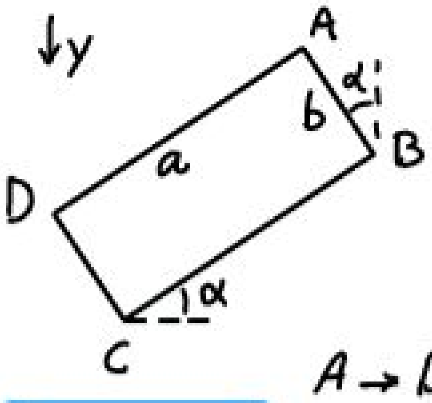
حل مرحله‌ی دوم المپیاد فیزیک دوره‌ی ۲۳ام

iopm.ir

جواب!



$$b\cos\alpha = h_1$$
$$a\sin\alpha = h_2 \quad \xrightarrow{\text{پایستگی انرژی}} \quad \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_1 \;,\; \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh$$
$$h_1 + h_2 = h$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta V_y}{a_y}}$$

$$A \to B :\; a_y = g\cos^2\alpha \;,\; \Delta V_y = \sqrt{2gh_1}\cos\alpha \to \Delta t_{AB} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$B \to C :\; a_y = g\sin^2\alpha \;,\; \Delta V_y = \left\{\sqrt{2gh} - \sqrt{2gh_1}\right\}\sin\alpha \to \Delta t_{BC} = \frac{1}{\sin\alpha}\left\{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\right\}$$

$$\to \boxed{T_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2b\cos\alpha}{g}} + \frac{1}{\sin\alpha}\left\{\sqrt{\frac{2(a\sin\alpha + b\cos\alpha)}{g}} - \sqrt{\frac{b\cos\alpha}{g}}\right\}}$$ الف

$$A \to D :\; a_y = g\sin^2\alpha \;,\; \Delta V_y = \sin\alpha\sqrt{2gh_2} \to \Delta t_{AD} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$D \to C :\; a_y = g\cos^2\alpha \;,\; \Delta V_y = \cos\alpha\left\{\sqrt{2gh} - \sqrt{2gh_2}\right\} \to \Delta t_{DC} = \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2h_2}{g}}\right\}$$

$$\to \boxed{T_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2a\sin\alpha}{g}} + \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\sqrt{\frac{2(b\cos\alpha + a\sin\alpha)}{g}} - \sqrt{\frac{2a\sin\alpha}{g}}\right\}}$$ ب

$$T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} - \sqrt{h_1 + h_2}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\to \boxed{f(a,b,\alpha) = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{b\cos\alpha} + \sqrt{a\sin\alpha} - \sqrt{a\sin\alpha + b\cos\alpha}\right)}$$ پ

$$\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)^2 = h_1 + h_2 + 2\sqrt{h_1h_2} \to \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} = \sqrt{h_1 + h_2 + 2\sqrt{h_1h_2}} \geqslant \sqrt{h_1 + h_2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \to f(a,b,\alpha) > 0 \\ \alpha = 0, \frac{\pi}{2} \to f(a,b,\alpha) = 0 \end{array}}$$ پ $$\to T_1 - T_2 = f/\sin\alpha \,(\tan\alpha - 1)$$

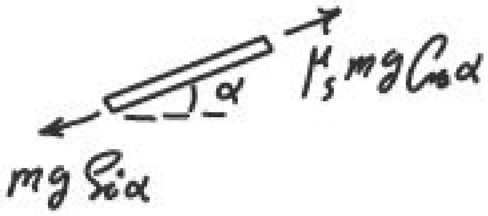
$$\to \begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} : T_1 < T_2 \\ \alpha = \frac{\pi}{4} : T_1 = T_2 \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} : T_1 > T_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \alpha = 0 \to T_2 \to \infty \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \to T_1 \to \infty \end{array}$$

$$\to \boxed{0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow T_1 < T_2}$$ د

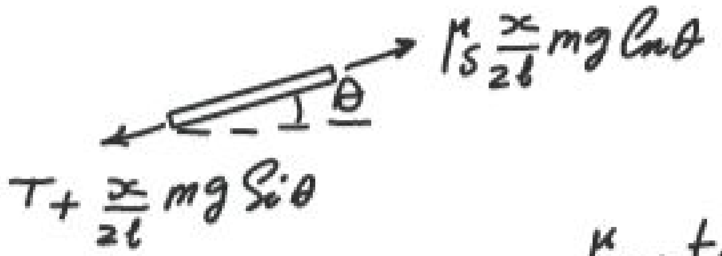
قشنگ‌تر بود به قسمت اضافه‌ای کردن «د» بدون نوشتن قسمت «پ» را بدست آورید!

Physics Olympiad

جواب ۲

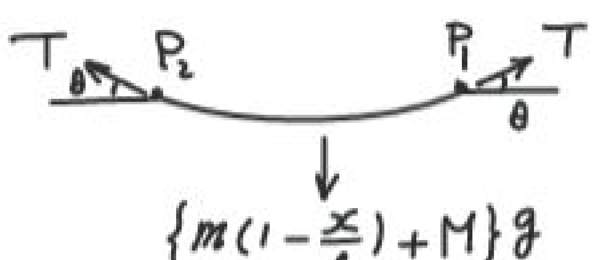


$$\rightarrow \mu_s = \tan\alpha$$



$$\rightarrow T_{P_1} = T_{P_2} = \frac{x}{2l} mg(\mu_s\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\mu_s = \tan\alpha \rightarrow \boxed{T_{P_1} = T_{P_2} = \frac{x}{2l} mg(\tan\alpha\cos\theta - \sin\theta)}$$ آ

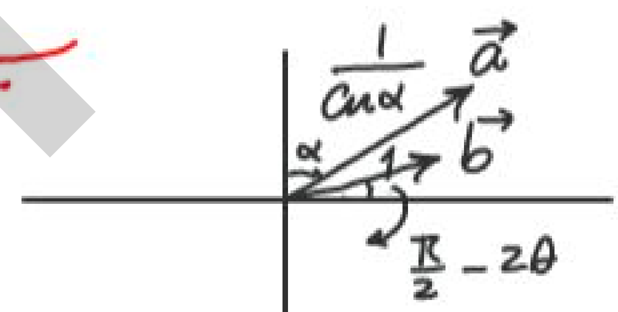


$$\rightarrow 2T\sin\theta = mg\left(1-\frac{x}{l}+\frac{M}{m}\right)$$

$$T \text{ طبق } \rightarrow \frac{x}{l}\sin\theta(\tan\alpha\cos\theta - \sin\theta)mg = mg\left(1-\frac{x}{l}+\frac{M}{m}\right)$$

$$\rightarrow x = l\,\frac{1+\frac{M}{m}}{1+\tan\alpha\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

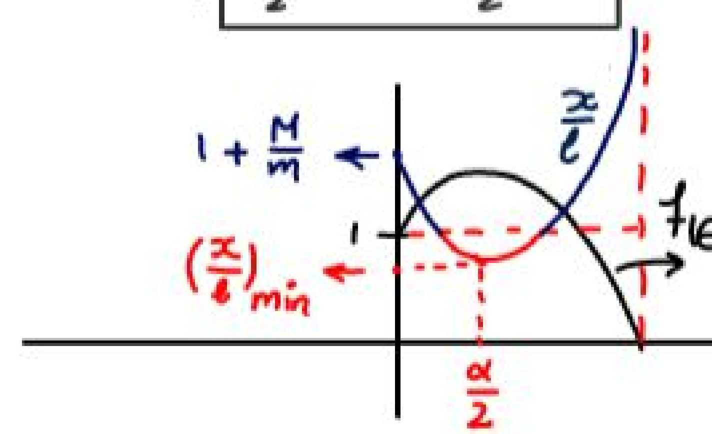
$$\rightarrow \boxed{x_{(\theta)} = 2l\,\frac{1+\frac{M}{m}}{1+\tan\alpha\sin 2\theta + \cos 2\theta}}$$ ب



$$\boxed{\frac{\pi}{2}-2\theta_0 = \frac{\pi}{2}-\alpha}$$

$$f(\theta) = 1+\vec{a}\cdot\vec{b}\,,\quad \vec{a} = \begin{pmatrix}\tan\alpha\\ 1\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

$$f_{(\theta_0)} = f_{(\theta)\,max} = 1+|\vec{a}||\vec{b}| = 1+\frac{1}{\cos\alpha}\,,\quad \theta_0 = \frac{\alpha}{2}$$



$$\rightarrow \boxed{x_{min} = 2l\,\frac{1+\frac{M}{m}}{1+\sec\alpha} = x_{(\theta=\frac{\alpha}{2})}}$$ ب

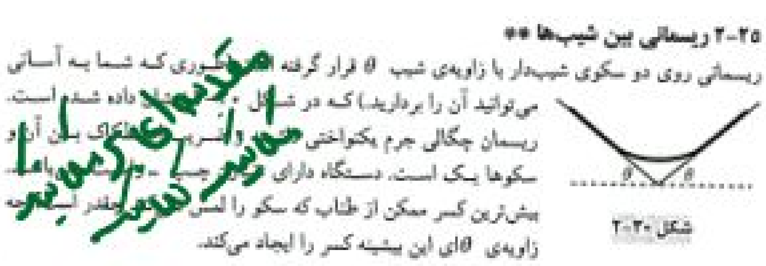
$$x > x_c = 2l\,\frac{1+\frac{M}{m}}{1+\vec{a}\cdot\vec{b}}\,,\quad 1+\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$$

$$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} > \frac{2l}{x}\left(1+\frac{M}{m}\right)-1 \rightarrow \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\cos(2\theta-\alpha) > \frac{2l}{x}\left(1+\frac{M}{m}\right)-1$$

$\frac{x}{l}<1$ ، فقط قسمت پُر نمودار قابل قبول است.

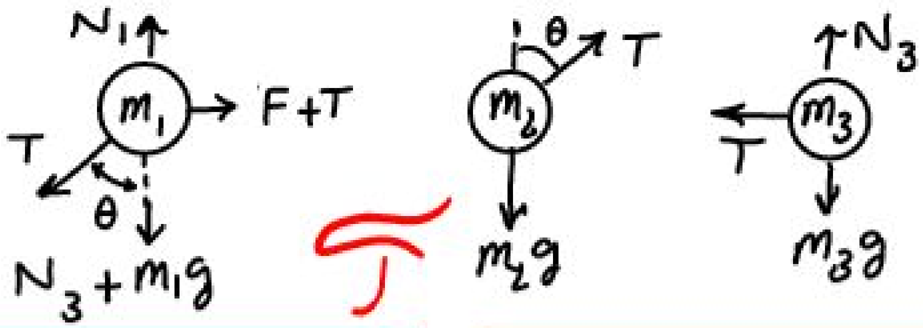
$$\boxed{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\left\{\left(\frac{2l}{x}\left[1+\frac{M}{m}\right]-1\right)\cos\alpha\right\} \leqslant \theta \leqslant \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left\{\left(\frac{2l}{x}\left[\frac{M}{m}+1\right]-1\right)\cos\alpha\right\}}$$ پ

ایده‌ی سؤال رو جناب موری به طراح دارند



Physics Olympiad

جواب ۳



آ

$$
\boxed{\begin{aligned}
&F+T(1-\sin\theta)=m_1a_1\\
&T\sin\theta=m_2a_{2x}\\
&T\cos\theta-m_2g=m_2a_{2y}\\
&-T=m_3a_{3x}
\end{aligned}}
$$

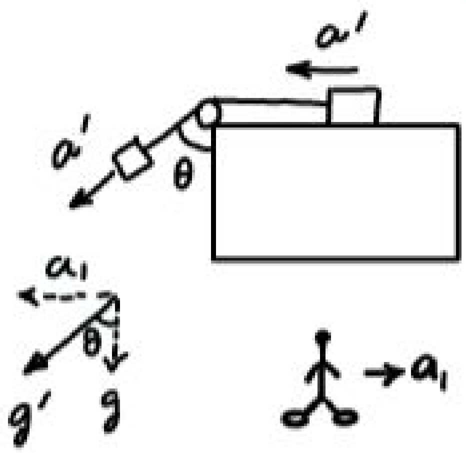
ب

$$
\boxed{\begin{aligned}
&l=x_3-x_1+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(h-y_2)^2}\\
&\ddot{l}=a_3-a_1+\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{x_1-x_2}{\sin\theta}\right]\\
&\to a_1(\csc\{\theta\}-1)+a_3-a_{2x}\csc\{\theta\}=0
\end{aligned}}
$$

پ

$$
\boxed{\begin{aligned}
&x_1-x_2=(h-y_2)\tan\theta\\
&a_1-a_{2x}=-a_{2y}\tan\theta
\end{aligned}}
$$

روش غیراخلاقی



برای آنکه θ تغییر نکند، g' (جاذبه از دید ناظر تخت) باید در راستای نخ باشد. بنابراین

$$\boxed{a_1=g\tan\theta}$$

ت

برای سیستم m_2 ، m_3 (پایستگی انرژی):

$$\frac{m_2g\sec\theta+m_3g\tan\theta}{m_2+m_3}=a' \to T=\frac{m_3}{m_1+m_3}g\{m_2\sec\theta+m_3\tan\theta\}-m_3a_1$$

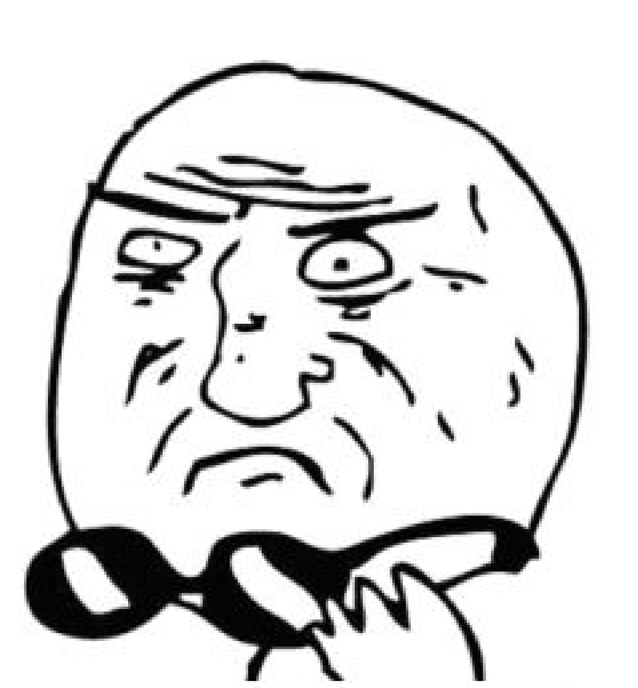
$$\to T=m_3g\left\{-\tan\theta+\frac{m_2\sec\theta+m_3\tan\theta}{m_2+m_3}\right\}$$

$$\to F=m_1g\tan\theta-m_3g\left\{-\tan\theta+\frac{m_2\sec\theta+m_3\tan\theta}{m_2+m_3}\right\}\{1-\sin\theta\}$$

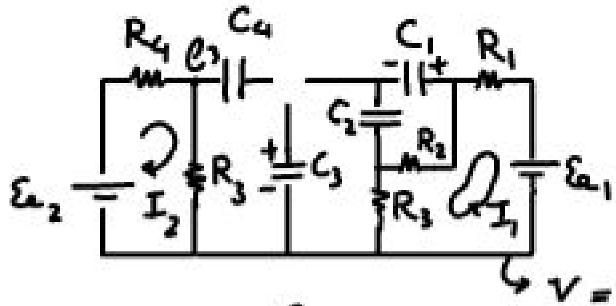
$$\to \boxed{F=g\tan\theta\left(m_1-\frac{m_2m_3}{m_2+m_3}\cdot\frac{[1-\sin\theta]^2}{\sin\theta}\right)}$$

ث

روش اخلاقی حل ۶ معادله ۶ مجهول است که در نهایت به جواب‌های بالا می‌رسید! (اسم طلا حتماً باید ۶تا را حل می‌کردید)



جواب ۴



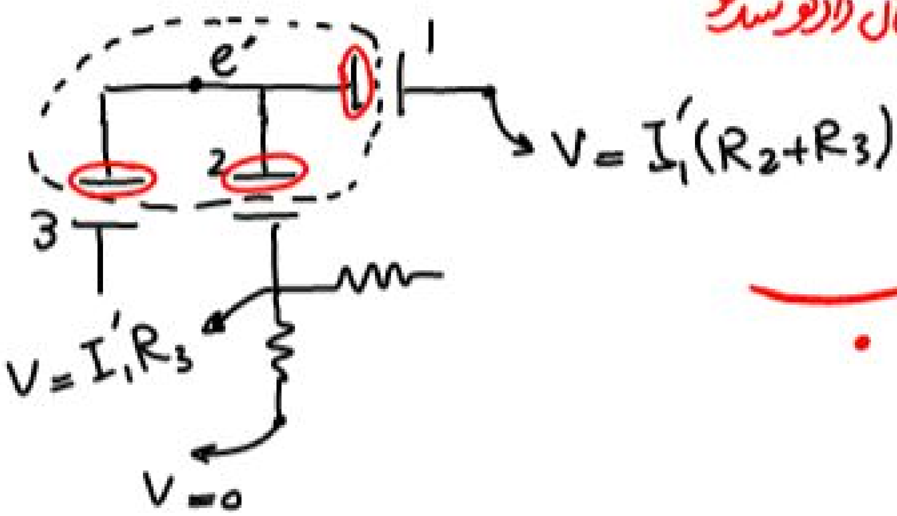
$$I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_3+R_4} \rightarrow e_3 = \frac{\varepsilon_2 R_3}{R_3+R_4} \rightarrow \boxed{q_3 = q_4 = \frac{\varepsilon_2 R_3 C_3 C_4}{(C_3+C_4)(R_3+R_4)}}$$

آ

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3} \rightarrow \Delta V_{12} = \frac{\varepsilon_1 R_2}{R_1+R_2+R_3} \rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = \frac{\varepsilon_1 R_2 C_1 C_2}{(C_1+C_2)(R_1+R_2+R_3)}}$$

آ

جمع بار صفحات آن دایره شده



ب

$$e'C_3 + (e' - I'R_3)C_2 + (e' - I'R_2 - I'R_3)C_1 = q_3$$

$$I'_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3}$$

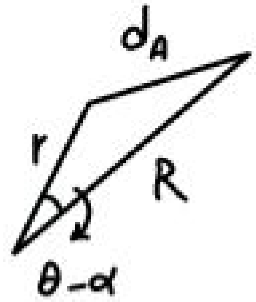
$$q'_3 = C_3 e' \quad , \quad q'_1 = C_1\left(I'[R_2+R_3] - e'\right)$$

$$q_3 = \frac{C\varepsilon_2}{4} \, , \quad I' = \frac{\varepsilon_1}{3R} \rightarrow e' = \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{4} + \varepsilon_1\right)$$

$$\rightarrow \boxed{q'_3 = \frac{C}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{4} + \varepsilon_1\right)} \, , \, \boxed{q'_1 = \frac{C}{3}\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{4}\right)}$$

د　　　د

جواب ۵



$-\pi < \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

آ

قانون کسینوس ها

$$\boxed{d_A = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta-\alpha)}} \quad , \quad d_B = \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos(\theta+\alpha)}$$

ب

$$\boxed{d = d_B - d_A = \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos(\theta+\alpha)} - \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)}}$$

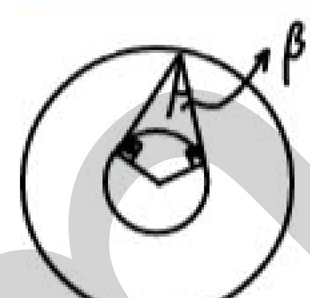
$$d = R\left(1-\frac{2r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right)^{1/2} - R\left(1-\frac{2r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right)^{1/2} \rightarrow d = r\left(\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)\right)$$

پ

$$\rightarrow \boxed{d = 2r\sin\alpha\sin\theta} \quad , \quad \Delta\phi = 2\pi\frac{d}{\lambda} \rightarrow \boxed{|\Delta\phi| = 4\pi\frac{r}{\lambda}\sin\alpha\sin|\theta|}$$

ت

بیشینه
هم پوشانی ندارند: حالت اول
هم پوشانی دارند: حالت دوم



$\frac{r}{R} \ll 1 \rightarrow \sin\beta = \beta = \frac{r}{R}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} = \alpha$

ث

بیشینه شدت

اگر $(\alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}) \rightarrow$ هم پوشانی ندارند $\rightarrow$ بیشینه یا اگر = کمترین فاصله $\Rightarrow$ $\boxed{\text{اگر } \alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \rightarrow \theta = \pm\alpha}$

تذکر: α را بین 0 تا $\frac{\pi}{2}$ می‌گیریم و با توجه به تقارن چیزی از کلیت کم نمی‌شود.

اگر $(\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}) \rightarrow$ برهم نهی در موج

نکته بسیار مهم این است که علاوه بر همسازی، فاصله نیز مهم می‌باشد و با توجه به استاندارد بودن انتشار پرتوها می‌توان فهمید شدت با $\frac{1}{D}$ که D فاصله است کاهش می‌یابد:

در حالتی که برهم نهی داریم

$$I_{total} \propto \left\{\frac{1}{d_1}\sin\phi + \frac{1}{d_2}\sin\left(\phi + 4\pi\frac{r}{\lambda}\sin\alpha\sin\theta\right)\right\}$$

$$\rightarrow I_{total} = I_0\left\{1+\frac{r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right\}\sin\phi + I_0\left\{1+\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right\}\left\{\sin\phi\cos\Delta\phi + \sin\Delta\phi\cos\phi\right\}$$

$$\frac{I_t}{I_0} = \sin\phi\left\{1+\frac{r}{R}\cos(\theta-\alpha) + \left(1+\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right)\cos\Delta\phi\right\} + \cos\phi\left\{1+\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right\}\sin\Delta\phi$$

$$= C_1\sin\phi + C_2\cos\phi = \sqrt{C_1^2+C_2^2}\,\sin(\phi+\Delta\phi')$$

بنابراین برای ماکزیمم شدن شدت نور باید $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ ماکزیمم شود:

$$\rightarrow f(\theta) = \cos\theta\{\cos\alpha(1+\cos\Delta\phi)^2 + \sin\Delta\phi\cos\alpha\} + \sin\theta\{\sin\alpha(1-\cos^2\Delta\phi) - \sin\alpha\sin\Delta\phi\}$$

حال باید θ ای را بیابیم که $f_{(\theta)}$ ماکزیمم شود:

$$\rightarrow \tan\theta = \tan\alpha\,\frac{\sin^2\Delta\phi - \sin\Delta\phi}{(1+\cos\Delta\phi)^2 + \sin\Delta\phi}$$

مخرج همواره مثبت است و $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (حالت $\alpha > \frac{\pi}{2}$ بررسی شد قبل تر) پس $\tan\alpha$ مثبت است
صورت کسر نیز منفی است یا صفر. می دانیم به ازای $\theta > \frac{\pi}{2}$ نیز فقط از یکی از منابع نور می رسد پس ماکزیمم شدت
نخواهد بود پس:

ب
$$\boxed{\text{if } \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \rightarrow \theta = 0}$$ بیشینه توان

البته بعید می دانم طراح سوال از شما روابط فوق را خواسته باشد اصلاً تنها هم فازی را برای ماکزیمم شدن
شدت کافی می دانستند البته فرض غلطی است.

ج
$$\boxed{\text{if } \alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \rightarrow |\theta| < \alpha + \frac{r}{R} - \frac{\pi}{2} \text{ or } \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} < |\theta| \leq \pi}$$ ناحیه نقاط کاملاً تاریک

$\text{if } \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \rightarrow$ باز هم در نقاطی که هیچ پرتوی نمی رسد
کمترین شدت را داریم زیرا هیچ دو نقطه ای
هم فاصله نیستند و حتی اگر اختلاف فاز π باشد باز هم شدت نور صفر نمی شود.

ج
$$\boxed{\rightarrow \text{if } \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R} < |\theta| \leq \pi}$$

تعداد این نوارهای روشن به تعداد هم فازی هاست: (در حالت تداخلی)

$$4\pi\frac{r}{\lambda}\sin\alpha\sin|\theta| = 2K\pi \quad (K \in I \text{ (اعداد صحیح)})$$

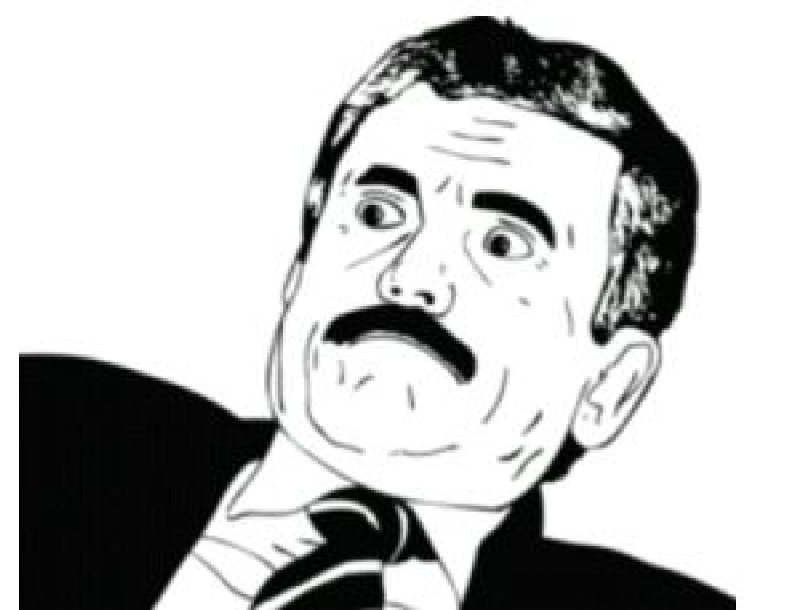
$$\rightarrow \sin|\theta| = \frac{K\lambda}{2r\sin\alpha} \rightarrow \frac{K\lambda}{2r\sin\alpha} \leq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}\right) \rightarrow$$ در غیر اینصورت تداخلی صورت نمی گیرد

$$\rightarrow K \leq \frac{2r\sin\alpha}{\lambda}\cos\left(\alpha - \frac{r}{R}\right) \rightarrow K = 0$$ هم جواب است

$$\rightarrow \boxed{N = 1 + 2\left\lfloor \frac{2r\sin\alpha}{\lambda}\left(\cos\alpha + \frac{r}{R}\sin\alpha\right)\right\rfloor}$$

ج

دو طرف نوار تشکیل می شود
(تقارن)



جواب سؤال ۶

$$T=\sqrt{\frac{2d}{a}}\ ,\ a=\frac{Eq}{m}=\frac{\varepsilon q}{md}\ \rightarrow\ \boxed{T_1=d\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon q}}}$$ آ

$$V_1^2=V_0^2+2ad=2\frac{\varepsilon q}{m}\ \rightarrow\ \boxed{V_1=\sqrt{2\frac{\varepsilon q}{m}}}$$ آ

$$V_2^2=\frac{2\varepsilon q}{m}(1+e^2)\ ,\ V_3^2=\frac{2\varepsilon q}{m}(1+e^2+e^4)\ ,\dots,\ V_k^2=V_{k-1}^2+\frac{2\varepsilon q}{m}$$

$$\rightarrow V_k^2=\frac{2\varepsilon q}{m}(1+e^2+e^4+\dots+e^{2k-2})\ \rightarrow\ \boxed{V_k=\sqrt{\frac{2\varepsilon q}{m}}\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}}$$ ب

$$\boxed{T_k=\frac{V_k-eV_{k-1}}{a}=\sqrt{\frac{2md^2}{\varepsilon q}}\left\{\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}-e\sqrt{\frac{1-e^{2k-2}}{1-e^2}}\right\}}$$ ب

$$\boxed{\bar I_k=\frac{nAq}{T_k}=nAq\sqrt{\frac{\varepsilon q}{2md^2}}\left\{\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}+e\sqrt{\frac{1-e^{2k-2}}{1-e^2}}\right\}}$$ د

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\bar I_k=nAq\sqrt{\frac{\varepsilon q}{2md^2}}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}}$$ ت

ت

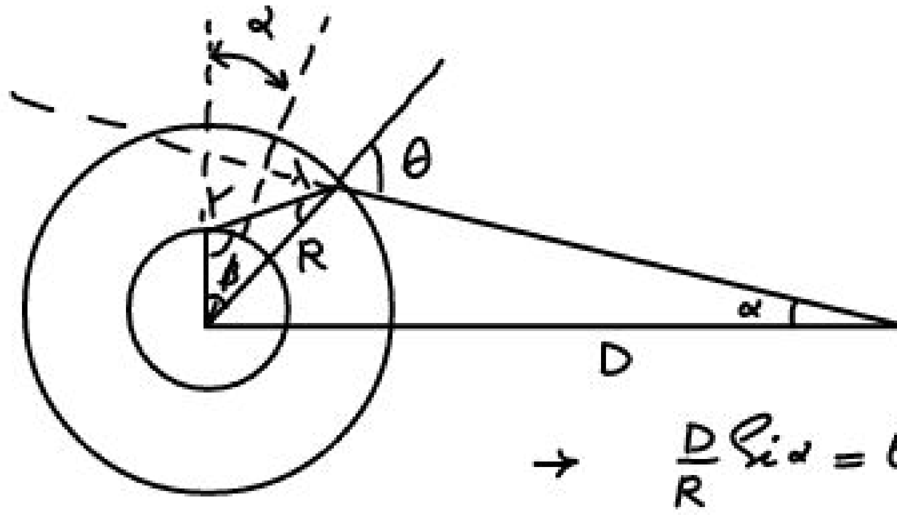
$$\boxed{\underset{(\text{انرژی})}{|\Delta E|}=\frac{1}{2}mV_k^2(1-e^2)nA=\varepsilon q(1-e^{2k})nA}$$ ک

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}|\dot E|=\lim_{k\to\infty}\frac{|\Delta E_k|}{T_k}=\frac{n\varepsilon qA}{\sqrt{\frac{2md^2}{\varepsilon q}}}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e}=\varepsilon q\sqrt{\frac{\varepsilon q}{2md^2}}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}nA}$$ ک

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\varepsilon\bar I_k=P=\varepsilon nAq\sqrt{\frac{\varepsilon q}{2md^2}}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}}$$ ج

واضح است طبق پایستگی انرژی می‌باید: $|\dot E|=\dot P$ ، که بدیهتاً درست است.

جواب ۷



با توجه به شکل :

$$D\sin\alpha = R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha\right)$$

$$\rightarrow \frac{D}{R}\sin\alpha = \cos(\beta-\alpha)$$

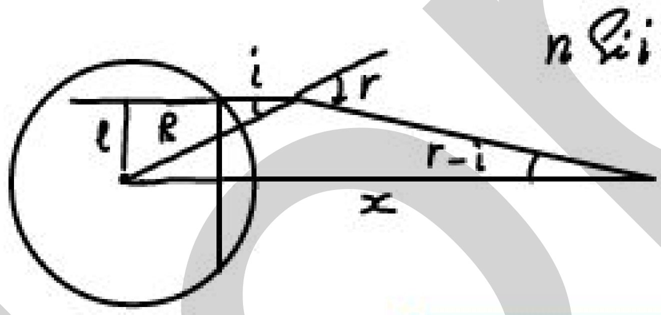
$$\rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{D}{R}\sin\alpha\right)+\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{\sin\beta = \cos\alpha\sqrt{1-\frac{D^2}{R^2}\sin^2\alpha}+\frac{D}{R}\sin^2\alpha}$$ الف

با توجه به قانون سینوس ها $\quad \frac{D}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{R}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{D}{R}\sin\alpha}$ ، $n\sin\lambda = \frac{D}{R}\sin\theta \rightarrow \boxed{\sin\lambda = \frac{D}{nR}\sin\alpha}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\gamma &= \sin(\pi-\lambda-\beta) = \sin(\lambda+\beta) = \frac{D}{nR}\sin\alpha\left\{\frac{D}{R}\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{1-\frac{D^2}{R^2}\sin^2\alpha}\right\}\\ &+\sqrt{1-\frac{D^2}{n^2R^2}\sin^2\alpha}\left\{\frac{D}{R}\sin^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\frac{D^2}{R^2}\sin^2\alpha}\right\}\end{aligned}}$$

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{r}{\sin\lambda} \rightarrow r = \frac{\sin\lambda}{\sin\gamma}R \rightarrow \boxed{d = 2R\frac{\sin\lambda}{\sin\gamma}}$$ ب



$$n\sin i = \sin r \rightarrow \sin r = n\frac{l}{R}$$

$$\frac{x}{\sin r} = \frac{R}{\sin(r-i)} \rightarrow x = \frac{nl}{\frac{nl}{R}\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}-\frac{l}{R}\sqrt{1-\frac{n^2l^2}{R^2}}}$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{Rn}{n^2-1}\left\{n\sqrt{1-\frac{l^2}{R^2}}+\sqrt{1-\frac{n^2l^2}{R^2}}\right\}}$$ د

جواب ۵

$$PV^\gamma = C \to P\left(\frac{nRT}{P}\right)^\gamma = C \to P^{1-\gamma}T^\gamma = C'$$

$$\to PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = cte. \to \boxed{\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\boxed{T_1 = T_C \,,\, T_3 = T_H} \quad , \quad P_1T_1^\alpha = P_2T_2^\alpha \to \boxed{T_2 = T_C\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$P_1T_4^\alpha = P_2T_3^\alpha \to \boxed{T_4 = T_H\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$Q = W + \Delta E_{in}$$

$Q_{12} = 0 \quad , \quad \Delta E_{12} = C_{mv}(T_2 - T_1) \quad n = 1$ مول گاز $\quad , \quad W_{12} = -C_{mv}(T_2 - T_1)$

$$Q_{23} = C_{mp}(T_3 - T_2) \,,\, \Delta E_{23} = C_{mv}(T_3 - T_2) \,,\, W_{23} = (C_{mp} - C_{mv})(T_3 - T_2)$$

چون C_{mp} و C_{mv} داده‌های مسئله‌اند بهتر است به همان صورت $C_{mp}-C_{mv}$ بماند و بجای R نگذاریم.

$$Q_{34} = 0 \,,\, \Delta E_{34} = C_{mv}(T_4 - T_3) \to W_{34} = C_{mv}(T_3 - T_4)$$

$$Q_{41} = C_{mp}(T_1 - T_4) \,,\, \Delta E_{41} = C_{mv}(T_1 - T_4) \to W_{41} = (C_{mp} - C_{mv})(T_1 - T_4)$$

$$\to W_{total} = C_{mp}(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) = C_{mp}\left\{T_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + T_3\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right)\right\}$$

$$\to \boxed{W_{total} = C_{mp}\left\{T_C\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] + T_H\left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}}$$

$$\eta = \frac{W_t}{Q_H} = \frac{C_{mp}(T_1 + T_3 - T_2 - T_4)}{C_{mp}(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

از روابط قسمت ب $\to \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \to \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$

$$W = 0 \to T_C\left(1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) + T_H\left(1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) = 0 \qquad r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = x$$

$$\to T_C + T_H - T_C x - \frac{T_H}{x} = 0 \to T_C x^2 - (T_C + T_H)x + T_H = 0$$

$$\to x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_H}{T_C}\right) \pm \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{T_H}{T_C}\right)^2}{4} - \frac{T_H}{T_C}} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_H}{T_C} + 1\right) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{T_H}{T_C} - 1\right)$$

$\to$ $r = 1$ تمام حالت‌ها منطبق می‌شوند ، $r = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (T_2 با T_3 منطبق می‌شوند یعنی فرایندهای هم‌فشار دیگر هم نمی‌افتند)

$$\eta = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad , \quad 1 \leq r \leq \left(\frac{T_H}{T_c}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\eta = 1 - r^{-\omega^2} \rightarrow \text{تابع صعودی} \rightarrow r = \left(\frac{T_H}{T_c}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{برای بازدهی بیشینه}$$

$$\rightarrow \boxed{\eta_{max} = 1 - \frac{T_c}{T_H}}$$

ب

$$W = C_{mp}\left\{T_c(1-x) + T_H\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\} \;,\; x = r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\frac{dW}{dx} = 0 \rightarrow -T_c + \frac{T_H}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{T_H}{T_c}}$$

$$\rightarrow \boxed{r = \sqrt{\left(\frac{T_H}{T_c}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \;,\; W_{max} = C_{mp}\left(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_c}\right)^2}$$

ج

$$\boxed{\eta_{W_{max}} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_H}}}$$

چ

$$\boxed{\frac{\eta_{W_{max}}}{\eta_{Carnot}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{T_c}{T_H}}}}$$

ح

مرحوم برایتون