فصل ۵: معادلات جرم، برنولی و انرژی

میلاد نادری
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
بهار ۹۷

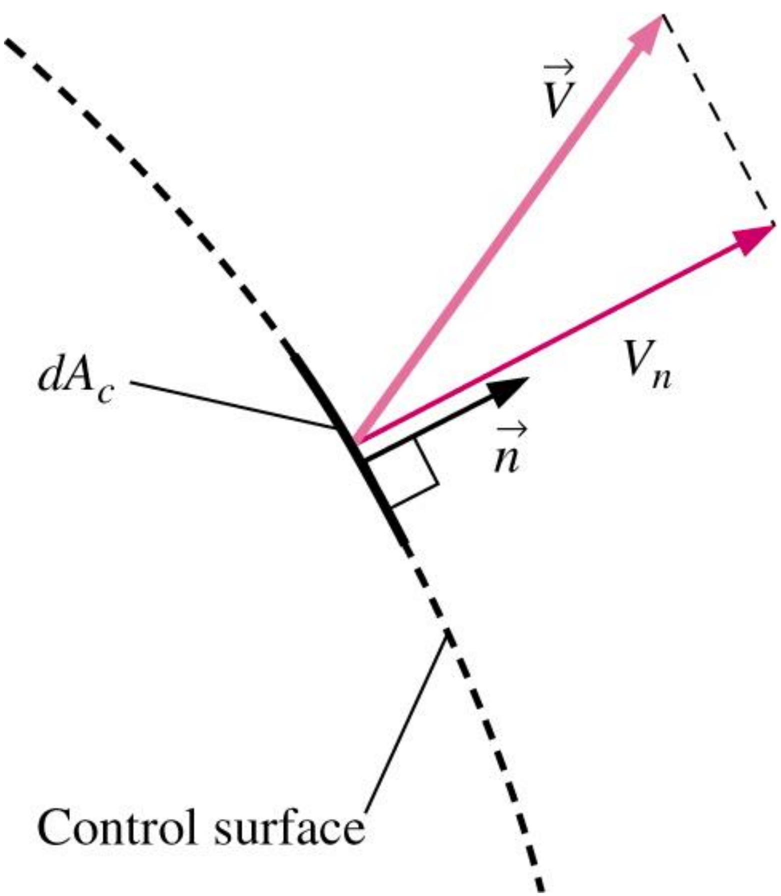
مقدمه

- این فصل، ۳ معادله پرکاربرد در مکانیک سیالات را مورد بررسی قرار میدهد :
  - معادله جرم که بیانی از اصل بقای جرم است.
  - معادله برنولی که با بقای انرژی های جنبشی، پتانسیل و جریان یک سیال جاری و تبدیل آنها به یکدیگر ارتباط دارد.
  - معادله انرژی بیانی از اصل بقای انرژی است.

بقای جرم

- اصل بقای جرم یکی از قوانین اصلی در طبیعت است.
- جرم مانند انرژی یک خاصیت ابقایی است به گونه ای که نمی توان در حین یک فرآیند آن را ایجاد کرد و یا از بین برد.
- برای سیستم های بسته، بقای جرم به صورت ضمنی مشخص است زیرا جرم سیستم در حین یک فرآیند ثابت باقی می ماند.
- برای حجم کنترل، جرم میتواند از مرزها عبور کند بنابراین لازم است که مقدار جرم ورودی و خروجی از حجم کنترل را دنبال کنیم.

نرخ دبی جرمی و نرخ دبی حجمی

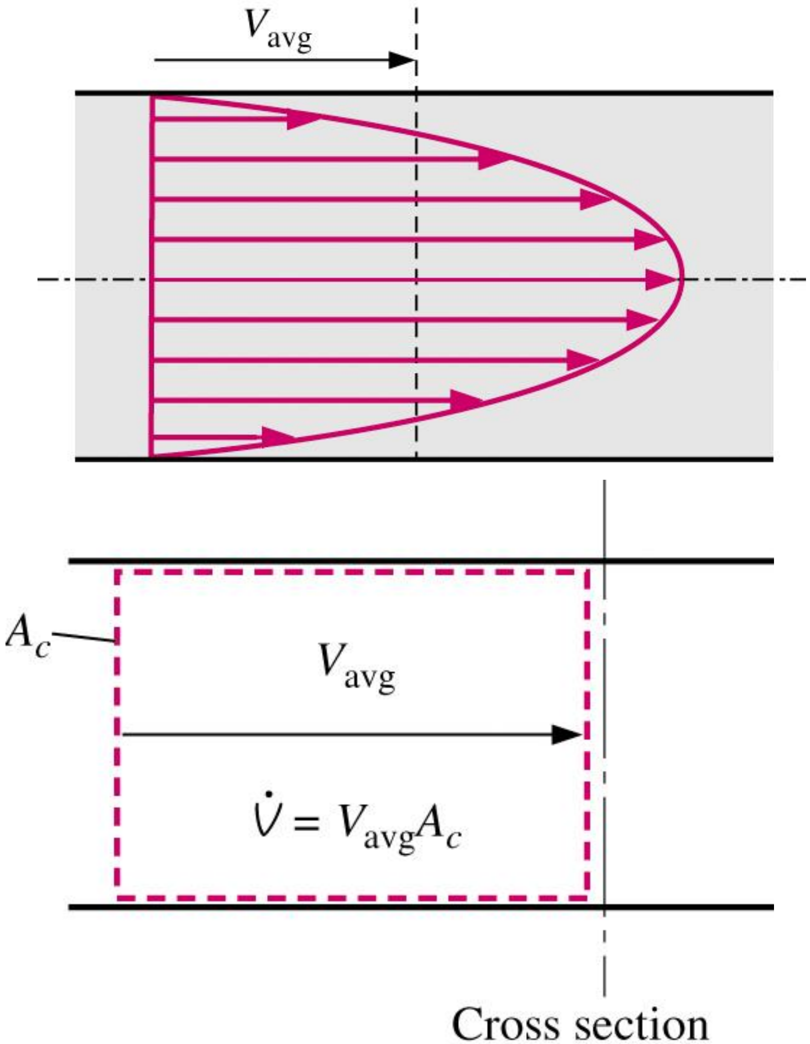


- مقدار جرم در حال عبور از یک سطح کنترل بر واحد زمان را نرخ دبی جرمی می نامیم و با نماد $\dot{m}$ نشان می دهیم.
- علامت نقطه روی نماد به منظور نشان دادن نرخ زمانی تغییرات است.
- نرخ جریان در حال عبور از کلیه سطح مقطع های یک لوله و یا داکت با انتگرالگیری بدست می آید:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta m = \int_{A_c} \rho V_n dA_c$$

- اگرچه این رابطه برای محاسبه $\dot{m}$ دقیق است اما در کاربردهای مهندسی از روابط ساده شده استفاده میشود.

سرعت متوسط و نرخ دبی حجمی



- انتگرال $\dot{m}$ را میتوان با مقادیر متوسط V_n و ρ بازنویسی کرد.
- مقدار متوسط سرعت

$$V_{avg} = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} V_n dA_c$$

برای بسیاری از جریان ها که تغییرات ρ خیلی کم است:

$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c$$

- نرخ دبی حجمی $\dot{V}$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n dA_c = V_{avg} A_c = VA_c$$

- توجه: بسیاری از کتابها از نماد Q برای نرخ دبی حجمی استفاده می کنند.
- دبی جرمی و دبی حجمی رابطه زیر را با هم دارند:

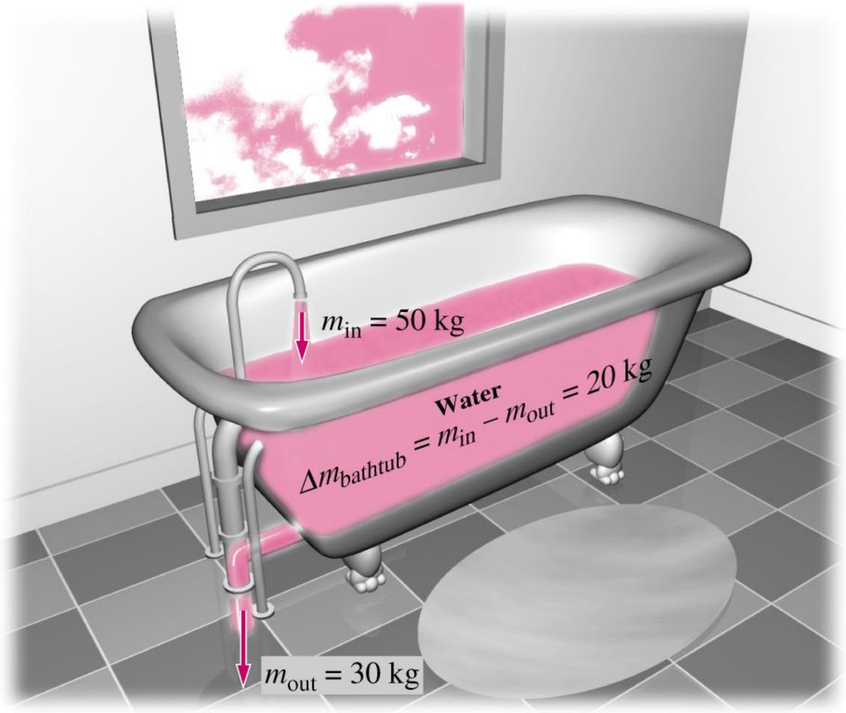
$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

اصل بقای جرم

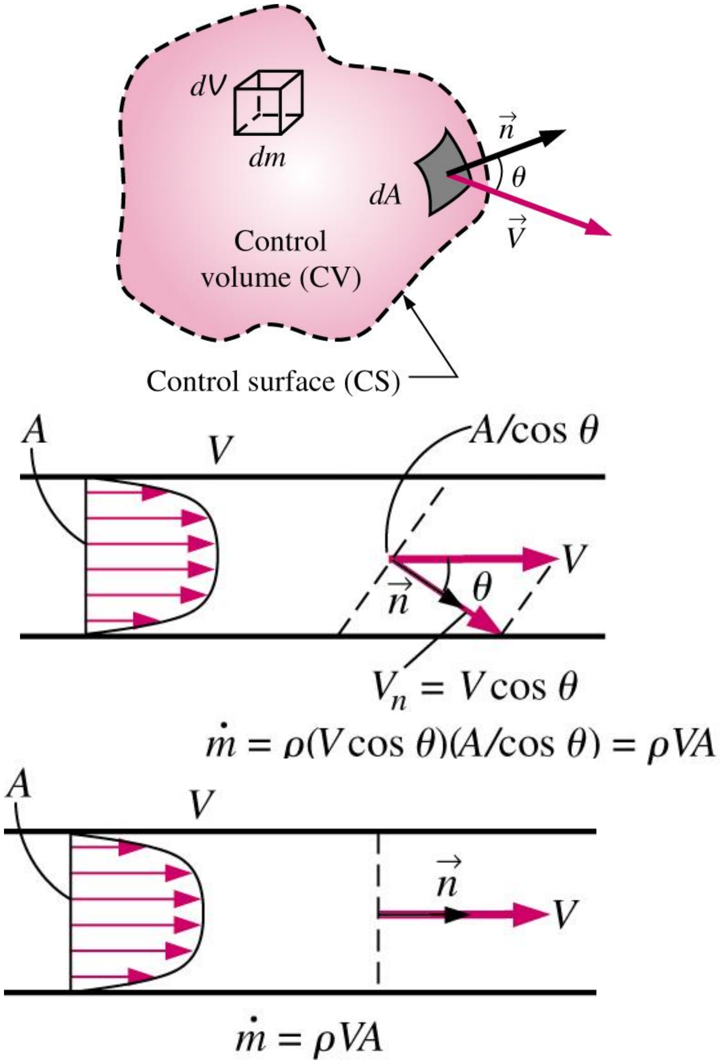
- اصل بقای جرم را میتوان به صورت زیر ارائه داد:

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{dm_{CV}}{dt}$$

- که $\dot{m}_{in}$ و $\dot{m}_{out}$ نرخ کلی جرم ورودی و خروجی از حجم کنترل (CV) هستند و dm_{CV}/dt نرخ تغییر جرم داخل CV است.



اصل بقای جرم



- برای حجم کنترل با شکل دلخواه:
  - نرخ تغییر حجم داخل حجم کنترل:

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho d\cancel{V}$$

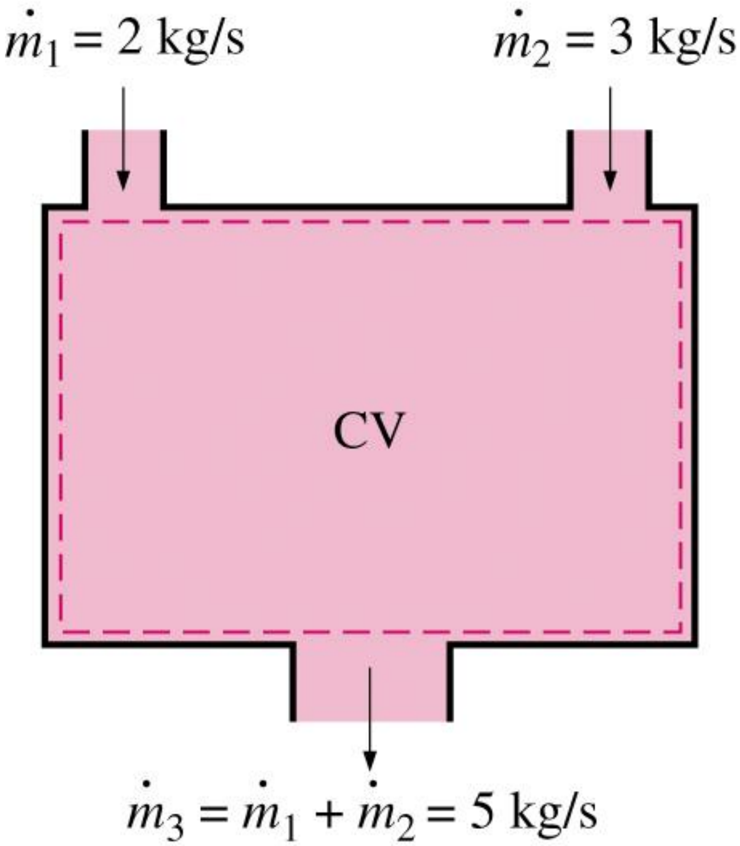
  - نرخ خالص جریان جرمی :

$$\dot{m}_{net} = \int_{CS} \delta\dot{m} = \int_{CS} \rho V_n dA = \int_{CS} \rho\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)dA$$

- بنابراین بقای جرم برای حجم کنترل ثابت به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho d\cancel{V} + \int_{CS} \rho\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)dA = 0$$

- نکته:برای ساده سازی حل، بهتر است حجم کنترل به گونه ای انتخاب شود که مرزهای آن (سطح کنترل) تا حد امکان بر جهت جریان عمود باشد.



- برای جریان پایا مقدار کلی جرم داخل حجم کنترل ثابت است.
- مقدار کلی جرم ورودی باید با مقدار کلی جرم خروجی برابر باشد:

$$\sum_{in} \dot{m} = \sum_{out} \dot{m}$$

- برای جریانات تراکم ناپذیر:

$$\sum_{in} V_n A_n = \sum_{out} V_n A_n$$

انرژی مکانیکی

- **انرژی مکانیکی** به صورت شکلی از انرژی تعریف میشود که توسط یک وسیله مکانیکی مثل توربین بتواند به طور کامل و مستقیم به کار مکانیکی تبدیل شود.

- انرژی های جریان P/ρ، جنبشی V^2/g و پتانسیل gz *فرم هایی از انرژی مکانیکی* هستند $e_{mech} = P/\rho + V^2/g + gz$.

- تغییر انرژی مکانیکی سیال در یک جریان تراکم ناپذیر:

$$\Delta e_{mech} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right)$$

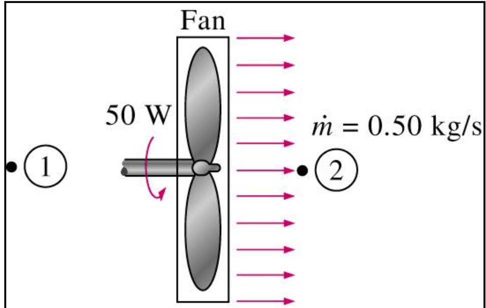
در غیاب تلفات، Δe_{mech} کار داده شده به سیال ($\Delta e_{mech}>0$) یا کار گرفته شده از سیال ($\Delta e_{mech}<0$) را نشان می دهد.

بازده

- انتقال انرژی مکانیکی e_{mech} معمولا توسط یک محور در حال دوران انجام میشود (کار محور).

- پمپ و فن کار محور را دریافت می کنند (مثلا از یک موتور الکتریکی) و آن را به سیال به صورت انرژی مکانیکی انتقال می دهد.
- توربین، انرژی مکانیکی e_{mech} سیال را به کار محور تبدیل می کند.
- به دلیل تلفاتی مثل اصطکاک،انرژی مکانیکی نمی تواند کاملا از یک فرم به شکل دیگر تبدیل شود. بنابراین بازده مکانیکی یک وسیله یا فرآیند به صورت زیر تعریف میشود:
- $$\eta_{mech} = \frac{E_{mech,out}}{E_{mech,in}} = 1 - \frac{E_{mech,loss}}{E_{mech,in}}$$
- $\eta_{mech} < 100\%$ یعنی تلفات مکانیکی حین تبدیل رخ داده است.

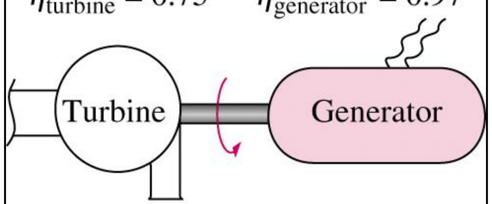
بازدهی پمپ و توربین



$V_1 = 0,\ V_2 = 12$ m/s
$z_1 = z_2$
$P_1 = P_2$

$$\eta_{\text{mech, fan}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{m}V_2^2/2}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{(0.50\ \text{kg/s})(12\ \text{m/s})^2/2}{50\ \text{W}} = 0.72$$

$\eta_{\text{turbine}} = 0.75 \qquad \eta_{\text{generator}} = 0.97$



$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}}\eta_{\text{generator}} = 0.75 \times 0.97 = 0.73$$

- در سیستم های سیالاتی، معمولا به دنبال افزایش فشار، سرعت و یا ارتفاع سیال هستیم مثل پمپ و کمپرسور. و یا برعکس مثل توربین.
- در این موارد بهتر است بازده به صورت نسبت (کار داده شده یا گرفته شده) به نرخ افزایش انرژی مکانیکی تعریف شود:

$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\text{Mechanical power increase of the fluid}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump}, u}}{\dot{W}_{\text{pump}}}$$

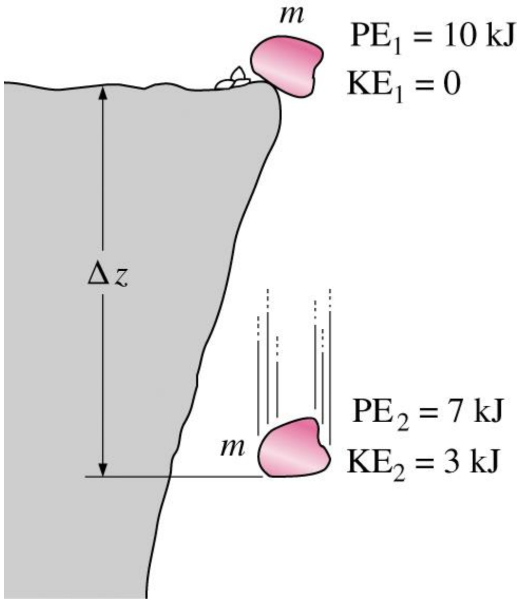
$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Mechanical power decrease of the fluid}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\dot{W}_{\text{turbine}, e}}$$

- بازده کلی باید شامل بازده موتور و یا ژنراتور نیز باشد.

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Electric power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{\dot{W}_{\text{elect, in}}} \qquad \eta_{\text{generator}} = \frac{\text{Electric power output}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}}$$

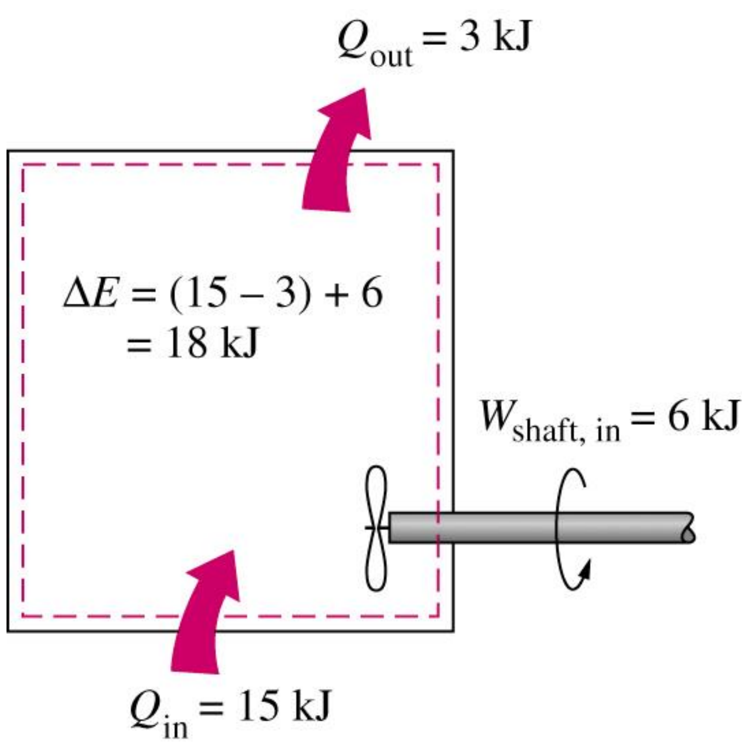
معادله عمومی انرژی

- یکی از قوانین اساسی در طبیعت قانون اول ترمودینامیک است که به اصل بقای انرژی نیز معروف است.
- این قانون می گوید در حین یک فرآیند، انرژی نه تولید می شود و نه از بین می رود و تنها می تواند تغییر شکل بدهد.



- در افتادن یک سنگ از ارتفاع، سرعت افزایش می یابد یعنی انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل می شود
- اگر از مقاومت هوا صرفنظر شود:
- $PE + KE =$ ثابت

معادله عمومی انرژی



- مقدار انرژی یک سیستم بسته به دو روش می تواند تغییر پیدا کند: انتقال حرارت Q و انتقال کار W

- بقای انرژی برای یک سیستم بسته می تواند به فرم نرخی زیر بیان شود

$$\dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{net,in} = \frac{dE_{sys}}{dt}$$

- نرخ خالص انتقال حرارت به سیستم:

$$\dot{Q}_{net,in} = \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out}$$

- توان ورودی خالص به سیستم:

$$\dot{W}_{net,in} = \dot{W}_{in} - \dot{W}_{out}$$

معادله عمومی انرژی

- یادآوری معادله عمومی RTT:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho b d\forall + \int_{CS} \rho b \left(\vec{V}_r \bullet \vec{n}\right) dA$$

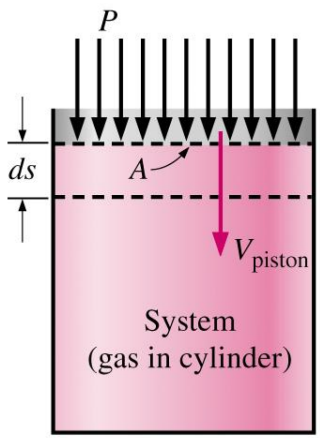
- استخراج معادله انرژی با استفاده از B=E و b=e

$$\frac{dE_{sys}}{dt} = \dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{net,in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho e d\forall + \int_{CS} \rho e \left(\vec{V}_r \bullet \vec{n}\right) dA$$

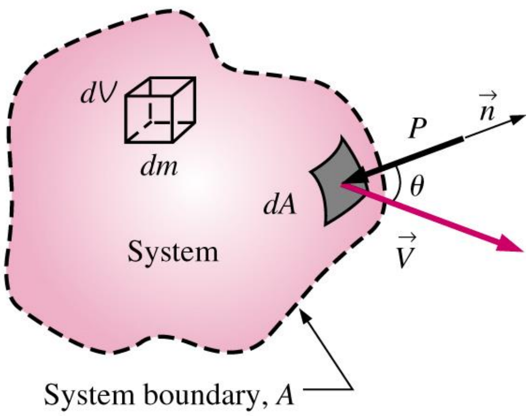
- تقسیم توان به نرخ کار محور (کار خارجی) و نرخ کار فشار:

$$\dot{W}_{net,in} = \dot{W}_{shaft,net,in} + \dot{W}_{pressure,net,in} = \dot{W}_{shaft,net,in} - \int P\left(\vec{V} \bullet \vec{n}\right) dA$$

معادله عمومی انرژی



(*a*)



(*b*)

- عبارت کار فشار از کجا وارد معادله شد؟
- وقتی پیستون به اندازه ds تحت تاثیر نیروی F=PA به سمت پایین حرکت می کند، کار انجام شده روی سیستم برابر است با $\delta W_{boundary}=PAds$
- اگر هر دو سمت رابطه را به dt تقسیم کنیم داریم:

$$\delta \dot{W}_{pressure} = \delta \dot{W}_{boundary} = PA\frac{ds}{dt} = PAV_{piston}$$

- برای حجم کنترل عمومی:

$$\delta \dot{W}_{pressure} = -PdAV_n = -PdA\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)$$

- قردادهای علامت:
  - بردار $\vec{n}$ ، بردار عمود برسطح (نرمال) به سمت خارج است.
  - علامت منفی این اطمینان را ایجاد می کند که کار انجام شده مثبت است وقتی کار روی سیستم انجام شود.

معادله عمومی انرژی

- با انتقال انتگرال نرخ کار فشار به سمت راست معادله انرژی:

$$\dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{shaft,net,in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho e d\dot{V} + \int_{CS}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) e\left(\vec{V}_r \cdot \vec{n}\right) dA$$

- یادآوری میکنیم که P/ρ کار جریان است که همانا کار ایجاد شده توسط فشار دادن سیال به سمت داخل و یا به خارج از حجم کنترل بر واحد جرم است.

معادله عمومی انرژی

- مشابه معادله بقای جرم، تحلیل های کاربردی با میانگین گیری در ورودی ها و خروجی ها بدست می آید:

$$\dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{shaft,net,in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho e d\dot{V} + \sum_{out} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right)$$

$$\dot{m} = \int_{A_C} \rho\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right) dA_c$$

- که در آن : $e=u+ke+pe = u+V^2/2+gz$

$$\dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{shaft,net,in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho e d\dot{V} + \sum_{out} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right)$$

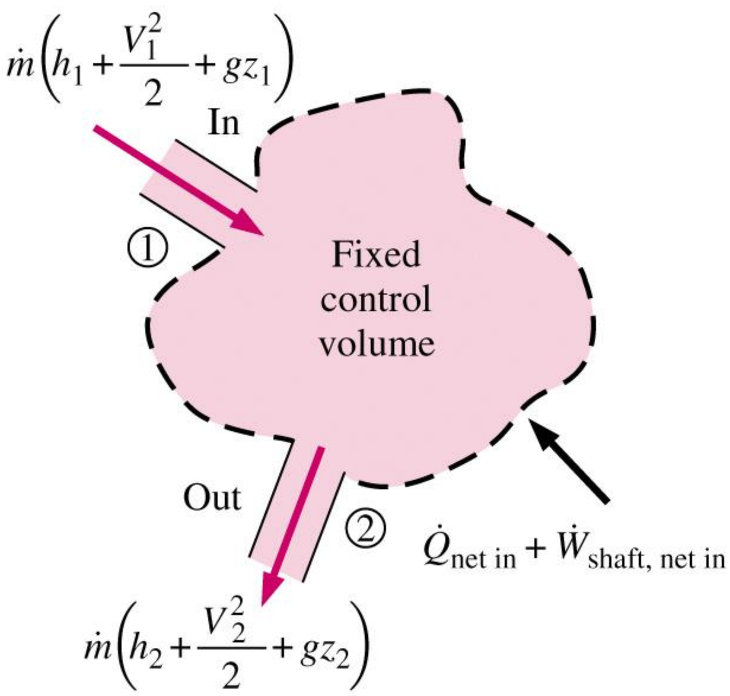
تحلیل انرژی جریان های پایا

$$\dot{Q}_{net,in} + \dot{W}_{shaft,net,in} = \sum_{out} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)$$

- برای جریان های پایا، نرخ زمانی تغییر مقدار انرژی داخل CV برابر صفر است.
- این معادله بیان میکند که: نرخ خالص انتقال انرژی به یک حجم کنترل توسط گرما و کار در یک جریان پایا برابر است با اختلاف بین نرخ انرژی های ورودی و خروجی توسط جریان جرمی.

تحلیل انرژی جریان های پایا

- برای تجهیزاتی با یک ورودی و خروجی، دبی جرمی ثابت است پس:



$$q_{net,in}+w_{shaft,net,in}=h_2-h_1+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+g\left(z_2-z_1\right)$$

$$w_{shaft,net,in}+\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\left(u_2-u_1-q_{net,in}\right)$$

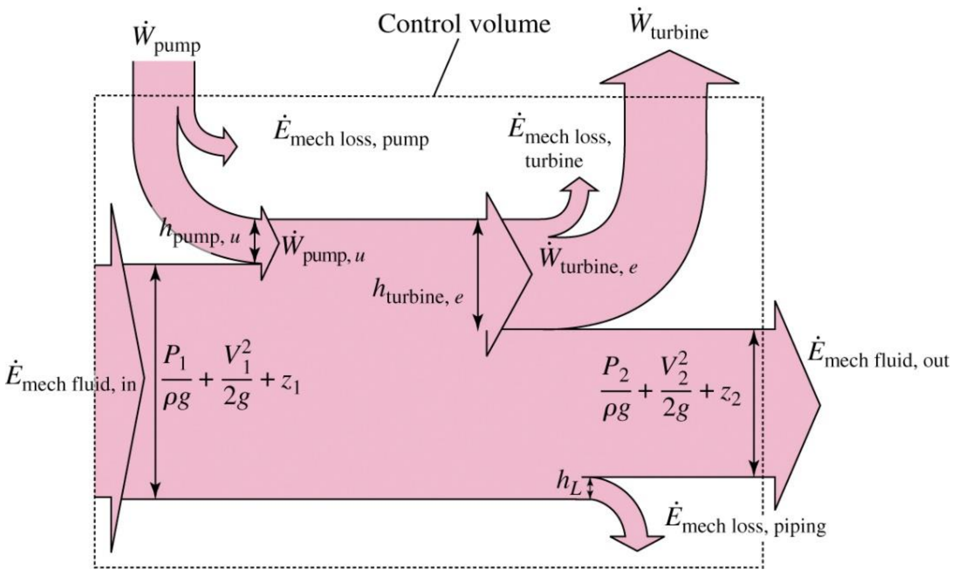
$$\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1+w_{pump}=\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+w_{turbine}+e_{mech,loss}$$

تحلیل انرژی جریان های پایا

- با تقسیم کردن بر g، ترم هایی با دیمانسیون طول بدست می آید:

$$\frac{P_1}{\rho_1 g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_{pump}=\frac{P_2}{\rho_2 g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_{turbine}+h_L$$

اکنون مقدار هر ترم بر حسب ارتفاع ستون معادل بیان می شود که به آن هد میگوییم.



معادله برنولی

- اگر از تلفات لوله ها صرفنظر کنیم و سیستمی بدون پمپ و توربین داشته باشیم:

$$\frac{P_1}{\rho_1 g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho_2 g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

- که این معادله به معادله برنولی مهشور است.
- این رابطه می تواند با استفاده از قانون دوم نیوتون نیز استخراج شود.
- ۳ ترم این رابطه هد استاتیک (فشار) ، هد دینامیک (سرعت) و هد هیدرواستاتیک (ارتفاع) هستند.

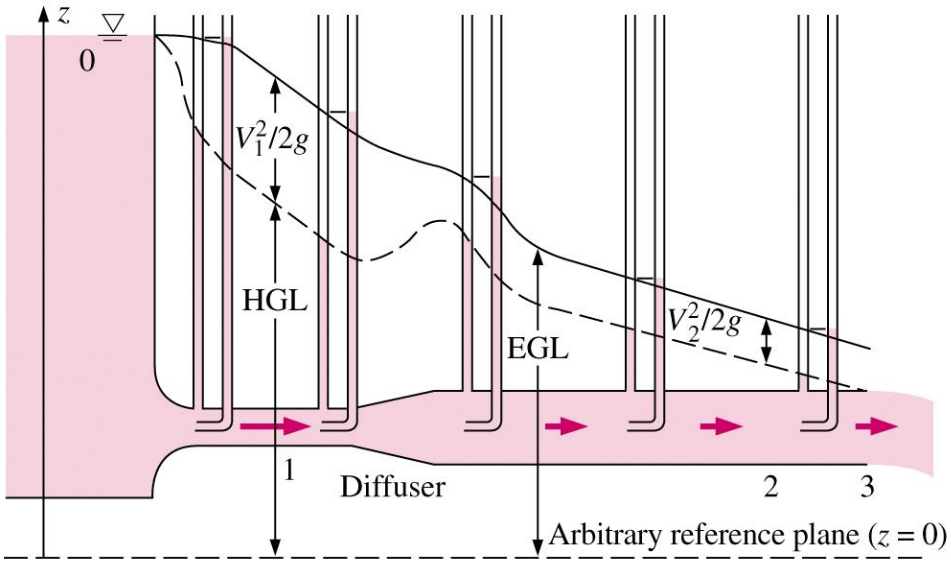
HGL و EGL

- ترسیم انرژی مکانیکی به صورت گرافیکی با استفاده از هدها رایج است.
- خط درجه هیدرولیکی

$$HGL = \frac{P}{\rho g} + z$$

- خط درجه انرژی (انرژی کلی):

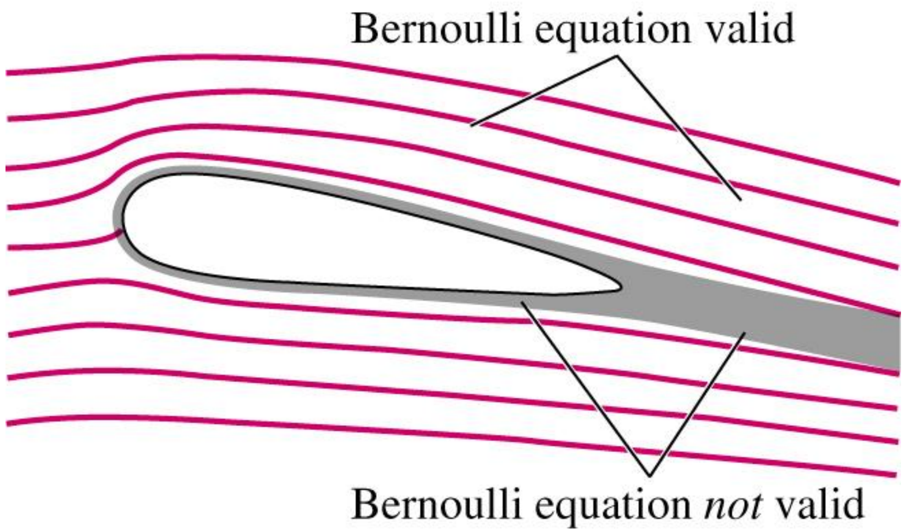
$$EGL = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$$



پیزومتر: اندازه گیری فشار داخل لوله =فاصله عمودی سیال بالارفته در لوله از مرکز لوله

لوله پیتوت: برای اندازه گیری هد فشار و هد سرعت= اندازه گیری فشار استاتیک و فشار دینامیک

معادله برنولی

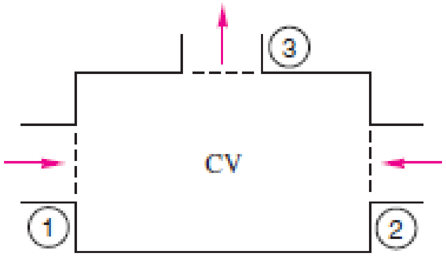


- معادله برنولی یک رابطه تقریبی بین فشار، سرعت و ارتفاع است و تنها در نواحی جریان پایا، تراکم ناپذیر که نیروهای اصطکاکی قابل صرفنظر است، صادق است.
- معادله برنولی در جریان خارج از لایه مرزی و خارج از ویک مفید است.

معادله برنولی

- محدودیت های استفاده از معادله برنولی:
  - جریان پایا : $d/dt = 0$
  - جریان بدون اصطکاک
  - بدون کار شفت (محور) $w_{pump}=w_{turbine}=0$
  - جریان تراکم ناپذیر: $\rho = \text{constant}$
  - بدون انتقال حرارت $q_{net,in}=0$
  - در طول یک خط جریان (استثنا: جریان غیرچرخشی)

مثال ١



E3.1

EXAMPLE 3.1

A fixed control volume has three one-dimensional boundary sections, as shown in Fig. E3.1. The flow within the control volume is steady. The flow properties at each section are tabulated below. Find the rate of change of energy of the system that occupies the control volume at this instant.

Section	Type	ρ, kg/m^3	V, m/s	A, m^2	e, J/kg
1	Inlet	800	5.0	2.0	300
2	Inlet	800	8.0	3.0	100
3	Outlet	800	17.0	2.0	150

حل مثال ۱

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{syst}} = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\int_{CV} e\,\rho\, dv\right)} + e_3\,\dot{m}_3 - e_1\,\dot{m}_1 - e_2\,\dot{m}_2$$

Since the flow is steady, the time-derivative volume integral term is zero. Introducing $(\rho A V)_i$ as the mass flow grouping, we obtain

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{syst}} = -e_1\rho_1A_1V_1 - e_2\rho_2A_2V_2 + e_3\rho_3A_3V_3$$

Introducing the numerical values from the table, we have

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{syst}} = -(300\text{ J/kg})(800\text{ kg/m}^3)(2\text{ m}^2)(5\text{ m/s}) - 100(800)(3)(8) + 150(800)(2)(17)$$

$$= (-2{,}400{,}000 - 1{,}920{,}000 + 4{,}080{,}000)\text{ J/s}$$

$$= -240{,}000\text{ J/s} = -0.24\text{ MJ/s} \qquad \textit{Ans.}$$

بررسی قانون بقای جرم:

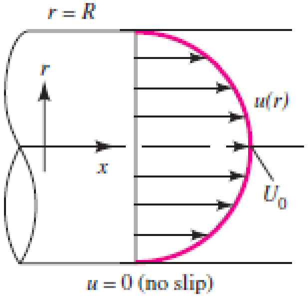
$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{syst}} = \int_{CS} \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA = -\rho_1A_1V_1 - \rho_2A_2V_2 + \rho_3A_3V_3$$

$$= -(800\text{ kg/m}^3)(2\text{ m}^2)(5\text{ m/s}) - 800(3)(8) + 800(17)(2)$$

$$= (-8000 - 19{,}200 + 27{,}200)\text{ kg/s} = 0\text{ kg/s}$$

Thus the system mass does not change, which correctly expresses the law of conservation of system mass, Eq. (3.1).

مثال ٢



EXAMPLE 3.4

For steady viscous flow through a circular tube (Fig. E3.4), the axial velocity profile is given approximately by

$$u = U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m$$

so that u varies from zero at the wall ($r = R$), or no slip, up to a maximum $u = U_0$ at the centerline $r = 0$. For highly viscous (laminar) flow $m \approx \frac{1}{2}$, while for less viscous (turbulent) flow $m \approx \frac{1}{7}$. Compute the average velocity if the density is constant.

Solution

The average velocity is defined by Eq. (3.32). Here $\mathbf{V} = \mathbf{i}u$ and $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, and thus $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = u$. Since the flow is symmetric, the differential area can be taken as a circular strip $dA = 2\,\pi r\,dr$. Equation (3.32) becomes

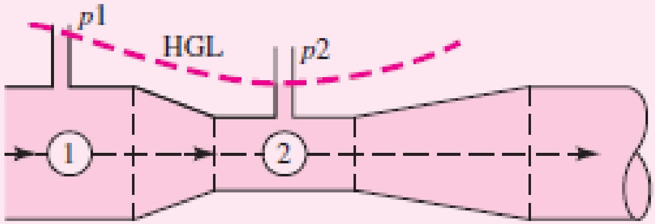
$$V_{av} = \frac{1}{A}\int u\,dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m 2\pi r\,dr$$

or

$$V_{av} = U_0\frac{2}{(1 + m)(2 + m)} \qquad \textit{Ans.}$$

EXAMPLE 3.15

A constriction in a pipe will cause the velocity to rise and the pressure to fall at section 2 in the throat. The pressure difference is a measure of the flow rate through the pipe. The smoothly necked-down system shown in Fig. E3.15 is called a *venturi tube*. Find an expression for the mass flux in the tube as a function of the pressure change.



E3.15

مثال ۳

Solution

Bernoulli's equation is assumed to hold along the center streamline:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

If the tube is horizontal, $z_1 = z_2$ and we can solve for V_2:

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\,\Delta p}{\rho} \qquad \Delta p = p_1 - p_2 \tag{1}$$

We relate the velocities from the incompressible continuity relation:

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

or

$$V_1 = \beta^2 V_2 \qquad \beta = \frac{D_2}{D_1} \tag{2}$$

Combining (1) and (2), we obtain a formula for the velocity in the throat:

$$V_2 = \left[\frac{2\,\Delta p}{\rho(1 - \beta^4)}\right]^{1/2} \tag{3}$$

The mass flux is given by

$$\dot{m} = \rho A_2 V_2 = A_2\left(\frac{2\rho\,\Delta p}{1 - \beta^4}\right)^{1/2} \tag{4}$$

This is the ideal frictionless mass flux. In practice, we measure $\dot{m}_{\text{actual}} = c_d\dot{m}_{\text{ideal}}$ and correlate the dimensionless discharge coefficient c_d.