

بنام خداوند قهار و مهربان

یادآوری: محاسبات

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

① $\frac{3}{3} \times \frac{6}{3} - \frac{2}{2} \times \frac{5}{2} = 2 - 1 = 1$

② $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} = 0.1 + 0.02 + 0.003 + 0.0004 = 0.1234$

③ $\sqrt{2} \times 1.04 - \frac{3 \times 1.04}{100} + \frac{1 \times 6}{100} \times 31 \Rightarrow (\sqrt{2} - \frac{3}{100}) \frac{1.04}{100} = \frac{1.04}{100}$

④ $2 - \frac{2 \times 14}{2 \times 14} = 2 - 1 = 1$

⑤ $\sqrt{13^2 - 5^2} + \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{144} + \sqrt{16} = 12 + 4 = 16$

⑥ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

تجربہ

عبارت جبری: ہر عبارت کی کہ شامل حروف (پہنچان، دستگیر) و اعداد باشند یکسری

قوانین

عدلیات ریاضی (+ ، - ، × ، ÷ ، √ ، و ...) عبارت جبری کے نام سے

$$2x + y^2 \quad x^2 - 1 \quad \sqrt{x - x} \quad \frac{2}{x} - 3 \quad x^{17} + 1 \quad x^2 + y^2$$

$$5x^{\frac{1}{2}} \quad 17 \quad \sqrt{x - 2} \quad \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{2x + 7}$$

انواع عبارت جبری:

1. یک جملہ ایہا: عبارت ہے جس میں کہ اولاً فقط شامل ضربی باشند ثانیاً ہر ایک ان

دستگیر ہائی عدد صفر کے طور پر نہ ہو، ادیکال نہ ہو تو ان باشند (یعنی تو ان دستگیر ہائی اعداد شامل ہوتے ہیں)

عبارت ہے

$$\frac{x^3}{x} = x^2 \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

x

x ≠ 0

جملہ 17، 13، x

۲- چند جمله‌ای‌ها: هر عبارتی که شامل حاصل جمع و تفریق چند جمله‌ای باشد به طوری که ساده‌شده‌ی

اگر هایش از یک جمله باشد. $x^2 + 4x - 2x^2 + 7$ $2x^3 + 4y$ $x^{17} + 1$

۲ جمله‌ای $3x^2 + 4y$ $x^2 + 4x - 2x^2 + 7$ $x^{17} + 1$ $x^{17} + 1$

۳- عبارت‌های کوی: هر عبارتی که حداقل یکی از متغیرها در مخرج کسر قرار گیرد.

مثال: $\frac{3}{x^2}$ و $2x^{-2}$

۴- عبارت‌های گنگ: عبارتی که حداقل یکی از متغیرها زیر رادیکال باشد. توان متغیر کمتر باشد.

عبارت گنگ است: $x^2 - x^3$ و $x^2 - \sqrt[3]{x}$ و $x^{\frac{1}{3}}$ و $x^4 - \sqrt{x}$

۵- عبارت نامعین (توانی): عبارتی که حداقل یکی از متغیرها در توان باشد.

مثال: $x-1$ و $\sqrt{x+2}$

درجه‌ی یک جمله‌ای: نسبت به یک متغیر عبارت است از توان آن متغیر در آن جمله

مثال: درجه‌ی y^2 نسبت به x = ۰ نسبت به y = ۲ نسبت به x^2y = ۳ نسبت به y = ۱

درجه‌ی چند جمله‌ای نسبت به یک حرف برابر است با بزرگترین درجه در آن جمله‌ها

مثال: $x^2y^3 - 2xy^2 + xy^2$ نسبت به x = ۲ نسبت به y = ۳

نسبت به x و y = ۱۱

اندازه‌ی توان چند جمله‌ای

یک جمله‌ای متجانس: جملاتی هستند که قسمت مرتبی آن‌ها کاملاً یکسان باشد (هم متغیر و هم توان)

مثال: xy^2 و $2xy^2$ و $3xy^2$ و $4xy^2$ همگی یکسان هستند

و $(2y)$ و $(3x)$ و xy هر سه متجانس نیستند

در جمع و تفریق چند جمله‌ای فقط جمله‌های متجانس با هم ساده می‌شوند

چند جمله همگن: تمام جمله‌ها بر حسب همی متغیرها هم درجه باشند.

مثال: $3x^2y - 7x^5 - xy^4$ همگن $x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4$ غیر همگن

مثال: اگر A و B دو چند جمله‌ای بر حسب x به ترتیب از درجه ۴ و ۵ باشند درجه هر

عبارت زیر را مشخص کنید. (نسبت به x) $Ax + B = x^4 + x^5 = x^4 + x^5$ (ج)

الف) $A+B = x^4 + (x^5) = x^4 + x^5 = x^5$

حاصل جمع و تفریق چند جمله‌ای درجه n لزوماً از درجه n نیست (حد اکثر n است)

و بی حاصل ضرب آن ها درجه بی 2n را داراست. $(x^2 - 2x) + (x^2 + 1) = 1 - 2x$

چند جمله‌ای همگن: اگر در یک چند جمله‌ای جای x و y را عوض کنیم حاصل عبارت

تغییر نکند آن عبارت نسبت به x و y همگن است.

مثال: غیر همگن $x^2 + xy + y^2$ همگن $2x^2 + 2y^2 - 5xy$

غیر همگن $5x - xy + y^2$

مجموع ضرب

مجموع ضرب چند جمله‌ای ها: $\phi(x) = 3x^2 - 2(x+1) \Rightarrow \phi(1) = 3(1)^2 - 2(1+1) = 3 - 4 = -1$

$2 - 2 \times 4 = -2 \times 4 = -8$

مجموع ضرب $(x+y) - 3x(x-y) \xrightarrow{x=y=1} 2 - 3 \times 0 = 2$

$2x^2 + 5xy + 10y^2 \xrightarrow{x=y=1} 2 + 5 + 10 = 17$

اعداد بی چند جمله‌ای:

مجموع چند جمله‌ای: تمام جملات تک تکرار شده می‌شوند $(2x - y + 7) = 2x - y + 7$

۲- جمع چند جمله‌ای: فقط جملات مشابه با هم ساده می‌شوند. بقیه راست می‌نویسیم

۳- تفاوت چند جمله‌ای ها: چند جمله‌ای دوم را فریب می‌کنیم و با اولی جمع می‌زنیم

مثال: $2x^2 - 4y + 7 - (3x^2 - 6y + 7) = 2x^2 - 4y + 7 - 3x^2 + 6y - 7 = -x^2 + 2y$

۴- ضرب چند جمله‌ای (الف) ضرب یک جمله در یک جمله: ضرب را در هم ضرب می‌کنیم و حرف را در هم

$$\left(\frac{2}{3}xy\right) \left(-\frac{4}{3}x\right) \left(-\frac{5}{3}x^2y\right) = 10x^3y^2 \quad \text{سؤال ۵}$$

ب) ضرب یک جمله ای در چند جمله ای: توزیع ریختنی روی ریختنی یا بخش:

$$a(b+c) = ab + ac$$

چند جمله ای استاندارد: اگر یک چند جمله ای را بر حسب توان های نزولی به بنویسیم یعنی

از بزرگترین درجه به کوچکترین درجه، به آن چند جمله ای استاندارد می گویند.

$$1 + x^2 - 7x \implies x^2 - 7x + 1 \quad \text{سؤال ۶}$$

سؤال نمونه: $3x^3 - x^2 + 3$ را بر حسب توانهای نزولی استاندارد کنید.

$$k = x+1 \implies x = k-1 \implies x^2 - 3x + 3 \implies (k-1)^2 - 3(k-1) + 3 \implies k^2 - 5k + 7$$

$$\implies (x+1)^2 - 3(x+1) + 7$$

سؤال: اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر باشد همه ی آن ها الزاماً صفر هستند.

$$x^2 + y^4 + z^6 + t^8 \implies x=y=z=t=0$$

مثال: اگر $\frac{ab}{a^2+4b^2} + (a+b-c)^2 + (b-dc)^2 = 0$ باشد مقدار $\frac{ab}{a^2+4b^2}$ را بیابید.

$$b-dc=0 \Rightarrow b=dc \quad a+b-c=0 \Rightarrow a+(dc)-c \Rightarrow a=-4c$$

$$\frac{(-4c)(dc)}{14c^2+4dc^2} = \frac{-20c^2}{41c^2} \Rightarrow -\frac{20}{41}$$

تشریح و ترفند:

سه جمله ای بر حسب x بیابید که اگر در جای خاصی قرار دهیم حاصل یک نه جمله ای درجه ۱ باشد.

$$(x^2 + x + 1)(x + ?) = 1 \quad \text{نه جمله ای درجه ۱} \quad x^2 + x + 1 = 1$$

تقسیم چند جمله‌ای :

۱- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای :

$$(4xy^2 - 12xy) : 2xy \Rightarrow \frac{4xy^2}{2xy} - \frac{12xy}{2xy} = 2x - 6y$$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

$$2x^3 - x^2 + 4 \quad | \quad 5x^2$$

الگوریتم تقسیم :

$$-x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x^2 + 0$$

۱- مقوم و مقسوم علیه را استاندارد کنیم

۲- اولین جمله مقسوم و اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کنیم $\rightarrow \frac{-x^3}{x^2} = -x$

۳- حاصل را در مقسوم علیه ضرب کرده و از مقسوم ~~کم~~ کم می‌کنیم.

$$-x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x^2 + 0$$
$$-(-x^3 - 0x^2)$$
$$\hline 4$$

۴- تکرار مراحل قبل تا جایی که درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر باشد. $4x + 4$

$$x^3 + 2x^2 + 1 \mid x - 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 2x^2 + 2x + 1 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 6x + 1 \end{array} \quad \text{مثال ۱}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 1 \\ -6x^2 + 12x \\ \hline 12x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x + 1 \\ -12x + 24 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^0 \mid x - 2 \Rightarrow \begin{array}{r} x^2 + 2x^0 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 2x^2 + 2 \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 4x + 2 \end{array}$$

مثال ۲

اگر عوامل تقسیم بیش از یک متغیر داشته باشند، تقسیم را فقط بر حسب یک متغیر انجام می‌دهیم.

(معمولاً بر حسب x) و با بقیه متغیرها مثل عدد رفتار می‌کنیم.

$$x^3 - 2xy^2 + 5y^3 \mid x - 2y \quad \text{مثال ۳}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2xy^2 \\ -x^2 + 2xy^2 \\ \hline 4xy^2 + 5y^3 \\ -4xy^2 + 8y^3 \\ \hline 13y^3 \end{array}$$

مثال ۳: m حقدار باشد عبارت $m^2 + 2m + 3x + x^3$ بر $x^2 + 4x + 2$ بخش پذیر باشد؟

$$Q(x)(x^2+4x+2) + R = P(x) \Rightarrow R = P(-2) = 2m^2 + 2m + 6 \Rightarrow 2m^2 + 2m = 0$$

مثال ۴: m و n حقدار باشد عبارت $n^3 - mx^2 + n(x-1)(x+2)$ بخش پذیر

باشد عبارت هم بر $x-1$ و هم بر $x+2$ بخش پذیر است.

$$n=1$$

$$-m+n = -1$$

$$n=2$$

$$\begin{cases} 2m+n = 1 \\ -m+n = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2m+n}{-m+n} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \frac{3m}{0} = -2 \Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow -m+n = -1 \Rightarrow -2+n = -1 \Rightarrow n = 1$$

$$n=2$$

$$m=3$$

اگر مقوم علیه عبارت درجه اول باشد برای محاسبه ی باقی مانده کافی است حقیقی و آن را در مقوم

قرار دهیم.

اما اگر مقوم علیه درجه اول نباشد از آنجا که باید اگر زما و صفر قرار داد به سزیه درجه اول را

بر حسب بقیه به دست آورده و در مقوم جایگزینی می کنیم.

مثال باقی مانده ی $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ بر $x^2 - 2x + 1$ چیست؟

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \quad x \cdot x^2 + 2x^2 - v \Rightarrow 2x + 1 - v = 2x + 1$$

سوال ۲: باقی مانده در v و $2x^2 - 2x^2$ بر $x^2 - 2$ را باید دید.

$$x^3 = 2x \Rightarrow x^3 = 2x \quad x^3 \cdot x - 2x^3 + v \Rightarrow 2x \cdot x - 4x + v \Rightarrow 2x^2 - 4x + v$$

سوال ۳: باقی مانده عبارت $x^3 - 2x^2$ بر $x^2 - 2$ را باید دید.

$$x^3 = x + 1 \Rightarrow x^3 = x - 1 \quad x^3 \cdot x^2 - 2x^2(x - 1) \Rightarrow x^5 - x^4 - 2x^4 + 2x^3 - 1$$

$$x^5 - x^4 - 2x^4 + 2x^3 - 1 = 2x^3 + 1 - x^4 - 2x^4 = -x^4 + 2x^3 + 1$$

اتحاد: هر تسادی که برای تمام تقادیر برقرار باشد، اتحاد می نامیم. مثلاً $x^2 + 1$ اتحاد است.

بنابر این بیشتر اتحادها وجود دارد. اما اتحادهای حریف انگشت شمارند. (کمتر از ۱۰ تا)

از اتحادها در ساده کردن عبارت ها و محاسبات الجبری استفاده می نمایند.

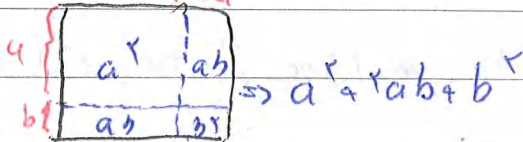
اتحادهای حریف؟

۱- اتحاد مربع دو جمله‌ای: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

سؤال: حاصل عبارت را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

الف) $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ ب) $(x^2 - 5x)^2 = x^4 - 10x^3 + 25x^2$

ج) $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ د) $(a+b)^2 = (a+b)^2 - 4ab + 4$
 $a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b + 4$



اثبات عددی $(a+b)^2$

مثال نمونه: اگر $a-b=5$ و $a^2+b^2=17$ حاصل عبارت تعیین کنید

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 17 \Rightarrow a^2 + b^2 = 17$

ب) $a-b=5 \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 25 \Rightarrow 17 - 2ab = 25 \Rightarrow -2ab = 8 \Rightarrow ab = -4$

ج) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 9 \Rightarrow 17 + 2\sqrt{ab} = 9 \Rightarrow 2\sqrt{ab} = -8 \Rightarrow \sqrt{ab} = -4$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \pm \sqrt{A} > 0$ $\sqrt{a+b} = \pm \sqrt{A}$

سؤال نمبر ۲: اگر $\frac{a^2 + b^2}{a - b} = 0$ ہو تو مقدار $a^2 + b^2 - 2ab$ کی

$$a^2 + b^2 = 2ab \quad A^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{0 + 2ab}{0} = \frac{2ab}{0}$$

$$A^2 = 0 \Rightarrow A = \sqrt{0}$$

سؤال نمبر ۳: اگر $\frac{x^2 + 1}{x} = 9$ ہو تو مقدار $\frac{x^2 + 1}{x^2}$ کی

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 9 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = 9 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} + 2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} + 1\right)^2 = 11^2$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} + 1 = 11 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = 10$$

سؤال نمبر ۴: اگر $a^2 - 2ab + 19 = 17$ ہو تو مقدار $a^2 + 4b^2 + 4ab$ کی

$$a^2 - 2ab = 19$$

$$4b^2 + 4ab = 17 \Rightarrow$$

$$a^2 + 4b^2 + 4ab = 17 \Rightarrow (a + 2b)^2 = 17 \Rightarrow a + 2b = \pm \sqrt{17}$$

نوٹ: نشان دہی عدد 1، 2، 17 سے ہونا چاہئے۔

$$\sqrt{17} + 2 \pm 19 \Rightarrow (\sqrt{17} + 2)^2 + 4 \pm 19 \Rightarrow (\sqrt{17} + 2 + 1)^2$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 a^2 $2ab$ b^2

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

۲- اتحاد مزدوج:

$$\text{الف) } (x^3)(x^3) = x^6 - 9 \quad \text{ب) } (2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9$$

$$\text{ج) } (1+x)(x-1) = 1-x^2 \quad \text{د) } (1-x)(1+x)(1+x)(1-x) = 1-x^4$$

$$\text{ه) } ((a+b)-c)((a+b)+c) = (a+b)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$$

$$\text{و) } (a+(b-c))(a-(b+c)) = (a+(b-c))(a-(b+c)) = a^2 - (b-c)^2$$

$$a^2 - b^2 + c^2 + 2bc$$

مثال کنید.

$$\text{الف) } 100^2 - 99^2 = (100+99)(100-99) = 19999$$

$$\text{ب) } 100^2 - 99^2 = (100+99)(100-99) = 199$$

$$\text{ج) } 100^2 - 99^2 = 99^2 - 98^2 = 97^2 - 96^2 = \dots = 2^2 - 1^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

٣. اتحاد مكعب

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x - \frac{1}{x})^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$(x^3 + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

شكل دوم اتحاد مكعب

مثال: إذا $a+b=4$ و $ab=0$ فما a^3+b^3 ؟

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow 4^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 0 \Rightarrow a^3 + b^3 = 64$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

٤. اتحاد مجلدى مشترك

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 \quad \rightarrow \quad (x-3)(x+7) = x^2 + 4x - 21$$

$$(x-3)(x-10) = x^2 - 13x + 30 \quad \rightarrow \quad (x^2+4)(x^2-10) = x^4 - 6x^2 - 40$$

$$و) (x^3 + 0)(x^3 + 2) = 9x^3 - 9x + 0$$

$$ز) (a + b)^2 - 4(a + b) + 4 = (a + b)^2 - 4(a + b) + 4 = a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4$$

د. اتحاد حلقه و الاغ (مجموعه تفاضل حسابات دو جمله)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$الف) (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 \quad ب) (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

$$ج) (x - 1)(x + 1)(x^2 + (x + 1))(x^2 - (x + 1)) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 - 1$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad ۶. اتحاد مربع سه جمله ای$$

$$(x^2 - x + 2)^2 = x^4 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 4x = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \quad ۷. اتحاد فرعی مربع$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

۱- اثبات دگرزی مکتوب:

معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{4x + \frac{1}{x^2}}{x^2} - \frac{4x - \frac{1}{x^2}}{x^2} = 4 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $x, y = \sqrt{\quad}$ و $xy = 1$ باشد مقدار عبارت زیر را

$$x^2(x+1)(x+y)(y+1) = ? \quad x^2 + x^2y^2 + y^2 = ? \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3$$

$$(x+y)^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 11$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 16 - 5 = 11$$

۱- تعمیم اثبات دگرزی: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)$

$$a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) + \dots + a_{n-1}a_n$$

$$(x^3 - 2x^2 + x + 1)^2 = x^6 + 4x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 2$$

$$-10x \Rightarrow x^6 + 4x^4 + x^2 - 10x^3 + 2x^5 - 4x + 2$$

1- تقسيم اى دمج مشترك : $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3(a+b+c)x^2$

$$+ (ab+ac+bc)x + abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^3(a+b+c+d)x^2(ab+cd+ac+bd$$

$$+dc)x + (abc+abd+abd+bdc)x + abdc$$

1- تقسيم حاق والخر:

$$\text{الف) } (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

$$\text{ب) } (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n$$

$$\text{مثال: } (a+b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \dots - b^n) = a^{2n} - b^{2n} \quad \text{زوج } n$$

$$\text{مثال: } (a-b)(a^n + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 - \dots + b^n) = a^{2n} + b^{2n} \quad \text{فرد } n$$

$$\text{مثال: } (a-b)(a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4) = a^5 - b^5$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc+ac) = a^3+b^3+c^3-3abc \quad \text{۱۲- اتحاد اولیه}$$

$$(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+a+b) = a^3+b^3+3ab-1$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc \quad \text{تفسیری اتحاد اولیه: ①}$$

$$(-1)+0+1 \Rightarrow (-1)^3+0^3+1^3=3(-1)(0)(1) = -3 \neq 0$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$(x+1)^3 + (x-2x)^3 + (x-4)^3 = 0 \quad \text{①}$$

$$(x+1)^3 + (x-2x)^3 + (x-4)^3 = 0 \quad \text{۳abc}$$

$$(x+1)^3 + (x-2x)^3 + (x-4)^3 = 3(x+1)(x-2x)(x-4) \Rightarrow$$

$$x(x+1)(x-2x)(x-4) \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

تقسیم بر اتحاد اولیة

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$$

این نتیجه خیلی مهم و کاربرد زیادی است چون قبلاً به کمک اتحاد مربع نشیمی قوی تر می شد

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \Rightarrow a = b = c \quad \text{اگر در آن بودیم به کمک اتحاد مربع}$$

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \text{۱۳- اتحاد دلاکر اثره}$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \quad \text{اثبات درستی}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

سوال نمونه: اگر $10 = x^2 + y^2$ حداقل مقدار عددی $x^2 + y^2$ چقدر است؟

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow 100 = 13(x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \frac{100}{13}$$

$$د) 10x(a-b) - 10x^r(a-b) = 2x(a-b)(5-rx)$$

$$ه) 4(x-y) + ax - ay = 4(x-y) + a(x-y) = (4+a)(x-y)$$

و)

دسته بندی

$$و) 2x - 5y + ax - ya = 2(x-2y) + a(x-2y) = (2+a)(x-2y)$$

$$ز) x^r - xy + 4x - 4y = x^r - xy + 4(x-y) = x(x-y) + 4(x-y) =$$

$$(4+x)(x-y)$$

$$ح) x + ky + kx + y = x(k+1) + y(k+1) = (x+y)(k+1)$$

اتحادها و دسته بندی

$$ط) x^r + 2x + 2 = (x+2)^r \quad (س) 2x^r - 2oxy + 2oy^r = 2(x-oy)^r$$

$$ث) 11x^r + 12x + 2 = 2(9x^r + 4x + 1) = 2((3x+1)^r)$$

$$ج) (x+y)^r + r(x+y)^{r-1} = (x+y+1)^r \quad (د) x^r - 5y^r = (x-2y)(x+2y)$$

$$پ) x^r + 4x^r + 4y^r = (x+2y)^r$$

مزدوج

$$\text{خ) } x^2 - 1 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

$$\text{ع) } (x+y)^2 - 20 = (x+y-5)(x+y+5)$$

$$\text{ف) } \underbrace{(2x-3)^2}_{A^2} - \underbrace{(1-2x)^2}_{B^2} \Rightarrow (2x-3)(1-2x) \left((2x-3) + (1-2x) \right) \Rightarrow$$

$$(-2)(2x-3) = -4(x-1)$$

$$\text{ص) } 4x^2(x+y)^2 - 1 = (2x(x+y)+1)(2x(x+y)-1) = (2x^2+2xy+1)$$

$$(2x^2+2xy+1)$$

قلمی مشترک

$$\text{ق) } x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x-8)$$

$$\text{ج) } 4x^2 - 14x + 10 = (2x-3)(2x-5)$$

$$\text{ش) } x^2 + 5xy - 24y^2 = (x+8y)(x-3y)$$

$$\text{ت) } (x+y)^2 - 3x - 2y + 2 = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2 = (x+y-1)(x+y-2)$$

$$ج) x^r \cdot y^r - 0 \cdot x - 0 \cdot y + x^r y^r = (x+y)^r - 0 \cdot (x+y)^r + 0 \cdot (x+y)^r - 0 \cdot (x+y)^r$$

د)

$$ج) x^r - rxy - r^2 y^2 = (x-ry)(x+ry)$$

اتحاد حلقه و لاغر

$$ط) x^r - 1 = (x-1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + x + 1)$$

$$ع) x^r y^r - 1 = x^r (y^r - 1) \Rightarrow x^r (y-1)(y^{r-1} + y^{r-2} + \dots + y + 1)$$

$$س) x^r - y^r = (x-1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + x + 1) - (y-1)(y^{r-1} + y^{r-2} + \dots + y + 1)$$

$$ز) x^r + y^r - 1 = (x+y+1)(x^{r-1} + y^{r-1} - xy - x - y)$$

$$ح) x^r + x^r y^r + y^r = (x^r + xy + y^r)(x - xy + y^r)$$

$$A) (ax + by)^r (ay + bx)^r = (a^2 + b^2)^r (x^2 + y^2)^r$$

روش سلسله مرتبی اجزات:

$$B) x^r + x^r - x^r - x^r = x^r(x-1) + x^r(x-1) = x^r(x-1)(x+1)$$

$$C) \sqrt{x^r - 1} = \sqrt{x(x^r + 1) - 1} = \sqrt{x^r + 1} \sqrt{x - 1}$$

$$D) x^r + x^r + 1 = x^r + x^r + 1 = (x^r + 1) + (x^r + 1) = (x^r + 1)(x^r + 1)$$

$$E) (x^r + 1) = (x^r + 1)(x^r - 1) = (x^r + 1)(x^r - 1)$$

$$F) x^r + x^r y^r + y^r = x^r + x^r y^r + y^r = (x^r + y^r) + x^r y^r = (x^r + y^r)(x^r + y^r)$$

$$G) x^r + x^r y^r + y^r = x^r + x^r y^r + y^r = (x^r + y^r) + x^r y^r = (x^r + y^r)(x^r + y^r)$$

$$H) x^r + x^r + 1 = (x^r + 1) + (x^r + 1) = (x^r + 1)(x^r + 1)$$

$$(x^r + 1)(x^r + 1) = (x^r + 1)(x^r + 1)$$

روش افزودن یک است

$$I) x^r + x^r = x^r + x^r = 2x^r = (x^r + 1) + (x^r + 1) = (x^r + 1)(x^r + 1)$$

$$I) \kappa^{\omega} \kappa_q | = \kappa^{\omega} - \kappa_q^{\tau} (\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) \Rightarrow \kappa^{\tau} (\kappa^{\omega} - 1) (\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) \Rightarrow$$

$$\kappa^{\tau} (\kappa - 1) (\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) (\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) = (\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) (\kappa^{\tau} (\kappa - 1) |) \Rightarrow$$

$$(\kappa_q^{\tau} \kappa_q |) (\kappa^{\tau} - \kappa_q^{\tau} |)$$