

بسمه تعالی

آزمون سوم المپیاد فیزیک (تابستان 96)

مدت : 4 ساعت

96/5/26

مسئله ی 1) یک غشای خیلی نازک کروی نارسا با کشش سطحی γ در نظر بگیرید، مثل یک حباب، که در محیط

خلأ قرار دارد. حباب دارای بار الکتریکی Q است که به طور یکنواخت روی سطح آن پخش شده است.

آ) نیروی کل الکتریکی را که بر یک نیم کره وارد می شود به صورت تابعی از شعاع حباب، R ، بیابید.

ب) شعاع تعادل حباب را حساب کنید.

ج) حال فرض کنید داخل حباب n مول گاز ایده آل در دمای T قرار دارد و بسیار رقیق است. اولین تصحیح بر شعاع

تعادل را حساب کنید.

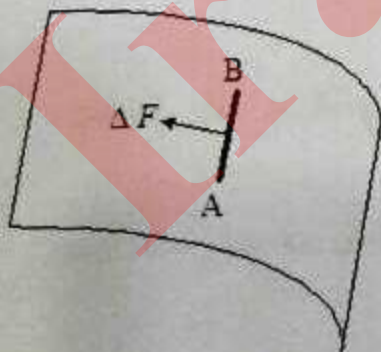
توجه: عناصر واقع بر سطح تماس دو محیط یکدیگر را با نیرویی می کشند. فرض کنید سطح نشان داده شده در شکل مقابل

سطح جدایی بین دو محیط است، مثلاً یک طرف صفحه آب و طرف دیگر آن هوا قرار دارد. عناصر واقع در سمت چپ پاره

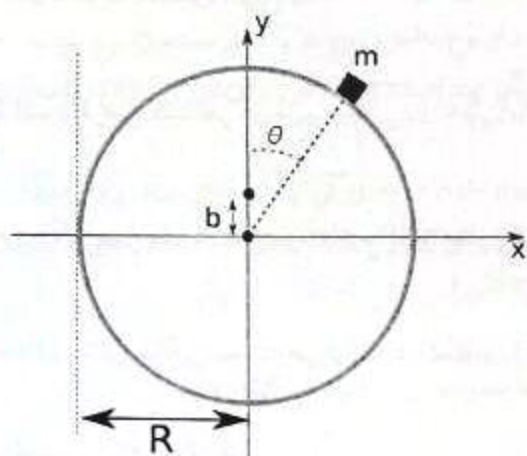
خط AB به طول ΔL عناصر سمت راست را مطابق شکل با نیرویی می کشند که با طول AB متناسب است، به طوری که

$\Delta F = \gamma \Delta L$ به کمیت γ ضریب کشش گفته می شود که واحد آن نیوتن بر متر است.

(5 نمره)



مسئله ی 2) دو سیم نارسانا که می توان آنها را باردار کرد، با طول بی نهایت در نظر بگیرید که با محور Z موازی هستند. یک سیم در $x = 0, y = b$ و دیگری در $x = 0, y = 0$ صفحه ی xy را قطع می کند. یک سطح



استوانه ای و نازک به شعاع R دور سیم ها قرار دارد که محورش

منطبق بر محور Z است. شتاب گرانش g و جهت آن به سمت

منفی محور y است. ذره ای به جرم m و بار مثبت q در بالای

استوانه، یعنی در نقطه ی $x = 0, y = R, z = 0$ قرار دارد.

ذره ابتدا ساکن است. به ذره سرعت اولیه ی ناچیزی می دهیم

تا از حالت تعادل خارج شود و سقوط کند. در هر لحظه، زاویه ی بین خط واصل بین ذره و مبدأ مختصات با

محور y را مطابق شکل با θ نشان می دهیم. در تمام قسمت ها فرض کنید $\frac{b}{R}$ کوچک است.

الف) ابتدا فرض کنید سیم ها بار ندارند. زاویه ای را بیابید که در آن ذره از سطح جدا می شود. همچنین اندازه ی

سرعت ذره در لحظه ی جدایی را به دست آورید.

ب) حال فرض کنید سیم بالایی چگالی بار خطی بکنواخت $+\lambda$ ، و سیم پایینی چگالی بار خطی بکنواخت

$-\lambda$ دارد. میدان الکتریکی کل را، در راستای شعاع استوانه و عمود بر شعاع، در نقطه ای روی سطح که با زاویه ی

θ مشخص می شود، تا اولین مرتبه ی ناصفر $\frac{b}{R}$ بیابید. فرض کنید استوانه اثری بر میدان الکتریکی سیم ها ندارد.

پ) اولین تصحیح زاویه‌ی جدایی نسبت به پاسخ قسمت الف را بیابید. همچنین اولین تصحیح سرعت ذره در لحظه‌ی جدایی را حساب کنید (دقت کنید که خود زاویه مطلوب است، نه صرفاً کسینوس آن. همچنین، خود سرعت مطلوب است، نه مربع آن).

ت) اکنون فرض کنید هر دو سیم چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$ دارند. ابتدا فرض کنید b صفر است (که در واقع معادل این است که یک سیم داریم که بر محور Z منطبق است و چگالی بار $+2\lambda$ دارد). فرض کنید که ذره به اندازه‌ی کافی سنگین است، طوری که در لحظه‌ی ابتدایی، روی سطح می‌ماند. زاویه‌ی جدایی ذره از سطح را بیابید. سرعت ذره در لحظه‌ی جدایی را حساب کنید.

ث) حالا فرض کنید $\frac{b}{R}$ ناصفر و طبق معمول کوچک است. اولین تصحیح زاویه‌ی جدایی و سرعت لحظه‌ی جدایی را نسبت به پاسخ قسمت قبل به دست آورید.

(10 نمره)

مسئله ۳ - این مسئله از دو قسمت مجزا تشکیل شده است.

(الف)

در یک دنیای فرضی برهم کنشی وجود دارد که در آن ذراتی با سه رنگ مختلف شرکت دارند که به ترتیب آبی (B)، قرمز (R) و سبز (G) نام دارند. این برهم کنش از نوع عکس مجذوری است و در آن نیرویی که هر دو بار به هم وارد می کنند متناسب با حاصل ضرب بارها و در امتداد خط واصل بین آنهاست. مقدار بار رنگی هر ذره با عددی مثبت بیان می شود. در این نوع برهم کنش نیروی بین دو بار همنام از نوع دافعه و بین دو بار غیر همنام از نوع جاذبه است. برای نشان دادن نیروی رنگی وارد بر بارها سه نوع میدان رنگی نیاز است: میدان آبی برای نیروی وارد به واحد بار آبی، میدان قرمز برای بار قرمز و سبز برای سبز.

فرض کنید در یک آرایش از بارها بار آبی به بزرگی B_i در محل r_{Bi} ، بار قرمز به بزرگی R_j در محل r_{Rj} ، و بار سبز به بزرگی G_k در محل r_{Gk} قرار دارند، که هر کدام از این اندیس ها یکی از انواع بارها را می شمارد. روابطی برای محاسبه میدانهای آبی، قرمز و سبز در نقطه دلخواه r بنویسید. (۳ نمره)

(ب)

در یک نظریه دینامیکی دو متغیر دینامیکی مختلط $f_1(t)$ و $f_2(t)$ به صورت زیر با هم برهم کنش دارند

$$\dot{f}_i = iH_{ij}f_j$$

که در آن

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & a \\ a & -E_1 \end{pmatrix}$$

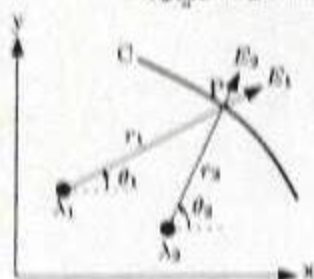
سه مشاهده پذیر فیزیکی زیر نیز داده شده اند

$$A = |f_1|^2 - |f_2|^2 \quad B = f_1^* f_2 + f_2^* f_1 \quad C = -if_1^* f_2 + if_2^* f_1$$

با فرض آن که $f_1(0) = 1$ و $f_2(0) = 0$ هر کدام از سه مشاهده پذیر فوق را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (۷ نمره)

راهنمایی: شرایط برقراری حلی به صورت $f_i = A_i e^{iEt}$ را تحقیق کنید. برای E دو جواب به دست می آید و برای هر جواب نسبت A_1/A_2 معین می شود. سپس به دلیل خطی بودن معادله می توان ترکیبی خطی از جوابهای یاد شده را به عنوان حل کلی در نظر گرفت و آن را با شرایط اولیه داده شده تطبیق داد.
توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

لطفاً نتایج را تا جایی که ممکن است ساده کنید.



(۴)

محل برخورد دو خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت λ_1 و λ_2 و موازی محور x با صفحه‌ی $x-y$ در شکل نشان داده شده است.

فرض کنید منحنی C یکی از خطوط نیرو در صفحه‌ی $x-y$ و نقطه‌ی P نقطه‌ی دلخواهی روی آن باشد. r_1 و r_2 فاصله خط بارها تا نقطه‌ی P و نیز θ_1 و θ_2 زاویه‌ی r_1 و r_2 با جهت مثبت محور x است. همچنین می‌دانیم میدان ناشی از خط بارها در نقطه‌ی P ، به صورت $E_i = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0 r_i}$ است.

(آ) اگر معادله‌ی این خط نیرو به صورت: ثابت $= \lambda_1 f(r_1, \theta_1) + \lambda_2 f(r_2, \theta_2)$ نوشته شود

$f(r_i, \theta_i)$ را به دست آورید.

مطابق شکل فرض کنید خط بارها دارای چگالی

بار خطی یکنواخت $\pm \lambda$ هستند و از نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ می‌گذرند.

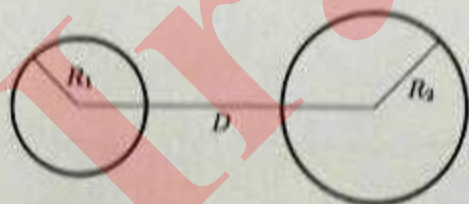


(ب) معادله‌ی (مکان هندسی) خط نیرویی که از نقطه‌ی P می‌گذرد را در مختصات دکارتی

به دست آورید.

(پ) معادله‌ی سطح هم‌پتانسیل به پتانسیل V_0 را در مختصات دکارتی به دست آورید.

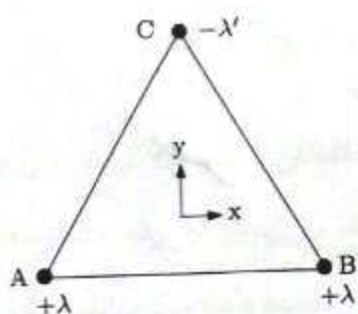
اکنون دو پوسته‌ی رسانای نامتناهی استوانه‌ای موازی، به شعاع‌های R_1 و R_2 و به فاصله‌ی D از یکدیگر در نظر بگیرید که محل برخورد آن‌ها با صفحه‌ای که بر آن‌ها عمود است در شکل نشان داده شده است.



(ت) اگر پوسته‌ها به اختلاف پتانسیل V وصل شوند تشکیل یک خازن می‌دهند. اگر $\pm \lambda$

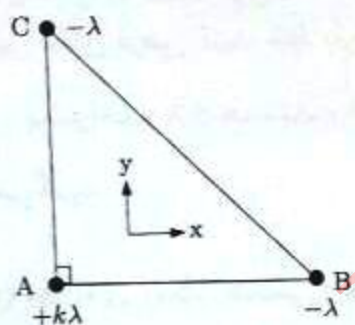
بار الکتریکی موجود روی واحد طول آن‌ها باشد آنگاه رابطه‌ی بین ظرفیت واحد طول این

خازن، C ، و بار واحد طول به صورت $\lambda = CV$ خواهد بود. C را به دست آورید. (۳ نمره)



در شکل، محل برخورد سه خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت $+λ$ ، $+λ$ و $-λ'$ که موازی محور z اند با صفحه‌ی $x-y$ نشان داده شده است. این نقاط بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع واقع‌اند و $λ' < 2λ$.

ث) بزرگترین زاویه‌ی هر یک از دو خط نیرویی که امکان دارد از A به C بروند با AC در محل A چقدر است؟ منظور این است که خطوط نیرویی که با زاویه‌ی بزرگ‌تر از مقدار خواسته شده نسبت به AC از خط بار واقع در A خارج می‌شوند به بینهایت می‌روند. (۲ نمره)



در شکل، محل برخورد سه خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت $-λ$ ، $-λ$ و $+kλ$ که موازی محور z اند با صفحه‌ی $x-y$ نشان داده شده است. این نقاط بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاساقین قائم‌الزاویه واقع‌اند.

ج) به ازای چه مقداری از ضریب k هیچ یک از خطوط میدانی که از خط بار واقع در A به سمت خطوط بار واقع در B و C می‌روند از داخل مثلث نمی‌گذرند. (۱ نمره)

راهنمایی برای قسمت آ): یک راه برای به دست آوردن $f(r_i, \theta_i)$ این است که اگر قطعه‌ی کوچکی از منحنی C در نقطه‌ی P مانند ds اختیار کنیم، میدان الکتریکی نباید تصویری عمود بر ds داشته باشد. به جای حل معادله دیفرانسیل می‌شود از روش هندسی استفاده کرد.