فصل ششم: انتگرال

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: خیلی خوب

سبز: متوسط

قرمز: به این قسمت مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول به آن مبحث مسلط نیستید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

انتگرال

- **۱. قضایای انتگرال معین** (آبی / سبز / قرمز)
  - رابطه‌ی انتگرال معین و مساحت
  - قضایای اولیه (انتگرال مجموع وتفاضل و ....)
  - انتگرال توابع شامل قدرمطلق و جزءصحیح
- **۲. تابع اولیه و انتگرال نامعین** (آبی / سبز / قرمز)
  - تابع اولیه به عنوان ضدمشتق و فرمول‌های اولیه
  - ساده‌سازی و انتگرال‌گیری
  - قضیه‌ی تعویض متغیر
- **۳. قضایای بنیادی انتگرال** (آبی / سبز / قرمز)
  - قضیه‌ی بنیادی اول (مشتق انتگرال معین)
  - قضیه‌ی بنیادی دوم (محاسبه‌ی انتگرال معین با تابع اولیه)
- **۴. کاربردهای انتگرال معین** (آبی / سبز / قرمز)
  - محاسبه‌ی سطح زیر نمودار

تعداد سؤالات فصل
۵۴
تعداد سؤالات سراسری
۴۲
تعداد سؤالات سایر آزمون‌ها
۱۲

از فصل ششم (انتگرال) به‌طور متوسط در هر سال ۲ تست در کنکورهای سه سال اخیر طرح شده است.

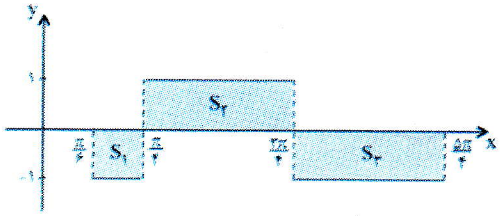
در این فصل ۵۴ تست از انتگرال آورده‌ایم. یعنی برای هر تست کنکور در حدود ۲۷ تست را تمرین خواهید کرد.

مؤلف درسنامه، تنظیم تست‌ها و تیپ‌بندی‌های این فصل: فرهاد حامی

۱. قضایای انتگرال معین

◆ رابطه‌ی انتگرال معین و مساحت ◆

انتگرال معین تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ برابر مساحت علامت‌دار محصوربین تابع f با محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ است، یعنی در هر بازه‌ای که تابع f بالای محور xهاست، حاصل انتگرال‌معین با مساحت درآن بازه برابر و در هر بازه‌ای که تابع f پایین محور xهاست، حاصل انتگرال‌معین با قرینه‌ی مساحت درآن بازه برابراست.



به عنوان مثال اگر نمودار تابع f در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right]$ شکل مقابل باشد، آنگاه

حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)dx$ برابراست با:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)dx=-S_1+S_2-S_3=-\left(\frac{\pi}{12}\times 1\right)+\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)-\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)=\frac{-\pi}{12}$$

◆ ویژگی‌های اولیه (قضایای اولیه) ◆

قضیه اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیردر بازه‌ی $[a\,,b]$ باشند آنگاه:

(۱) $\int_a^a f(x)dx=0$

(۲) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

(۳) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(۴) $\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(۵) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

(۶) اگر $f(x)\le g(x)\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

(۷) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

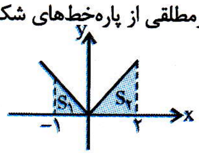
◆ انتگرال معین توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح ◆

۱ انتگرال توابع شامل قدرمطلق: برای محاسبه‌ی انتگرال توابع شامل قدر مطلق، باید قدر مطلق را در فاصله‌ی بین حدود انتگرال و ریشه‌های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم و سپس تک تک انتگرال‌ها را محاسبه کنیم.

(۱) $\int_{-1}^{2}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_0^2 (x)dx=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+(2-0)=\frac{5}{2}$

☑ نکته‌ی (۱): در بعضی از موارد اگر نمودار قدرمطلقی از پاره‌خط‌های شکسته تشکیل شده باشد می‌توانیم با رسم نمودار حاصل انتگرال را بیابیم.

(۲) $\int_{-1}^{2}|x|dx=S_1+S_2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$



۲ انتگرال معین توابع شامل جزء صحیح: در محاسبه‌ی این‌گونه انتگرال‌ها باید حدود انتگرال را به گونه‌ای در نظر بگیریم که برای تابع‌تحت انتگرال در هر یک از فاصله‌ها تنها یک مقدار صحیح بدست آید.

(۱) $\int_0^1 [2x]dx=$

$$0<x<1\rightarrow 0<2x<2\Rightarrow\begin{cases}0<2x<1\rightarrow[2x]=0\rightarrow 0<x<\frac{1}{2}\\ 1<2x<2\rightarrow[2x]=1\rightarrow\frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

و

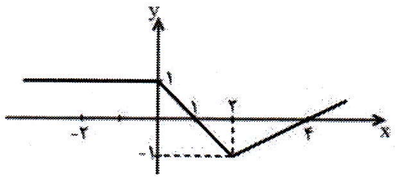
$$\int_0^1[2x]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(0)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1)dx=0+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

☑ نکته‌ی (۲): در بعضی از موارد که رسم تابع $y=[f(x)]$ ساده باشد، با رسم نمودار حاصل انتگرال را می‌یابیم.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱

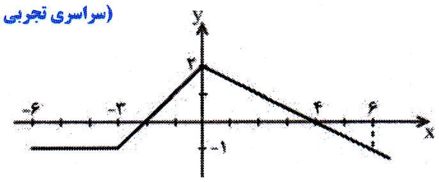
۱۰۰۶- شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل $\int_{-2}^{4}f(x)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۱)



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

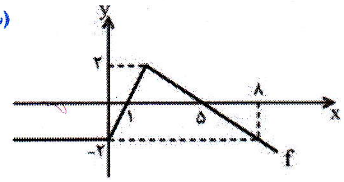
۱۰۰۷– شکل مقابل نمودار تابع f است. $\int_{-۶}^{۶} f(x)dx$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۴)



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

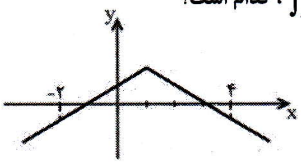
۱۰۰۸– شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\int_{۰}^{۸} f(x)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۷)



۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

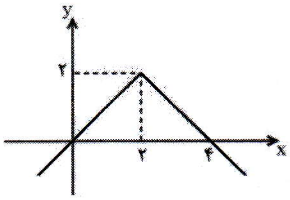
۱۰۰۹– با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲ - |x - ۱|$، حاصل انتگرال معین $\int_{-۲}^{۴} f(x)dx$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۹)



۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$

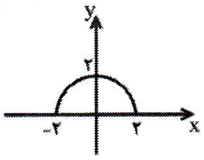
۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۰۱۰– با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_{۰}^{۴} (۲ - |x - ۲|)dx$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۹۲)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

۱۰۱۱– با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_{-۲}^{۲} \sqrt{۴ - x^۲}\,dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۲)



۱) $۲\pi - ۲$ ۲) $\pi + ۲$

۳) ۲π ۴) ۴π

تیپ ۲

۱۰۱۲– حاصل $\int_{-۲}^{۲} (۲x + |x|)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۱۳– اگر $f(x) = |x| + |x + ۱|$، حاصل $\int_{-۱}^{۲} f(x)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷

تیپ ۳

۱۰۱۴– حاصل $\int_{-۲}^{۲} (۲ - [x])dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰۱۵– حاصل $\int_{-۲}^{۱} [x]x\,dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۶)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

۱۰۱۶– حاصل $\int_{-۲}^{۲} (x + [x])dx$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۸)

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۱۷– اگر $f(x) = |x| - [x]$، آنگاه حاصل $\int_{-۱}^{۲} f(x)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۱۰۱۸– اگر $f(x) = (x + |x|)[x]$ آنگاه $\int_{-۱}^{۲} f(x)dx$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. تابع اولیه و انتگرال نامعین

- تابع اولیه به عنوان ضدمشتق و فرمول‌های اولیه
- ساده‌سازی و انتگرال‌گیری

◆ تابع اولیه به عنوان ضدمشتق و فرمول‌های اولیه ◆

۱) تابع اولیه به عنوان ضد مشتق: عمل انتگرال‌گیری (یافتن تابع اولیه) ضد عمل مشتق‌گیری است. به عبارت دیگر اگر $F(x)$ را تابع اولیه (ضد مشتق) $f(x)$ در نظر بگیریم، آنگاه $F'(x)=f(x)$ و می‌نویسیم:

$$\int f(x)dx=F(x)+c \quad \text{یا} \quad \int f'(x)dx=f(x)+c$$

➢ نتیجه‌ی (۱): مشتق انتگرال نامعین هر تابع، تابع تحت انتگرال (داخل انتگرال) را می‌دهد. به عبارت دیگر:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x)$$

■ مثال: اگر $\int f(x)dx=\tan x+c$ ، آنگاه $f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

◀ حل: مشتق عبارت سمت راست عبارت داخل انتگرال را می‌دهد بدون dx.

$$f(x)=۱+\tan^۲ x\rightarrow f'(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۲(۱)(۲)=۴$$

■ مثال: اگر $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^۲+۱}}=A(x^۲+۱)^k+c$ باشد، A و k را بیابید.

◀ حل: مشتق عبارت سمت راست عبارت داخل انتگرال را می‌دهد، پس ازسمت راست مشتق گرفته و با عبارت داخل انتگرال بدون dx برابر قرار می‌دهیم:

$$Ak(۲x)(x^۲+۱)^{k-۱}=x(x^۲+۱)^{\frac{-۱}{۲}}\Rightarrow k-۱=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲Ak=۱\Rightarrow A=۱$$

➢ نتیجه‌ی (۲): هر تابع دارای بی‌شمار تابع اولیه است که اختلاف آنها در یک عدد ثابت است.

به عنوان مثال اگر $x^۲+۴x$ یک تابع اولیه‌ی تابع $f(x)$ باشد آنگاه $(x+۲)^۲$ نیز یک تابع اولیه‌ی $f(x)$ است زیرا تفاضل آن‌ها عدد ثابت ۴ است.

➢ نتیجه‌ی (۳): ازآنجایی که $(F(ax+b))'=aF'(ax+b)$ با فرض $F'(x)=f(x)$ خواهیم داشت:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{۱}{a}F(ax+b)+c$$

۲) فرمول‌های اولیه: با استفاده از فرمول‌های مشتق می‌توانیم فرمول‌های اولیه‌ی انتگرال را بیابیم، به جدول زیر توجه کنید:

	فرمول	مثال
۱	$\int dx=x+c$	
۲	$\int x^n dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}+c$ ، $n\neq -۱$	$\int\frac{dx}{x^۲}=\int x^{-۲}dx=-x^{-۱}+c=\frac{-۱}{x}+c$ $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{\frac{-۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{x}+c$ $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+c$
۳	$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$	$\int ۳x^۲dx=۳\frac{x^۳}{۳}+c=x^۳+c$
۴	$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$	$\int(\sqrt{x}+۲x)dx=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+x^۲+c$

	فرمول	مثال
۵	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad , \quad n \neq -1$	$\int (3x-4)^4 dx = \frac{(3x-4)^5}{3 \times 5} + c$
۶	$\int \sin ax\, dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$	$\int \sin 3x\, dx = \frac{-1}{3}\cos 3x + c$
۷	$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$	$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
۸	$\int (1+\tan^2 ax) dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$	$\int (1+\tan^2 7x) dx = \frac{1}{7}\tan 7x + c$
۹	$\int (1+\cot^2 ax) dx = \frac{-1}{a}\cot ax + c$	$\int (1+\cot^2 4x) dx = \frac{-1}{4}\cot 4x + c$
۱۰	$\int \frac{dx}{x} = Ln\lvert x \rvert + c$	
۱۱	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln\lvert ax+b \rvert + c$	$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} Ln\lvert 2x-1 \rvert + c$
۱۲	$\int e^x dx = e^x + c$	
۱۳	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int e^{3x+6} dx = \frac{1}{3} e^{3x+6} + c$

◆ ساده‌سازی و انتگرال‌گیری ◆

الف- با استفاده از اتحادها، گویا کردن مخرج کسر و تفکیک کسر می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده کرده و سپس حاصل انتگرال را بیابیم.

مثال: $\int \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^5} dx$

حل: $\int \frac{x^6-1}{x^5} dx = \int x\,dx - \int x^{-5} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-4}}{-4} + c$

مثال: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$

حل: $\int \frac{(x+1)+1}{\sqrt{x+1}} dx = \int \sqrt{x+1}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + c$

ب- با استفاده از اتحادهای مثلثاتی می‌توان بعضی از انتگرال‌ها را ساده نمود و سپس حاصل را به‌دست آورد.

مثال: $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos 2x} dx$

حل: $\int \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} dx = \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = x - \frac{1}{2}\tan x + c$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۴

۱۰۱۹- اگر $\int x(1-5\sqrt{x})dx = \frac{x^2}{2}.f(x) + c$ تابع $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۵)

۱) $1-4\sqrt{x}$ ۲) $1-2\sqrt{x}$ ۳) $x-2\sqrt{x}$ ۴) $x-x\sqrt{x}$

۱۰۲۰- اگر $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x} f(x) + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

۱) $2-3x$ ۲) $2-x$ ۳) $3-x$ ۴) $3-2x$

۱۰۲۱- اگر $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}} dx = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $-x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x+1$ ۴) $2x-1$

۱۰۲۲- اگر $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{f(x)}{3\sqrt{x}} + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

۱) $2x-3$ ۲) $3x+2$ ۳) $2x^2-6$ ۴) $2x^2+3$

۱۰۲۳- اگر $\int \frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx = f(x)(2x\sqrt{x})+c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

۱) $x-2$ ۲) $x-1$ ۳) $3x-2$ ۴) $5x-3$

۱۰۲۴- اگر $\int(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx = \sqrt{x}f(x)+c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۳)

۱) $3x-1$ ۲) $3x-3$ ۳) $2x-2$ ۴) $x-2$

۱۰۲۵- با شرط $x>1$ داریم: $\int \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx = x.f(x)+c$ ، $f(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) $3+2\sqrt{x}$ ۲) $3+\sqrt{x}$ ۳) $3x-\sqrt{x}$ ۴) $2x-3\sqrt{x}$

۱۰۲۶- اگر $\int\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}.f(x)+C$ ، آن گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۶)

۱) $1+\sqrt{x}$ ۲) $1+2\sqrt{x}$ ۳) $2+\sqrt{x}$ ۴) $2+2\sqrt{x}$

۱۰۲۷- اگر $\int\frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx = f(x).\sqrt{x}+c$ ، آنگاه $f(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۲)

۱) $2x-1$ ۲) $2x-4$ ۳) $2x-2$ ۴) $2x-3$

۱۰۲۸- اگر $\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \sqrt[3]{x}.f(x)+c$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱) $x-4$ ۲) $x-2$ ۳) $2x-1$ ۴) $4x-1$

۱۰۲۹- اگر $\int\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}.f(x)+c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

۱) $1-\sqrt{x}+\frac{1}{3}x$ ۲) $1+\sqrt{x}-\frac{1}{3}x$ ۳) $2-\sqrt{x}+\frac{2}{3}x$ ۴) $2-\sqrt{x}+3x$

تیپ ۵

۱۰۳۰- حاصل $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

۱) $x+\sin x+c$ ۲) $x-\sin x+c$ ۳) $-x+\cos x+c$ ۴) $x-\cos x+c$

۱۰۳۱- با شرط $x \neq k\pi+\frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) $\sin x+\cos x+c$ ۲) $\sin x-\cos x+c$ ۳) $-\sin x+\cos x+c$ ۴) $-\sin x-\cos x+c$

۱۰۳۲- با شرط $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\int\sqrt{1+\tan^2 x}\sin 2x dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

۱) $-2\cos x+C$ ۲) $-2\sin x+C$ ۳) $2\cos x+C$ ۴) $2\sin x+C$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۱۰۳۳- حاصل $\int \frac{x\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}+2}dx$ کدام است؟ (آزاد غیرپزشکی - ۸۷)

۱) x^3+c ۲) $2x^2+c$ ۳) $-\frac{1}{2}x^2+c$ ۴) $\frac{1}{2}x^2+c$

۱۰۳۴- حاصل $\int \frac{(2x\sqrt{x}+\sqrt{x})^4}{x^2}dx$ ، برابر است با: (آزاد غیرپزشکی- ۸۰)

۱) $\frac{(2x+1)^5}{5}+c$ ۲) $\frac{(2x+1)^5}{10}+c$ ۳) $\frac{2(2x+1)^5}{5}+c$ ۴) $\frac{4(2x+1)^5}{5}+c$

۱۰۳۵- حاصل $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ کدام است؟ (آزاد پزشکی - ۸۷)

۱) $x+c$ ۲) $\cos x-\sin x+c$ ۳) $\cos x+\sin x+c$ ۴) $2x+c$

۳. قضایای بنیادی انتگرال

- قضیه‌ی بنیادی اول (مشتق انتگرال معین)
- قضیه‌ی بنیادی دوم (محاسبه‌ی انتگرال معین با تابع اولیه)

◆ قضیه‌ی بنیادی اول ◆

اگر تابع f روی بازه‌ی بسته I پیوسته و $a \in I$ و برای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

آنگاه $F'(x)=f(x)$.

■ مثال: اگر $F(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ آنگاه، $F'(x)$ را بیابید.

◄ حل:

$$F'(x)=\sqrt{1+x^2}$$

◆ قضیه‌ی بنیادی دوم ◆

اگر f در بازه‌ی بسته $[a\,,b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی $[a\,,b]$ داشته باشیم $g'(x)=f(x)$، آنگاه:

$$\int_a^b f(t)\,dt=g(b)-g(a)$$

به عبارت دیگراز تابع انتگرال گرفته و سپس اختلاف حد پایین و بالا را می‌یابیم یعنی:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

($F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ است)

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۶

۱۰۳۶- اگر $G(x)=\int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$، آنگاه مشتق راست تابع $y=x\,.\,G(x)$، در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۰۳۷- اگر $f(x)=\int_2^{2x}\frac{t+1}{t}dt$، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=1$ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $x-2y=1$ ۲) $x+2y=1$ ۳) $x+3y=1$ ۴) $x-3y=1$

۱۰۳۸- اگر $f(x)=\int_1^x\frac{dt}{1+t^3}$، معادله‌ی مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) $y=2x-2$ ۲) $y=2x-1$ ۳) $2y=x-2$ ۴) $2y=x-1$

تیپ ۷

۱۰۳۹- حاصل $\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۰۴۰- حاصل $\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}-Ln2$ ۲) $\frac{3}{2}-Ln4$ ۳) $\frac{-1}{2}-Ln2$ ۴) $\frac{-1}{2}-Ln4$

۱۰۴۱- حاصل $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}[x]\cos x\,dx$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۰)

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۱۰۴۲- حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (\cos^{2} x-\sin^{2} x)dx$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۱۰۴۳- فرض کنید G تابع مساحت با ضابطه‌ی $G(x)=\int_{1}^{x} \frac{\sin 2t}{1+t^{2}}dt$ باشد. اگر $y=\frac{G(x)}{x^{2}}$ باشد، $y'(1)$ کدام است؟

(ریاضی عمومی- فصل ششم- صفحه‌ی ۱۷۲- مسأله‌ی ۱۸)

۱) $\sin 2$ ۲) $\frac{1}{2}\sin 2$ ۳) $2\sin\frac{1}{2}$ ۴) $\sin\frac{1}{2}$

۱۰۴۴- حاصل $\int_{1}^{4}(\frac{1}{x^{2}}+x\sqrt{x})dx$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی صبح - ۸۹)

۱) $\frac{263}{20}$ ۲) $\frac{233}{20}$ ۳) $\frac{62}{5}$ ۴) $\frac{66}{5}$

۱۰۴۵- حاصل $\int_{0}^{\pi} |\sin x+\cos x|\, dx$ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - ۸۴)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) $2\sqrt{2}+2$ ۴) $2\sqrt{2}-2$

۱۰۴۶- حاصل $\int_{0}^{1} \frac{x^{3}+4x^{2}+4x+1}{(x+1)}dx$ کدام است؟ (آزاد پزشکی عصر - ۸۹)

۱) $\frac{19}{6}$ ۲) $\frac{15}{6}$ ۳) $\frac{17}{6}$ ۴) $\frac{13}{6}$

۱۰۴۷- حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ کدام است؟ (آزاد پزشکی صبح - ۹۰)

۱) صفر ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

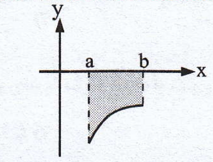
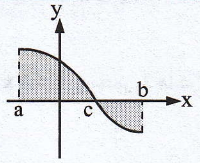
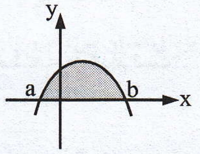
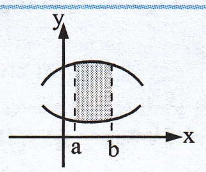
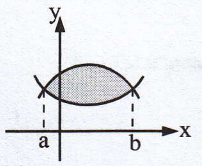
۱۰۴۸- حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^{2} x dx$ کدام است؟ (آزاد پزشکی صبح - ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

۴. کاربردهای انتگرال معین — محاسبه‌ی سطح زیر نمودار

◆ محاسبه‌ی سطح محصور ◆

در محاسبه‌ی سطح محصور حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

نوع حالت	شکل	فرمول مورد استفاده
حالت (۱): سطح محصور بین یک منحنی و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$، اگر f در یک طرف محور xها باشد.		$S=\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$
حالت (۲): سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$، اگر تابع f در بازه‌ی $[a\ ,\ b]$ محور xها را در نقطه‌ای به طول c قطع کند.		$S=\left\|\int_a^c f(x)dx\right\|+\left\|\int_c^b f(x)dx\right\|$
حالت (۳): سطح محصور بین یک منحنی با محور xها. منحنی را با محور xها قطع می‌دهیم تا a و b را بیابیم.		$S=\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$
حالت (۴): سطح محصور بین دو تابع در فاصله‌ی $x=a$ و $x=b$.		$S=\left\|\int_a^b (y_2-y_1)dx\right\|$
حالت (۵): سطح محصور بین دو منحنی: ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی داده، طول‌های نقاط تلاقی حدود انتگرال را می‌دهد.		$S=\left\|\int_a^b (y_2-y_1)dx\right\|$

☑ نکته: الف- هر طاق تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به مساحت (۲) است.

ب- هر طاق تابع $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ به مساحت $\frac{2}{|a|}$ است.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۸

۱۰۴۹- مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x & ; -2\le x\le 0 \\ x^2 & ; 0\le x\le 3\end{cases}$، محور xها و دو خط $x=-2$ و $x=3$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۰)

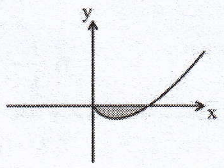
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۰۵۰- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۹۰)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

تیپ ۹

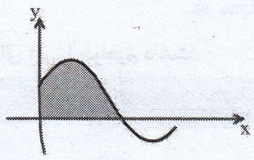
۱۰۵۱- با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x-\sqrt{x}$، مساحت ناحیه‌ی سایه زده، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۸)



۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

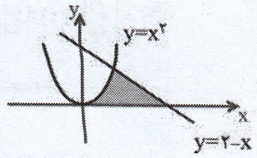
۱۰۵۲- با توجه به قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x+\cos x$ در شکل مقابل، مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)



۱) $۲-\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۱+\sqrt{۲}$

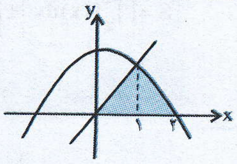
تیپ ۱۰

۱۰۵۳- با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیه‌ی سایه زده چقدر است؟ (سراسری تجربی - ۸۳)



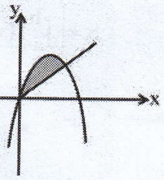
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$
۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰۵۴- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=۴-x^۲$ و خط به معادله‌ی $y=۳x$ و محور x ها در ناحیه‌ی اول کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۵)



۱) $\frac{۱۳}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶}$

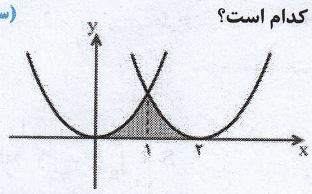
۱۰۵۵- مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی به معادله‌ی $y=-x^۲+۵x$ و بالای خط $y=x$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)



۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۲۲}{۳}$
۳) $\frac{۲۸}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۳}$

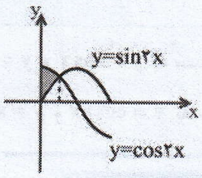
تیپ ۱۱

۱۰۵۶- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی به معادلات $y=x^۲$ و $y=(x-۲)^۲$ و محور x ها کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰۵۷- مساحت ناحیه‌ی هاشورزده‌ی شکل مقابل کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۰)



۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}-۱$
۳) $\frac{۱}{۲}(۲-\sqrt{۲})$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}-۱)$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

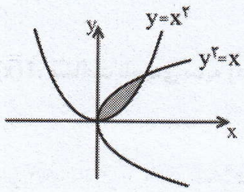
۱۰۵۸- سطح بین منحنی $y=۲+\cos ۲x$ و محور x ها در بازه‌ی $[۰,\pi]$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۸۳)

۱) ۲π ۲) π ۳) ۴π ۴) ۶π

۱۰۵۹- مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y=\sin x$ کدام است؟ (ریاضی عمومی - فصل ششم - صفحه‌ی ۱۷۲ - مسأله‌ی ۲۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۰۶۰- مساحت ناحیه‌ی هاشورزده در شکل زیر کدام است؟ (ریاضی عمومی - فصل ششم - صفحه‌ی ۱۷۳ - مسأله‌ی ۲۷)



۱) ۱
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ فصل ششم

پاسخ تست‌های کنکور: فرهاد حامی، فریدون ساعتی
تیپ‌بندی، راهبردهای حل، پاسخ تست‌های خارج از کشور: فرهاد حامی
تمرین‌های کتاب درسی: حمید علیزاده

راهبرد حل تیپ (۱)

به قسمت «رابطه‌ی انتگرال معین و مساحت» در درس، توجه کنید.

۱۰۰۶- گزینه‌ی «۳»

با توجه به شکل صورت سوال، چون حدود انتگرال در بازه‌ی $[-2 , 4]$ قرار دارد، کافی است مساحت مثلث پایین محور x ها را از مساحت ذوزنقه کم کنیم.

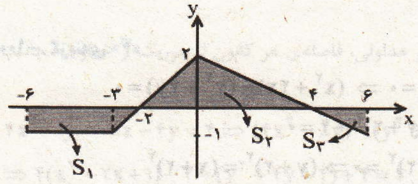
$S_1 = \frac{1}{2}(3+2)\times 1 \times 1 = \frac{5}{2}$ (مساحت ذوزنقه‌ی بالای محور x ها)

$S_2 = \frac{1}{2}(3\times 1) = \frac{3}{2}$ (مساحت مثلث، پایین محور x ها)

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = S_1 - S_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

۱۰۰۷- گزینه‌ی «۳»

از آنجایی که انتگرال معین تابع f در بازه‌ی $[a , b]$ برابر مساحت علامت‌دار محصور بین تابع f و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ است، لذا:

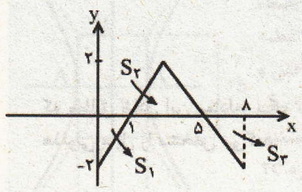


$$\int_{-6}^{6} f(x)\,dx = \int_{-6}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,dx$$

$$= -S_1 + S_2 - S_3 = -\left(\frac{4+3}{2}\right)(1) + \frac{1}{2}(6\times 2) - \frac{1}{2}(2\times 1)$$

$$= \frac{-7}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2}$$

۱۰۰۸- گزینه‌ی «۲»



از آنجایی که $\int_a^b f(x)\,dx$، مساحت علامت‌دار محصور بین تابع f و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ است، لذا با توجه به شکل:

$$\int_0^8 f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3$$

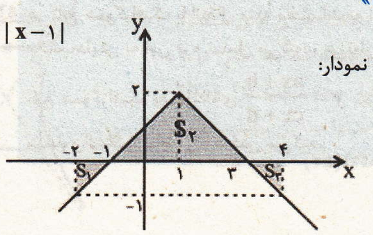
$$\int_0^8 f(x)\,dx = -\left(\frac{1\times 2}{2}\right) + \left(\frac{4\times 2}{2}\right) - \left(\frac{3\times 2}{2}\right)$$

$$= -1 + 4 - 3 = 0$$

۱۰۰۹- گزینه‌ی «۳»

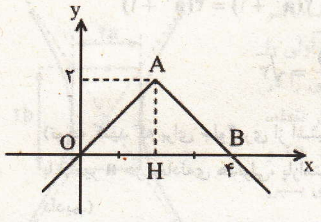
$f(x) = 2 - |x-1|$

با توجه به نمودار:



$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 = -\frac{1\times 1}{2} + \frac{4\times 2}{2} - \frac{1\times 1}{2} = 3$$

۱۰۱۰- گزینه‌ی «۴»



با توجه به نمودار تابع به معادله‌ی $y = 2 - |x-2|$، حاصل $\int_0^4 (2 - |x-2|)\,dx$ برابر با مساحت مثلث OAB است، یعنی:

$$\int_0^4 (2 - |x-2|)\,dx = S(OAB) = \frac{1}{2} AH \times OB$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

۱۰۱۱- گزینه‌ی «۳»

شکل داده شده، مساحت نیم‌دایره به شعاع ۲ است، پس:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{2}(\pi (2)^2) = 2\pi$$

راهبرد حل تیپ (۲)

الف-برای محاسبه‌ی انتگرال توابع شامل قدر مطلق، باید قدر مطلق را در فاصله‌ی بین حدود انتگرال و ریشه‌های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم و سپس تک تک انتگرال‌ها را محاسبه کنیم.

ب-در بعضی از موارد اگر نمودار قدرمطلقی از پاره‌خط‌های شکسته تشکیل شده باشد می‌توانیم با رسم نمودار، حاصل انتگرال را بیابیم.

۱۰۱۲- گزینه‌ی «۲»

$$\int_{-2}^{2} (2x + |x|)\,dx = \int_{-2}^{0} (2x - x)\,dx + \int_{0}^{2} (2x + x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} 3x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} + \frac{3x^2}{2}\Big]_{0}^{2}$$

$$= (0 - 2) + (6 - 0) = 4$$

راه حل دوم: با رسم نمودار تابع $y = |x| + 2x$ در بازه‌ی $(-2, 2)$ و محاسبه‌ی سطح محصورعلامت‌دار به همین جواب می‌رسیدیم.

۱۰۱۳- گزینه‌ی «۴»

راه حل اول:

$$\int_{-1}^{2} (|x| + |x+1|)\,dx$$

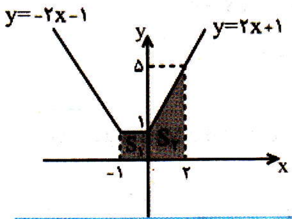
$$= \int_{-1}^{0} (|x| + |x+1|)\,dx + \int_{0}^{2} (|x| + |x+1|)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x + (x+1))\,dx + \int_{0}^{2} (x + (x+1))\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (1)\,dx + \int_{0}^{2} (2x+1)\,dx = (x)\Big]_{-1}^{0} + (x^2+x)\Big]_{0}^{2}$$

$$= (0-(-1)) + ((4+2)-(0+0)) = 7$$

راه حل دوم: با رسم نمودار تابع، می‌توان نوشت:



$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = S_1 + S_2$$

$$= 1^2 + \frac{(1+5)\times 2}{2} = 7$$

راهبرد حل تیپ (۳)

الف- در محاسبه‌ی انتگرال توابع شامل جزءصحیح باید حدود انتگرال را به گونه‌ای در نظر بگیریم که برای تابع‌تحت انتگرال در هر یک از فاصله‌ها تنها یک مقدار صحیح بدست آید.

ب-در بعضی از موارد که رسم تابع $y=[f(x)]$ ساده باشد، با رسم نمودار،حاصل انتگرال را می‌یابیم.

۱۰۱۴- گزینه‌ی «۳»

$$\int_{-2}^{2} (2-[x])\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx - \int_{-2}^{2} [x]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\,dx - \int_{-2}^{-1} (-2)\,dx - \int_{-1}^{0} (-1)\,dx$$

$$- \int_{0}^{1} 0\times dx - \int_{1}^{2} 1\times dx$$

$$= 2x\Big]_{-2}^{2} + 2x\Big]_{-2}^{-1} + x\Big]_{-1}^{0} + 0 - x\Big]_{1}^{2}$$

$$= 2(2-(-2)) + 2(-1-(-2)) + ((0-2)-(0-1))$$

$$= 8+2+1-1 = 10$$

۱۰۱۵- گزینه‌ی «۳»

با شکستن حدود انتگرال به سه بازه داریم:

$$\int_{-2}^{1} x[x]\,dx = \int_{-2}^{-1} x(-2)\,dx + \int_{-1}^{0} x(-1)\,dx + \int_{0}^{1} x(0)\,dx$$

$$= -x^2\Big]_{-2}^{-1} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + 0 = -(1-4) - \left(0-\frac{1}{2}\right) = 3+\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

۱۰۱۶- گزینه‌ی «۱»

$$I = \int_{-2}^{2} (x+[x])\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx + \int_{-2}^{2} [x]\,dx$$

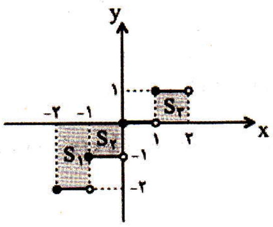
برای محاسبه‌ی $\int_{-2}^{2} x\,dx$ ، داریم:

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{2} = \frac{(2)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 0$$

برای محاسبه‌ی $\int_{-2}^{2} [x]\,dx$ ، بهتر است که از رسم شکل استفاده کنیم:

$$\int_{-2}^{2} [x]\,dx = -S_1 - S_2 + S_3$$

$$= -(1\times 2) - (1\times 1) + (1\times 1) = -2$$



پس:

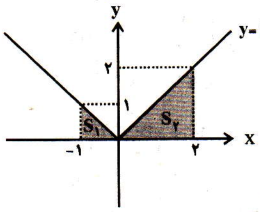
$$I = 0 - 2 = -2$$

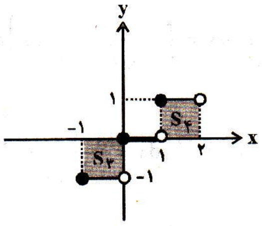
۱۰۱۷- گزینه‌ی «۳»

$$f(x) = |x| - [x]$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (|x|-[x])\,dx = \int_{-1}^{2} |x|\,dx - \int_{-1}^{2} [x]\,dx \quad (*)$$

برای محاسبه‌ی دو انتگرال اخیر، بهتر است از رسم شکل استفاده کنیم:





$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = S_1 + S_2$$

$$= \frac{1\times 1}{2} + \frac{2\times 2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} [x]\,dx = -S_3 + S_4$$

$$= -1\times 1 + 1\times 1 = 0$$

$$(*) \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{2} - 0 = \frac{5}{2}$$

۱۰۱۸- گزینه‌ی «۳»

با جداسازی حدود خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{2} (x+|x|)[x]\,dx = \int_{-1}^{0} (x-x)(-1)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{1} (x+x)(0)\,dx + \int_{1}^{2} (x+x)(1)\,dx$$

$$= 0+0+\int_{1}^{2} 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_{1}^{2} = 4-1 = 3$$

راهبرد حل تیپ (۴)

به فرمول‌های زیر توجه کنید:

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \;,\; n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad,\quad n \neq -1$$

۱۰۱۹- گزینه‌ی «۱»

$$\int x(1-5\sqrt{x})\,dx = \frac{x^2}{2}.f(x) + c$$

$$\int (x - 5x^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x^2\sqrt{x} + c = \frac{x^2}{2}(1-4\sqrt{x}) + c \Rightarrow f(x) = 1-4\sqrt{x}$$

تذکر: بهتر است در سوال ذکر شود که $f(x)$ کدام می‌تواند باشد زیرا $f(x)$ یکتا نیست.

۱۰۲۰- گزینه‌ی «۳»

$$\int\frac{1-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-\int\sqrt{x}\,dx=2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x)+c$$

پس $f(x)=3-x$.

۱۰۲۱- گزینه‌ی «۱»

$$\int\frac{1-x}{x\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{x}{x\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$
$$\int(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}-\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+c$$
$$=-2x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c=\frac{-2}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+c$$
$$=\frac{-2-2x}{\sqrt{x}}+c=\frac{2(-1-x)}{\sqrt{x}}+c$$

از مقایسه‌ی عبارت اخیر با صورت سوال، نتیجه می‌شود که $f(x)=-x-1$.

۱۰۲۲- گزینه‌ی «۳»

با تفکیک کسر داریم:

$$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\int\sqrt{x}\,dx+\int x^{\frac{-3}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}}+c=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+c=\frac{2x^2-6}{3\sqrt{x}}+c$$

پس $f(x)=2x^2-6$.

۱۰۲۳- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}=\frac{5x^2-3x}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{5x^2}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}}$$
$$=5x^{2-\frac{1}{2}}-3x^{1-\frac{1}{2}}=5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم که اگر $n\neq -1$، آنگاه $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$،
پس:

$$\int\frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx=\int(5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}})dx=\int 5x^{\frac{3}{2}}dx-\int 3x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=5\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=5\times\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-3\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$
$$=5\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=2x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+C=(x-1)(2x\sqrt{x})+C$$
$$\Rightarrow f(x)=x-1$$

۱۰۲۴- گزینه‌ی «۳»

$$\int(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\int(3x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=3\times\frac{2}{3}\times x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C=2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+c$$
$$=\sqrt{x}(2x-2)+C\Rightarrow f(x)=2x-2$$

۱۰۲۵- گزینه‌ی «۱»

ابتدا عبارت داخل انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}=\frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}}=\frac{3(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}=3(1+\sqrt{x})$$
$$=3+3\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow\int\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx=\int(3+3\sqrt{x})dx$$
$$=3x+3\times\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=3x+2x\sqrt{x}+c$$
$$\Rightarrow x(3+2\sqrt{x})+c=xf(x)+c\Rightarrow f(x)=3+2\sqrt{x}$$

۱۰۲۶- گزینه‌ی «۴»

$$\int\frac{(1+\sqrt{x})^2-x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}f(x)+C$$
$$\int\frac{1+x+2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int x^{\frac{-1}{2}}dx+\int 2dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+2x+C=2\sqrt{x}+2x+C$$
$$=\sqrt{x}(2+2\sqrt{x})+C\Rightarrow f(x)=2+2\sqrt{x}$$

۱۰۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$\int\frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx=\int(3x-2)x^{-\frac{1}{2}}dx=\int(3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\int 3x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-2\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c$$
$$=2x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+c=(2x-4)\sqrt{x}+c\Rightarrow f(x)=2x-4$$

۱۰۲۸- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4x-4}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4x}{3x^{\frac{2}{3}}}-\frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow\int\frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=\int(\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}})dx$$
$$=\frac{4}{3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}x^{1-\frac{2}{3}}+c$$
$$=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+c$$
$$=x^{\frac{1}{3}}(x-4)+c=\sqrt[3]{x}(x-4)+c\Rightarrow f(x)=x-4$$

۱۰۲۹- گزینه‌ی «۱»

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1\right)dx = \frac{1}{2}\times\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\times\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + c$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} - x + c = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{3}x-\sqrt{x}\right)+c$$

$$\Rightarrow f(x) = 1-\sqrt{x}+\frac{1}{3}x$$

راهبرد حل تیپ (۵)

به فرمول‌های زیر توجه کنید:

$$\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$$

$$\int (1+\cot^2 ax)dx = \frac{-1}{a}\cot ax + c$$

توجه کنید که با استفاده از اتحادهای مثلثاتی می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده نمود و سپس حاصل را به‌دست آورد.

۱۰۳۰- گزینه‌ی «۱»

با استفاده از اتحاد $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ خواهیم داشت:

$$\int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}dx$$

$$= \int (1+\cos x)dx = \int dx + \int \cos x\,dx = x+\sin x + c$$

۱۰۳۱- گزینه‌ی«۲»

با توجه به اینکه $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$، داریم:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx$$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}dx = \int (\cos x + \sin x)dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

۱۰۳۲- گزینه‌ی «۳»

از آنجایی که $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$، پس:

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \frac{1}{|\cos x|}$$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ است، پس کمان x در نواحی دوم و سوم است، در این ناحیه‌ها کسینوس منفی است، پس:

$$\frac{1}{|\cos x|} = \frac{-1}{\cos x}$$

از طرفی $\sin 2x = 2\sin x\cos x$، پس:

$$\int \frac{-1}{\cos x}\times 2\sin x\cos x\,dx = \int -2\sin x\,dx = 2\cos x + c$$

۱۰۳۳- گزینه‌ی «۴»

$$\int \frac{x\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}+2}dx = \int \frac{x(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

۱۰۳۴- گزینه‌ی «۲»

$$\int \frac{(2x\sqrt{x}+\sqrt{x})^4}{x^2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}(2x+1))^4}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{x^2(2x+1)^4}{x^2}dx = \int (2x+1)^4 dx = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + c$$

۱۰۳۵- گزینه«۱»

می‌دانیم که $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x)+g(x))dx$، پس:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + c$$

راهبرد حل تیپ (۶)

اگر تابع f روی بازه‌ی بسته I پیوسته و $a \in I$ و برای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

آنگاه $F'(x) = f(x)$.

۱۰۳۶- گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم: $\int_a^a f(x)dx = 0$ و

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$$

بنابراین:

$$y' = G(x) + xG'(x) \xrightarrow{x\to 2^+} y'_+(2) = G(2) + 2G'(2)$$

$$y'_+(2) = 0 + 2\frac{2}{\sqrt{1+8}} = \frac{4}{3}$$

۱۰۳۷- گزینه‌ی «۳»

ابتدا شیب خط مماس و سپس با کمک آن شیب خط قائم بر منحنی را در نقطه‌ی $x=1$ می‌یابیم:

$$f(x) = \int_2^{2x} \frac{t+1}{t}dt \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \Rightarrow \text{شیب قائم} = -\frac{1}{3}$$

از طرفی عرض تابع در $x=1$ برابر است با:

$$f(1) = \int_2^2 \frac{t+1}{t}dt = 0$$

پس معادله‌ی خط قائم در نقطه‌ی $(1,0)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y-0 = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y = -x+1 \Rightarrow 3y+x = 1$$

۱۰۳۸- گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط مماس}: m=f'(x)=1\times\frac{1}{1+x^3}\xrightarrow{x=1} m=\frac12 \\ f(1)=\int_1^1\frac{dt}{1+t^3}=0\Rightarrow A(1,0): \text{نقطه‌ی تماس}\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-0=\frac12(x-1)\Rightarrow 2y=x-1$$

یادآوری:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

راهبرد حل تیپ (۷)

اگر f در بازه‌ی بسته $[a , b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی (a , b) داشته باشیم $g'(x)=f(x)$، آنگاه:

$$\int_a^b f(t)\,dt=g(b)-g(a)$$

به عبارت دیگر از تابع انتگرال گرفته و سپس اختلاف حد پایین و بالا را می‌یابیم یعنی:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

($F(x)$ تابع اولیه‌ی $f(x)$ است)

۱۰۳۹- گزینه‌ی «۲»

$$\int_0^1 \left(x^{\frac13}+(1+x)^{-2}\right)dx=\frac{x^{\frac43}}{\frac43}+\frac{(1+x)^{-1}}{-1}\Big]_0^1$$

$$=\left(\frac34-\frac12\right)-\left(0-\frac11\right)=\frac34+\frac12=\frac{3+2}{4}=\frac54$$

۱۰۴۰- گزینه‌ی «۲»

$$\int_1^2\left(1-\frac1x\right)^2dx=\int_1^2\left(1-\frac2x+\frac1{x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^2dx-2\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_1^2\frac{dx}{x^2}=x\Big]_1^2-2\ln x\Big]_1^2-\frac1x\Big]_1^2$$

$$=(2-1)-2(\ln2-\underbrace{\ln1}_{0})-\left(\frac12-1\right)$$

$$=\frac32-2\ln2=\frac32-\ln2^2=\frac32-\ln4$$

۱۰۴۱- گزینه‌ی «۲»

وقتی $-\frac12\cong-\frac{\pi}{6}<x<0$ ، $[x]=-1$

وقتی $0<x<\frac{\pi}{6}\cong\frac12$ ، $[x]=0$ پس:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}[x]\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(-1)\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}(0)\cos x\,dx$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^0\cos x\,dx+0=-(\sin x)\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^0=-\left(0-\left(-\frac12\right)\right)=-\frac12$$

۱۰۴۲- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$ ، بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2x-\sin^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos2x\,dx=\frac12\sin2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac12\left(\sin\frac{\pi}{3}-0\right)=\frac12\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{\sqrt3}{4}$$

۱۰۴۳- گزینه‌ی «۲»

$$G(1)=0$$

$$G'(x)=\frac{\sin2x}{1+x^2}\to G'(1)=\frac{\sin2}{2}$$

$$y'=\frac{G'(x).x^2-2xG(x)}{x^2}$$

$$\to y'(1)=\frac{G'(1)-2\overbrace{G(1)}^{0}}{1}=\frac12\sin2$$

۱۰۴۴- گزینه‌ی «۱»

$$\int_1^4\left(\frac1{x^2}+x\sqrt x\right)dx=\int_1^4\left(x^{-2}+x^{\frac32}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+\frac{1}{\frac32+1}x^{\frac32+1}\right)\Bigg]_1^4=\left(\frac{-1}{x}+\frac25x^2\sqrt x\right)\Bigg]_1^4$$

$$=\left(\frac{-1}{4}+\frac25\times16\times2\right)-\left(-1+\frac25\right)=\frac{263}{20}$$

۱۰۴۵- گزینه‌ی «۱»

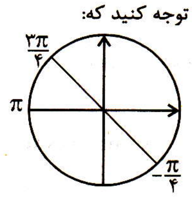
$$\int_0^\pi|\sin x+\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi(-\sin x-\cos x)dx$$

$$=-\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}}+\cos x-\sin x\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^\pi$$

$$=\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+1\right)+\left(-1+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)=2\sqrt2$$

توجه کنید که:



اگر $0\le x<\frac{3\pi}{4}:\ \sin x+\cos x>0$

اگر $\frac{3\pi}{4}<x\le\pi:\ \sin x+\cos x<0$

۱۰۴۶- گزینه‌ی «۳»

ابتدا توجه کنید که با انجام تقسیم $(x^3+4x^2+4x+1):(x+1)$، به نتیجه‌ی زیر می‌رسید:

$$x^3+4x^2+4x+1=(x+1)(x^2+3x+1)$$

پس:

$$\int_0^1 \frac{x^3+4x^2+4x+1}{(x+1)}dx = \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2+3x+1)}{(x+1)}dx$$

$$\int_0^1 (x^2+3x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right)\Big]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\right)-(0)=\frac{17}{6}$$

۱۰۴۷- گزینه‌ی «۲»

از آن‌جا که داریم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x$$

$$\int \frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=(-\cos x+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos(0)+\sin(0))$$

$$=(0+1)-(-1+0)=2$$

۱۰۴۸- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

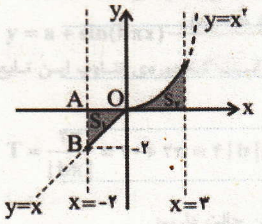
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

راهبرد حل تیپ (۸)

به حالت‌های ۱و۲ در قسمت «سطح‌محصور» در درس، توجه کنید.

۱۰۴۹- گزینه‌ی «۴»

با توجه به نمودار تابع f، حاصل S_1+S_2 مدنظر سؤال است:



$$S_1=S(\overset{\Delta}{OAB})=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{2\times 2}{2}=2$$

$$S_2=\int_0^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3=9-0=9$$

$$\Rightarrow S_1+S_2=2+9=11$$

۱۰۵۰- گزینه‌ی «۳»

براساس ریشه‌ی داخل قدر مطلق، حدود انتگرال را جدا کرده و در واقع عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S=\left|\int_{-1}^1|2x-1|dx\right|=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx$$

$$=-x^2+x\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}}+x^2-x\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(-1-1)+(1-1)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}+2+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

راهبرد حل تیپ (۹)

به حالت ۳در قسمت «سطح محصور» در درس، توجه کنید.

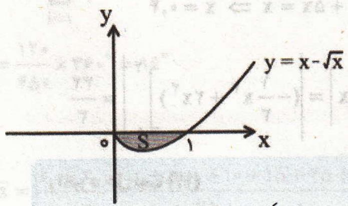
تذکر: اگر نمودار محورطول‌ها را در بیش از دو نقطه قطع کند باید فواصل را به صورت قدر مطلق‌های جداگانه در نظر بگیریم.

۱۰۵۱- گزینه‌ی «۱»

ابتدا طول نقاط تلاقی نمودار تابع $y=x-\sqrt{x}$ را با محور xها می‌یابیم (بعبارت دیگر معادله‌ی $y=0$ را حل می‌کنیم):

$$y=0\Rightarrow x-\sqrt{x}=0\Rightarrow(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=0$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0\\ \sqrt{x}-1=0\Rightarrow\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1\end{cases}$$



چون ناحیه‌ی سایه زده، زیر محور xها قرار دارد، پس مساحت آن برابر است با: $S=-\int_0^1 ydx$.

$$\int_0^1 ydx=\int_0^1(x-x^{\frac{1}{2}})dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg]_0^1$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg]_0^1=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)-(0)=\frac{-1}{6}\Rightarrow S=-\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

۱۰۵۲- گزینه‌ی «۴»

سطح زیر نمودار انتگرال معین از صفر تا اولین ریشه بعد از صفر است، لذا:

$$f(x)=0\Rightarrow\sin x+\cos x=0\Rightarrow\sin x=-\cos x$$

$$\Rightarrow\tan x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

بنابراین:

$$S=\left|\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,dx\right|$$

$$S=\left|\left[-\cos x+\sin x\right]_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\right|$$

$$S=\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1+0)\right|=\sqrt{2}+1$$

راهبرد حل تیپ (۱۰)

برای یافتن سطح محصور بین یک خط و یک منحنی با محور طول‌ها:

الف- خط و منحنی را با هم قطع داده و a,b را می‌یابیم.

ب- از فرمول زیر سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$S=\left|\int_{a}^{b}(y_2-y_1)\,dx\right|$$

۱۰۵۳- گزینه‌ی «۳»

$x^2=2-x \Rightarrow x=1\ ,\ x=-2$ ؛ -2 با توجه به شکل قابل قبول نیست.

$$S=\int_{0}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx$$

$$S=\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{1}+(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big]_{1}^{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

۱۰۵۴- گزینه‌ی «۴»

$$\int_{0}^{1}3x\,dx+\int_{1}^{2}(4-x^2)dx=\frac{3x^2}{2}\Big]_{0}^{1}+(4x-\frac{x^3}{3})\Big]_{1}^{2}$$

$$=\frac{3}{2}+8-\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}=\frac{19}{6}$$

۱۰۵۵- گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases}y=-x^2+5x\\ y=x\end{cases}\Rightarrow -x^2+5x=x \Rightarrow x=0,4$$

$$S=\left|\int_{0}^{4}(-x^2+5x-x)dx\right|=\left|(-\frac{1}{3}x^3+2x^2)\Big]_{0}^{4}\right|=\frac{32}{3}$$

راهبرد حل تیپ (۱۱)

به حالت‌های ۴ و ۵ در قسمت «سطح‌محصور» در درس، توجه کنید.

۱۰۵۶- گزینه‌ی «۲»

با توجه به نمودار کافی است سطح محصور به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^2$ و محور xها را در فاصله‌ی $[0,1]$ محاسبه کنیم و سپس آن را دو برابر کنیم:

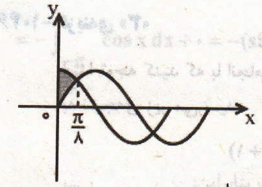
$$S=2\int_{0}^{1}x^2dx=2\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1}=2\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{2}{3}$$

۱۰۵۷- گزینه‌ی «۴»

برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده، حدود تغییرات x را مشخص می‌کنیم، نقطه تلاقی با کم‌ترین طول مثبت را در نظر می‌گیریم.

$$\sin 2x=\cos 2x \Rightarrow \tan 2x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$$

پس باید، مساحت محصور بین دو منحنی را در فاصله‌ی $\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$ حساب کنیم:



$$S=\left|\int_{a}^{b}(y_1-y_2)dx\right|=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}(\cos 2x-\sin 2x)dx\right|$$

$$S=\left|(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{8}}\right|=\left|(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4})-(0+\frac{1}{2})\right|$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

۱۰۵۸- گزینه‌ی «۱»

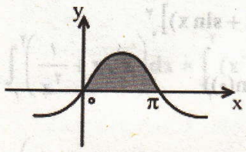
چون تابع $y=2+\cos 2x$ محور xها را قطع نمی‌کند. پس:

$$S=\int_{0}^{\pi}(2+\cos 2x)dx=2x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{0}^{\pi}$$

$$=(2\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi)-(0+0)=2\pi$$

۱۰۵۹- گزینه‌ی «۴»

با توجه به شکل مقابل که مربوط به تابع $y=\sin x$ است کافی است انتگرال این تابع را در بازه‌ی $[0,\pi]$ محاسبه کنیم.



$$S=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big]_{0}^{\pi}=1-(-1)=2$$

۱۰۶۰- گزینه‌ی «۳»

ابتدا محل برخورد دو تابع را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}y=x^2\\ y^2=x\to y=\pm\sqrt{x}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{محورهاست}]{\text{محل تلاقی در قسمت مثبت}}x^2=\sqrt{x}$$

$$\to x^4=x\to x=0,1$$

$$S=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$