به‌نام خدا

کتابچه سوالات آزمون‌های المپیاد ریاضی

دوره تابستان ۹۵

سوالات آزمون IMO همزمان

Language: **Persian (Farsi)**

Day: **1**

دوشنبه، ۱۱ جولای ۲۰۱۶

سوال ۱. مثلث BCF دارای یک زاویه قائمه در رأس B است. فرض کنید که A نقطه‌ای روی خط CF است به طوری که $FA = FB$ و F بین A و C قرار دارد. نقطه D طوری انتخاب شده است که $DA = DC$ و AC نیمساز زاویه $\angle DAB$ است. همچنین نقطه E طوری انتخاب شده است که $EA = ED$ و AD نیمساز زاویه $\angle EAC$ است. فرض کنید M وسط CF باشد و X نقطه‌ای باشد که چهارضلعی $AMXE$ یک متوازی‌الاضلاع باشد (یعنی $AM \parallel EX$ و $AE \parallel MX$). ثابت کنید که خطوط BD، FX و ME همرس‌اند.

سوال ۲. همه اعداد صحیح مثبت n را بیابید که بتوان در هر خانه یک جدول $n \times n$ یکی از حروف I، M و O را قرار داد به طوری که:

- در هر سطر و هر ستون، یک سوم از خانه‌ها I، یک سوم M و یک سوم O باشد.
- در هر قطر، اگر تعداد خانه‌های قطر مضربی از سه بود، در این صورت یک سوم از خانه‌ها I، یک سوم M، و یک سوم O باشد.

نکته: سطرها و ستون‌های یک جدول $n \times n$ را به صورت طبیعی با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. بنابراین هر خانه متناظر با یک زوج (i, j) از اعداد صحیح مثبت است که $1 \leq i, j \leq n$. به ازای $n > 1$ چنین جدولی $4n - 2$ تا قطر از دو نوع دارد. یک قطر از نوع اول شامل همه خانه‌های (i, j) است که $i + j$ مقدار ثابتی باشد، و یک قطر از نوع دوم شامل همه خانه‌های (i, j) است که $i - j$ مقدار ثابتی باشد.

سوال ۳. فرض کنید که $P = A_1A_2 \ldots A_k$ یک چندضلعی محدب در صفحه است. رئوس $A_1, A_2, \ldots, A_k$ همگی دارای مختصات صحیح هستند و روی یک دایره قرار دارند. فرض کنید که S مساحت P باشد. عدد طبیعی و فرد n دارای این خاصیت است که مربع طول هر ضلع P یک عدد صحیح مضرب n است. ثابت کنید که $2S$ نیز یک عدد صحیح مضرب n است.

سه‌شنبه، ۱۲ جولای ۲۰۱۶

سوال ۴. یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت را خوشبو می‌نامیم، اگر شامل حداقل دو عضو باشد و هر عضو آن عامل مشترکی با حداقل یکی از اعضای دیگرش داشته باشد. فرض کنید $P(n) = n^۲ + n + ۱$. حداقل مقدار ممکن برای عدد صحیح مثبت b را بیابید به طوری که عدد صحیح نامنفی a موجود باشد که مجموعه

$$\{P(a+۱), P(a+۲), \ldots, P(a+b)\}$$

خوشبو باشد.

سوال ۵. معادله

$$(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲۰۱۶) = (x-۱)(x-۲)\cdots(x-۲۰۱۶)$$

که ۲۰۱۶ عامل خطی در هر طرف آن قرار دارد، روی تخته نوشته شده است. حداقل مقدار ممکن k را بیابید به طوری که بتوان دقیقا k تا از این ۴۰۳۲ عامل خطی را حذف نمود به نحوی که حداقل یک عامل در هر طرف باقی بماند و معادله به دست آمده جواب حقیقی نداشته باشد.

سوال ۶. فرض کنید $n \geq ۲$ پاره‌خط در صفحه قرار دارند، به طوری که هر دو پاره‌خط یک‌دیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه پاره‌خطی همرس نیستند. جعفر باید از هر پاره‌خط یکی از دو انتهای آن را انتخاب کند و وزغی روی آن قرار دهد به طوری که جهت حرکت وزغ به سمت انتهای دیگر پاره‌خط باشد. سپس او $n-۱$ بار دست می‌زند. هر بار که او دست می‌زند، هر وزغ فوراً روی پاره‌خط خود به نقطه تقاطع بعدی می‌پرد. وزغ‌ها هیچ‌گاه جهت پرش خود را عوض نمی‌کنند. جعفر می‌خواهد وزغ‌ها را طوری قرار دهد که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌زمان روی یک نقطه تقاطع قرار نگیرند.

الف) ثابت کنید اگر n فرد باشد جعفر می‌تواند به خواسته خود برسد.

ب) ثابت کنید اگر n زوج باشد جعفر نمی‌تواند به خواسته خود برسد.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
هر مسئله ۷ امتیاز دارد

سوالات آزمون‌های میان دوره

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان میان دوره جبر دوره تابستان ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۱۰ دقیقه

۱. فرض کنید $\langle a_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشند به گونه ای که $\begin{cases} a_i + 1 \le a_{i+1} \\ a_1 = 1007 \end{cases}$ ثابت کنید :

$$\frac{1}{2016} > \sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2}$$

۲. تمام توابع $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ را بیابید به طوری که برای هر دو عدد طبیعی a, b داریم :

$$(f(a)+b)\,f(a+f(b)) = (a+f(b))^2$$

۳. آیا نامتناهی نقطه از صفحه مانند $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ وجود دارند که برای هر دنباله از اعداد حقیقی مانند $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ چند جمله ای مانند $p(x,y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ وجود داشته باشد که برای هر اندیس مانند i داشته باشیم :

$$p(x_i, y_i) = b_i$$

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان میان دوره ترکیبیات دوره تابستان ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۴۰ دقیقه

۱. تعداد جایگشت هایی از $\{1,2,3, \dots ,n\}$ مثل p را بیابید که فقط برای یک i داشته باشیم :

$$p(p(i)) \geq i$$

۲. آیا میتوان یک جدول ۷*۷ را به ۱۳ قسمت همبند از خانه های واحد تقسیم کرد به طوری که همه ی قسمت ها محیط برابر داشته باشند؟ (قسمت همبند : مجموعه ای از خانه های جدول به طوری که خانه های مجموعه ، همسایه های ضلعی باشند)

۳. ۲۴ ربات در صفحه قرار دارند هر کدام زاویه ی دیدی به اندازه ی ۷۰ درجه دارند. حداکثر چند رابطه ی دیدن بین آن ها برقرار است؟

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان میان دوره هندسه دوره تابستان ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۴۰ دقیقه

۱. فرض کنید ABC مثلث دلخواهی باشد. فرض کنید P محل برخورد ارتفاع متناظر با راس C و خط مماس در A بر دایره محیطی ABC باشد. D محل برخورد نیم ساز زاویه A و ضلع BC می‌باشد. PD ضلع AB را در K قطع می‌کند. ثابت کنید $AD \perp HK$

۲. ABC مثلثی دلخواه است. فرض کنید E و F دو نقطه به ترتیب روی AB و AC باشند بطوری که از وسط ضلع BC به یک فاصله اند. P را محل برخورد دوم دایره محیطی ABC و AEF در نظر بگیرید . از E و F بر دایره محیطی AEF مماس می‌کنیم تا یکدیگر را در K قطع کنند. ثابت کنید $\measuredangle KPA = 90$

۳. ABC مثلثی دلخواه است. D ، E و F به ترتیب پای ارتفاع های وارد بر اضلاع BC ، AC و AB می‌باشند. A_1 ، B_1 و C_1 به ترتیب پای عمودهای وارد از F ، D و E بر اضلاع BC ، AC و AB می‌باشد.

ثابت کنید $ABC \sim A_1B_1C_1$

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان میان دوره نظریه‌اعداد دوره تابستان ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۴۰ دقیقه

۱ - F زیرمجموعه ای از اعداد طبیعی با حداقل دو عضو و چندجمله ای $P(x) \epsilon \mathbb{Z}[X]$ بگونه ای هستند که برای هر دو عدد متمایز $a, b \epsilon F$ داریم :

$i)\ a + b \epsilon F$

$ii)\ (P(a), P(b)) = 1$

ثابت کنید چندجمله ای P ثابت است.

۲ - چندجمله ای $P(x) \epsilon \mathbb{Z}[X]$ را خوب می نامیم هر گاه بی نهایت عدد اول چون q یافت شود که $X = \{P(n)\ mod\ q \mid n \in \mathbb{N}\}$ حداقل $\frac{q+1}{2}$ عضو داشته باشد. ثابت کنید $x^3 + x$ خوب است.

۳ - عدد a را مانده طلایی به پیمانه m می نامیم اگر $(a, m) = 1$ باشد و معادله $x^x \equiv a\ (mod\ m)$ جواب داشته باشد. فرض کنید a مانده طلایی به پیمانه n^n باشد. ثابت کنید a مانده طلایی به پیمانه n^{n^n} هم هست.

سوالات آزمون‌های پایان دوره

بسم الله الرحمن الرحیم

زمان آزمون : ۳ ساعت

۱- فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ چندجمله ای درجه ۲۰۱۶ است که ریشه گویا ندارد . ثابت کنید چندجمله ای درجه ۱۳۹۵ مانند $T \in \mathbb{Z}[X]$ وجود دارد به طوری که برای هر دو ریشه متمایز از P مانند α, β (نه لزوما حقیقی) داشته باشیم:

$$T(\alpha) - T(\beta) \notin \mathbb{Q}$$

- توجه کنید منظور از $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا است .

۲- فرض کنید $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ با حاصل ضرب واحد باشند ثابت کنید :

$$\frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{a+c}{(a+c+1)^2} \geq \frac{2}{a+b+c}$$

۳ – تمام توابع مانند $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید به گونه ای که برای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند x, y داریم :

$$f(y) f(x + f(y)) = f(x) f(xy)$$

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان پایان دوره ترکیبیات دوره تابستان ۱۳۹۵
زمان امتحان ۲۱۰ دقیقه

۱. در یک انتخابات ۱۳۹۵ کاندید و تعدادی رای دهنده موجود است. هر رای دهنده کاندید ها را برحسب اولویت ترتیب بندی می کند. در گراف کاندیدها راس a (راس متناظر کاندید a ام) را به صورت جهت دار به راس b (راس متناظر کاندید b ام) وصل می کنیم در صورتی که راس a در بیش از نصف اولویت بندی ها از راس b اولویت بالا تری داشته باشد. آیا می توان همه ی گراف های جهت دار کامل ۱۳۹۵ راسی را ساخت؟

۲. جدول ۱۰۰ × ۱۰۰ داریم. در ابتدا روی همه خانه هایش عدد صفر نوشته شده است. دو نفر به ترتیب بازی می کنند. بازی بعد از ۲۰۰ مرحله (هر نفر ۱۰۰ مرحله) تمام می شود. در هر مرحله هر بازیکن یک سطر یا ستون را انتخاب می کند و به اعداد روی آن یکی به پیمانه ۳ اضافه می کند. اگر در پایان تعداد ۱ ها بیشتر از نصف جدول(۵۰۰۰ خانه) بود نفر اول می برد، اگر تعداد ۰ ها بیشتر از نصف جدول(۵۰۰۰ خانه) بود نفر دوم می برد و در غیر این صورت بازی مساوی خواهد شد. نتیجه بازی چه خواهد بود؟

۳. جدول ۳۰ × ۳۰ داریم. می خواهیم با دو رنگ سیاه و سفید آن را رنگ کنیم به طوری که هر خانه سیاه حداکثر k خانه سیاه مجاور داشته باشد(دو خانه مجاورند اگر فاصله طولی و فاصله عرضی آن ها به پیمانه ۳۰ برابر ۰ یا ۱ یا -۱ باشند. پس هر خانه دقیقا ۸ مجاور دارد).
الف) برای k=6 ماکسیمم تعداد خانه های سیاه را بیابید.
ب) برای k=1 ماکسیمم تعداد خانه های سیاه را بیابید.

موفق باشید

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان پایان دوره هندسه دوره تابستانه ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۱۰ دقیقه

۱.در مثلث ABC، ω دایره ای است که از BوC میگذرد و اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می کند.BF و CE دایره ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در B' و C' قطع می کند.فرض کنید نقطه ی A' روی ضلع BC چنان باشد که $\widehat{C'A'B} = \widehat{B'A'C}$.ثابت کنید با تغییر دایره ی ω ، دایره ی محیطی مثلث های $A'B'C'$ از نقطه ی ثابتی می گذرند.

۲.فرض کنید ABC یک مثلث دلخواه است و I و I_a به ترتیب مرکز دایره محاطی داخلی و خارجی متناظر با رأس A هستند.فرض کنید مماس در C بر دایره ی محیطی ABC،نیمساز زاویه ی A را در M و مماس در B بر دایره محیطی ABC نیمساز A را در N قطع میکند. از M و N مماس های دوم را بر دایره ی محیطی مثلث رسم می کنیم و فرض می کنیم دایره ی محیطی را به ترتیب در X و Y قطع کنند.ثابت کنید $XYII_a$ محاطی است.

۳.مثلث دلخواه ABC مفروض است.DوEوF محل برخورد نیمسازهای داخلی AوBوC با اضلاع متناظر هستند.نقاط MوN روی خط EF طوری انتخاب می شوند که $AM = AN$. نقطه H پای ارتفاع رأس A بر BC می باشد.نقاط KوL طوری روی EF انتخاب می شوند که دو مثلث HMN و AKL متناظراً متشابه اند(به همین ترتیب رئوس) و AK و HM موازی نیستند.ثابت کنید $DK = DL$.

بسم الله الرحمن الرحیم

امتحان پایان دوره نظریه اعداد دوره تابستان ۱۳۹۵

زمان امتحان ۲۱۰ دقیقه

۱. فرض کنید p, q اعداد اول (q فرد) باشند. ثابت کنید عدد صحیحی مانند x وجود دارد بطوری که $q \mid (x+1)^p - x^p$ اگر و تنها اگر $q \equiv 1 \ (mod\ p)$

۲. یک تابع را **ویژه** گوییم اگر به صورت $a^{f(x)}$ باشد که a یک عدد طبیعی و $f(x)$ یک چندجمله ای با ضرایب صحیح باشد که برای اعداد طبیعی مقدار مثبت می‌گیرد. یک تابع را **نمایی چندجمله‌ای** گوییم اگر از ضرب و جمع توابع **ویژه** بدست آمده باشد (به طور مثال : $2^x 3^{x^2+x-1} + 5^{2x}$) ثابت کنید هیچ چندجمله‌ای صحیح الضرایب و غیرثابتی چون $P(x)$ و تابع نمایی چندجمله‌ای ناصفری چون $f(x)$ وجود ندارد که برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم : $P(n) \mid f(n)$

۳. دنباله $P = (a_n)$ را یک جایگشت از اعداد طبیعی می‌گوییم هرگاه برای هر عدد طبیعی چون m یک عدد طبیعی n یکتا یافت شود که $a_n = m$. حال $S_k(P)$ را به صورت $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ تعریف می‌کنیم (جمع k جمله اول جایگشت) ثابت کنید بی‌نهایت جایگشت **...** $P_1, P_2,$ یافت می‌شود که برای هر k و هر $i < j$ طبیعی داشته باشیم : $S_k(P_i) \mid S_k(P_j)$

موفق باشید

سوالات آزمون‌های المپیادی

بسمه تعالی

امتحان پایان دوره تابستان ۱۳۹۵ روز اول زمان امتحان : ۲۷۰ دقیقه

---

1 - فرض کنید $f, g : R^+ \to R^+$ دو تابع باشند که برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x , y داریم :

$$f\left(x + g(y)\right)^2 = f(x^2) + y^2$$

ثابت کنید برد g بی کران است . (یعنی برای هر $M > 0$ یک y یافت می شود که $g(y) > M$).

2 - مربع $ABCD$ را مستطیل بندی کرده ایم طوری که هیچ نقطه ای، گوشه چهار مستطیل نیست. نقاط گوشه ای مستطیل ها را با دو رنگ طوری رنگ کرده ایم که هر دو گوشه روبرو قطری در یک مستطیل(از مستطیل بندی) ناهمرنگ شده است . اگر A, C همرنگ باشند، ثابت کنید B, D هم همرنگ هستند.

3 - فرض کنید p^m توانی از یک عدد اول باشد. کمترین d را بیابید که یک چندجمله ای تکین $Q(x)$ از درجه d با ضرایب صحیح یافت شود که برای هر n طبیعی داشته باشیم $p^m|Q(n)$.

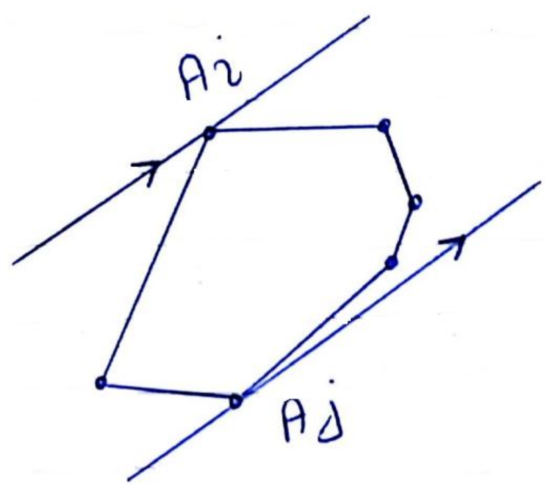
۴-نقطه دلخواه P روی ضلع BC از مثلث ABC انتخاب شده است. نیمساز زاویه های $\measuredangle APC$ و $\measuredangle APB$ نیمساز خارجی زاویه A را به ترتیب در X, Y قطع می کنند. دایره محیطی مثلث PXY ضلع BC را بار دیگر در نقطه Q قطع می کند. ثابت کنید :

$$\measuredangle BAP = \measuredangle CAQ$$

۵-الف) عدد m را آینه ای نامیم، اگر بسط قرینه آن در مبنای 10 را بتوان به تعدادی بلوک تقسیم کرد، طوری که ضرب این بلوک ها برابر m شود. به طور مثال برای عدد 123456، 6 و 543 و 21 چنین بلوک هایی هستند که اگر ضربشان برابر 123456 می شد این عدد را آینه ای می گفتیم.
همه اعداد آینه ای را بیابید که در بسط اعشاری آن‌ها تنها ارقام 1 و2و3 ظاهر شده باشد.

ب) عدد m را خوب گوییم اگر خود آن را بتوان به تعدادی بلوک تقسیم کرد که ضرب این بلوک ها برابر $\frac{m}{7}$ باشد.
ثابت کنید بی‌نهایت عدد خوب وجود دارد.

۶-فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ یک n ضلعی محدب باشد که اضلاع موازی ندارد. گراف G با رئوس $V_1, \dots, V_n$ را به این صورت به این n ضلعی متناظر میکنیم: بین V_j و V_i یال رسم میکنیم اگر دو خط موازی گذرنده از A_jو A_i بتوان رسم کرد که کل n ضلعی بین این دو خط (و نه روی آنها به جز A_jو A_i) قرار گیرد. تعداد گراف ها با رئوس شماره گذاری شده $V_1, \dots, V_n$ را بیابید که متناظر با یک n ضلعی محدب باشند (مثلا برای n=3,4 پاسخ به ترتیب برابر با ۴و۱ است).



سوالات آزمون المپیاد هندسه

به نام او

آزمون المپیاد هندسه پیشرفته

زمان آزمون: ۴ ساعت و نیم

پنجشنبه ۱۸ شهریور ۱۳۹۵

---

۱. دو دایره ω_1 و ω_2 در A و B متقاطعند. مماس بر دایره ω_1 در A دایره ω_2 را در C، و مماس بر دایره ω_2 در A دایره ω_1 را در D قطع می کند. فرض کنید خط CD، ω_1 و ω_2 را به ترتیب در E و F قطع کند.(E بین C و F قرار دارد.) از E بر AC عمود می کنیم تا ω_2 را در P و از F بر AD عمود می کنیم تا ω_1 را در Q قطع کند. ثابت کنید A و P و Q همخطند.

۲. مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید M وسط ضلع AC و D پای ارتفاع وارد شده بر ضلع BC باشد. نقطه X را به گونه ای در نظر می گیریم که زاویه های AXB و DXM برابر 90° باشند. (X و C در دو طرف BM قرار دارند.) ثابت کنید زاویه XMB دو برابر زاویه MBC است.

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$، محل برخورد AD و BC را P می نامیم. فرض کنید I_1 و I_2 مراکز دوایر محاطی مثلث های PAB و PDC باشند. اگر مرکز دایره محیطی مثلث PAB را O و مرکز ارتفاعی مثلث PDC را H بنامیم، در این صورت نشان دهید دوایر محیطی مثلث های AI_1B و DHC بر یکدیگر مماسند اگر و تنها اگر دوایر محیطی مثلث های AOB و DI_2C بر یکدیگر مماس باشند.

۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. خطوط AB و CD یکدیگر را در E و خطوط AD و BC یکدیگر را در F قطع می کنند. P را محل برخورد قطر های چهارضلعی در نظر بگیرید. فرض کنید ω_1 دایره ای است که از D می گذرد، بر AC در P مماس است و AD را در X قطع می کند و ω_2 دایره ای است که از C می گذرد، بر BD در P مماس است و BC را در Y قطع می کند. اگر دو دایره برای بار دوم در Q یکدیگر را قطع کنند ثابت کنید عمود وارد از P بر EF از مرکز دایره محیطی مثلث XQY می گذرد.

۵. آیا شش نقطه متمایز X_1، X_2، Y_1، Y_2، Z_1 و Z_2 در صفحه وجود دارند به صورتی که برای هر $1 \leq i, j, k \leq 2$، مثلث های $X_iY_jZ_k$ متشابه باشند؟

بارم هر سوال ۸ نمره است

موفق باشید.