از آن باید نحوه القای ولتاژ در این نوع مدارها را توضیح دهیم:

۱.۵. القای ولتاژ در سیم پیچ های دارای القای متقابل:

اگر دو سیم پیچ بصورت شکل زیر در کنار هم قرار گیرند، جریان عبوری از هر سیم پیچ، شاری را در خود سیم پیچ و سیم پیچ دیگر القا می کند.



در این حالت داریم:

$$\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) \pm M_{12} i_2(t)$$
$$\Phi_2(t) = M_{21} i_1(t) \pm L_2 i_2(t)$$

حال با استفاده از قانون فارادی داریم:

$$\begin{cases} V_1(t) = \dfrac{d\Phi_1(t)}{dt} = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = \dfrac{d\Phi_2(t)}{dt} = \pm M_{21} \dfrac{di_1(t)}{dt} + L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

در اینجا: $M_{12} = M_{21} = M$

برای تعیین علامت مثبت یا منفی M، باید جهت شار القایی مشخص گردد. جهت خطوط شار را قانون دست راست مشخص می کند. یعنی اگر انگشتان دست راست را در جهت پیچش سیم پیچ و هم جهت با جریان عبوری از سیم به دور آن حلقه کنیم، آنگاه جهت انگشت شست، جهت شار درون سیم پیچ را نشان می دهد.

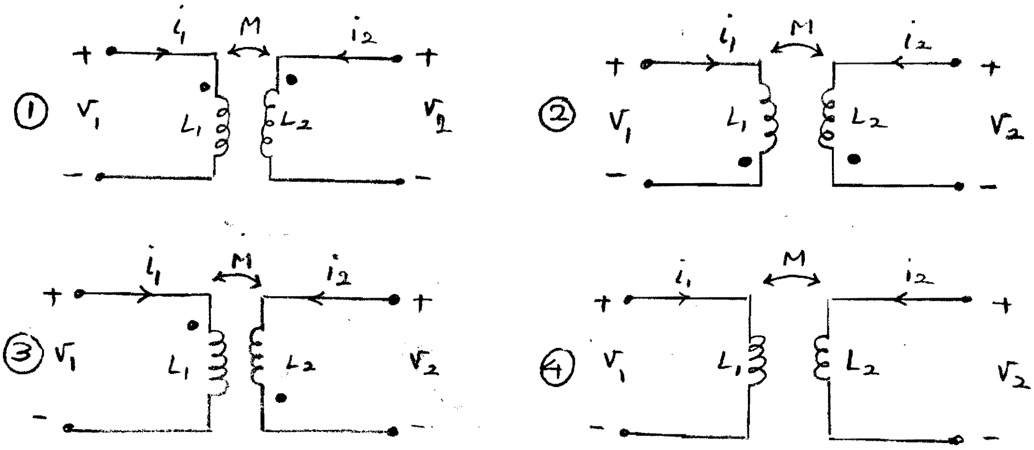
از آنجا که تعیین جهت پیچش سیم پیچ بر روی مدار کشیده شده روی کاغذ دشوار می باشد، برای تعیین پلاریته ولتاژ القایی (علامت جبری M) از یک روش مرسوم به نام قرارداد نقطه گذاری استفاده می کنیم.

◄ برای اعمال قرارداد نقطه گذاری ابتدا جهت فرض جریان های سیم پیچ را مشخص می کنیم سپس با توجه به جهت این جریان ها داریم:

◄ قرارداد نقطه گذاری:

◄ اگر جهت جریان مشخص شده برای سیم پیچ ها به گونه ای باشد که هر دو جریان به سر نقطه دار سیم پیچ ها وارد و یا هر دو از آن خارج شوند، علامت M مثبت خواهد بود. (مدار ۱ و ۲ شکل زیر)

◄ اگر از یکی از سیم پیچ ها جریان مشخص شده به سر نقطه دار وارد و در دیگری جریان مشخص شده از سر نقطه دار خارج شود، علامت M منفی خواهد بود. (مدار ۳ و ۴ شکل زیر)



بطور مثال برای مدارهای ۱ و ۳ داریم:

مدار ① ⟶

$$V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

مدار ② ⟶

$$V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = -M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

۲.۵ ضریب تزویج: در سلف های دارای تزویج مغناطیسی (یعنی بطور مغناطیسی تزویج شده اند) ضرایب القای L_1 و L_2 همواره مثبت هستند اما ضریب القای متقابل می تواند مثبت یا منفی باشد.

وضعیت دو سلف نسبت به یکدیگر، میزان تزویج بین آنها را مشخص می کند. این مقدار توسط ضریب تزویج K مشخص می شود.

$$\boxed{K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}}}$$ ضریب تزویج

اگر فاصله دو سلف زیاد باشد، این ضریب تزویج به صفر می رسد.

$$\begin{cases} 4\dfrac{di_1}{dt} + 8\dfrac{d(i_g - i_3)}{dt} + 20(i_1 - i_3) + 5(i_1 - i_g) = 0 & (1) \\ -8\dfrac{di_1}{dt} - 16\dfrac{d(i_g - i_3)}{dt} + 20(i_3 - i_1) + 60 i_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

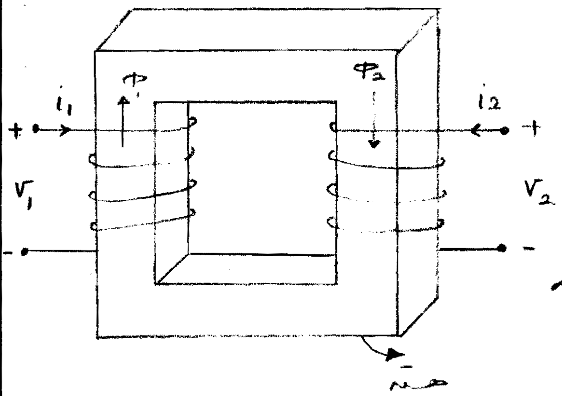
▶ نکته: L یا ضریب خود القا، اندوکتانس و M یا ضریب القای متقابل، اندوکتانس متقابل می‌باشد.

▶ نکته مهم: انرژی سلف‌های تزویج شده بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W(i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L i_2^2$$

۶. ترانسفورماتور ایده آل:

ترانسفورماتور ایده آل با دو سیم پیچ، ساده‌ترین نوع نمایش سلف‌های تزویج شده می‌باشد. این ترانسفورماتور از پیچیدن دو سیم پیچ بر روی یک هسته مغناطیسی مشترک مطابق شکل زیر بدست می‌آید:



▶ برای اینکه ترانسفورماتور ایده آل باشد (یعنی هیچ نوع انرژی تلفاتی نداشته باشیم) باید ضریب نفوذ پذیری هسته بی‌نهایت باشد.

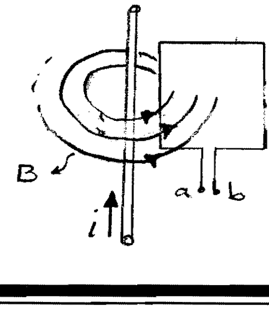
برای آشنایی بیشتر با مفهوم ضریب نفوذپذیری و ترانسفورماتور ایده‌آل استفاده از یک یادآوری داشته باشیم.

▶ یادآوری از درس فیزیک:

مفهوم ضریب القا را می‌توان به مایکل فارادی نسبت داد. فارادی در ۱۸۰۰ میلادی ادعا کرد که میدان مغناطیسی شامل خطوط نیرویی می‌باشد که رسانای حاوی جریان الکتریکی را احاطه کرده‌اند. وی این خطوط نیرو را نوارهای الاستیکی بسته‌ای نشان داد که ذخیره کننده انرژی هستند. با افزایش و کاهش جریان، نوارهای الاستیکی (خطوط نیرو) در رسانا منتشر یا متمرکز می‌شوند. اگر یک سیم رسانا عمود بر میدان مغناطیسی تولید شده توسط سیم حاوی جریان قرار بگیرد، در دو سر آن ولتاژی القا می‌شود.

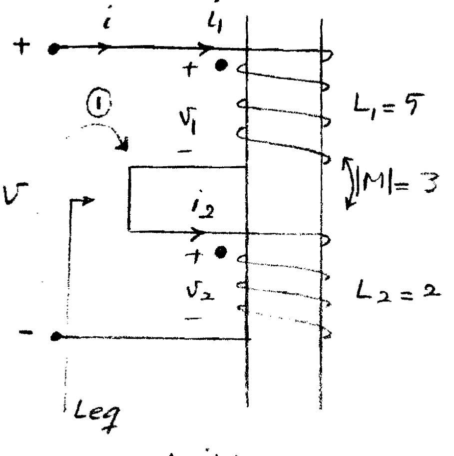
ولتاژی که در رسانا تولید می‌شود، متناسب با خطوط نیروی عبوری از سطح محصور توسط سیم است. ولتاژ تولید شده در رسانا با رابطه زیر که قانون فارادی نام دارد بدست می‌آید:

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{قانون فارادی}$$



که در آن Φ شار مغناطیسی بر حسب Wb می‌باشد

▲ مثال ۵.۹: در دو مدار شکل زیر ضریب القای (L_{eq}) کل مدار را بیابید.



(الف)

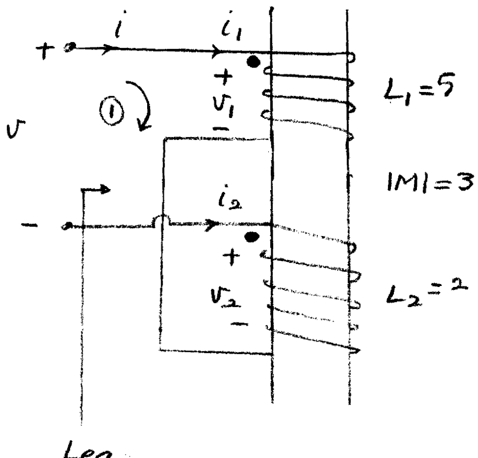
$$v(t)=L_{eq}\frac{di(t)}{dt} \quad ; \quad i(t)=i_1(t)=i_2(t)$$

KVL در حلقه ①: $-v(t)+v_1(t)+v_2(t)=0 \rightsquigarrow v(t)=v_1(t)+v_2(t)$

$$\begin{cases} v_1(t)=5\frac{di_1}{dt}+3\frac{di_2}{dt}=8\frac{di}{dt} \\ v_2(t)=3\frac{di_1}{dt}+2\frac{di_2}{dt}=5\frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow v(t)=8\frac{di}{dt}+5\frac{di}{dt}=13\frac{di}{dt} \rightsquigarrow L_{eq}=13^H$$

با دقت در شکل ب می‌بینیم:



(ب)

$$i(t)=i_1(t)=-i_2(t)$$

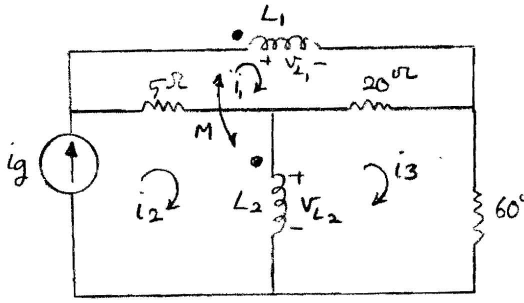
KVL در حلقه ①: $-v(t)+v_1(t)-v_2(t)$

$$\rightsquigarrow v(t)=+v_1(t)-v_2(t)$$

$$\begin{cases} v_1(t)=5\frac{di_1}{dt}+3\frac{di_2}{dt}=2\frac{di}{dt} \\ v_2(t)=3\frac{di_1}{dt}+2\frac{di_2}{dt}=\frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow v(t)=\frac{2di}{dt}-\frac{di}{dt}=1\frac{di}{dt} \rightsquigarrow L_{eq}=1^H$$

▲ مثال ۵.۱۰: معادلات مش مدار شکل زیر را بدست آورید.



$L_1=4^H$, $L_2=16^H$, $|M|=8H$

همانطور که از قبل می‌دانیم، $i_2=i_g$ بنابراین احتیاجی به نوشتن معادله مش ۲ نداریم.

مش ① $\rightsquigarrow v_{L_1}+20(i_1-i_3)+5(i_1-i_g)=0 \quad ; \quad v_{L_1}=4\frac{di_1}{dt}+8\frac{d(i_g-i_3)}{dt}$

مش ③ $\rightsquigarrow -v_{L_2}+20(i_3-i_1)+60i_3=0 \quad ; \quad v_{L_2}=8\frac{di_1}{dt}+16\frac{d(i_g-i_3)}{dt}$

بنابراین برای هر ترانسفورماتور ایده‌آل داریم:

$$\boxed{\text{ترانسفورماتور ایده‌آل}: \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

اگر Φ_1 و Φ_2 را ترتیب شارهای مرتبط با جریان‌های i_1 و i_2 در نظر بگیریم که از یک حلقه سیم پیچی عبور می‌شود داریم:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \rightarrow$$
$$\lambda_1 = N_1 \Phi$$
$$\lambda_2 = N_2 \Phi$$

اکنون به محاسبه دو پارامتر دیگر به نام‌های نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی $\mathcal{R}$ می‌پردازیم:

برای هر مدار مغناطیسی، می‌توان مشابه قانون اهم، این رلوکتانس $\mathcal{R}$ (معادل مقاومت) و این نیروی محرکه مغناطیسی mmf (معادل ولتاژ) تعریف نمود:

$$mmf = \mathcal{R} \cdot \Phi$$

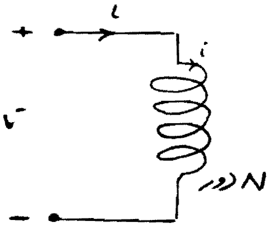
در این رابطه شار معادل جریان می‌باشد.

مقدار mmf بصورت زیر بدست می‌آید:

$$mmf = n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R} \cdot \Phi$$

برای ترانسفورماتور ایده‌آل ضریب نفوذپذیری بی‌نهایت است، از آنجا که رلوکتانس با این ضریب نسبت عکس دارد، مقدار آن صفر خواهد بود.

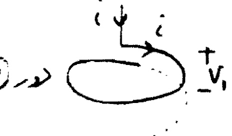
$$\rightarrow n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0 \rightarrow \boxed{\text{ترانسفورماتور ایده‌آل}: \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$



اکنون یک سلف را در نظر بگیرید:

در این سلف، به علت شکل سیم پیچی سیم، هم سیم حاوی جریان i و هم سیم عمود بر میدان مغناطیسی موجود نمی باشد.

در هر حلقه سیم پیچی با تغییر جریان i، Φ تولید شده تغییر می کند در نتیجه آن v تولید خواهد شد که به این پدیده خود القائی گویند.



سایز این کل ولتاژ القا شده در سلف برابر جمع این ولتاژها می باشد اگر تمام دورها شکل یکسانی داشته باشند:

$$v_{\text{کل}} = \underbrace{v_1 + v_1 + \dots + v_1}_{N \text{ بار}} = N v_1$$

و از آنجا که v_1 خود بصورت $\frac{d\Phi_1}{dt}$ می باشد داریم:

$$v_{\text{کل}} = N \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_{\text{کل}}}{dt}$$

$$\rightsquigarrow \Phi_{\text{کل}} = N\Phi_1$$

Φ کل را با λ نمایش می دهند و واحد آن را برای تمایز از Φ بصورت Wb دور (Wb.turn) در نظر می گیرند

$$\rightsquigarrow v = \frac{d\lambda}{dt}$$

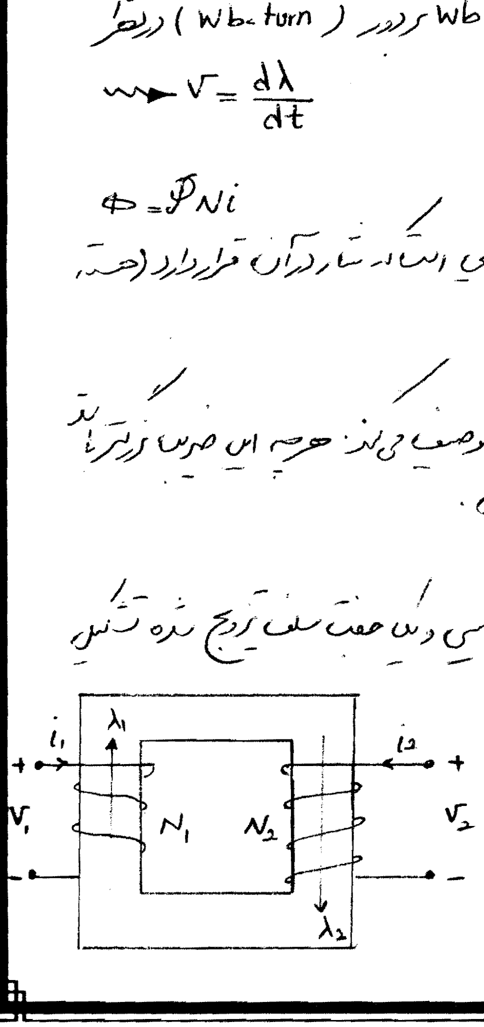
از طرفی اندازه شار Φ به اندازه جریان سیم پیچی بستگی دارد.

$$\Phi = \mathcal{P} N i$$

که در آن N تعداد دور سیم پیچی و $\mathcal{P}$ ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی فضایی اشغاله شار در آن قرار دارد (هسته سلف)

◀ **تعریف**: ضریب نفوذپذیری کمیتی است که مشخصات موجود در فضا را توصیف می کند هرچه این ضریب بزرگتر باشد خاصیت مغناطیسی هسته سلف بیشتر خواهد بود و بالعکس.

اکنون یک ترانسفورماتور ایده آل را در نظر بگیرید که از یک هسته مغناطیسی و یک جفت سلف تزویج شده تشکیل شده است:



اگر Φ را شار عبوری از هسته در نظر بگیریم داریم:

$$\lambda_1 = N_1 \Phi \rightsquigarrow v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\lambda_2 = N_2 \Phi \rightsquigarrow v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

◄ فصل ششم: مدارهای مرتبه اول:

۱. مقدمه:

در فصل ششم با استفاده از خاصیت مهم سلف و خازن که توانایی ذخیره انرژی می‌باشند، ولتاژ و جریان‌ها در مدارهایی که شامل مقاومت و یکی از این دو عنصر سلف یا خازن می‌باشند را محاسبه می‌کنیم.
در این فصل با مدارهایی که تنها شامل منابع، مقاومت و خازن/سلف هستند سروکار داریم. بطور خلاصه این نوع مدارها را RL (مقاومت-سلف) و یا RC (مقاومت-خازن) می‌نامند.

مدارهای RL و RC، مدارهای مرتبه اول نامیده می‌شوند، زیرا ولتاژ و جریان این نوع مدارها را می‌توان با حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف نمود.

◄ **یادآوری:** برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$A\frac{dy}{dt}+By=f(t) \quad ; \quad y(t_0)=C$$

معادله مرتبه اول فوق را یک معادله غیرهمگن گویند. برای حل این معادله پاسخ نهایی را به دو بخش پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی تقسیم می‌کنیم. برای محاسبه پاسخ عمومی $f(t)=0$ قرار می‌دهیم.

$$A\frac{dy}{dt}+By=0$$

از درس معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که پاسخ این معادله شکل نمایی دارد:

$$\rightsquigarrow y_h(t)=K_1e^{-Bt/A}$$

برای محاسبه پاسخ خصوصی که ناشی از $f(t)$ می‌باشد، $y(t)$ را متناسب با $f(t)$ در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $f(t)$ یک عدد ثابت مانند K باشد: $\quad y(t)=K_2$

۲. اگر $f(t)$ یک چندجمله‌ای باشد: $\quad y(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_1t+a_0$

۳. اگر $f(t)$، سینوسی باشد: $\quad y(t)=K_3\sin t+K_4\cos t$

۴. اگر $f(t)$ نمایی باشد: $\quad y(t)=K_5e^{K_6t}$

برای سایر حالتهای $f(t)$ برای درس مدار ضرورتی ندارد. در این مرحله $y(t)$ پیشنهادی را در معادله اصلی قرار می دهیم و ضرایب مجهول را محاسبه می کنیم.

پاسخ نهایی معادله مرتبه اول برابر مجموع دو پاسخ عمومی (y_h) و پاسخ خصوصی می باشد (y_p). برای محاسبه ضرایب مجهول باقیمانده، از شرایط اولیه معادله $y(t_0)$ استفاده می کنیم.

اکنون برای حل معادله دیفرانسیلی که از یک مدار الکتریکی بدست آمده است، همین روال را انجام می دهیم. با این تفاوت که پاسخ عمومی و خصوصی و نهایی مفاهیم فیزیکی مربوط به خودشان را دارند.

۲. پاسخ های حالت صفر، ورودی صفر و کامل:

در مدارهای الکتریکی، پاسخ ورودی صفر، حالت صفر و کامل به ترتیب بیانگر مفاهیم فیزیکی پاسخ های عمومی، خصوصی و نهایی یک معادله مرتبه اول هستند. اکنون این مفاهیم را توضیح داده و سپس در بخشهای پیش رو بطور جزئی تر در مدارهای RC و RL بررسی می کنیم.

الف) پاسخ ورودی صفر:

در فصل گذشته بیان کردیم که عناصر خازن و سلف، به ترتیب قادر هستند تا یک ولتاژ اولیه V_0 و یک جریان اولیه I_0 داشته باشند. اگر منبع ورودی بطور ناگهانی از مدار قطع گردد، این مقادیر اولیه که در واقع بیانگر انرژی اولیه مدار هستند نقش منبع را در مدار ایفا نموده و ولتاژ و جریانی در عناصر مدار تولید می کنند. این پاسخ مدار که در عدم حضور منبع ورودی DC بوجود می آید را پاسخ طبیعی مدار یا پاسخ ورودی صفر مدار گویند.

در یک معادله مرتبه اول غیر همگن اگر $f(t)$ که در واقع همان ورودی مدار است صفر گردد، پاسخ بدست آمده همان پاسخ عمومی مدار است. بنابراین قطع ورودی مدار و محاسبه پاسخ ورودی صفر معادل محاسبه پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل است.

ب) پاسخ حالت صفر:

در صورتیکه سلف و یا خازن موجود در یک مدار شرایط اولیه صفر داشته و به مدار یک منبع الکتریکی ورودی اعمال شود، به ولتاژ و یا جریان ایجاد شده در عناصر مدار پاسخ حالت صفر گویند. این حالت معادل محاسبه پاسخ خصوصی یک معادله دیفرانسیل است.

ج) پاسخ کامل :

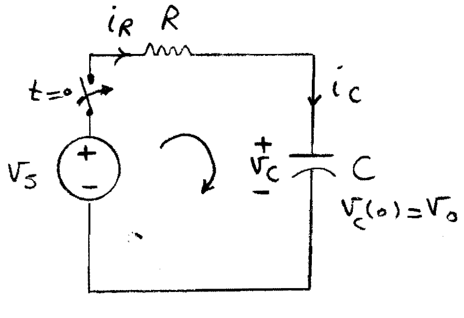
برای محاسبه پاسخ مداری که شامل منبع ورودی و شرایط اولیه سلف / خازن می باشد، می توان پاسخ را در دو حالت ورودی صفر و حالت صفر بررسی نمود و در نهایت این دو پاسخ را به عنوان پاسخ کامل با یکدیگر جمع نمود. (دقیقاً معادل محاسبه پاسخ نهایی یک معادله مرتبه اول غیر همگن با شرایط اولیه)

$\rightsquigarrow$ پاسخ کامل مدار = پاسخ ورودی صفر (شرایط اولیه غیر صفر) + پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه صفر)

اکنون پاسخ مدارهای مرتبه اول را با استفاده از مفاهیم فوق محاسبه می کنیم:

۳. بررسی مدارهای مرتبه اول :

۳.۱) مدار RC: اتصال یک مقاومت و یک خازن را می توان به دو حالت سری و موازی تقسیم نمود. برای هر یک از این نوع اتصالات، پاسخ کامل مدار را محاسبه می کنیم.



الف) مدار RC سری :

در این مدار هم منبع ورودی حضور دارد و هم شرایط اولیه. در لحظه $t=0$ خازن دارای شرایط اولیه V_0 است و منبع ورودی هم به مدار اعمال می شود. اگر خروجی مدار را $V_c(t)$ در نظر بگیریم، $V_c(t)$ که همان پاسخ کامل می باشد به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{cases} i_R = i_c \\ i_c = C\dfrac{dV_c}{dt} \end{cases} \rightsquigarrow \text{KVL حلقه}: \; -V_S + R i_R + V_c = 0$$

$$\rightsquigarrow RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = V_S \qquad (1)$$

1) y_h محاسبه : $RC\dfrac{dV_c}{dt} + V_c = 0 \rightsquigarrow V_{ch}(t) = K e^{-t/RC}$

2) y_p محاسبه : $F(t) = V_S =$ ثابت $\rightsquigarrow V_c(t) = K_1 \rightsquigarrow \dfrac{dV_c}{dt} = 0$

$$\rightsquigarrow RC \times 0 + K_1 = V_S \rightsquigarrow K_1 = V_S \rightsquigarrow V_{cp} = V_S$$

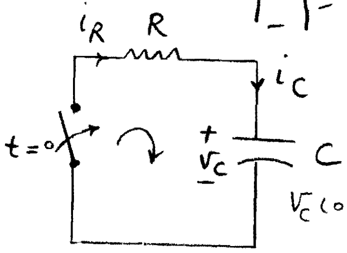
$\rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC} + v_S$

$v_C(0) = v_0 \rightsquigarrow K + v_S = v_0 \rightsquigarrow K = (v_0 - v_S)$

⇝ پاسخ کامل مدار RC سری:
$$\boxed{\begin{aligned} v_C(t) &= (v_0 - v_S)e^{-t/RC} + v_S \\ &= v_0 e^{-t/RC} + (1-e^{-t/RC})v_S \quad t \geq 0 \end{aligned}} \qquad (۲)$$

اکنون پاسخ حالت صفر و ورودی صفر مدار RC سری را محاسبه نموده و نشان می‌دهیم که جمع این دو پاسخ با معادله (2) یکسان خواهد بود.

◀ پاسخ ورودی صفر مدار RC سری: در مدار شکل صفحه قبل اثر منبع ورودی را حذف (صفر) کنیم داریم:



$i_C = i_R \rightsquigarrow$ در حلقه KVL : $Ri_R + v_C = 0$

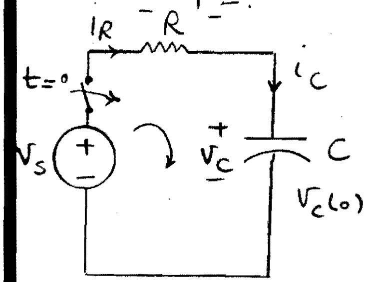
$v_C(0) = v_0 \rightsquigarrow RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$

$\rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC}$

$v_C(0) = v_0 \rightsquigarrow K = v_0$

⇝ پاسخ ورودی صفر : $v_C(t) = v_0 e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (۳)$

◀ پاسخ حالت صفر مدار RC سری: اگر در مدار شکل صفحه قبل، شرایط اولیه را برابر با صفر در نظر بگیریم، داریم:



$i_C = i_R \rightsquigarrow$ در حلقه KVL : $Ri_R + v_C = v_S$

$v_C(0) = 0 \rightsquigarrow RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_S$

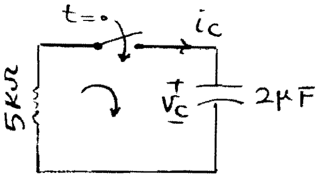
$\rightsquigarrow v_{ch} = Ke^{-t/RC}$

$v_{cp} = v_S \rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC} + v_S$

$v_C(0) = 0 \rightsquigarrow K = -v_S$

⇝ پاسخ حالت صفر : $v_C(t) = v_S(1 - e^{-t/RC}) \quad t \geq 0 \quad (۴)$

◀ همانطور که مشخص است جمع معادلات (3) و (4) برابر با معادله (2) خواهد بود.



▶ مثال ۱.۶ : در مدار شکل زیر $V_0=100^V$ ، $V_c(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه نمایید.

ورودی منبع DC در این مدار وجود ندارد و $V_c(0)=100^V$ می‌باشد پس پاسخ ورودی صفر

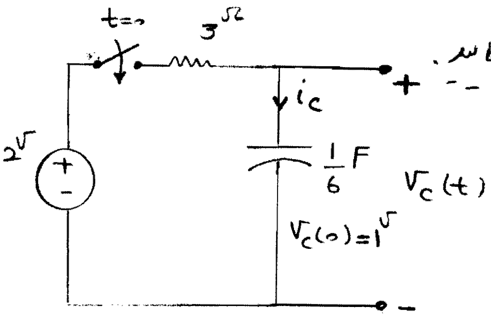
در $t=0$ کلید بسته می‌گردد.

KVL درحلقه : $5\times10^{3}\, i_c+V_c=0$

$$\rightsquigarrow \underbrace{5\times10^{3}\times 2\times10^{-6}}_{10^{-2}}\frac{dV_c}{dt}+V_c=0 \qquad \rightsquigarrow V_c(t)=Ke^{-100t}$$

$$V_c(0)=100 \rightsquigarrow K=100$$

$$\rightsquigarrow V_c(t)=100e^{-100t} \qquad t\geq 0$$



▶ مثال ۲.۶ : در مدار شکل زیر $V_c(t)$ و $i_c(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه نمایید.

پاسخ این مدار به دلیل حضور منبع ورودی و $V_0=1^V$ همان پاسخ کامل است.

KVL درحلقه: $-2+3i_c+V_c=0$

$$\rightsquigarrow -2+3\times\frac{1}{6}\frac{dV_c}{dt}+V_c=0$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\frac{dV_c}{dt}+V_c=2 \qquad \rightsquigarrow V_{ch}(t)=Ke^{-2t}$$

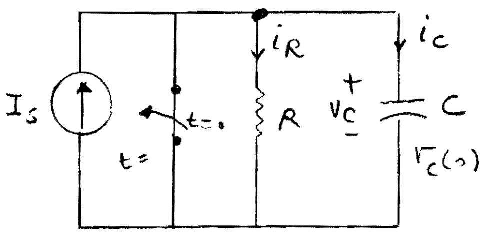
$$V_{cp}(t)=2 \qquad \rightsquigarrow V_c(t)=2+Ke^{-2t}$$

$$V_c(0)=1 \rightsquigarrow K=-1$$

$$\rightsquigarrow V_c(t)=2-e^{-2t} \qquad t\geq 0$$

$$i_c(t)=\frac{1}{6}\frac{dV_c}{dt}=\frac{1}{6}(2e^{-2t})=\frac{1}{3}e^{-2t}$$

ب) مدار RC موازی:



$V_c(0)=V_0$

در این مدار زیر محاسبه $V_c(t)$ شامل محاسبه پاسخ کامل می‌باشد

چون در $t\geq 0$ هم منبع در مدار حضور دارد و هم شرایط اولیه.

$t\geq 0$ KCL درگره $\rightsquigarrow i_R+i_c=I_s \rightsquigarrow \frac{V_R}{R}+C\frac{dV_c}{dt}=I_s \rightsquigarrow C\frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{R}V_c=I_s$

$V_c=V_R$

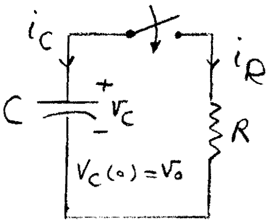
$$\rightsquigarrow V_{ch}=Ke^{-t/RC}$$

$$V_{cp}=I_s\cdot R$$

$$\rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC} + RI_S \qquad \rightsquigarrow K = V_0 - RI_S$$
$$v_C(0) = V_0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{ll} \text{پاسخ کامل مدار RC موازی} : & v_C(t) = (V_0 - RI_S)e^{-t/RC} + RI_S \\ & = V_0 e^{-t/RC} + (1 - e^{-t/RC}) RI_S \\ & t \geqslant 0 \end{array}} \qquad (5)$$

اکنون پاسخ حالت صفر و ورودی صفر مدار RC موازی را محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که جمع این دو پاسخ با معادله (5) یکسان خواهد بود

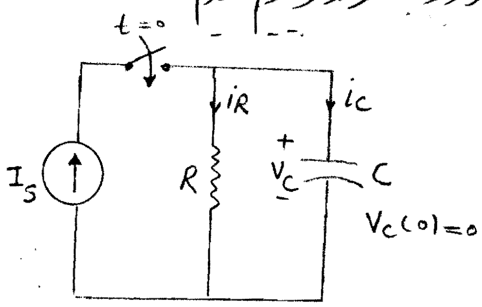


▶ پاسخ ورودی صفر مدار RC موازی: در مدار شکل صفحه قبل اگر منبع ورودی را حذف کنیم داریم:

$$\begin{array}{l} i_C + i_R = 0 \\ v_C = v_R \end{array} \rightsquigarrow C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC}$$
$$v_C(0) = V_0 \rightsquigarrow K = V_0$$

$$\rightsquigarrow v_C(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad t \geqslant 0 \quad (6)$$ پاسخ ورودی صفر

▶ پاسخ حالت صفر مدار RC موازی: اگر در مدار شکل صفحه قبل شرایط اولیه را برابر با صفر در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{array}{l} i_C + i_R = I_S \\ v_C = v_R \end{array} \rightsquigarrow C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R}v_C = I_S$$

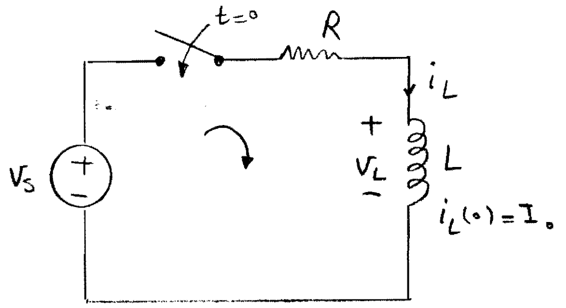
$$\rightsquigarrow v_{Ch} = Ke^{-t/RC}$$
$$v_{Cp} = RI_S$$

$$\rightsquigarrow v_C(t) = Ke^{-t/RC} + RI_S \qquad \rightsquigarrow K = -RI_S$$
$$v_C(0) = 0$$

$$\rightsquigarrow v_C(t) = RI_S(1 - e^{-t/RC}); \quad t \geqslant 0 \quad (7)$$

همانطور که واضح است جمع معادلات (6) و (7) برابر معادله (5) می‌باشد.

۴.۲) مدار RL : اتصال یک مقاومت و یک سلف را می‌توان به دو حالت سری و موازی انجام داد. برای هر یک از این نوع اتصالات، پاسخ کامل مدار را محاسبه می‌کنیم:



الف) مدار RL سری :

در این مدار در $t=0$ هم منبع حضور دارد و هم شرایط اولیه بنابراین محاسبه $i_L(t)$ همان محاسبه پاسخ کامل می‌باشد.

KVL در حلقه : $-V_S+V_R+V_L=0 \rightsquigarrow V_R+V_L=V_S$

$$\begin{cases} V_R=i_R R \\ i_R=i_L \end{cases} \rightsquigarrow R i_L + L\frac{di_L}{dt}=V_S \rightsquigarrow L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=V_S \quad (8)$$

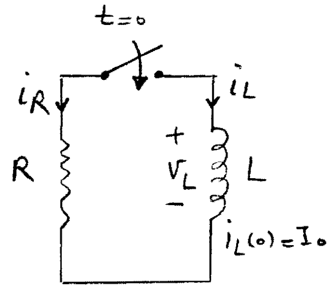
$$\rightsquigarrow y_h \text{ محاسبه} : \quad L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0 \rightsquigarrow i_L(t)=Ke^{-R/L\,t}$$

$$y_p \text{ محاسبه} : \quad L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=V_S \rightsquigarrow i_L(t)=K_2 \rightsquigarrow RK_2=V_S \rightsquigarrow K_2=\frac{V_S}{R}$$

$$\rightsquigarrow i_L(t)=K_1e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_S}{R}$$
$$i_L(0)=I_0 \rightsquigarrow K_1=I_0-\frac{V_S}{R}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\text{پاسخ کامل مدار RL سری} : \quad \begin{aligned} i_L(t)&=\left(I_0-\frac{V_S}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_S}{R} \quad t\geq 0 \\ &=I_0e^{-\frac{R}{L}t}+\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\frac{V_S}{R} \end{aligned}} \quad (9)$$

اکنون پاسخ حالت صفر و ورودی صفر مدار RL سری را محاسبه نموده و نشان می‌دهیم که جمع این دو پاسخ با معادله (۹) یکی خواهد بود.



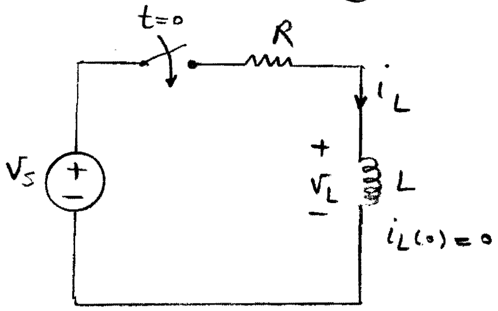
◄ **پاسخ ورودی صفر مدار RL سری** : اگر در مدار شکل فوق منبع ورودی را حذف کنیم داریم،

$$\begin{matrix} i_R+i_L=0 \\ V_L=V_R \end{matrix} \rightsquigarrow L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0$$

$$\rightsquigarrow i_L(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

$\rightsquigarrow i_L(0)=I_0 \quad \rightsquigarrow K=I_0$

پاسخ ورودی صفر $\rightsquigarrow$: $i_L(t)=I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t\geq 0 \quad (10)$



▶ پاسخ حالت صفر مدار RL سری:

در مدار شکل صفحه قبل اگر شرایط اولیه را صفر در نظر بگیریم داریم:

$$-V_S+Ri_L+V_L=0$$

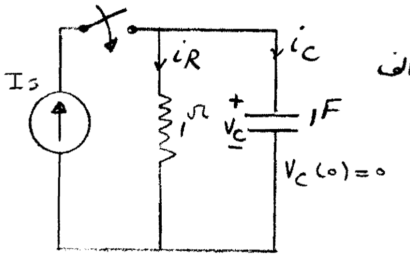
$$\rightsquigarrow L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=V_S$$

$$i_{Lh}=K_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$i_{Lp}=\frac{V_S}{R} \rightsquigarrow i_L(t)=K_1 e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_S}{R} \rightsquigarrow K_1=-\frac{V_S}{R}$$
$$i_L(0)=0$$

پاسخ حالت صفر مدار RL سری $\rightsquigarrow$: $i_L(t)=\frac{V_S}{R}(1-e^{-Rt/L}) \quad t\geq 0 \quad (11)$

همانطور که مشخص است مجموع ۱۰ و ۱۱ همان معادله ۹ خواهد بود

▶ مثال ۳.۶: در مدارهای شکل زیر $I_S=1^A$ و $V_S=3^V$ می‌باشد. $V_C(t)$ و $i_L(t)$ را برحسب t در مدارهای الف و ب محاسبه نمایید.

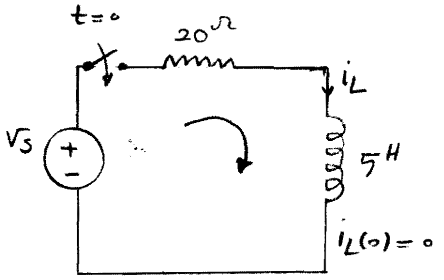


(الف)

الف) $i_C+i_R=I_S$

$$\rightsquigarrow \frac{dV_C}{dt}+V_C=1 \rightsquigarrow V_{Ch}=Ke^{-t}$$
$$V_{Cp}=1 \rightsquigarrow V_C(t)=1+Ke^{-t}$$
$$V_C(0)=0$$

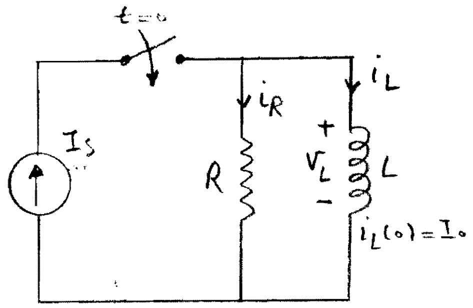
$$\rightsquigarrow K=-1 \rightsquigarrow V_C(t)=1-e^{-t} \quad t\geq 0$$



$$-V_S+20i_L+5\frac{di_L}{dt}=0 \rightsquigarrow 5\frac{di_L}{dt}+20i_L=3$$

$$\rightsquigarrow i_{Lh}=Ke^{-\frac{20}{5}t}$$
$$i_{Lp}=\frac{3}{20} \rightsquigarrow i_L(t)=Ke^{-4t}+\frac{3}{20}$$
$$i_L(0)=0 \rightsquigarrow K=-\frac{3}{20}$$

$$\rightsquigarrow i_L(t)=\frac{3}{20}(1-e^{-4t}) \quad t\geq 0$$



ب) مدار RL موازی :

مثل سوال گذشته، کافیست $i_L(t)$ را معادل محاسبه پاسخ کامل برای این مدار بیابیم.

$$i_L + i_R = I_s$$

$$\rightsquigarrow \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_s$$

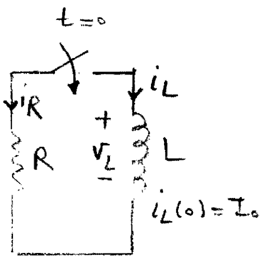
$$\rightsquigarrow y_h \text{ محاسبه}: \quad i_{Lh} = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

$$y_p \text{ محاسبه}: \quad i_{Lp} = I_s \quad \rightsquigarrow \quad i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + I_s$$

$$i_L(0) = I_0 \quad \rightsquigarrow \quad K = I_0 - I_s$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\text{پاسخ کامل مدار RL موازی}: \quad i_L(t) = (I_0 - I_s)e^{-\frac{R}{L}t} + I_s = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + (1 - e^{-\frac{R}{L}t})I_s \quad t \geq 0} \qquad (12)$$

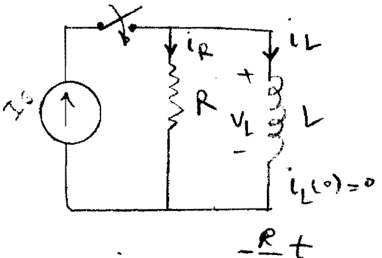
اکنون پاسخ ورودی صفر و حالت صفر مدار RL موازی را محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که مجموع این دو پاسخ برابر با معادله (12) می‌باشد.



▶ پاسخ ورودی صفر مدار RL موازی: اگر در مدار فوق ورودی را صفر کنیم، داریم:

$$i_L + i_R = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

$$\rightsquigarrow i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad i_L(0) = I_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} \quad t \geq 0 \qquad (13)$$



▶ پاسخ حالت صفر مدار RL موازی:

$$i_L + i_R = I_s$$

$$\rightsquigarrow \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_s$$

$$i_{Lh} = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_{Lp} = I_s \quad \rightsquigarrow \quad i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + I_s \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{i_L(t) = I_s(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}_{\text{پاسخ حالت صفر}} \quad t \geq 0 \qquad (14)$$

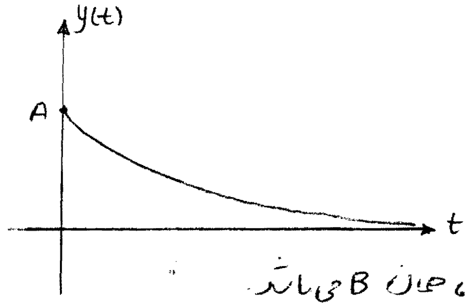
$$i_L(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad K = -I_s$$

همانطور که مشخص است مجموع دو معادله (13) و (14) همان معادله (12) می باشد.

◄ نکات کاربردی:

۱. ثابت زمانی: اگر داشته باشیم:

$$y(t)=Ae^{-Bt}$$



شکل موج این سیگنال، قطعاً نمایی به صورت نزولی خواهد بود.
همانطور که از شکل موج پیداست با گذشت زمان، سیگنال $y(t)$ به سمت صفر میل می کند.

پارامتری که مشخص کننده نرخ سرعت میل به صفر $y(t)$ است، همان B می باشد.
طبق تعریف عکس این مقدار را ثابت زمانی نامیده و با "τ" نشان می دهند.

$$\tau=\frac{1}{B}$$

◄ در مدارهای RC، ثابت زمانی برابر $\tau=RC$ و در مدارهای RL این ثابت برابر $\tau=\frac{L}{R}$ می باشد.

۲. پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار: با مشاهده معادلات مربوط به پاسخ کامل مدارهای مرتبه اول، می بینیم که هر پاسخ دارای دو بخش ثابت و متغیر با زمان می باشد.

$$y(t)=\underbrace{K_1 e^{-t/\tau}}_{1}+\underbrace{K_2}_{2}$$

بخش شماره 1 که در واقع همان پاسخ نمایی منفی است، با گذشت زمان به سمت صفر میل می کند و در نهایت در $t\to\infty$ پاسخ کامل برابر با بخش شماره 2 خواهد بود. به بخش شماره 1 بخش گذرای پاسخ و به بخش شماره 2 بخش ماندگار یا پاسخ حالت ماندگار مدار گویند.

۳. محاسبه شرایط اولیه: مدارهایی که شامل کلید هستند، با باز و یا بسته کردن کلید منجر به تغییر ولتاژ و جریان خازن و یا سلف موجود در مدار می باشد. بطور معمول لحظه $t=0$ را لحظه کلیدزنی در نظر گرفته و شرایط اولیه را برای لحظه $t=0^-$ محاسبه می کنند. از آنجا که

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)$$
$$V_C(0^-)=V_C(0^+)$$

می باشد، به محض محاسبه شرایط اولیه سلف/خازن در $t=0^-$، شرایط اولیه مدار بعد از کلیدزنی نیز مشخص می گردد.

برای محاسبه شرایط اولیه در $t=0$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

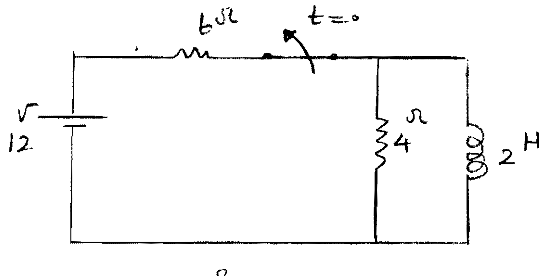
۱. در مسائل مربوط به مدارهای دارای ... که شامل کلید هستند، معمولاً عبارت "کلید به مدت طولانی قبل از تغییر وضعیت در حالت باز/بسته بوده است" دیده می‌شود. این عبارت بدان معناست که جریان/ولتاژ سلف/خازن در لحظه قبل از کلیدزنی ثابت می‌باشد.

۲. اگر سلف دارای جریان ثابت باشد، آن را به صورت اتصال کوتاه در نظر می‌گیریم: $i_L = I \rightsquigarrow V_L = L\frac{di_L}{dt}=0$

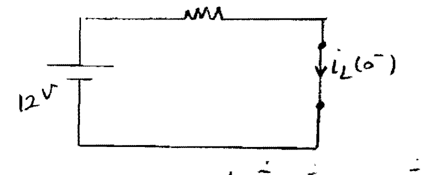
۳. اگر خازن دارای ولتاژ ثابت باشد آن را به صورت مدار باز در نظر می‌گیریم: $V_C = V \rightsquigarrow i_C = C\frac{dV_C}{dt}=0$

۴. اکنون با اعمال موارد ۲ یا ۳ بسته به نوع مدار، جریان عبوری از سلف اتصال کوتاه شده و یا ولتاژ دو سر خازن مدار باز شده را محاسبه کرده و برای شرایط اولیه قرار می‌دهیم.

مثال ۵.۶: در مدار شکل زیر کلید به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود. در این حالت برای زمان $t \geq 0$، $i_L(t)$ را محاسبه کنید:



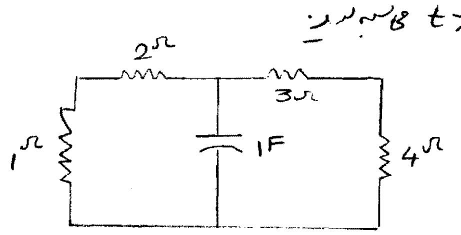
مرحله ①: محاسبه $i_L(0^-)$:
در $t<0$ سلف اتصال کوتاه می‌شود بنابراین مقاومت 4Ω نقشی در مدار ندارد:



$$i_L(0^-) = \frac{12}{6} = 2^A \rightsquigarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2^A$$

مرحله ②: اکنون به مدار اصلی باز می‌گردیم، در $t \geq 0$ منبع از مدار حذف می‌شود، با داشتن شرایط اولیه، پاسخ ورودی صفر را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۶.۶: در مدار شکل زیر اگر $V_C(0)=6^V$ باشد، $V_C(t)$ را برای $t \geq 0$ محاسبه کنید:



برای محاسبه R دو سر خازن باید ابتدا مقاومت معادل مدار را که از دو سر آن دیده می‌شود محاسبه کنیم.

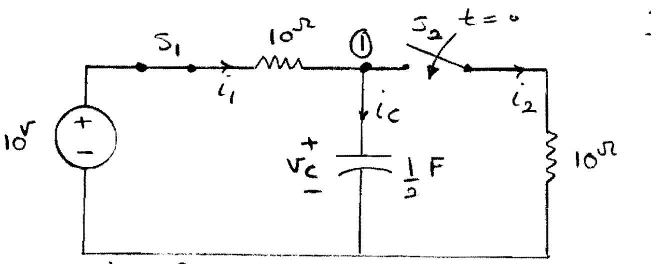
$$R_{eq} = (1+2)\,\|\,(3+4) = \frac{3\times 7}{10} = \frac{21}{10}$$

$$\rightsquigarrow V_C(t) = Ke^{-t/\frac{21}{10}}, \quad V_C(0)=6 \rightsquigarrow V_C(t) = 6e^{-\frac{10}{21}t}$$

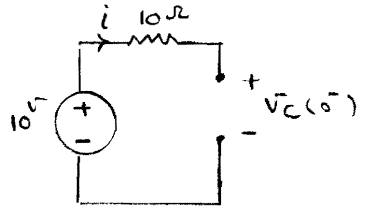
پاسخ ورودی صفر

۴. مثال های تکمیلی :

▲ ۷.۴: در مدار شکل زیر، کلید ۱ برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t=0$، کلید ۲ نیز بسته می‌شود. مقادیر $v_c(0^+)$ و $i_c(0^+)$ را محاسبه کنید.



برای محاسبه $v_c(0^+)$ ابتدا باید $v_c(0^-)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که S_1 به مدت طولانی بسته بوده است بنابراین در $t=0^-$ خازن مدار باز می‌شود:



$-10 + 10i + v_c(0^-) = 0 \xleftarrow{KVL}$ ⟵ $i=0$ ⟵ مشخصه مدار باز است

⟵ $v_c(0^-) = 10^V$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 10^V$$

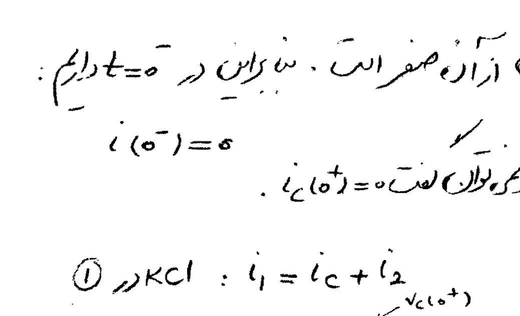
▲ نکته: توجه کنید که در $t<0$ خازن مدار باز می‌شود یعنی جریان عبوری از آن صفر است. بنابراین در $t=0^-$ داریم: $i(0^-)=0$

اما دقت کنید که شرط پیوستگی فقط برای ولتاژ خازن برقرار است و نمی‌توان گفت $i_c(0^+)=0$.

KCL در ① : $i_1 = i_c + i_2$

در $t=0^+$: $i_1 = \frac{10-10}{10} = 0^A$ ، $i_2 = \frac{10}{10} = 1^A$ ⟵ $0 = i_c(0^+) + 1$ ⟵ $i_c(0^+) = -1^A$

▲ مثال ۸.۴: در مدار الکتریکی شکل زیر کلید برای مدت طولانی در وضعیت ① بوده است و در لحظه $t=0$ به وضعیت 2 می‌رود. مقادیر زیر را محاسبه کنید:

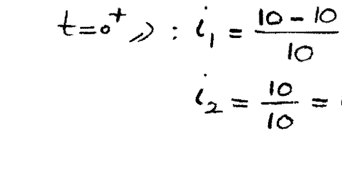


الف) $i_L(t)$ برای $t \geq 0$

ب) $v_L(0^-)$

ج) $v_L(0^+)$

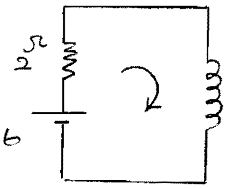
د) $\frac{di_L(0^-)}{dt}$



برای $t<0$ سلف به صورت اتصال کوتاه می‌شود:

$i_L(0^-) = \frac{3}{6} = 0.5A$ ⟵ $i_L(0^+) = 0.5A$

واضح است که $V_L(0^-)$ به دلیل اتصال کوتاه بودن سلف در $t<0$ صفر می‌باشد $V_L(0^-)=0^V$



برای $t\geq 0$ داریم:

$$KVL: \quad -6+2i_L+V_L=0$$

$$i_L(0^+)=0.5^A$$

$$\rightsquigarrow 2\frac{di_L}{dt}+2i_L=6$$

$$\rightsquigarrow i_{Lh}=Ke^{-t}$$
$$i_{Lp}=3$$
$$\rightsquigarrow i_L(t)=Ke^{-t}+3$$
$$i_L(0)=0.5 \rightsquigarrow K=-2.5 \rightsquigarrow i_L(t)=3-2.5e^{-t} \quad t\geq 0$$

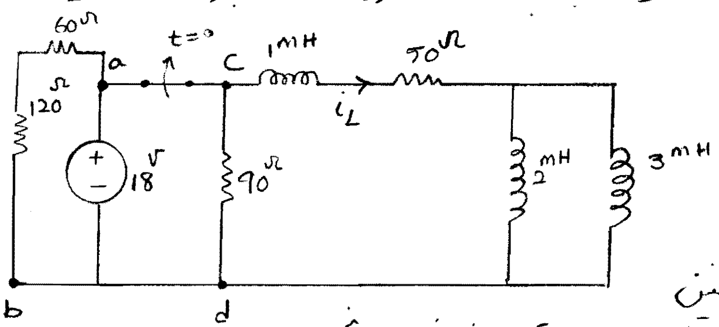
اکنون $V_L(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم:

◄ نکته: توجه کنید که ولتاژ سلف از قانون پیوستگی تبعیت نمی‌کند و نمی‌توان گفت: $V_L(0^-)=V_L(0^+)$ ✗

$$KVL: \quad -6+2i_L(0^+)+V_L(0^+)=0 \rightsquigarrow V_L(0^+)=6-2\times0.5=5^V$$

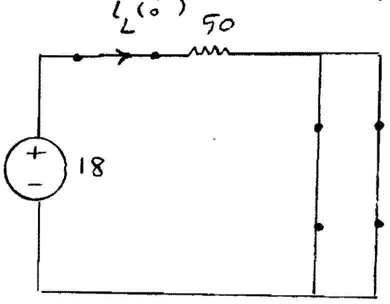
$$V_L(0^+)=2\frac{di_L(0^+)}{dt} \rightsquigarrow \frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{5}{2}=2.5 \ A/s$$

◄ مثال ۹.۶: در مدار الکتریکی شکل زیر کلید به مدت طولانی بسته بوده است و در زمان $t=0$ باز می‌شود. $i_L(t)$ و $i_1(t)$ را محاسبه کنید.



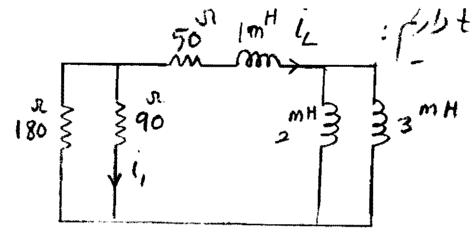
ابتدا باید جریان اولیه $i_L(0^-)$ محاسبه گردد:

در $t<0$ سلف‌ها اتصال کوتاه می‌شوند و همچنین شاخه‌های ab و cd به دلیل اینکه با سیم در آن موازی هستند حذف خواهند شد:



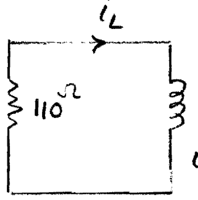
$$\rightsquigarrow -18+50i_L(0^-)=0 \rightsquigarrow i_L(0^-)=\frac{18}{50}=0.36^A$$

اکنون برای $t\geq 0$ داریم:



$$L_{eq}=1+(2\|3)= \;\leftarrow$$
$$=1+\frac{2\times3}{2+3}=2.2^{mH}$$

$$R_{eq}=\frac{90\times180}{90+180}+50=110^{\Omega}$$

$\rightsquigarrow$ 

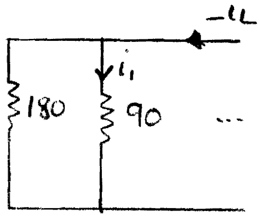
$i_L(0^+)=0.36$

$$\rightsquigarrow i_L(t)=Ke^{-\frac{110}{2.2\times10^{-3}}t}$$

$i_L(0)=0.36 \quad \rightsquigarrow K=0.36$

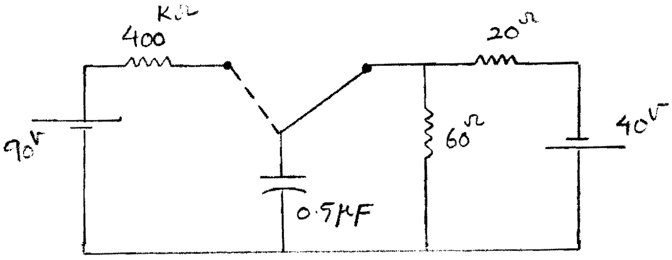
$$\rightsquigarrow i_L(t)=0.36e^{-0.05\times10^{6}t}$$

اکنون برای محاسبه $i_1(t)$ از روش تقسیم جریان استفاده می‌کنیم:



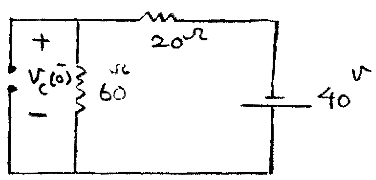
$$\rightsquigarrow i_1(t)=\frac{180}{90+180}\times(-i_L(t))=-0.24e^{-0.05\times10^{6}t}$$

▲ مثال ۱۰.۴: کلید مدار شکل زیر برای مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است. در $t=0$ به وضعیت ۲ می‌رود. $v_c(t)$ را برای $t\geq0$ محاسبه نمایید.



ابتدا $v_c(0^-)$ را محاسبه کنیم:

در $t<0$ خازن مدار باز می‌شود:

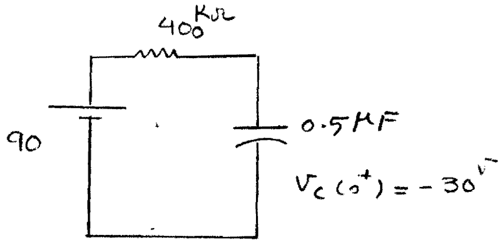


$$v_c(0^-)=\frac{60}{60+20}\times(-40)$$
$$=-30^V$$

پس با تقسیم ولتاژ داریم:

$$\rightsquigarrow v_c(0^+)=v_c(0^-)=-30^V$$

برای $t\geq0$ داریم: (محاسبه پاسخ کامل)



$v_c(0^+)=-30^V$

$$\rightsquigarrow -90+40\times10^{3}i_c+v_c=0$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{400\times10^{3}\times0.5\times10^{-6}}_{0.2}\frac{dv_c}{dt}+v_c=90$$

$$\rightsquigarrow v_{ch}=Ke^{-5t}$$
$$v_{cp}=90$$

$$\rightsquigarrow v_c(t)=Ke^{-5t}+90$$
$$v_c(0)=-30$$

$$\rightsquigarrow K=-120 \rightsquigarrow v_c(t)=90-120e^{-5t} \quad t\geq0$$

◀ فصل هفتم: مدارهای الکتریکی مرتبه دوم:

۱. مقدمه:

اگر ولتاژ و جریان یک مدار الکتریکی از حل یک معادله مرتبه دوم بدست آید، به این نوع مدار، مدار الکتریکی مرتبه دوم گویند. مدارهای الکتریکی مرتبه دوم شامل مدارهایی می باشند که هر سه عنصر خازن، سلف و مقاومت را دارا باشند. قبل از بررسی این نوع مدارها، لازم است مروری بر حل معادلات مرتبه دوم داشته باشیم.

◀ **یادآوری:** برای حل معادله مرتبه دوم (دیفرانسیلی) بصورت زیر عمل می کنیم:

$$A\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Cy=D$$

$$\frac{dy(0)}{dt}=K_1$$

$$y(0)=K_2$$

◀ **محاسبه پاسخ عمومی:**

۱.۱ ابتدا معادله مشخصه معادله فوق را محاسبه می کنیم:

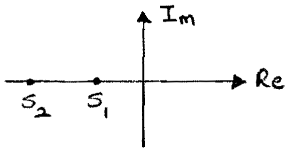
$$AS^2+BS+C=0$$ معادله مشخصه

۲. اکنون با حل معادله مشخصه فوق و تعیین ریشه های آن، نوع پاسخ $y(t)$ را مشخص می کنیم:

$$\Delta=\sqrt{B^2-4AC}$$

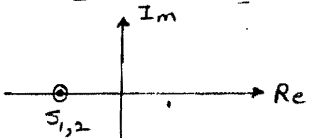
۱.۲. اگر $\Delta>0$ باشد، معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی و مجزا خواهد بود. در اینصورت داریم:

$$y(t)=K_1e^{+S_1t}+K_2e^{+S_2t}$$



۲.۲. اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای دو ریشه یکسان (ریشه مکرر) خواهد بود. در اینصورت داریم:

$$y(t)=(K_1+K_2t)\,e^{S_{1,2}t}$$

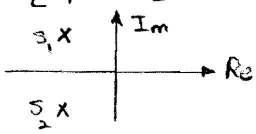


۳.۲. اگر $\Delta<0$ باشد، معادله دارای دو ریشه مختلط مزدوج خواهد بود. اگر بخش حقیقی ریشه ها ناصفر باشد داریم:

$$y(t)=Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\theta) \quad \text{یا} \quad y(t)=e^{-\alpha t}\left[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t\right]$$

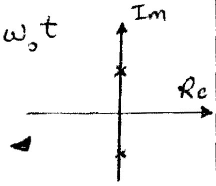
$$S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0 \rightsquigarrow \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

$$S_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_d$$



برای حالتی که $\alpha = 0$ باشد، ریشه‌های مختلط مزدوج روی محور موهومی خواهند بود و داریم:

$$S_{1,2} = \pm j\omega_0 \rightsquigarrow y(t) = K\cos(\omega_0 t + \theta) \quad \text{یا} \quad y(t) = K_1 \cos\omega_0 t + K_2 \sin\omega_0 t$$



◄ در هر یک از حالتهای فوق ضرایب مجهول و θ از شرایط اولیه محاسبه می‌شوند. برای محاسبه پاسخ خصوصی مانند فصل گذشته عمل می‌کنیم.

◄ **کاربرد عملی:**

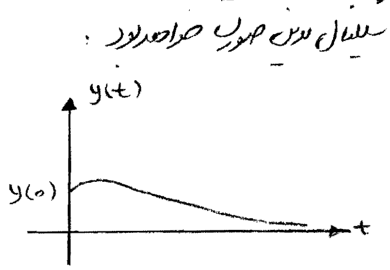
◄ **تعریف:** سیستمی را پایدار گویند که هیچ یک از سیگنالهای تولید شده توسط آن سیستم با گذشت زمان یا با افزایش ورودی بطور مستمر افزایش نیابد. بطور مثال اگر مداری پایدار نباشد، ولتاژ و جریان یکی از المان‌های آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد بطوریکه ممکن است به مدار و اجزای آن صدمه وارد شود.

هر سیگنال در صورتی می‌تواند پایدار باشد که با گذشت زمان یا در محدوده خاصی تغییر کند و یا به یک صفر میل کند.

در هر یک از حالتهای پاسخ که برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معرفی نمودیم، اگر ریشه‌ها مقدار مثبت حقیقی باشند و یا بخش حقیقی آنها مثبت باشد، عبارت نمایی با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد که در واقع نشان دهنده سیستم ناپایدار می‌باشد.

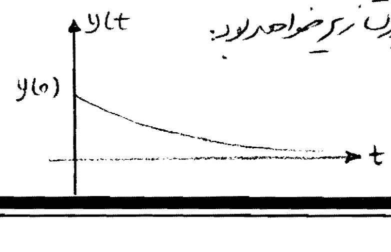
مهندسین طراح صرفنظر از هر نوع سیستمی که طراحی می‌کنند، بررسی پایداری یکی از مهمترین و اولین اصلی است که با آن سروکار دارند. مدارهای الکتریکی که در این درس با آنها سروکار داریم نیز از این روند تبعیت می‌کنند. بطوریکه هر مداری که در این درس بررسی می‌شود پایدار بوده و ریشه‌ها همواره منفی یا بخش منفی حقیقی را دارا خواهند بود.

◄ در مدارهای الکتریکی اگر سیستمی سیگنالی از نوع پاسخ 1.2 داشته باشد، شکل موج سیگنال بدین صورت خواهد بود:



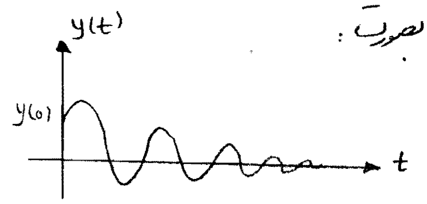
$\rightsquigarrow$ ◄ به این نوع پاسخ، پاسخ میرای شدید گویند.

◄ همچنین اگر سیستمی سیگنالی از نوع پاسخ 2.2 داشته باشد، شکل موج سیگنال بصورت زیر خواهد بود:



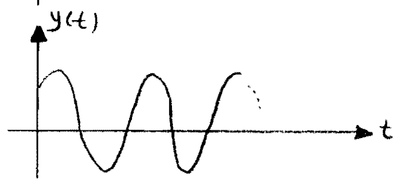
$\rightsquigarrow$ ◄ به این نوع پاسخ، پاسخ میرای بحرانی گویند.

◀ اگر سیستمی پاسخی از نوع ۳.۲ با بخش حقیقی غیرصفر داشته باشد، شکل موج پاسخ بصورت:



← ◀ به این نوع پاسخ میرای ضعیف گویند.

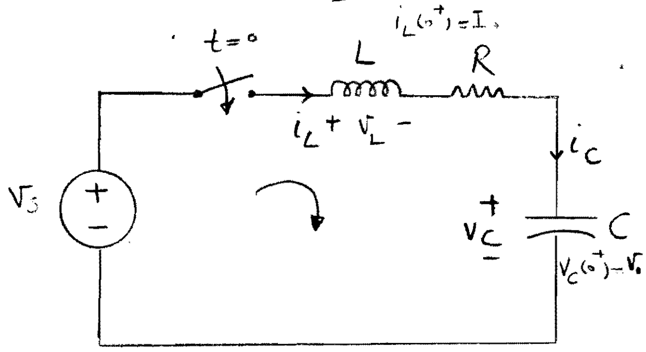
و اگر بخش حقیقی صفر باشد، شکل موج پاسخ بصورت زیر خواهد بود:



← ◀ به این نوع پاسخ بی‌اتلاف گویند.

۲. مدارهای مرتبه دوم:

مدارهای مرتبه دوم، مدارهایی هستند که از ترکیب ۳ عنصر مقاومت، سلف و خازن تشکیل شده اند. بسته به نوع اتصال این سه عنصر دو نوع مدار RLC خواهیم داشت.



الف) مدارهای RLC سری:

در مدارهای RLC، بسته به نوع خروجی که جریان سلف و یا ولتاژ خازن می باشد، دو نوع معادله دیفرانسیل برای هر مدار می توان بدست آورد.

در اینجا هر دو نوع معادله دیفرانسیل را می نویسیم:

① خروجی بر حسب ولتاژ خازن در $t \geq 0$: در حلقه KVL ، $-V_S + V_L + i_R R + V_C = 0$

$i_R = i_L = i_C$

چون می خواهیم معادله بر حسب $V_C(t)$ باشد تمام متغیرها را بر حسب متغیر خازن می نویسیم:

$$\begin{cases} V_L = L\dfrac{di_L}{dt} = L\dfrac{di_C}{dt} = L\dfrac{d}{dt}\left(C\dfrac{dV_C}{dt}\right) = LC\dfrac{d^2V_C}{dt^2} \\ i_R = i_C = C\dfrac{dV_C}{dt} \end{cases}$$

$$\rightarrow LC\frac{d^2V_C}{dt} + RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S \qquad (1)$$

برای حل معادله (۱) ابتدا معادله مشخصه را می نویسیم:

$$LCS^2 + RCS + 1 = 0 \rightarrow S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\rightarrow \Delta = \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$

بسته به مقدار Δ، یکی از ۴ حالت پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بوجود می آید.

با توجه به تابع V_S و شرایط اولیه نیز به ترتیب پاسخ خصوصی و ضرایب مجهول محاسبه می‌شوند.

② خروجی بر حسب جریان سلف در $t \geq 0$:
$$V_L + i_R R + V_C = V_S$$

برای اینکه معادله بر حسب i_L به دست آید تمام متغیرها را بر حسب جریان سلف می‌نویسیم:

$$\begin{cases} V_L = L\dfrac{di_L}{dt} \\ V_C = \dfrac{1}{C}\int i_C\, d\tau + V_C(0) = \dfrac{1}{C}\int i_L d\tau + V_0 \\ i_R = i_L \end{cases}$$

$$\Rightarrow L\frac{di_L}{dt} + R i_L + \frac{1}{C}\int i_L\, d\tau + V_0 = V_S \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ برای تبدیل این معادله، به معادله درجه ۲ یکبار دیگر از طرفین بر حسب زمان مشتق می‌گیریم.

$$L\frac{d^2 i_L}{dt} + R\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} i_L = 0 \qquad (3)$$

برای محاسبه پاسخ عمومی ابتدا معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم:

$$LS^2 + RS + \frac{1}{C} = 0$$

$$\Rightarrow S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \Delta = \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$

با توجه به مقدار Δ یکی از چهار حالت پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بوجود می‌آید.

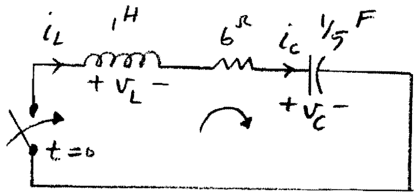
همانطور که مشخص است پاسخ خصوصی معادله (۳) صفر می‌باشد. ضرایب مجهول پاسخ از شرایط اولیه محاسبه می‌شوند.

▶ نکات مهم:

۱. مدارهای مرتبه دوم نیز دارای پاسخ ورودی صفر، حالت صفر و کامل می‌باشند. برای محاسبه پاسخ ورودی صفر، ورودی مدار را حذف می‌کنیم. برای محاسبه پاسخ حالت صفر نیز شرایط اولیه را صفر کرده و پاسخ را محاسبه می‌کنیم. پاسخ کامل از مجموع این دو پاسخ یا از حل مستقیم معادله دیفرانسیل (۲) یا (۳) بدست می‌آید.

۲. همانطور که از معادلات ۲ و ۳ مشخص است، شکل پاسخ عمومی برای ولتاژ خازن و جریان سلف یکسان خواهد بود و تفاوت آنها در ضرایب و پاسخ خصوصی می‌باشد.

◀ مثال ۱۷: در مدار خطی RLC زیر، نحوه تغییرات $i_L(t)$ را بیابید.



$$i_L(0^+)=1^A$$
$$\frac{di_L(0^+)}{dt}=0^A$$

همانطور که مشخص است در $t\geq 0$ در این مدار هیچ نوع منبع ورودی وجود ندارد. بنابراین پاسخ مدار همان پاسخ ورودی صفر می‌باشد، برای نوشتن معادلات و در محاسبه $i_L(t)$ بنا بر لازم متغیرها را به متغیرهای مسئله تبدیل نماییم:

KVL در حلقه: $\quad V_L+V_R+V_C=0$

$$i_R=i_C=i_L \rightsquigarrow \begin{cases} V_C=\frac{1}{C}\int i_C\,dt+V_0=5\int i_L\,dt+V_0 \\ V_L=L\frac{di_L}{dt}=\frac{di_L}{dt} \\ V_R=i_R\,R=6i_L \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \frac{di_L}{dt}+6i_L+5\int i_L\,dt+V_0=0 \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{مشتق گیری}} \frac{d^2i_L}{dt}+6\frac{di_L}{dt}+5i_L=0 \qquad (*)$$

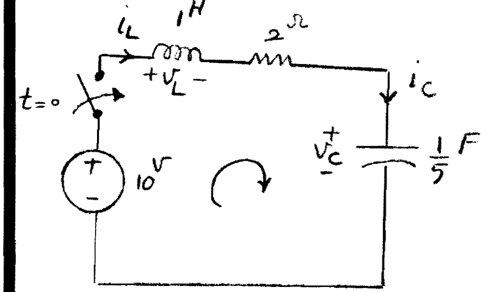
اکنون برای حل معادله * تنها لازم است پاسخ عمومی را محاسبه نماییم (پاسخ خصوصی $=0$)

$$s^2+6s+5=0 \rightsquigarrow \Delta=\sqrt{36-20}=4$$
$$(s+1)(s+5)=0 \rightsquigarrow \Delta>0 \quad \text{دو ریشه حقیقی و مجزا}$$
$$\begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-5 \end{cases} \rightsquigarrow i_L(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}=K_1e^{-t}+K_2e^{-5t}$$

برای محاسبه ضرایب مجهول از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} i_L(0)=1 \rightsquigarrow \\ \frac{di_L(0)}{dt}=0 \rightsquigarrow \end{array} \begin{cases} K_1+K_2=1 \\ -K_1-5K_2=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} K_1=5/4 \\ K_2=\frac{-1}{4} \end{array} \rightsquigarrow i_L(t)=\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-5t}$$

◀ مثال ۱۸: در مدار شکل زیر برای $t\geq 0$، مقدار $V_C(t)$ را محاسبه نمایید.



$$V_C(0^+)=6^V$$
$$i_L(0^+)=2$$

در این مدار هم ورودی داریم و هم شرایط اولیه بنابراین پاسخ $V_C(t)$ همان پاسخ کامل است

KVL: $\quad -10+V_L+V_R+V_C=0$

$$i_C=i_L=i_R \rightsquigarrow V_L=L\frac{di_L}{dt}=\frac{di_C}{dt}$$
$$V_R=i_R\cdot R=2i_C$$

$$\frac{1}{5}\frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{2}{5}\frac{dv_c}{dt}+v_c=10$$

ابتدا پاسخ عمومی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{5}s^2+\frac{2}{5}s+1=0 \rightsquigarrow s^2+2s+5=0$$

$$\rightsquigarrow \Delta'=\sqrt{+1-5}=\sqrt{-4}<0$$ دو ریشه مختلط مزدوج

$$=\pm 2j$$

$$\rightsquigarrow s_{1,2}=\alpha\pm j\omega_0=-1\pm 2j \rightsquigarrow \alpha=\text{بخش حقیقی}\neq 0$$

$$\alpha=-1$$

$$\omega_0=\sqrt{5}$$

$$\rightsquigarrow \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=\sqrt{5-1}=2$$

$$\rightsquigarrow v_{ch}(t)=e^{-t}\left[K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right]$$

برای محاسبه پاسخ خصوصی چون $f(t)=10$ می‌باشد داریم:

$$v_{cp}(t)=K$$

$$\rightsquigarrow 0+0+K=10$$

$$\rightsquigarrow v_{cp}(t)=10$$

$$\rightsquigarrow v_c(t)=e^{-t}\left[K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right]+10$$

$$v_c(0)=6 \rightsquigarrow K_1+10=6 \rightsquigarrow K_1=-4$$

$$i_L(0)=2 \rightsquigarrow i_c(0)=2 \rightsquigarrow \frac{1}{5}\frac{dv_c(0)}{dt}=2$$

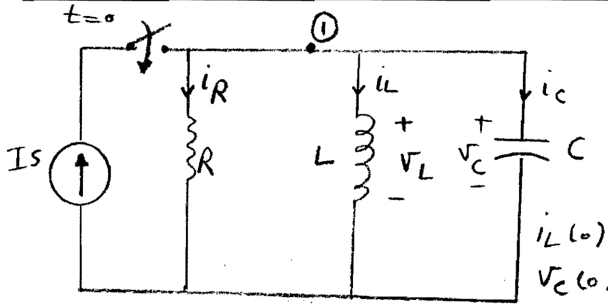
$$\frac{dv_c}{dt}=-e^{-t}\left[-4\cos 2t+K_2\sin 2t\right]+e^{-t}\left[8\sin 2t+2K_2\cos 2t\right]$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt}=10 \rightsquigarrow K_2=3$$

$$\rightsquigarrow v_c(t)=e^{-t}(-4\cos 2t+3\sin 2t)+10$$

ب) مدارهای RLC موازی:

در این مدار نیز معادلات دیفرانسیل را برحسب نوع خروجی که $i_L(t)$ یا $V_C(t)$ می‌تواند باشد محاسبه می‌کنیم:



$i_L(0)=I_0$
$V_C(0)=V_0$

① خروجی برحسب ولتاژ خازن در $t\geq 0$: KCL در گره ① : $I_S = i_R + i_L + i_C$

$V_C = V_L = V_R$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_R = \dfrac{V_C}{R} \\ i_L = \dfrac{1}{L}\int V_C + I_0 \\ i_C = C\dfrac{dV_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow C\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R}V_C + \frac{1}{L}\int V_C + I_0 = I_S \quad (۴)$$

اکنون از طرفین رابطه فوق مشتق می‌گیریم:

$$C\frac{d^2V_C}{dt} + \frac{1}{R}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{L}V_C = 0 \quad .(۵)$$

برای حل معادله (۵) ابتدا معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$CS^2 + \frac{1}{R}S + \frac{1}{L} = 0$$

$$\Rightarrow S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$

بسته به مقدار و علامت Δ، یکی از ۴ حالت پاسخ معادله دیفرانسیل درجه دوم ممکن است پیش بیاید. با توجه معادله (۵) می‌بینیم که پاسخ خصوصی معادله صفر است و ضرایب مجهول پاسخ از شرایط اولیه محاسبه خواهند شد.

② خروجی برحسب جریان سلف در $t\geq 0$: $I_S = i_R + i_L + i_C$

$V_C = V_L = V_R$

$$\Rightarrow i_R = \frac{V_L}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} \qquad \Rightarrow LC\frac{d^2V_C}{dt} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_S \quad (6)$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{dV_L}{dt} = LC\frac{d^2V_C}{dt}$$

$$\Rightarrow LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1 = 0 \Rightarrow S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$

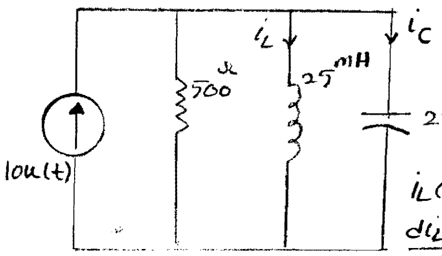
بسته به مقدار و علامت Δ یکی از ۴ حالت پاسخ پیش می‌آید. با توجه به معادله ۶ و نوع I_S و شرایط اولیه به ترتیب پاسخ خصوصی و ضرایب مجهول محاسبه می‌گردد.

۳. پاسخ پله مدارهای خطی:

در اکثر مدارهای الکتریکی، تحریک مدار در زمان خاصی اتفاق می‌افتد. منظور از تحریک مدار، اعمال منبع (منابع) ورودی به مدار می‌باشد. از آنجا که معمولاً زمان تحریک مدار را صفر در نظر می‌گیرند، برای بیان محل کلیدزنی و اعمال منبع ورودی به یک مدار، می‌توان از تابع پله واحد استفاده نمود: (به پیوست ۲ مراجعه نمایید.)

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

در این حالت دیگر نیازی به رسم کلید در مدار نیست. اگر ورودی مدار به صورت ضریبی از $u(t)$ تعریف شود، دقیقاً به همان معنا است که در $t=0^+$ کلید مدار وصل و منبع به مدار اعمال شده است.



$i_L(0)=0$

$\frac{di_L(0)}{dt}=0$

▶ مثال ۴.۷: در مدار شکل زیر $v_C(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه نمایید.

چون منبع ورودی $10u(t)$ می‌باشد، داریم:

$$I(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 10 & t>0\end{cases}$$

برای $t>0$ داریم:

$$10=i_R+i_L+i_C$$

$$i_C=25\times10^{-9}\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_R=\frac{v_C}{500}$$

$$i_L=\frac{1}{25\times10^{-3}}\int v_L\,dt+I_0=\frac{10^3}{25}\int v_C\,dt+I_0$$

$$\rightsquigarrow 25\times10^{-9}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{500}v_C+40\int v_C\,dt+I_0=10$$

$$\rightsquigarrow 25\times10^{-9}\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{1}{500}\frac{dv_C}{dt}+40v_C=0$$

$$\rightsquigarrow v_{cp}=0$$

$$\rightsquigarrow 25\times10^{-9}s^2+\frac{1}{500}s+40=0 \rightsquigarrow s^2+8\times10^4 s+16\times10^8=0$$

$\rightsquigarrow \Delta=0 \rightsquigarrow$ ریشه حقیقی و برابر $\rightsquigarrow s_1=s_2=-40000$

$$\rightsquigarrow v_C(t)=(K_1+K_2t)e^{-40000t}$$

$$v_L(0)=L\frac{di_L(0)}{dt}=0 \rightsquigarrow v_C(0)=0 \rightsquigarrow K_1=0$$

$$i_L(0)=0 \rightsquigarrow 10=\frac{v_C(0)}{R}+i_L(0)+C\frac{dv_C(0)}{dt}$$

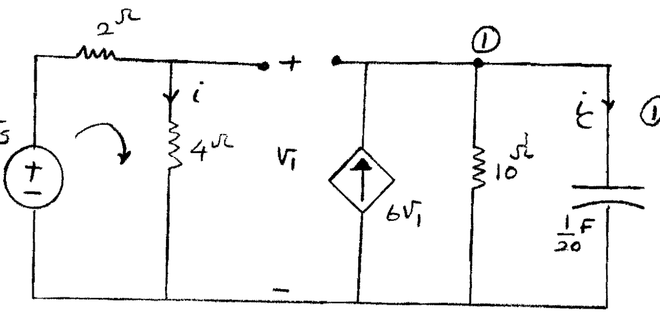
$$\rightsquigarrow 25\times10^{-9}\frac{dv_C(0)}{dt}=10 \rightsquigarrow \frac{dv_C(0)}{dt}=4\times10^{8}$$

$$\rightsquigarrow K_2=4\times10^{8}$$

$$\rightsquigarrow v_C(t)=4\times10^{8}e^{-40000t}\ (V)\qquad t\geq 0$$

◀ مثال ۷.۵: در مدار شکل زیر، منبع ورودی $v_s(t)=0.25u(t)$ می‌باشد. ولتاژ اولیه خازن را صفر در نظر بگیرید. $v_0(t)$ را محاسبه نمایید.

برای $t\geq 0$ داریم:



در گره ① KCl:

$$6v_1=\frac{v_C}{10}+i_C \qquad *$$

$$i_C=\frac{1}{20}\frac{dv_C}{dt}$$

برای محاسبه v_1 در حلقه سمت چپ مدار KVL می‌نویسیم:

$$-v_s+2i+4i=0 \rightsquigarrow i=\frac{0.25}{6}$$

$$v_1=4i \rightsquigarrow v_1=\frac{1}{6}$$

$$\overset{*}{\rightsquigarrow} \frac{1}{20}\frac{dv_C}{dt}+\frac{1}{10}v_C=1 \rightsquigarrow \frac{dv_C}{dt}+2v_C=20$$

$$v_{ch}=ke^{-2t}$$

$$v_{cp}=? \rightsquigarrow v_{cp}=K_1 \rightsquigarrow 0+2K_1=20 \rightsquigarrow v_{cp}=10$$

$$\rightsquigarrow v_C(t)=ke^{-2t}+10 \qquad \rightsquigarrow v_C(t)=10(1-e^{-2t})\quad t\geq 0$$

$$v_C(0)=0 \rightsquigarrow k=-10 \qquad =10(1-e^{-2t})u(t)$$

فصل هشتم: تحلیل حالت دائمی سینوسی:

۱. مقدمه:

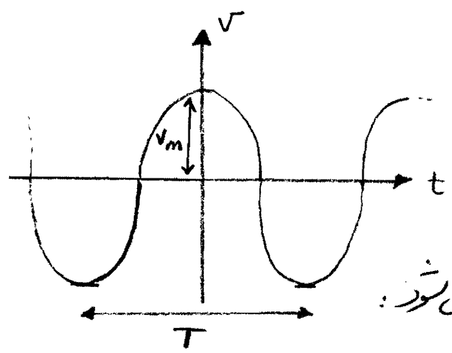
از آنجا که در بسیاری از مدارهای الکتریکی و خانگی از مولدهای با سیگنال سینوسی استفاده می‌شود، شناخت رفتار سیستم‌های الکتریکی به ورودی سینوسی یکی از موضوعات مهم درس مدارهای الکتریکی می‌باشد.

منابع سینوسی:

یک منبع ولتاژ سینوسی (مستقل/وابسته) ولتاژی را که بطور سینوسی با زمان تغییر می‌کند را تولید می‌کند. همچنین یک منبع جریان سینوسی (مستقل/وابسته) نیز یک جریان سینوسی متغیر با زمان تولید می‌کند.

اگرچه یک تابع سینوسی را می‌توان با هر دو تابع سینوس و کسینوس نمایش داد، اما در اکثر مباحث این بخش برای نشان دادن تابع سینوسی از تابع کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$



یکی از پارامترهای مطلوب در توابع سینوسی طول زمانی است که لازم است تا تابع تمام مقادیر ممکن خود را طی کند. به این بازه زمانی دوره تناوب گویند و آن را با "T" نشان می‌دهند.

عکس دوره تناوب T تعداد سیکل در ثانیه یا فرکانس نامیده می‌شود:

فرکانس $f = \frac{1}{T}$ $\qquad [f] = Hz$

فرکانس طبیعی $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $\qquad [\omega] = \frac{rad}{s}$

زاویه ϕ زاویه فاز تابع سینوسی نامیده می‌شود که مشخص کند مقدار تابع سینوسی در $t = 0$ می‌باشد.

اگر ϕ مثبت باشد تابع سینوسی به سمت چپ و اگر منفی باشد به سمت راست جابجا می‌شود.

$\phi =$ زاویه فاز $\qquad [\phi] = \frac{rad}{s}$

• مقدار موثر یک تابع سینوسی مقدار عددی است که ولت سنج ac نشان می دهد این مقدار بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T v(t)^2\, dt} \rightsquigarrow V_{rms_{max}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

• مقدار متوسط یک تابع سینوسی صفر است. مقدار متوسط مقدار عددی است که ولت سنج DC نشان می دهد.

▶ فازور و نمایش فازوری تابع سینوسی:

فازور یک عدد مختلط است که اطلاعات مربوط به دامنه و زاویه فاز تابع سینوسی را نگهداری می کند. مفهوم فازور

با استفاده از قانون اویلر

$$e^{j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

تابع نمائی را به مثلثاتی مرتبط می کند.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$= Re\left\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\right\}$$
$$= Re\left\{\underbrace{V_m e^{j\phi}} e^{j\omega t}\right\}$$

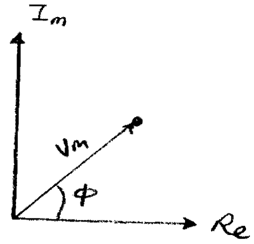
این بخش را که شامل دامنه و زاویه فاز ϕ برای $v(t)$ است را فازور $v(t)$ گوییم.

انواع نمایش فازوری $v(t)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} V = V_m e^{j\phi} \\ = V_m \angle \phi \\ = V_m \cos\phi + j V_m \sin\phi \end{cases}$$

هر فازور بیانگر یک بردار در صفحه مختلط می باشد که دامنه آن طول بردار و فاز آن زاویه بردار نسبت به محور افقی مثبت را تعیین می کند.

بنابراین جمع فازوری همان جمع برداری خواهد بود.



◄ مثال ۱: اگر y_1 و y_2 بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$y_1 = 20\cos(\omega t - 30^\circ)$$
$$y_2 = 40\cos(\omega t + 60^\circ)$$

باشند سیگنال $y = y_1 + y_2$ را محاسبه نمائید.

$$y_1 = 20\angle -30 = 20\left[\cos\frac{-\pi}{6} + j\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$
$$= 20\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right] = 10\sqrt{3} - 10j$$

$$y_2 = 40\angle 60 = 40\left[\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right] = 40\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right] = 20 + 20\sqrt{3}j$$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = (10\sqrt{3} - 10j) + (20 + 20\sqrt{3}j) = 37.3 + 24.64j$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{37.3^2 + 24.64^2} = 44.72$$
$$\measuredangle y = \tan^{-1}\left(\frac{24.64}{37.3}\right) = 33.43^\circ$$

$$\Rightarrow y = 44.72 \measuredangle 33.43^\circ$$
$$\Rightarrow y(t) = 44.72\cos(\omega t + 33.43^\circ)$$

۲. المان های مداری پسیو در حوزه فرکانس:

در این بخش رابطه بین جریان فازور و ولتاژ فازور مقاومت، سلف و خازن را بدست می آوریم. در تمام مراحل از قرارداد علامت گذاری پسیو استفاده خواهیم کرد.

۲.۱ رابطه $V-I$ فازوری برای المان مقاومت:

بر طبق قانون اهم، اگر جریان مقاومت بطور سینوسی با زمان تغییر کند، ولتاژ آن برابر خواهد بود با:

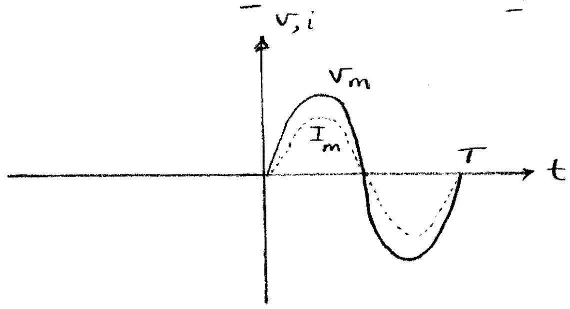
$$v(t) = Ri(t) = RI_m\cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\Rightarrow V = RI_m \measuredangle \phi_i$$

بنابراین جریان و ولتاژ مقاومت دارای فاز یکسان هستند یعنی اختلاف فاز ولتاژ و جریان مقاومت برابر صفر است.

$$\phi_v = \phi_i \Rightarrow \phi_v - \phi_i = \phi_i - \phi_v = 0$$
$$V_m = I_m R$$

اختلاف ولتاژ صفر یعنی هر دو با هم در یک زمان مقدار حداکثر و در یک زمان مقدار حداقل دارند:



۲.۲. رابطه V-I برای سلف:

رابطه بین جریان و ولتاژ یک سلف با جریان عمومی سینوسی بصورت زیر خواهد بود:

$$i_L(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t + \phi_i) = -L\omega I_m \cos(\omega t + \phi_i - 90^\circ)$$

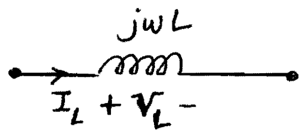
$$\rightsquigarrow V_L = -L\omega I_m \angle \phi_i - 90$$

$$= (e^{\pi j})(\omega L I_m)(e^{j(\phi_i - \pi/2)}) = \omega L I_m e^{j(\phi_i + \frac{\pi}{2})}$$

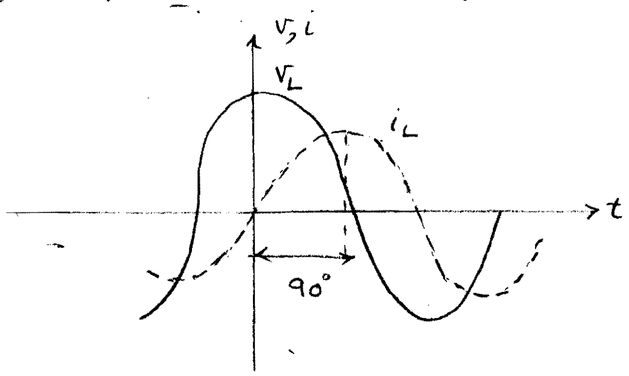
$$= \omega L I_m e^{j\phi_i} e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L I_m e^{j(\phi_i + \frac{\pi}{2})} = (j\omega L e^{j\phi_i}) I_m$$

$$\rightsquigarrow V_m = \omega L I_m \qquad \rightsquigarrow \phi_v - \phi_i = 90^\circ$$

$$\phi_v = \phi_i + 90^\circ$$



یعنی ولتاژ و جریان سلف دارای اختلاف فاز °۹۰ می باشد و ولتاژ ۹۰ از جریان جلوتر است و یا جریان °۹۰ از ولتاژ سلف عقب تر می باشد



$$\boxed{V_L = j\omega L I_L}$$

۳.۲: رابطه V-I برای خازن:

رابطه بین جریان و ولتاژ یک خازن با ولتاژ سینوسی بصورت زیر خواهد بود:

$$v_c(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

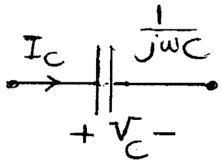
$$i_c(t) = c\frac{dv_c}{dt} = -c\omega V_m \sin(\omega t + \phi_v) = -c\omega V_m \cos(\omega t + \phi_v - 90^\circ)$$

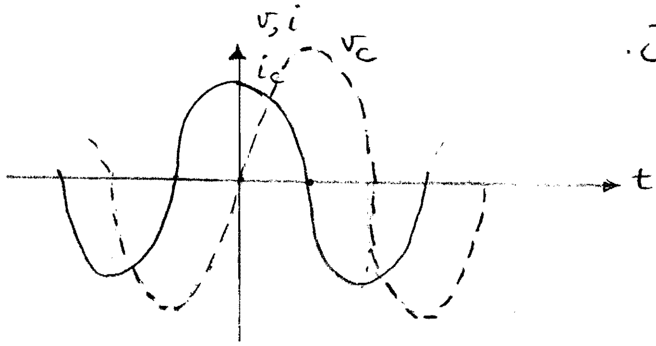
$$I_c = -c\omega V_m \angle \phi_v - 90$$

$$= \omega c\, e^{j(\phi_v + \frac{\pi}{2})} V_m = j\omega c\, e^{j\phi_v} V_m$$

$$\rightsquigarrow I_m = \omega c V_m \qquad \rightsquigarrow \begin{cases} V_m = \dfrac{1}{\omega c} I_m \\ \phi_v = \phi_i - 90 \end{cases} \rightsquigarrow \phi_v - \phi_i = -90$$

$$\phi_i = \phi_v + 90$$





یعنی ولتاژ دو سر خازن 90° عقب تر از جریان خازن است.

$$\boxed{V_c = \frac{1}{j\omega c} I_c}$$

• مثال ۱: با استفاده از روش فازوری:

الف) درصورتیکه ولتاژ دو سر یک مقاومت 4^Ω برابر $8\cos(100t-50^\circ)$ باشد آنگاه جریان عبوری از آن را بیابید.

$$v_R(t) = 8\cos(100t - 50^\circ) \rightsquigarrow V_R = 8\angle -50^\circ$$

$$V_R = R I_R \rightsquigarrow I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{8\angle -50^\circ}{4} = 2\angle -50^\circ$$

$$\rightsquigarrow i_R(t) = 2\cos(100t - 50)$$

ب) درصورتیکه فازور ولتاژ دو سر یک سلف برابر $8\angle -50^\circ$ باشد و به یک سلف 4^H اعمال گردد، موج جریان عبوری از سلف را در فرکانس $\omega = 100\ \frac{rad}{s}$ بیابید.

$$\begin{cases} V_m = \omega L\, I_m \\ \phi_v = \phi_i + 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{\omega L} V_m = \frac{1}{100 \times 4} \times 8 = 0.02$$

$$\phi_i = \phi_v - 90 = -50 - 90 = -140 \quad \Rightarrow I = 0.02 \angle -140^\circ$$

$$\Rightarrow i_L(t) = 0.02 \cos(100t - 140^\circ)$$

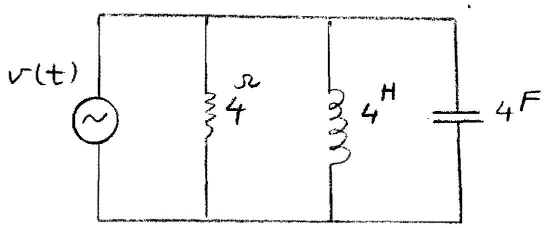
ج) در صورتیکه فازور ولتاژ $8\angle -50^\circ$ به دو سر یک خازن با ظرفیت 4F اعمال گردد، آنگاه جریان عبوری از خازن را در صورتیکه $\omega = 100 \ \frac{rad}{s}$ باشد.

$$\begin{cases} I_m = C\omega V_m = 4 \times 100 \times 8 = 3200 \\ \phi_i = \phi_v + 90 = -50 + 90 = 40^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_C = 3200 \angle +40^\circ$$

$$i_C(t) = 3200 \cos(100t + 40^\circ)$$

• مثال ۲: مدار RLC موازی شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر منبع سینوسی به صورت $v(t) = 8\sqrt{2} \cos(100t - 50^\circ)$ باشد، آنگاه جریان‌های عبوری از مقاومت، سلف و خازن را بیابید.



$$V_R = V_C = V_L = V$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{8\sqrt{2} \angle -50}{4} = 2\sqrt{2} \angle -50$$

$$\Rightarrow i_R(t) = 2\sqrt{2} \cos(100t - 50)$$

$$I_L: \quad I_{mL} = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{8\sqrt{2}}{100 \times 4} = 0.02\sqrt{2}$$

$$\phi_{iL} = \phi_{vL} - 90 = -50 - 90 = -140 \quad \Rightarrow I_L = 0.02\sqrt{2} \angle -140^\circ$$

$$\Rightarrow i_L(t) = 0.02\sqrt{2} \cos(100t - 140^\circ)$$

$$I_C: \quad I_{mC} = C\omega V_m = 4 \times 100 \times 8\sqrt{2} = 3200\sqrt{2}$$

$$\phi_{iC} = \phi_{vC} + 90 = -50 + 90 = 40^\circ \quad \Rightarrow I_C = 3200\sqrt{2} \angle 40^\circ$$

$$\Rightarrow i_C(t) = 3200\sqrt{2} \cos(100t + 40)$$

۴.۲. مفهوم امپدانس و راکتانس :

بحث درخصوص المان های پسیو را در جزوه فرکانسی را با این نکته مهم به پایان می بریم. رابطه ولتاژ جریان تمام این المانها شکل عمومی

$$V = ZI$$

دارد که در آن Z امپدانس المان مداری می باشد. همانطور که مشخص است امپدانس نسبت ولتاژ فازوری المان مدار به جریان فازوری آن می باشد. بنابراین :

$$Z_R = R$$
$$Z_L = j\omega L$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

واحد امپدانس اهم می باشد. توجه کنید علی رغم اینکه امپدانس یک عدد مختلط است اما فازور نمی باشد زیرا فازور ضریبی از $e^{j\omega t}$ است.

◄ نکته : بخش موهومی امپدانس را راکتانس می نامند و آن را با X نمایش می دهند :

$$X_R = 0$$
$$X_L = \omega L$$
$$X_C = \frac{-1}{\omega C}$$

◄ نکته : عکس امپدانس را ادمیتانس می نامند و با Y آن را نشان می دهند.

۵.۲. سری و موازی کردن امپدانس ها :

پیش از بررسی نحوه اتصال امپدانس ها به یکدیگر، قوانین کیرشهف را مرور می کنیم :

• قانون جریان کیرشهف :

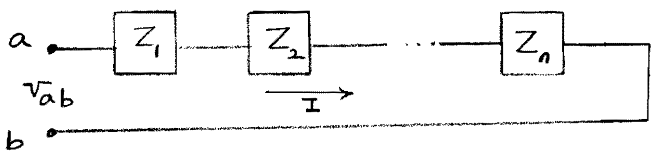
جمع جبری جریان های فازوری مربوط به یک گره برابر صفر است.

• قانون ولتاژ کیرشهف :

جمع جبری ولتاژهای فازوری مربوط به یک حلقه برابر صفر است.

اکنون به بررسی نحوه اتصال امپدانس های مختلف می پردازیم. در این بخش تنها دو نوع اتصال امپدانس ها به یکدیگر یعنی اتصال سری و اتصال موازی را توضیح می دهیم و اتصال ستاره و مثلث را به مباحث آتی واگذار می کنیم.

◀ **اتصال سری امپدانس ها:**

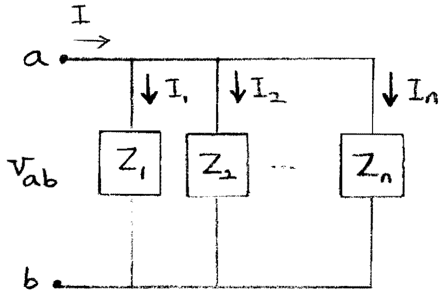


همانطور که از قبل می دانیم در اتصال سری جریان المان ها یکسان است:

$$V_{ab} = Z_1 I + Z_2 I + \cdots + Z_n I = (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\, I$$

$$\rightsquigarrow Z_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

◀ **اتصال موازی امپدانس ها:**



در اتصال موازی المانها ولتاژ المانها یکسان می باشد:

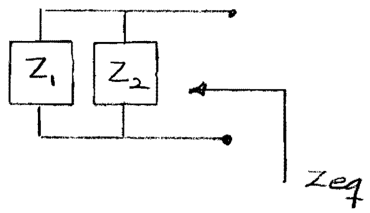
$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = \cdots = Z_n I_n = V_{ab}$$

$$\rightsquigarrow I_1 = \frac{V_{ab}}{Z_1} \; ; \; I_2 = \frac{V_{ab}}{Z_2} \; ; \; \cdots \; ; \; I_n = \frac{V_{ab}}{Z_n}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\cancel{V_{ab}}}{Z_{eq}} = I = \frac{\cancel{V_{ab}}}{Z_1} + \frac{\cancel{V_{ab}}}{Z_2} + \cdots + \frac{\cancel{V_{ab}}}{Z_n}$$

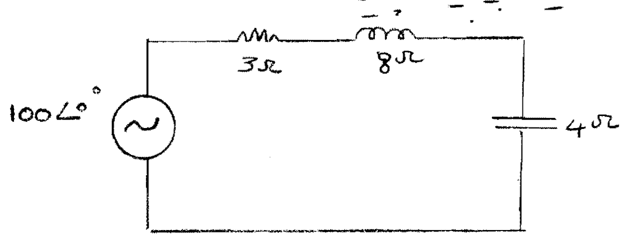
$$\rightsquigarrow Z_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i} \right)^{-1}$$



برای حالت خاص اتصال دو امپدانس بصورت موازی داریم:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

• مثال ۳: یک منبع ولتاژ سینوسی با مقدار موثر 100^V مطابق شکل زیر متصل شده است. با فرض $\omega = 314 \ rad/s$ جریان مدار را در حالت دائمی سینوسی بیابید. همچنین ولتاژ دو سر هر المان را محاسبه کنید.



توجه کنید که مقادیر المان ها بصورت دامنه‌ای از اهم بیان شده است پس این مقادیر راکتانس می باشند

$$\begin{cases} X_R = 4 \rightsquigarrow Z_R = 3 \\ X_L = 8 \rightsquigarrow Z_L = 8j \quad (jX_L = j\omega L = Z_L) \\ X_C = 4 \rightsquigarrow Z_C = -4j \quad \left(jX_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C\right) \end{cases}$$

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C = 3 + 8j - 4j = 3 + 4j \rightsquigarrow Z_{eq} = |Z_{eq}| \angle Z_{eq}$$

$$\begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \angle Z_{eq} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.1^\circ \end{cases} \rightsquigarrow Z_{eq} = 5\angle 53.1^\circ$$

$$\rightsquigarrow I = \frac{V_S}{Z_{eq}} = \frac{100\angle 0^\circ}{5\angle 53.1} = 20\angle -53.1^\circ$$

$$\rightsquigarrow V_R = Z_R I = 3 \times 20 \angle -53.1^\circ = 60 \angle -53.1^\circ$$

$$Z_L = 8j \rightsquigarrow Z_L = 8\angle 90^\circ \rightsquigarrow V_L = Z_L I = (8\angle 90)(20\angle -53.1^\circ)$$

$$Z_C = -4j \rightsquigarrow Z_C = 4\angle -90^\circ \qquad V_C = Z_C I = (4\angle -90)(20\angle -53.1^\circ)$$

$$\rightsquigarrow V_L = (8 \times 20)\angle 90 - 53.1 = 160\angle 36.9^\circ$$

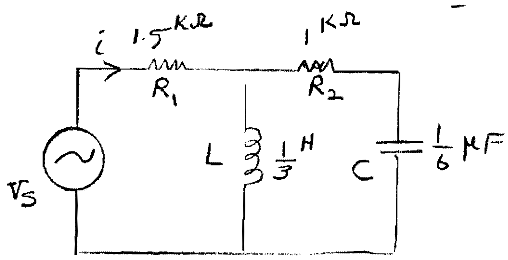
$$V_C = (4 \times 20)\angle -90 - 53.1 = 80\angle -143.1^\circ$$

$$\rightsquigarrow V_R(t) = 60\cos(314t - 53.1^\circ)$$

$$V_L(t) = 160\cos(314t + 36.9^\circ)$$

$$V_C(t) = 80\cos(314t - 143.1^\circ)$$

- مثال ۴۰: برای هریک از مدارهای زیر امپدانس معادل و جریان $i(t)$ را بیابید.



$$V_S = \sqrt{2}\, 40 \sin 3000t$$

$$Z_{eq} = \left[(Z_C + Z_{R_2}) \parallel Z_L\right] + Z_{R_1}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 3000 \times \frac{1}{6} \times 10^{-6}} = -2000j\ \Omega = -2j\ \text{K}\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j \times 3000 \times \frac{1}{3} = 1000j\ \Omega = j\ \text{K}\Omega$$

$$Z_{R_1} = 1.5\ \text{K}\Omega \qquad Z_{R_2} = 1\ \text{K}\Omega$$

$$\rightsquigarrow Z_{eq} = \left[(-2j+1) \parallel j\right] + 1.5 = \frac{(1-2j) \times j}{1-2j+j} + 1.5$$

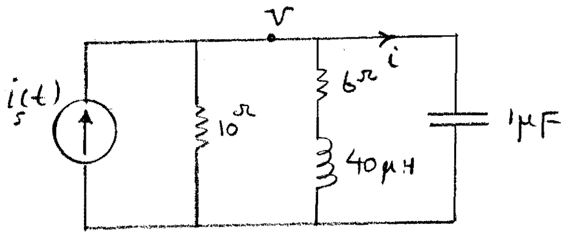
$$= \frac{(2+j)}{1-j} + 1.5 = \frac{(2+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} + 1.5 = \frac{1+3j}{2} + \frac{3}{2} = 2 + 1.5j$$

$$\rightsquigarrow |Z_{eq}| = \sqrt{4 + 1.5^2} = 2.5$$

$$\angle Z_{eq} = \tan^{-1}\frac{1.5}{2} = 36.87^\circ \qquad \rightsquigarrow Z_{eq} = 2.5 \angle 36.87^\circ$$

$$v_s(t) = 40\sqrt{2}\ \sin 3000t = 40\sqrt{2}\ \cos(3000t - 90)$$

$$\rightsquigarrow I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40\sqrt{2} \angle -90}{2.5 \angle 36.87} = 22.63 \angle -126.9$$



$$i_s(t) = 8 \cos 200000t\ ^{A}$$

$$\rightsquigarrow I_s = 8 \angle 0$$

$$\omega = 200000$$

$$Z_C = \frac{1}{j \times 200000 \times 10^{-6}} = -5j\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j \times 200000 \times 40 \times 10^{-6} = 8j$$

$$\rightsquigarrow Z_{eq} = 10 \parallel (6+8j) \parallel -5j = 4 - 3i$$

$$\rightsquigarrow |Z_{eq}| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\angle Z_{eq} = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = -36.87 \qquad \rightsquigarrow Z_{eq} = 5 \angle -36.87$$

$$\rightsquigarrow V = I_S Z_{eq} = (8\angle 0)(5\angle -36.87) = 40\angle -36.87$$

$$\rightsquigarrow I = \frac{V}{Z_C} = \frac{40\angle -36.87}{5\angle -90} = 8\angle 53.13^\circ$$

۳. تجزیه و تحلیل مدارها در حالت دائمی سینوسی:

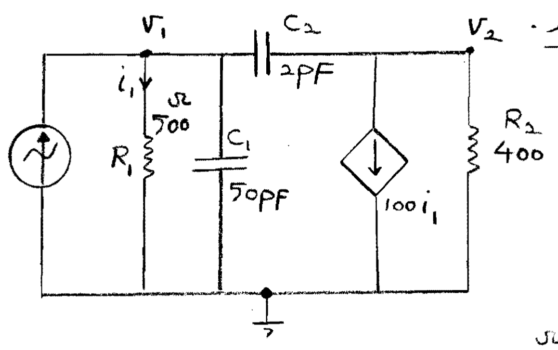
تمام قوانین مربوط به تجزیه و تحلیل مدار که در فصل های گذشته بیان گردید در حوزه فرکانس نیز برقرار هستند. منظور از حالت دائمی سینوسی زمانی است که ورودی یک مدار یک پالس سینوسی بوده و مدت زمان زیادی نیز از زمان وصل مدار گذشته باشد.

۱.۳. تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

با روش فازوری که برای مدارهای مقاومتی بیان گردید تجزیه و تحلیل گره را می توان به مدارهای شامل سلف و خازن با ورودی سینوسی تعمیم داد.

با حل مثال این نوع مدارها را به روش ولتاژ گره تحلیل می کنیم:

• مثال ۵: در مدار شکل زیر در صورتیکه جریان منبع ورودی بصورت $i(t)=\sqrt{2}\times10^{-4}\cos(2\times10^{7}t)$ باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی $V_2(t)$ را بیابید.



$$I_S = \sqrt{2}\times10^{-4}\angle 0^\circ$$

$$Z_{R_1} = 500\,\Omega$$

$$Z_{R_2} = 400\,\Omega$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{j\times2\times10^{7}\times50\times10^{-12}} = -1000j\,\Omega \quad ; \quad Z_{C_2} = \frac{1}{j\times2\times10^{7}\times2\times10^{-12}} = -25000j\,\Omega$$

KCL در ①:
$$I_S = \frac{V_1}{Z_{R_1}} + \frac{V_1}{Z_{C_1}} + \frac{V_1 - V_2}{Z_{C_2}}$$

KCL در ②:
$$\frac{V_2 - V_1}{Z_{C_2}} + \frac{V_2}{Z_{R_2}} + 100 I_1 \quad ; \quad I_1 = \frac{V_1}{Z_{R_1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_1}{0.5} + \dfrac{V_1}{-j} + \dfrac{V_1 - V_2}{-25j} = I_s \\ \dfrac{V_2 - V_1}{-25j} + \dfrac{V_2}{0.4} + 100 \times \dfrac{V_1}{0.5} = 0 \end{cases}$$

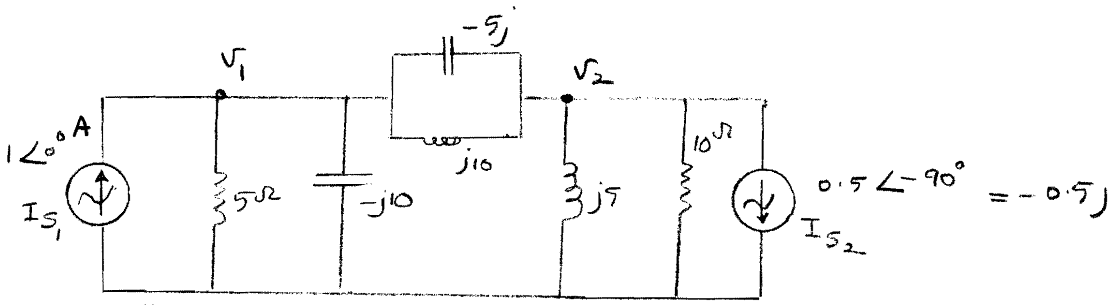
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1(-50j + 25 + 1) + V_2(-1) = \overbrace{I_s}^{\sqrt{2}\times 10^{-1}\ mA} \times (-25j) \\ V_1(-1 - 5000j) + V_2(+1 - 62.5j) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = -1.01 + 2.18i$$

$$\Rightarrow V_2 = 2.04 \angle 114.89$$

$$\Rightarrow v(t) = 2.04 \cos(\omega t + 114.89)$$

• مثال ۶ ، برای مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل زیر V_1 و V_2 را بیابید.



$$① : \quad I_{s_1} = \frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{j10 \parallel -5j}$$

$$② \quad -I_{s_2} = \frac{V_2}{10} + \frac{V_2}{5j} + \frac{V_2 - V_1}{j10 \parallel -5j}$$

$$j10 \parallel -5j = \frac{50}{10j - 5j} = -10j$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-10j} + \frac{V_1 - V_2}{-10j} \quad \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10j} - \frac{1}{10j}\right) + V_2\left(\frac{1}{10j}\right) = 1$$

$$0.5j = \frac{V_2}{10} + \frac{V_2}{5j} + \frac{V_2 - V_1}{-10j} \quad \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{10j}\right) + V_2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5j} - \frac{1}{10j}\right) = 0.5j$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_1 = 1-2i \\ V_2 = -2+4i \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 2.23 \angle -63.02^\circ \\ V_2 = 4.47 \angle 116.6^\circ \end{array}$$

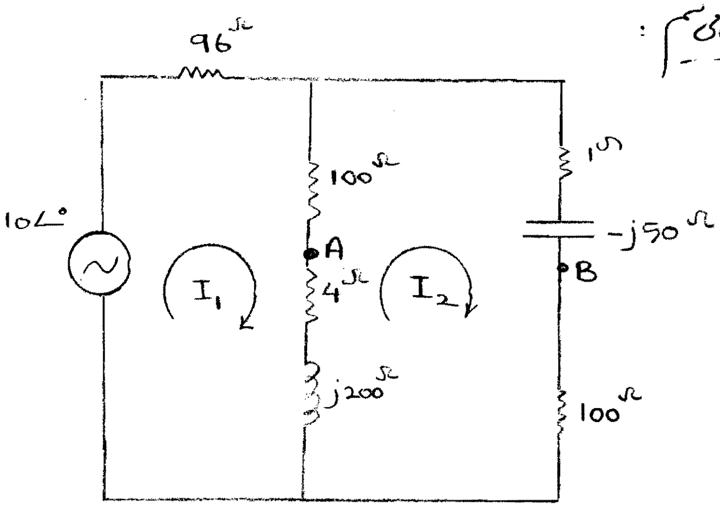
$$V_1(t) = 2.23 \cos(\omega t - 63.02)$$

$$V_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 116.6^\circ)$$

۲.۳. تجزیه و تحلیل مش در حالت دائمی سینوسی:

با روش مشابهی که برای مدارهای مقاومتی بیان کردیم تجزیه و تحلیل مش را می‌توان به مدارهای شامل سلف و خازن با ورودی سینوسی تعمیم داد.

با حل مثال این نوع مدارها را به روش مش تحلیل می‌کنیم:



• مثال ۷: در مدار شکل روبرو با استفاده از روش مش ولتاژ V_{AB} را بدست آورید.

① مش : $-V_S + 96I_1 + 100(I_1 - I_2) + 4(I_1 - I_2) + j200(I_1 - I_2) = 0$

② مش : $j200(I_2 - I_1) + 4(I_2 - I_1) + 100(I_2 - I_1) + I_2 - j50I_2 + 100I_2 = 0$

$$\rightarrow (96 + 104 + j200)I_1 + (-104 - j200)I_2 = 10$$

$$(-200j - 104)I_1 + (j200 + 104 + 1 - j50 + 100)I_2 = 0$$

$$\rightarrow I_1 = 0.051 + 0.000002j \quad \rightarrow I_1 = 0.051 \angle 0.002^\circ$$

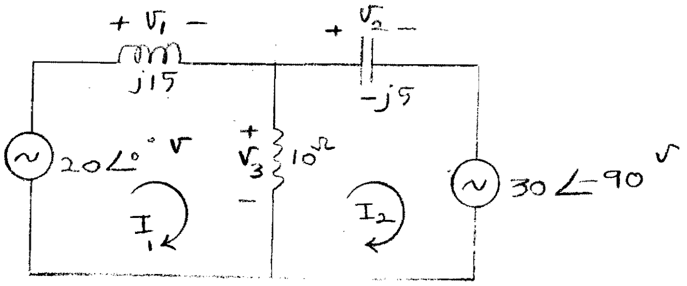
$$I_2 = 0.04 + 0.2j \quad \rightarrow I_2 = 0.045 \angle 26^\circ$$

$$\rightsquigarrow V_A = (4 + j200)(I_1 - I_2) = 4.06 + 2.01i$$

$$V_B = 100 I_2 = 4.06 + 2.01i$$

$$\rightsquigarrow V_{AB} \simeq 0$$

• مثال ۸: برای مدار الکتریکی شکل زیر ولتاژهای V_1، V_2 و V_3 را با استفاده از روش مش مشخص کنید. (فرکانس دو منبع را یکسان فرض کنید.)



$$\begin{cases} -20 + j15 I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0 \\ 10(I_2 - I_1) - j5 I_2 - 30j = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (10 + 15j) I_1 - 10 I_2 = 20 \\ -10 I_1 + (10 - j5) I_2 = 30j \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} I_1 = 2.24 - 0.32i \\ I_2 = 0.72 + 3.04i \end{cases} \rightsquigarrow V_1 = j15(2.24 - 0.32i) = 4.8 + 30.6i$$

$$\rightsquigarrow V_1 = 31 \angle 81.08$$

$$\rightsquigarrow V_2 = -5j(0.72 + 3.04i) = 15.2 - 3.6i \rightsquigarrow V_2 = 15.6 \angle -13.32$$

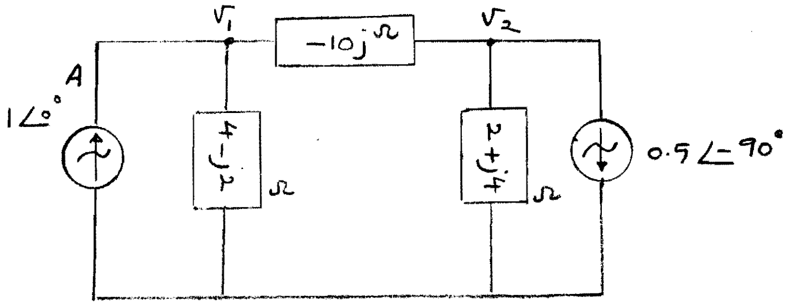
$$\rightsquigarrow V_3 = 10(2.24 - 0.32i - 0.72 - 3.04i) = 15.2 - 33.6i$$

$$\rightsquigarrow V_3 = 36.87 \angle -65.65$$

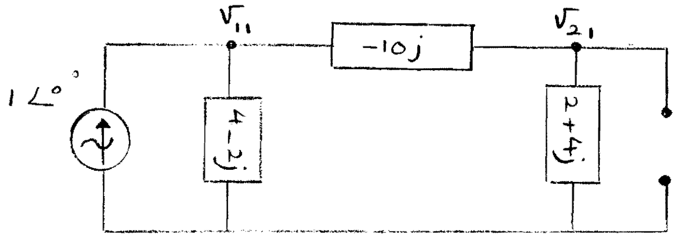
۳.۳. تجزیه تحلیل جمع آثار در حالت دائمی سینوسی:

اگر در مداری منابع ورودی بصورت منابع سینوسی باشند، آنگاه باز هم می‌توان تحلیل مدارها را به روش جمع آثار و کاربرد فازورها حل نمود. با چند مثال به بررسی این روش در حالت دائمی سینوسی می‌پردازیم.

• مثال ۹: در مدار شکل زیر با استفاده از قضیه جمع آثار ولتاژهای V_1 و V_2 را بیابید.



ابتدا منبع جریان 0.5^A را حذف می‌کنیم:



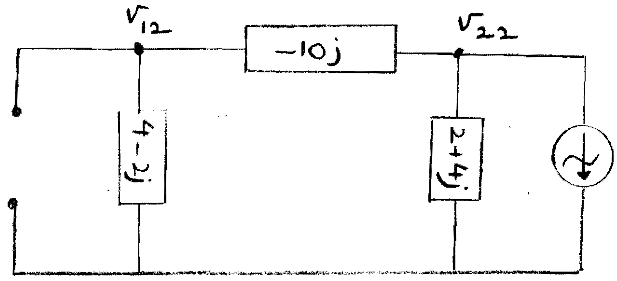
$1\angle 0^\circ = 1$

در KCL ①: $I_s = \frac{V_{11}}{4-2j} + \frac{V_{11}}{-10j+2+4j}$

$$\rightsquigarrow V_{11} = \frac{1(4-2j)(2-6j)}{4-2j+2-6j} = 2-2i$$

$$\rightsquigarrow V_{21} = \frac{2+4j}{2+4j-10j} \times V_{11} = 2i$$

اکنون منبع جریان 1^A را حذف می‌کنیم:



$0.5\angle -90 = -0.5j$

در KCL ②: $I_s + \frac{V_{22}}{2+4j} + \frac{V_{22}}{-10j+4-2j}$

$$\rightsquigarrow V_{22} = \frac{+0.5j\,(2+4j)(4-12j)}{2+4j-12j+4} = -2+2i$$

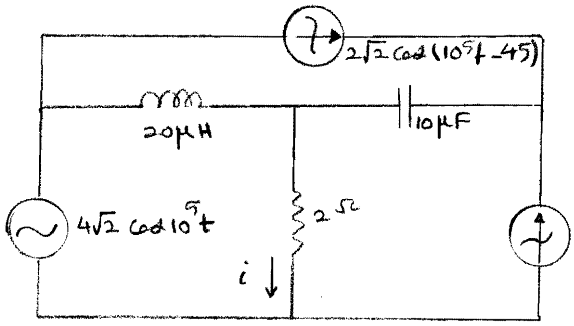
$$\rightsquigarrow V_{12} = \frac{4-2j}{4-2j-10j} V_{22} = -1$$

$$\rightsquigarrow V_1 = V_{11} + V_{12} = 2-2i-1 = 1-2i \rightsquigarrow V_1 = 2.23 \angle -63.4^\circ$$

$$V_2 = V_{21} + V_{22} = 2i-2+2i = -2+4i \rightsquigarrow V_2 = 4.47 \angle 116.6^\circ$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4)$$
$$v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 116.6)$$

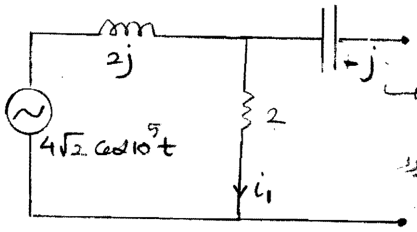
• مثال ۱۰: در مدار الکتریکی شکل زیر با استفاده از روش جمع آثار جریان $i(t)$ را محاسبه کنید.



$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 10^5 \times 10 \times 10^{-6}} = -j$$

① تنها حضور منبع ولتاژ:

$$Z_L = j\omega L = j \times 10^5 \times 20 \times 10^{-6} = 2j$$

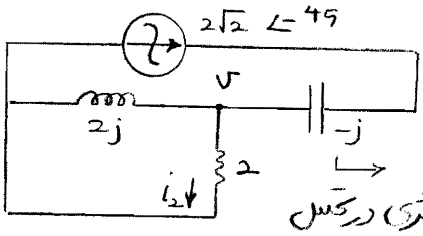


شاخه دارای خازن باز است ⇐ خازن حذف می‌گردد

$$\Rightarrow I_1 = \frac{4\sqrt{2}}{2j+2} = \sqrt{2}(1-j)$$

$$4\sqrt{2} \angle 0^\circ = 4\sqrt{2}$$

② تنها حضور منبع جریان بالای:



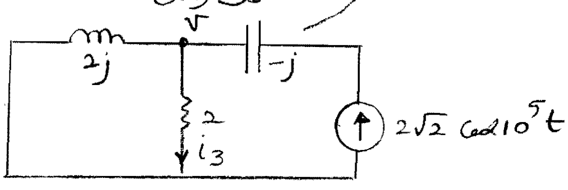
$$2\sqrt{2} \angle -45 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 2 - 2i$$

← سری با منبع جریان تأثیری در جریان ندارد

$$\Rightarrow \frac{V}{2} + \frac{V}{2j} = 2 - 2i$$

$$\Rightarrow V = 4 \quad \Rightarrow I_2 = \frac{4}{2} = 2$$

③ تنها حضور منبع جریان سمت راست:



$$\frac{V}{2} + \frac{V}{2j} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = 2\sqrt{2}(1+i$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}(1+i)}{\cancel{2}}$$

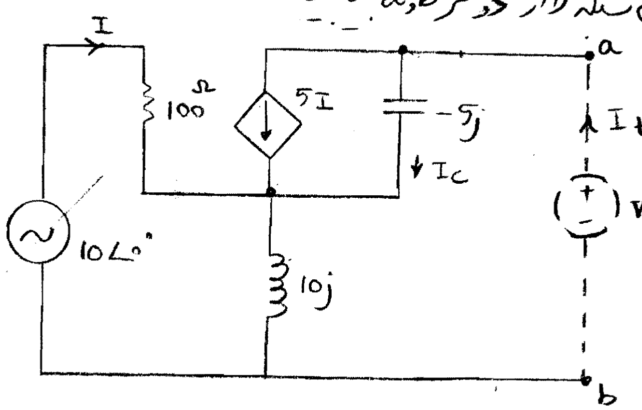
$\rightsquigarrow I=\sqrt{2}(1-j)+2+\sqrt{2}(1+j)=2\sqrt{2}+2$

$\rightsquigarrow i(t)=3.41\angle 0^\circ$

۴.۳. تجزیه و تحلیل تونن و نورتن در حالت دائمی سینوسی

روش تحلیل مدار با استفاده از روش های تونن و نورتن نیز مانند دیگر روش ها در حالت دائمی سینوسی قابل استفاده می باشند. با یک مثال این نکته را نشان می دهیم.

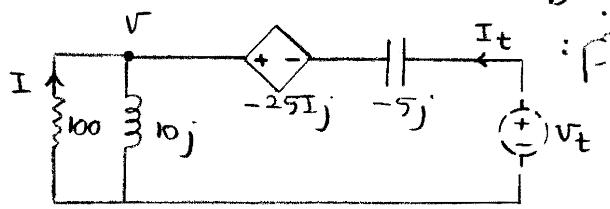
• مثال ۱۱: در مدار الکتریکی شکل زیر مدار معادل تونن شبکه را از دو سر ab بیابید.



$Z_{th}=\dfrac{V_t}{I_t}$

یک منبع تست برای محاسبه امپدانس تونن اعمال کرده و منبع ولتاژ ۱۰ را حذف می کنیم.

ابتدا با تبدیل منبع، منبع جریان را به ولتاژ تبدیل می کنیم:



$V=-100I$

KCL در V: $I+I_t=\dfrac{V}{10j} \rightsquigarrow I_t=-I-\dfrac{100I}{10j}=-I+10jI=I(-1+10j)$

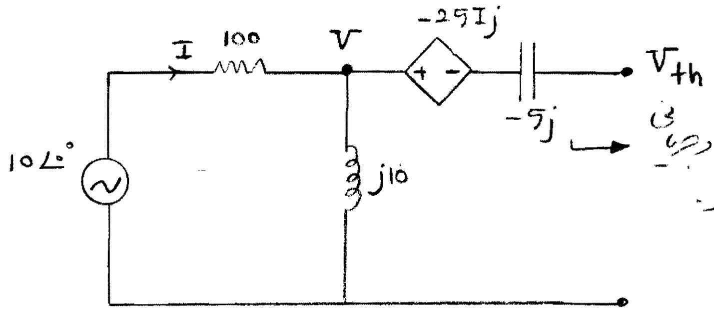
$\rightsquigarrow I=\dfrac{I_t}{-1+10j}$

$KVL:\ -V_t-5jI_t+25j\left(\dfrac{I_t}{-1+10j}\right)+I_t(10j \parallel 100)=0$

$V_t=I_t\left(-5j+\dfrac{25j}{-1+10j}+\dfrac{10j\times 100}{100+10j}\right)$

$\rightsquigarrow Z_{th}=\dfrac{V_t}{I_t}=3.46+4.65i \rightsquigarrow Z_{th}=5.8\angle 73.3^\circ$

اکنون به مدار اصلی برمی‌گردیم و ولتاژ V_{ab} را برحسب منبع ورودی مدار محاسبه می‌کنیم.



$$-10 + 100I + j10I = 0 \rightsquigarrow I(100+10j) = 10$$

$$\rightsquigarrow I = \frac{10}{100+10j}$$

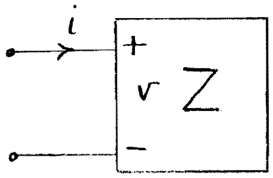
$$-10 + 100I - 25Ij + V_{th} = 0$$

$$\rightsquigarrow V_{th} = 10 - (100-25j) \times \frac{10}{100+10j} = 0.34 + 3.46i$$

$$\rightsquigarrow V_{th} = 3.48 \angle 84.23^\circ$$

۴. محاسبات توان در حالت دائمی سینوسی:

در حالت دائمی سینوسی با استفاده از قرارداد علامت‌گذاری پسیو و مدل مداری زیر داریم:



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \Phi_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \Phi_i)$$

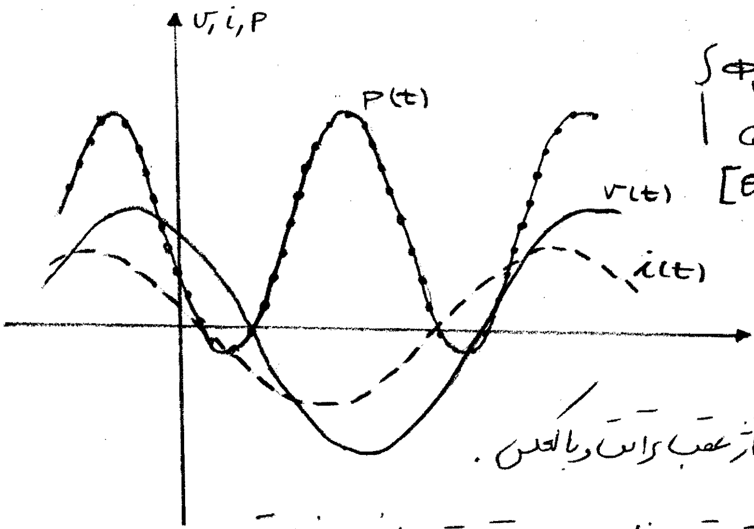
$$\rightsquigarrow p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i)$$

به این توان، توان لحظه‌ای گویند. توان لحظه‌ای ممکن است در بخشی از دوره تناوب حتی اگر شبکه پسیو باشد، منفی گردد.

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \cos 2\omega t$$

$$- \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) \sin 2\omega t$$

شکل زیر سه منحنی ولتاژ، جریان و توان لحظه‌ای را بعنوان مثال نشان می‌دهد.



$\begin{cases} \varphi_v - \varphi_i = \theta \\ \cos\theta = PF \end{cases}$: فاکتور توان

$[\theta] = rad$

◀ نکته: $\begin{cases} \theta > 0 & \text{پس فاز} \\ \theta < 0 & \text{پیش فاز} \end{cases}$

پس فاز یعنی فاز جریان از فاز ولتاژ عقب‌تر است و بالعکس.

همانطور که از شکل فوق مشخص است توان لحظه‌ای دارای مقدار متوسط غیر صفر است.

$$\Rightarrow p(t) = P_{av} + P_{av} \cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t$$

که در آن P_{av} توان متوسط و Q توان راکتیو نام دارند.

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t')\, dt'$$

اکنون برای حالت‌های مختلف Z توان لحظه‌ای را محاسبه می‌کنیم.

۱. اگر Z مقاومتی خالص باشد و داشته باشیم $\varphi_v = \varphi_i$:

▶ $p(t) = P + P\cos 2\omega t$

در این مدار توان متوسط و لحظه‌ای هرگز منفی نمی‌شود و مدار همواره پسیو است.

۲. اگر Z سلفی خالص باشد، و داشته باشیم $\varphi_v = \varphi_i + 90^\circ$:

▶ $p(t) = -Q \sin\omega t$

در این مدار توان متوسط صفر می‌باشد. این مدار هم می‌تواند پسیو باشد هم اکتیو.

۳. اگر Z خازنی خالص باشد و داشته باشیم $\Phi_v=\Phi_i-90^\circ$:

► $P(t)=-Q\sin 2\omega t$

که باز هم توان متوسط صفر بوده و مدار هم می‌تواند پسیو باشد هم اکتیو.

۱.۴. مقدار rms در محاسبه توان:

یکی از کاربردهای مهم مقدار متوسط یک سیگنال در محاسبات مربوط به توان می‌باشد. اگر مقدار موثر ولتاژ و جریان را به ترتیب با V_{rms} و I_{rms} نشان دهیم، آنگاه برای یک مدار مقاومتی با مقاومت معادل R داریم:

$$P_{av}=\frac{V_{rms}^2}{R}=I_{rms}^2\cdot R$$

بطور کلی داریم:

$$x(t)=x_m\cos(\omega t+\theta)\rightsquigarrow x_{rms}=\frac{x_m}{\sqrt{2}}$$

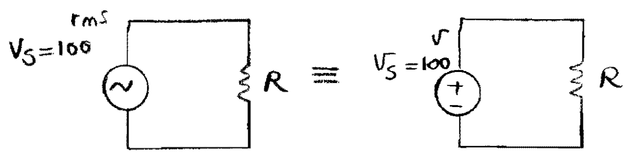
با این تعریف برای مدارها در حالت دائمی سینوسی داریم:

$$P_{av}=\frac{V_m I_m}{2}\cos(\Phi_v-\Phi_i)$$
$$=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\Phi_v-\Phi_i)$$
$$=V_{rms}\cdot I_{rms}\cos(\Phi_v-\Phi_i)$$
$$Q=V_{rms}\cdot I_{rms}\sin(\Phi_v-\Phi_i)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{V_{rms}=\frac{V_m}{\sqrt{2}},\quad I_{rms}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

● **نکته:** مقدار rms را همچنین مقدار موثر ولتاژ و یا جریان سینوسی می‌نامند. مقدار موثر مشخصه حالتی دارد. با داشتن بار مقاومتی معادل R و در دوره تناوب معادل T، مقدار rms منبع سینوسی انرژی یکسانی با وجود منبع DC به مقاومت می‌دهد.

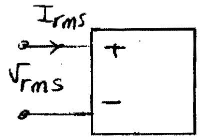
به عنوان مثال یک منبع 110^V DC انرژی ای برابر با منبع سینوسی $110V_{rms}$ در دوره تناوب T به R انتقال می‌کند:



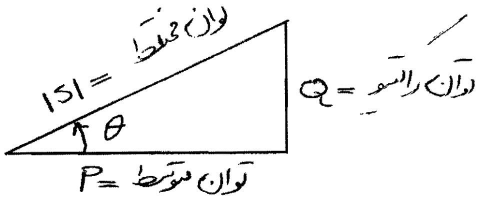
۲.۴ . توان مختلط :

پیش از آنکه به ارائه روش های مختلف محاسبه توان حقیقی و راکتیو در مدارهای حالت دائمی سینوسی بپردازیم، ابتدا با نوع دیگری از توان را با نام توان مختلط معرفی نماییم:

► $S = P + jQ$



در واقع بین توان های P و Q و S که رابطه هندسی زیر برقرار است:



$$\leadsto \begin{cases} Q = |S| \sin\theta \\ P = |S| \cos\theta \end{cases}$$

$$S = P + jQ = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \frac{1}{2} j V_m I_m \sin(\varphi_v - \varphi_i)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\varphi_v - \varphi_i) + j \sin(\varphi_v - \varphi_i)\right)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{i(\varphi_v - \varphi_i)}$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \angle \varphi_v - \varphi_i$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_v} \cdot e^{-i\varphi_i} = V_{rms} \bar{I}_{rms} = \frac{1}{2} V_m \bar{I}_m$$

► $\theta = \varphi_v - \varphi_i$ $\qquad$ فاکتور توان $= \cos\theta = PF$ (power Factor)

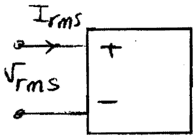
با دانستن مقدار فاکتور توان، مقدار زاویه توان را نمی توان بدست آورد زیرا $\cos\theta = \cos(-\theta)$

• مثال ۱۲: در مدار شکل زیر در شرایطی که بار مورد نظر توان 100^{KW} را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز دریافت می کند، منبع G_1 با ولتاژ دو سر فوق 460^V، توان 5KW را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز تولید می کند. در این شرایط V_L ، V_2 و نیز توان حقیقی و موهومی تولیدی منبع G_2 را بیابید.

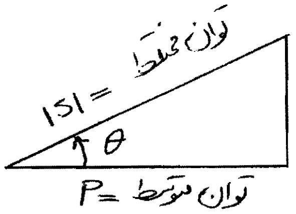
۲.۴. توان مختلط :

پیش از آنکه به انواع روش های مختلف محاسبه توان حقیقی و راکتیو در مدارهای حالت دائمی سینوسی بپردازیم، ابتدا با نوع دیگری از توان را با نام توان مختلط معرفی نمائیم:

► $S = P + jQ$



در واقع بین توان های P و Q و S که رابطه هندسی زیر برقرار است:



$$\rightsquigarrow \begin{cases} Q = |S| \sin\theta \\ P = |S| \cos\theta \end{cases}$$

$$S = P + jQ = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} j V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_i)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \left(\cos(\phi_v - \phi_i) + j \sin(\phi_v - \phi_i)\right)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{i(\phi_v - \phi_i)}$$

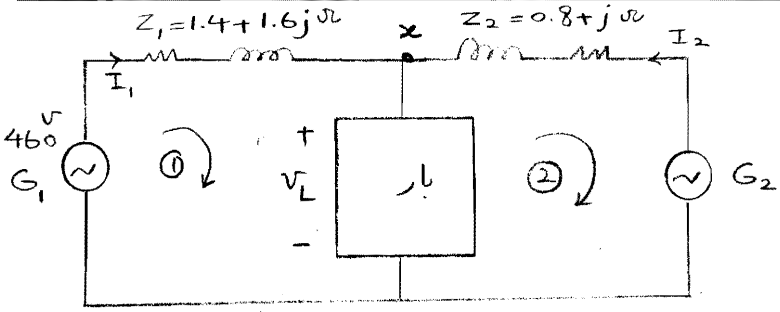
$$= \frac{1}{2} V_m I_m \angle \phi_v - \phi_i$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{i\phi_v} \cdot e^{-i\phi_i} = V_{rms} \bar{I}_{rms} = \frac{1}{2} V_m \bar{I}_m$$

► $\theta = \phi_v - \phi_i$ فاکتور توان $= \cos\theta = PF$ (power factor)

با دانستن مقدار فاکتور توان، مقدار زاویه توان را نمی توان بدست آورد زیرا $\cos\theta = \cos -\theta$

• مثال ۱۲: در مدار شکل زیر در شرایطی که بار مورد نظر توان 100^{KW} را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز دریافت می کند، منبع G_1 با ولتاژ دو سر موتور 460^V، توان 5KW را در ضریب قدرت 0.8 پس فاز تولید می کند. در این شرایط V_L، V_2 و نیز توان حقیقی و موهومی تولیدی منبع G_2 را بیابید.



هر دو توان بین ۲ از هستند سه زوایا را مثبت در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} V_{1rms} = 460 \\ \cos\theta_1 = 0.8 \\ P_1 = 5KW \end{cases} \rightsquigarrow P_1 = |S|\cos\theta_1 = |V_{1rms}\, I_{rms}|\cos\theta_1$$

$$= |V_{1rms}|\,\underbrace{|\bar{I}_{1rms}|}_{=|I_{1rms}|}\cos\theta_1$$

$$\rightsquigarrow |I_{1rms}| = \frac{P_1}{|V_{1rms}|\cos\theta_1} = \frac{5000}{460 \cdot 0.8} = 13.6^A$$

$$\varphi_v - \varphi_i = \cos^{-1} 0.8$$

$$\rightsquigarrow \varphi_i = \varphi_v - \cos^{-1} 0.8$$

φ_v را صفر فرض می‌کنیم :

$$\rightsquigarrow \varphi_i = 0 - 36.86^\circ = -36.86^\circ$$

$$\rightsquigarrow I_1 = 13.6 \angle -36.86^\circ = 10.9 - 8.15j$$

در KVL حلقه 1 : $-460 + (1.4 + 1.6j)(10.9 - 8.15j) + V_L = 0$

$$\rightsquigarrow V_{L_{rms}} = 431.7 - 6.03i \rightsquigarrow V_L = 431.7\sqrt{2} \angle -0.8^\circ$$

$$\begin{cases} P_L = 10KW \\ \cos\theta_L = 0.8 \end{cases} \rightsquigarrow |I_L|_{rms} = \frac{P_L}{|V_{L_{rms}}|\cos\theta_L} = \frac{10000}{431.7 \times 0.8} = 28.95^A$$

$$\varphi_{vL} - \varphi_{iL} = \cos^{-1} 0.8 \rightsquigarrow \varphi_{iL} = -0.8 - \cos^{-1} 0.8 = -37.66^\circ$$

$$\rightsquigarrow I_L = 28.95 \angle -37.66^\circ$$

$$KCl:\ I_1 + I_2 = I_L \rightsquigarrow I_{2_{rms}} = I_{L_{rms}} - I_{1_{rms}} = 28.95\angle{-37.66^\circ} - 13.6\angle{-36.86^\circ}$$

x در

$$= 15.35\angle{-38.36^\circ}$$

$$-V_2 + I_{2rms}(0.8 + j) + V_{Lrms} = 0$$

$$\rightsquigarrow V_{2rms} = 15.35\angle{-38.36^\circ}(0.8 + j) + 431.7\angle{-0.8^\circ} = 450.88\angle{-0.19^\circ}$$

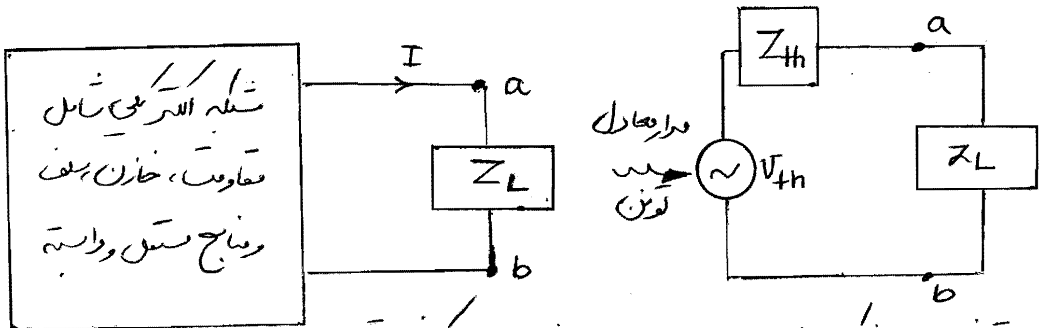
$$S_2 = V_{2rms}\,\bar{I}_{2rms} = (450\angle{-0.19^\circ})(15.35\angle{+38.36^\circ}) = 6921\angle{38.17^\circ}$$

$$= \underbrace{5441.16}_{P_2} + j\underbrace{4277.16}_{Q_2}$$

بحث مربوط به حالت دائمی سینوسی را با یک قضیه مهم به پایان می‌بریم.

• قضیه حداکثر توان انتقالی:

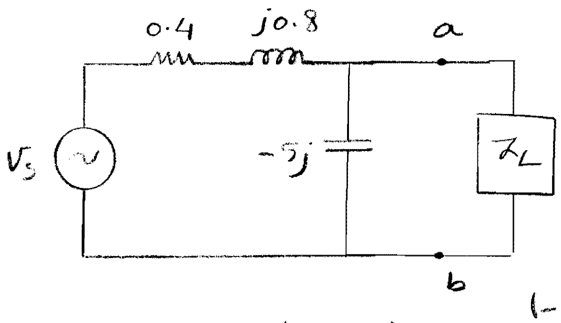
فرض کنید یک شبکه الکتریکی با متعلقات آن به یک بار الکتریکی با امپدانس Z_L متصل شده باشد:



اگر مدار معادل تونن این شبکه را از دو سر a و b محاسبه کنیم، حداکثر توان انتقالی از شبکه به بار Z_L زمانی اتفاق می‌افتد که:

► $Z_{th} = \bar{Z}_L$

• مثال ۱۳: در مدار الکتریکی زیر حداکثر توان انتقالی به Z_L به ازای چه امپدانس باری اتفاق می‌افتد؟



برای محاسبه Z_{th} اثر منابع مستقل را حذف می‌کنیم.

$$Z_{th} = (-0.5j) \parallel (0.4+j0.8) = \frac{(-0.5j)(0.4+j0.8)}{-0.5j+0.4+j0.8} = 0.4-0.8j$$

$$\rightsquigarrow Z_L = \bar{Z}_{th} = 0.4+0.8j$$

پیوست ۱

پیوست ۲

پیوست ۳

❶ روش کرامر در حل دستگاه معادلات خطی:

در درس مدار الکتریکی اغلب با دستگاه معادلات جبری سر و کار داریم.این معادلات معمولاً به شکل ذیل ارائه می شوند.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

برای تعیین n مجهول $x_1, x_2, \dots, x_n$ به روش زیر عمل می کنیم:

با توجه به معادلات فوق داریم:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

در این حالت ماترسی را به فرم زیر می نویسیم:

$$\boxed{\mathbf{AX} = \mathbf{B}}$$

اکنون برای محاسبه هر یک از مجهولات بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{aligned}$$

که در آن Δ دترمینان ماتریس A و Δ_k دترمینان ماتریسی است که از جایگزاری ستون k ام ماتریس A با ماتریس B بدست می آید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

2 آشنایی با توابع مهم:

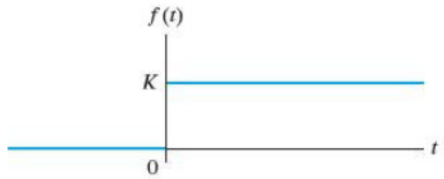
تابع پله

گاهی با توابعی که در مبدا ناپیوستگی و یا پرش دارند روبرو هستیم. برای مثال از بحث های قبلی می دانیم که رفتار حالت گذرای عملیات کلید زنی یک تغییر ناگهانی در جریان و یا ولتاژ ایجاد می کند. این ناپیوستگی را بطور ریاضی با توابع پله و ضربه نشان می دهیم.

شکل زیر تابع پله را نشان می دهد که در $t<0$ برابر صفر می باشد. نماد تابع پله $Ku(t)$ می باشد. بنابریان تعریف ریاضی **تابع پله** برابر است با:

$$Ku(t) = 0, \quad t < 0,$$
$$Ku(t) = K, \quad t > 0.$$

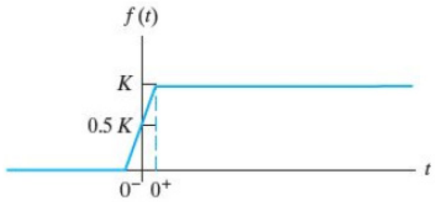
اگر $K=1$ باشد تابع پله فوق به عنوان **تابع پله واحد** نامیده می شود.



تابع پله در $t=0$ تعریف نمی شود. در شرایطی که نیاز به تعریف گذر 0^- به 0^+ هستیم، فرض می کنیم که این تابع خطی است و داریم:

$$Ku(0) = 0.5K.$$

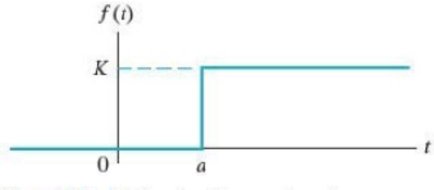
مانند قبل از مقادیر 0^- و 0^+ برای به ترتیب نشان دادن مقادیر سمت چپ و راست مبدا استفاده می کنیم. شکل زیر گذر خطی 0^- به 0^+ را نشان می دهد.



ناپیوستگی ممکن است در زمانی غیر از $t=0$ رخ دهد. بطور مثال در کلید زنی های سری. تابع پله ای که در $t=a$ رخ می دهد بصورت زیر بیان می شود:

$$Ku(t-a) = 0, \quad t < a,$$
$$Ku(t-a) = K, \quad t > a.$$

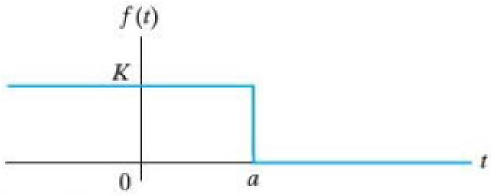
اگر $a>0$ باشد، پله در سمت راست مبدا و اگر $a<0$ باشد پله در سمت چپ مبدا رخ می دهد. شکل زیر معادله فوق را نشان می دهد. توجه کنید که تابع پله برای وقتی که آرگومان $t-a$ منفی باشد صفر و برای وقتی که آرگومان آن مثبت باشد K خواهد بود.



تابع پله برای وقتی که به فرم $Ku(a-t)$ تعریف شود در $t<k$ برابر K خواهد بود. بنابراین:

$$Ku(a-t) = K, \quad t < a,$$
$$Ku(a-t) = 0, \quad t > a.$$

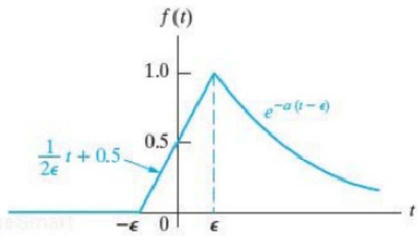
برای حالتی که $a<0$ باشد ناپیوستگی در سمت چپ مبدا اتفاق می افتد. شکل زیر معادله فوق را نشان می دهد.

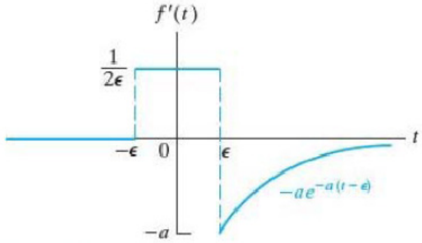


یکی از کاربردهای تابع پله استفاده آن در نوشتن روابط ریاضی توابعی که در محدوده محدودی غیر صفر می باشند و در زمان های مثبت تعریف شده اند، است. یک مثال مفید در تحلیل مدار یک پالس با عرض محدود می باشد که با استفاده از جمع دو تابع پله می توان آن را ایجاد کرد. تابع $K[u(t-1)-u(t-3)]$ دارای مقدار محدود K در بازه $1<t<3$ و مقدار صفر در خارج از این بازه می باشد بنابراین این تابع یک پالس با عرض محدود می باشد که مقدار آن K است و در $t=1$ شروع و در $t=3$ از بین می رود.

تابع ضربه

وقتی که ناپیوستگی محدود در یک تابع وجود دارد مشتق تابع در نقطه ای که ناپیوستگی وجود دارد تعریف نشده است. مفهوم تابع ضربه امکان تعریف مشتق تابع در نقاط ناپیوستگی را فراهم می آورد و بنابراین در این نقاط می توان تبدیل لاپلاس را نیز بکار برد. یک **ضربه**، سیگنالی است که اندازه بینهایت و دوره تناوب صفر دارد. این سیگنالها در طبیعت موجود نیستند و تنها مدل ریاضی آنها مورد استفاده قرار می گیرد. ولتاژ ها و جریان های ضربه ای در تحلیل مدار هم به خاطر عملیات کلید زنی و هم بخاطر حضور منبع تغذیه ضربه ای بوجود می آیند. این شرایط را در فصل سیزدهم بررسی خواهیم کرد اما در این بخش بر روی تعریف عمومی تابع ضربه تمرکز می کنیم. برای تعریف مشتق یک تابع در نقطه ناپیوستگی، برای حالت $\varepsilon \to 0$ یک ناپیوستگی ناگهانی در مبدا بوجود می آید. وقتی که از یک تابع مشتق می گیریم، مشتق بین $-\varepsilon$ و $+\varepsilon$ درنقطه $\frac{1}{2}\varepsilon$ ثابت و برای $t>\varepsilon$ مشتق برابر $-ae^{-(t-\varepsilon)}$ می باشد. شکل زیر این نکته را به صورت شماتیک نشان می دهد. با میل ε به سمت صفر مقدار $f'(t)$ در بازه بین $\pm\varepsilon$ به سمت بینهایت میل می کند. همچنین مساحت زیر $f'(t)$ در بازه بین $\pm\varepsilon$ با میل $\varepsilon \to 0$ ثابت می ماند. در این مثال این مساحت واحد می باشد.





با میل $\varepsilon \to 0$ می گوییم که تابع در بازه بین $\pm\varepsilon$ به مقدار **تابع ضربه واحد** با نماد $\delta(t)$ میل می کند. بنابراین مشتق تابع $f(t)$ با میل ε به سمت صفر، در مبدا به تابع ضربه واحد میل می کند:

$$f'(0) \to \delta(t) \quad \text{as } \epsilon \to 0.$$

اگر مساحت زیر تابع ضربه غیر از واحد باشد، تابع ضربه را با $K\delta(t)$ نمایش می دهند که در آن K این مساحت می باشد. K را اغلب قدرت تابع ضربه می نامند.

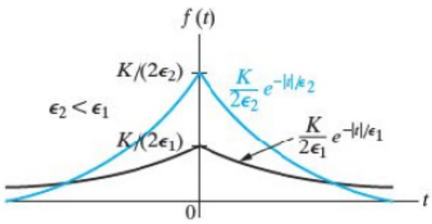
بطور خلاصه، یک تابع ضربه از یک تابع با پارامتر متغیر ساخته شده است که این پارامتر به سمت صفر میل می کند. تابع با پارامتر متغیر باید سه مشخصه زیر را هنگامی که پارامتر به سمت صفر میل می کند دارا باشد:

۱. اندازه آن بینهایت باشد.
۲. دوره تناوب تابع به سمت صفر میل کند.
۳. مساحت زیر تابع با پارامتر متغیر با تغییر پارامتر ثابت است.

بسیاری از توابع با پارامتر متغیر خصوصیات مختلفی خصوصیات فوق را دارا می باشند. در شکل ۸.۱۲ از یک تابع خطی $f(t) = 0.5\frac{t}{\varepsilon} + 0.5$ استفاده کردیم. مثال دیگر این نوع توابع تابع نمایی می باشد:

$$f(t) = \frac{K}{2\epsilon}e^{-|t|/\epsilon}.$$

با میل ε به سمت صفر تابع نمایی در مبدا به سمت بینهایت میل می کند و همزمان در یک بازه زمانی بسیار کوچک به سمت صفر کاهش می یابد. شکل زیر مشخصه این تابع را برای زمانی که $\varepsilon \to 0$ نشان می دهد.



برای نشان دادن تابع ضربه که با $\varepsilon \to 0$ ایجاد می شود بایستی مساحت زیر تابع را مستقل از مقدار ε نشان دهیم. بنابراین:

$$\text{مساحت} = \int_{-\infty}^{0} \frac{K}{2\epsilon}e^{t/\epsilon}dt + \int_{0}^{\infty} \frac{K}{2\epsilon}e^{-t/\epsilon}dt$$
$$= \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{t/\epsilon}}{1/\epsilon}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{-t/\epsilon}}{-1/\epsilon}\bigg|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K,$$

که نشان می دهد که مساحت زیر این منحنی ثابت و برابر K است. بنابراین با میل ε به سمت صفر داریم: $f(t) \to K\delta(t).$

از نظر ریاضی، تابع ضربه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K;$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

معادله های فوق نشان می دهند که مساحت زیر تابع ضربه ثابت است. این مساحت بیانگر قدرت تابع ضربه است. همچنین تابع ضربه در هر نقطه ای بجز $t=0$ صفر است. تابع ضربه ای که در زمان $t=a$ اتفاق می افتد را با $K\delta(t-a)$ نشان می دهیم.

خصوصیت مهم تابع ضربه **خاصیت جابجایی** آن است که بصورت زیر نشان داده می شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a),$$

که در آن تابع $f(t)$ در $t=a$ پیوسته فرض می شود. معادله فوق نشان می دهد که تابع ضربه هرچیزی را بجز مقدار $f(t)$ در $t=a$ جابجا می کند. درستی شکل زیر از دقت به اینکه $\delta(t-a)$ در هر نقطه ای بجز $t=a$ صفر است ناشی می شود و سپس انتگرال را می توان به شکل زیر نوشت:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t-a)\,dt.$$

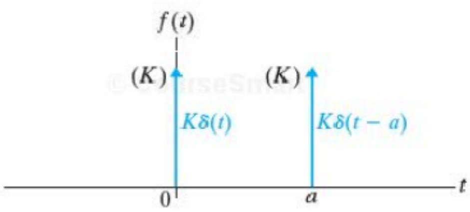
اما از آنجا که تابع $f(t)$ در a پیوسته است، مقدار آن با $t \to a$ برابر $f(a)$ خواهد شد، بنابراین:

$$I = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(a)\delta(t-a)\,dt = f(a)\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a)\,dt$$
$$= f(a).$$

از خاصیت جابجایی تابع ضربه برای بدست آوردن تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم:

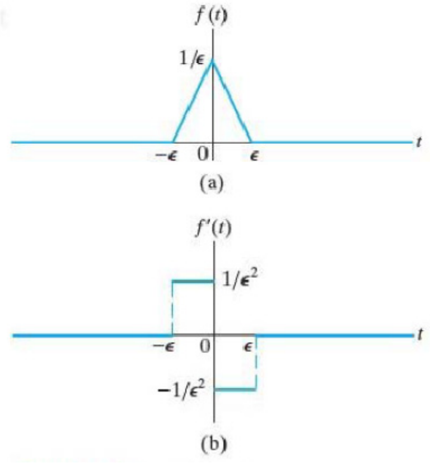
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt = 1,$$

که زوج تبدیل لاپلاس مهمی در تحلیل مدار می باشد.



همچنین می توانیم مشتق تابع ضربه را تعریف نموده و تبدیل لاپلاس این مشتقات را نیز محاسبه کنیم. در اینجا ابتدا مشتق اول را محاسبه کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را بدست می آوریم. در نهایت با استفاده از این نتایج مشتقات مرتبه بالاتر را هم بدست می آوریم.

تابعی که در شکل ۱۲.۱۲ الف نشان داده شده در $\varepsilon \to 0$ تابع ضربه را بوجود می آورد. شکل زیرم قسمت دوم مشتق این تابع ضربه-ساز را که در $\varepsilon \to 0$ به عنوان مشتق تابع ضربه $[\delta'(t)]$ می باشد نشان می دهد. مشتق تابع ضربه گاهی با نام تابع لحظه ایو یا قرین واحدنامیده می شود.


f (t)
1/ϵ
t
−ϵ
0
ϵ
(a)
f′(t)
1/ϵ²
t
−ϵ
0
ϵ
−1/ϵ²
(b)

❸ مقادیر استاندارد المانهای مدار:

Resistors (5% tolerance) [Ω]

10	100	1.0 k	10k	100k	1.0 M
	120	1.2 k	12 k	120 k	
15	150	1.5 k	15 k	150 k	1.5 M
	180	1.8 k	18 k	180 k	
22	220	2.2 k	22 k	220 k	2.2 M
	270	2.7 k	27 k	270 k	
33	330	3.3 k	33 k	330 k	3.3 M
	390	3.9 k	39 k	390 k	
47	470	4.7 k	47 k	470 k	4.7 M
	560	5.6 k	56 k	560 k	
68	680	6.8 k	68 k	680 k	6.8 M

Capacitors

10 pF	22 pF	47 pF
100 pF	220 pF	470 pF
0.001 μF	0.0022 μF	0.0047 μF
0.01 μF	0.022 μF	0.047 μF
0.1 μF	0.22 μF	0.47 μF
1 μF	2.2 μF	4.7 μF
10 μF	22 μF	47 μF
100 μF	220 μF	470 μF

Inductors

Value	Current Rating
10 μH	3 A
100 μH	0.91 A
1 mH	0.15 A
10 mH	0.04A