ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

مجموعه مهندسی شیمی

گروه مهندسی شیمی پارسه

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

پارسه ماهان سنجش
www.arshd87.blogfa.com
09195367497

بخش اول: معادلات دیفرانسیل

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

بخش دوم: کاربرد ریاضیات

فصل ششم

فصل هفتم

فصل هشتم

فصل نهم

بخش سوم: محاسبات عددی

فصل دهم

فصل یازدهم

فصل دوازدهم

فصل سیزدهم

فصل چهاردهم

فصل پانزدهم

فصل اول

معادلات دیفرانسیل

فصل اول ـ مقدمه

۱ـ ۱ مقدمه

هر رابطه‌ای بین تابع و مشتقات تابع و متغیرهای مستقل را معادله دیفرانسیل می‌نامند معادلات دیفرانسیل را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد:

۱. معادلات دیفرانسیل معمولی «ODE» : در این معادلات، تعداد متغیرهای مستقل به کار رفته در رابطه معادله دیفرانسیل، یک می‌باشد شکل کلی این نوع معادلات دیفرانسیل به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

۲. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای«PDE» : در این معادلات، تعداد متغیرهای مستقل به کار رفته در رابطه معادله دیفرانسیل، بیش از یک می‌باشد نمونه‌ای از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به شکیل زیر می‌باشد:

$$f\left(x, y, g(x, y, z), \frac{\delta g}{\delta x}, \frac{\delta g}{\delta y}, \frac{\delta g}{\delta z}, \frac{\delta^2 g}{\delta x \delta y}, \ldots\right) = 0$$

۱ـ ۲ تعاریف

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق را در معادله دیفرانسیل می‌گویند.

درجه معادله دیفرانسیل: توان بالاترین مرتبه مشتق را در معادله دیفرانسیل گویند.

البته لازم به ذکر است که در مورد معادلات دیفرانسیل غیرخطی، درجه تعریف نمی‌شود.

معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه دوم $\left(y'''^{2}\right) - 2y'' + 4xy = \cos x$

معادله دیفرانسیل مرتبه سوم $(y''')^2 + e^{y''} + 4xy' = \cos(xy')$

به خاطر وجود عبارات $\cos(xy')$ و $e^{y''}$، درجه در معادله تعریف نمی‌شود.

اگر بتوانیم معادله دیفرانسیل را بر حسب متغیر وابسته و مشتقات آن، به فرم خطی بنویسیم در این صورت معادله دیفرانسیل را خطی می‌گویند (مانند معادله پایین)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_{(x)}$$

در معادله بالا، اگر $g_{(x)} = 0$ باشد معادله دیفرانسیل را همگن گویند و در غیر این‌صورت معادله دیفرانسیل را غیرهمگن گویند.

مثال : کدام گزینه در مورد دیفرانسیل زیر صحیح است؟

$$(y''')^2 + 4xy'' + x^2y' + y + \sin x = 0$$

۱) مرتبه سوم، درجه اول و خطی و غیر همگن

۲) مرتبه سوم، درجه اول و غیر خطی و همگن

۳) مرتبه دوم، درجه سوم، غیر خطی و غیر همگن

۴) مرتبه سوم، درجه دوم، غیر خطی و غیر همگن

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$(y''')^2 \leftarrow$ مرتبه سوم ـ درجه دوم و غیر خطی «توانش دو می‌باشد.»

$\sin x \leftarrow$ غیر همگن

۱ـ ۳ جواب‌های معادله دیفرانسیل

هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب آن معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. جواب‌های معادله دیفرانسیل به چهار نوع تقسیم می‌شوند.

جواب عمومی: هر معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب و حتی بی‌نهایت جواب داشته باشد که تعداد زیادی از آنها را می‌توان تحت یک عبارت که دارای ثوابتی باشد، نشان داد، که به این عبارت ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل گوییم.

$y'' = 4 \to y = 2x^2 + c_1x + c_2 \leftarrow$ جواب عمومی

جواب خصوصی: اگر با توجه به شرایط اولیه و شرایط مرزی، ثوابت جواب عمومی را مشخص کنیم به عبارت به دست آمده جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

$$\left.\begin{array}{l} y'' = 4 \\ y_{(0)} = 0 \\ y'_{(1)} = 5 \end{array}\right\}$$

$$y'' = 4 \to y' = 4x + C_1 \to y = 2x^2 + C_1x + C_2$$

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow y_{(0)} = 2\times 0 + C_1 \times 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y'_{(1)} = 5 \Rightarrow y'_{(1)} = 4\times 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$\Rightarrow y=2x^2+x \leftarrow$ جواب خصوصی

جواب منفرد: جواب منفرد، آن دسته از جواب‌های معادله دیفرانسیل است که از جواب عمومی معادله دیفرانسیل به دست نمی آید به عنوان مثال به معادله زیر که معادله کلرو[1] نام دارد دقت کنید:

معادله کلرو $\rightarrow \quad y=xy'-y'^2 \Rightarrow y=Cx+C^2 \leftarrow$ جواب عمومی

حال اگر دقت کنید ملاحظه می‌کنید که رابطه $y=\frac{x^2}{4}$ نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند به این جواب $\ll y=\frac{x^2}{4} \gg$ که از جواب عمومی به دست نمی آید، جواب منفرد معادله دیفرانسیل می‌گویند.

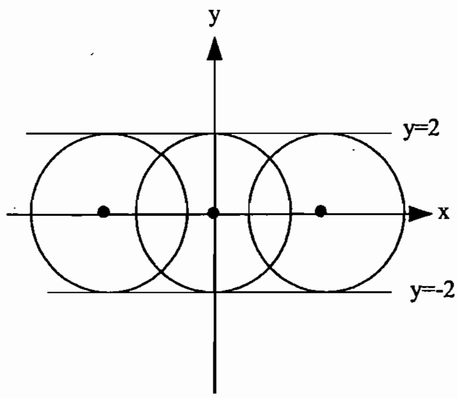
$$\left.\begin{array}{l} y=xy'-y'^2 \\ y=\frac{x^2}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{4}=x(\frac{x^2}{4})'-\left((\frac{x^2}{4})'\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4}=x\times\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}$$

جواب غیر عادی: جواب غیر عادی یا پوش منحنی، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های نمایش جواب عمومی معادله دیفرانسیل مماس باشد.

$1+y'=\frac{4}{y^2} \rightarrow (x-c)^2+y^2=4$ جواب عمومی

منحنی نمایش جواب‌های عمومی، دایره هایی هستند با شعاع ۲ که مرکز آنها نقاط $\begin{vmatrix} x=c \\ y=0 \end{vmatrix}$ می‌باشد در این صورت خطوط $y=-2$ و $y=2$ جواب‌های غیر عادی معادله دیفرانسیل می‌باشند که بر تمام این دوایر مماس می‌باشند.



برای به دست آوردن جواب غیر عادی، ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم $f_{(x,y,c)}$ و سپس c را از جواب عمومی حذف می‌کنیم از طریق حل معادله زیر:

$$\left| \begin{array}{l} F_{(x,y,c)}=0 \\ \frac{\delta F_{(x,y,c)}}{\delta C}=0 \end{array} \right.$$

$1+y'=\frac{4}{y^2} \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4 \leftarrow$ جواب عمومی

[1] برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادله کلرو، کافی است در معادله به جای y' مقدار ثابت c را جایگزین کنید.

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=4\\ \dfrac{\delta F}{\delta C}=0\Rightarrow 2(x-c)+0=0\Rightarrow x=c\end{cases}$$

$$x=c\Rightarrow (c-c)^2+y^2=4\Rightarrow 4\Rightarrow y=\pm 2$$

نکته : معادلات دیفرانسیل خطی، جواب غیر عادی ندارند.

نکته : برخی از معادلات دیفرانسیل، جواب عمومی ندارند.

$$|y|+|y'|=0\to y=0$$

۱ـ ۴ تشکیل معادله دیفرانسیل

برای تشکیل معادله دیفرانسیل از یک رابطه، لازم است ثوابت موجود در رابطه را از طریق مشتق گرفتن حذف کنیم واضح است که اگر یک رابطه دارای n ثابت باشد لازم است که n بار مشتق بگیریم.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیلی که به شکل $y=Ax+B$ می‌باشد این معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

حل : به مقدار ثابت‌ها باید از رابطه مشتق بگیریم ـ تعداد ثوابت (B,A) دو تا می‌باشد پس

$y=Ax+B\to y'=A\to y''=0\leftarrow$ معادله دیفرانسیل

مثال : معادله دیفرانسیلی که $y=\sin(x+A)$ «A مقدار ثابت» حل عمومی آن باشد کدام است؟ (مهندسی شیمی آزاد ۸۱)

۱) $(y')^2=1-y^2$ ۲) $y'=1-y^2$ ۳) $y'=1+y^2$ ۴) $(y')^2=1+y^2$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y=\sin(x+A)\to y'=\cos(x+A)$$

$$\left.\begin{aligned}y^2&=\sin^2(x+A)\\ y'^2&=\cos^2(x+A)\end{aligned}\right\}\ y^2+y'^2=\sin^2(x+A)+\cos^2(x+A)=1$$

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل از معادله دسته جواب از بسط دترمینان استفاده می‌کنیم.

$$y=f_1(x)\quad,\quad y=f_2(x)\quad,\quad y=f_3(x)$$

فرض کنید $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل باشند در این صورت برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل دترمینان مقابل را حساب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} y & f_{(x)} & f_{2(x)} & f_{3(x)}\\ y' & f'_{1(x)} & f'_{2(x)} & f'_{3(x)}\\ y'' & f''_{1(x)} & f''_{2(x)} & f''_{3(x)}\\ y''' & f'''_{1(x)} & f'''_{2(x)} & f'''_{3(x)}\end{vmatrix}=0$$

مثال : معادله دیفرانسیل را با دسته جواب‌های زیر تشکیل دهید.

$$y_1 = x \quad y_2 = e^x$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & x & e^x \\ y' & 1 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0$$

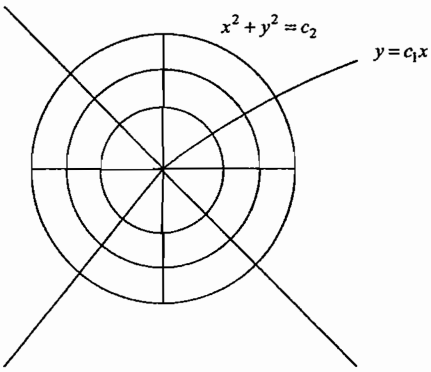
$$= ye^x + y''xe^x - y''e^x - y'xe^x = 0 \overset{\div e^x}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow y''(x-1) - xy' + y = 0$$

۱ـ ۵ مسیرهای قائم بر دسته منحنی

اگر خطی به یک دسته منحنی عمود باشد گوییم خط مزبور مسیر متعامد منحنی می‌باشد به عنوان مثال خط $y = c_1 x$ مسیر متعامد منحنی‌های $x^2 + y^2 = c_2$ می‌باشد.

که در این صورت گوئیم دسته منحنی‌های $y = C_1 x$ بر دسته منحنی $x^2 + y^2 = c_2$ عمود می‌باشد.



برای به دست آوردن دسته منحنی‌های متعامد، ابتدا از رابطه منحنی مشتق می‌گیریم سپس به جای y' عبارت « $-\frac{1}{y'}$ » قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.[2] جواب‌های معادله مزبور همان دسته منحنی‌های متعامد می‌باشند.

مثال : دسته منحنی‌های عمود بر منحنی‌های $x^2 + y^2 = c$ را به دست آورید.

حل :

$$x^2 + y^2 = C \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} 2x + 2yy' = 0$$

$$\xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y}} 2x - \frac{2y}{y'} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2y}{y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow \frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} \Rightarrow \text{Ln}x = \text{Ln}y \Rightarrow y = mx$$

[2] البته روش حل معادلات دیفرانسیل در بخش‌های بعدی بررسی می‌گردد.

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۲ـ ۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ممکن است به صورت‌های زیر نشان داده شود.

$y' = f_{(x,y)}$

$x = f_{(y,y')}$

$y = f_{(x,y')}$

برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول روش‌های مختلفی وجود دارد به همین جهت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را به پنج قسمت زیر تقسیم می‌کنیم و در ادامه به بررسی روش‌های حل این معادلات می‌پردازیم.

الف) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک پذیر

ب) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن

ج) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول دیفرانسیل کامل

د) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

هـ) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خاص مانند معادله برنولی و معادله لاگرانژو و معادله کلرو

۲ـ ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک پذیر

هرگاه بتوان معادله دیفرانسیل مرتبه اول را به شکل زیر بنویسیم، گوییم معادله تفکیک پذیر است.

$$y' = f_{1(x)} \times f_{2(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f_{1(x)} f_{2(y)}$$

که با استفاده از انتگرال گیری می‌توان جواب معادله را به دست آورد.

مثال : جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$y'=e^{x+y}$$

حل :

$$y'=e^{x+y}=e^{x}.e^{y}\Rightarrow y'=\underset{e^{x}}{\underset{\uparrow}{f_1(x)}}\ \underset{e^{y}}{\underset{\uparrow}{f_2(x)}}$$

پس معادله تفکیک‌پذیر است.

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}e^{y}\Rightarrow\frac{dy}{e^{y}}=e^{x}dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int e^{-y}dy=\int e^{x}dx=-e^{-y}=e^{x}+c\Rightarrow e^{x}+e^{-y}=c$$

مثال : جواب $e^{\sin x}dy+(y-1)\cos xe^{\sin x}dx=0$ کدام است؟ (فرآوری و انتقال گاز ۸۴)

۱) $\frac{y}{e^{\sin x}}+1=c$ ۲) $ye^{\sin x}-1=ce^{\sin x}$ ۳) $e^{\sin x}+y=cye^{\sin x}$ ۴) $ye^{\sin x}-e^{\sin x}=c$

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$e^{\sin x}dy+(y-1)\cos xe^{\sin x}dx=0\overset{\div e^{\sin x}}{\Rightarrow}$$

$$=dy+(y-1)\cos xdx=0\xrightarrow{\text{معادله تفکیک‌پذیر}}\frac{dy}{y-1}=-\cos xdx$$

$$\int\frac{dy}{y-1}=\int-\cos xdx=Ln(y-1)=-\sin x+c\Rightarrow$$

$$y-1=c_1e^{-\sin x}\Rightarrow y=c_1e^{-\sin x}+1\xrightarrow{\times e^{\sin x}}ye^{\sin x}=c_1+e^{\sin x}$$

نکته : معادلات به فرم $y'=f_{(ax+by+c)}$ را با تغییر متغیر u=ax+by+c می‌توان به معادلات تفکیک پذیر تبدیل کرد.

مثال : جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیربه چه صورت می‌باشد؟

$$y'=\tan(x+y)-1$$

حل :

$$y'=\tan(x+y)-1$$

$$\Rightarrow x+y=u\overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow}1+y'=u'\Rightarrow y'=u'-1$$

$$u'-1=\tan(u)-1\Rightarrow\frac{du}{dx}=\tan(u)\Rightarrow\cot g(u)du=dx$$

$$\Rightarrow\int\cot g(u)du=\int dx\ \Rightarrow\ Ln|\sin(u)|=x+C_1$$

$$\Rightarrow \sin u = ce^x \Rightarrow u = \operatorname{Arcsin}(ce^x) \Rightarrow y + x = \operatorname{Arcsin}(ce^x)$$

۲ـ ۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن

تابع $f_{(x,y)}$ را همگن از درجه n می‌گوییم اگر داشته باشیم:

$$f_{(\lambda x,\lambda y)} = \lambda^n f_{(x,y)}$$

به عنوان مثال تابع مقابل همگن از درجه 4 می‌باشد.

$$f_{(x,y)} = x^2 y^2 \sin\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^2 \times (\lambda y)^2 \sin\frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda^4 x^2 y^2 \sin\frac{x}{y}$$

معادله دیفرانسیل $P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ را معادله همگن می‌گویند اگر $p_{(x,y)}$ و $Q_{(x,y)}$ هر دو توابعی **همگن و از یک درجه باشند.**

برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن از تغییر متغیر $y = zx$ استفاده می‌کنیم.

$$y = zx \Rightarrow y' = xz' + z$$

که با جای گذاری در معادله همگن، به معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر تبدیل می‌شود.

مثال : جواب عمومی معادله روبرو کدام است؟ $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{xy}$ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $y = x[\operatorname{Ln}x + c]^2$

۲) $y = x[C\operatorname{Ln}x + 1]^{\frac{1}{2}}$

۳) $y = x[\operatorname{Ln}\sqrt{x} + C]^2$

۴) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x}\operatorname{Ln}\sqrt{x} + C$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{xy} \Rightarrow xdy = (\sqrt{xy} + y)dx$$

$$Q_{(x,y)} = x$$

$Q_{(x,y)}$ همگن از درجه یک می‌باشد.

$$\rho_{(x,y)} = \sqrt{xy} + y$$

$P_{(x,y)}$ همگن از درجه یک باشد.

پس نتیجه می‌گیریم که معادله همگن می‌باشد و از تغییر متغیر $y=zx$ استفاده می‌کنیم.

$$y = zx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{xy} \overset{\div x}{\Rightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\text{تغییر متغیر} \Rightarrow z+x\frac{dz}{dx}=z+z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=z^{\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \text{تفکیک پذیر}$$

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}=\frac{dx}{x} \Rightarrow 2z^{\frac{1}{2}}+c=\mathrm{Ln}x \Rightarrow \mathrm{Ln}x=2(\frac{y}{x})^{\frac{1}{2}}+C \overset{\div 2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}x+C'=[\frac{y}{x}]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y=x[\mathrm{Ln}\sqrt{x}+c]^2$$

نکته : تمام معادلات دیفرانسیل به شکل $y'=f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن می‌باشند و با استفاده از تغییر متغیر $y=zx$ حل می‌شوند.

نکته : در مورد معادلات دیفرانسیل به شکل $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ باشد با استفاده از یکی از متغیرهای $z=a_1x+b_1y+c_1$ یا $z=a_2x+b_2y+c_2$ معادله به معادله تفکیک پذیر تبدیل می‌شود.

ب) اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ باشد در این صورت با استفاده از یکی از تغیر متغیرهای $z=a_1x+b_1y$ یا $z=a_2x+b_2y$ معادله به معادله همگن تبدیل می‌شود.

ج) اگر $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ باشد در این صورت نقطه تقاطع دو خط $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ را پیدا می‌کنیم ـ به عنوان مثال (x_0,y_0) ـ و با استفاده از تغییر متغیر زیر، معادله را به معادله همگن تبدیل می‌کنیم.

$$x=x_0+X \Rightarrow dx=dX$$

$$y=y_0+Y \Rightarrow dy=dY$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right) \Rightarrow \frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

۲ـ ۴ معادله دیفرانسیل مرتبه اول دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل $P_{(x,y)}dx+Q_{(x,y)}dy=0$ را یک معادله دیفرانسیل کامل می‌گویند اگر داشته باشیم:

$$\frac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y}=\frac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}$$

در این صورت تابع $u=u_{(x,y)}$ وجود دارد که:

$$\left.\begin{aligned} 1: &\quad \frac{\delta y}{\delta x}=P_{(x,y)} \\ 2: &\quad \frac{\delta y}{\delta y}=Q_{(x,y)} \end{aligned}\right\}$$

که از طریق معادلات ۱ و ۲ می‌توان تابع u را به دست آورد.

مثال : معادله دیفرانسیل $(x^{-1}+y^{-1})dx+2axy^{-2}dy$ کامل است اگر مقدار a برابر باشد با: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$P_{(x,y)}=(x^{-1}+y^{-1})\Rightarrow\frac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y}=-y^{-2}$$

$$Q_{(x,y)}=2axy^{-2}\Rightarrow\frac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}=2ay^{-2}$$

شرط کامل بودن معادله $-y^{-2}=2ay^{-2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

مثال : جواب معادله: $(3x^2e^y+2xy)dx+(x^3e^y+x^2)dy=0$ کدام است؟ (مهندسی نفت ۸۴)

۱) $x^3(e^y+y)=c$ ۲) $x^3e^y+xy^2=c$ ۳) $x^3e^y+x^2y=c$ ۴) $x^3e^y+3x^2y=c$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$P_{(x,y)}=3x^2e^y+2xy\Rightarrow\frac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y}=3x^2e^y+2x$$

$$Q_{(x,y)}=x^3e^y+x^2\Rightarrow\frac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}=3x^2e^y+2x$$

پس معادله کامل است اکنون تابع u را در نظر می‌گیریم که:

$$\frac{\delta u}{\delta y}=Q_{(x,y)}$$

و

$$\frac{\delta u}{\delta x}=p_{(x,y)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=x^3e^y+x^2\Rightarrow u=\int(x^3e^y+x^2)dy$$

$$\Rightarrow u=x^3e^y+x^2y+g_{(x)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=P_{(x,y)}\Rightarrow\underbrace{3x^2e^y+2xy+g'_{(x)}}_{\frac{\delta u}{\delta x}}=\underbrace{3x^2e^y+2xy}_{P_{(x,y)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'_{(x)}=0\Rightarrow g_{(x)}=c$$

پس جواب نهایی به صورت زیر می‌باشد.

$$u_{(x,y)}=x^3e^y+x^2y+c$$

عامل انتگرال ساز

اگر معادله $P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = 0$ کامل نباشد در برخی موارد می‌توان با ضرب کردن تابع F در طرفین معادلـه، آن را بـه معادلـه کامل تبدیل نمود در این صورت F را عامل انتگرال ساز می‌گویند.

در برخی حالت می‌توان عامل انتگرال ساز را با استفاده از روابطی تعیین نمود که دو حالت زیر از اهمیت بیشتری برخوردار است.

۱: اگر $\dfrac{\dfrac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y} - \dfrac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}}{Q_{(x,y)}} = f_{(x)}$ باشد در این صورت $F = e^{\int f_{(x)}dx}$

۲: اگر $\dfrac{\dfrac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y} - \dfrac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}}{P_{(x,y)}} = f_{(y)}$ باشد در این صورت $F = e^{-\int f_{(y)}dx}$

مثال : معادله $dx + 2xydy = ye^{-y^2}dy$ مفروض است یک فاکتور انتگرال این معادله برابر است با:

۱) e^{y^2} ۲) e^{x^2} ۳) e^{-x^2} ۴) e^{-y^2}

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P_{(x,y)} = 1 \rightarrow \frac{\delta P}{\delta y} = 0$$

$$Q_{(x,y)} = 2xy - ye^{-y^2} \rightarrow \frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$$

$$\frac{\dfrac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y} - \dfrac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}}{P_{(x,y)}} = -2 = f_{(y)} \Rightarrow F = e^{-\int -2y} = e^{y^2}$$

نکته : معادله دیفرانسیل به شکل $y\left(Ax^a y^b + Bx^c y^d\right)dx + x\left(Cx^a y^b + Dx^c y^d\right)dy = 0$ دارای فاکتور انتگرال $F = x^\alpha y^\beta$ می‌باشد که با ضرب کردن این عامل در طرفین معادله و اعمال شرط کامل بودن معادله می‌توان β, α را به دست آورد.

مثال : اگر فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل $\left(2y - 3xy^2\right)dx - xdy = 0$ به شکل $F = x^\alpha y^\beta$ باشد کدام گزینه مقادیر β, α را درست نشان می‌دهد.

۱) $\beta = +1, \alpha = 1$ ۲) $\beta = \frac{1}{2}, \alpha = 2$ ۳) $\beta = -2, \alpha = 1$ ۴) $\beta = 1, \alpha = 2$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left(2y - 3xy^2\right)dx - xdy = 0 \overset{\times x^\alpha y^\beta}{\Rightarrow} \left(2x^\alpha y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1}y^{\beta+2}\right)dx - x^{\alpha+1}y^\beta dy = 0$$

$$\frac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y} = 2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}=-(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$\frac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y}=\frac{\delta Q}{\delta x}\Rightarrow\begin{cases}\beta+2=0\Rightarrow\beta=-2\\-(\alpha+1)=2(\beta+1)\Rightarrow\alpha+1=2\Rightarrow\alpha=1\end{cases}$$

۲ـ ۵ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی به صورت کلی زیر می‌باشند.

$$A_{(x)}y'+B_{(x)}y+C_{(x)}=0$$

که با تقسیم کردن بر $A_{(x)}$ داریم:

$$y'+p_{(x)}y=q_{(x)}$$

با توجه به رابطه بالا مشخص است که اگر $q_{(x)}=0$ باشد در این صورت معادله همگن می‌باشد. که به راحتی به معادلات تفکیک پذیر تبدیل می‌شوند و حل می‌گردند.

$$y'+p_{(x)}y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-P_{(x)}y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-P_{(x)}dx$$

$$\Rightarrow y=ce^{-\int P_{(x)}dx}$$

ولی در صورتی که $q_{(x)}\neq 0$ باشد معادله غیر همگن است و داریم:

$$y'+P_{(x)}y=q_{(x)}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}+P_{(x)}y=q_{(x)}\overset{\times dx}{\Rightarrow}$$

$$\underbrace{1\times}_{Q_{(x,y)}}dy+\underbrace{(yP_{(x)}-q_{(x)})}_{P_{(x,y)}}dx=0$$

$$P_{(x,y)}=yp_{(x)}-q_{(x)}\Rightarrow\frac{\delta p}{\delta y}=P_{(x)}$$

$$Q_{(x,y)}=1\quad\Rightarrow\frac{\delta Q}{\delta x}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\delta p}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}}{Q}=f_{(x)}\Rightarrow \text{عامل انتگرال ساز } F=e^{\int f_{(x)}d_x}$$

که با ضرب عامل انتگرال ساز در طرفین معادله و حل کردن آن داریم:

$$y=e^{-\int P_{(x)}dx}\left[\int q_{(x)}e^{\int p_{(x)}dx}dx+c\right]$$

مثال : جواب معادله دیفرانسیل $y'-xy=x$ با شرط $y_{(0)}=4$ کدام است.

۱) $y=3e^{\frac{x^2}{2}}-1$ ۲) $y=5e^{\frac{x^2}{2}}-1$ ۳) $y=3e^{\frac{x^2}{2}}+1$ ۴) $y=5e^{\frac{x^2}{2}}+1$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y'-xy=x \\ p_{(x)}=-x \\ q_{(x)}=x \end{array}\right\} \to y=e^{-\int -xdx}\left[\int xe^{\int -xdx}dx+C\right]$$

$$\Rightarrow y=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{-x^2}{2}}dx+c\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[-e^{\frac{x^2}{2}}+C\right]=Ce^{+\frac{x^2}{2}}-1$$

$$y_{(0)}=4\Rightarrow 4=ce^{\circ}-1\Rightarrow C=5\Rightarrow y=5e^{\frac{x^2}{2}}-1$$

مثال : اگر در معادله $y'+p_{(x)}y=q_{(x)}$ برای $q_{(x)},p_{(x)}$ چنین داشته باشیم که $P_{(x)}=u'_{(x)}$ و $u'_{(0)}=1, u_{(0)}=0, q_{(x)}=p'_{(x)}+p^2{(x)}$ و عدد ثابت به دست آمده برای $y_{(x)}$ را ۲ فرض کنیم مطلوب است به دست آوردن مقدار $y_{(0)}$. (فرآوری و انتقال گاز ۸۴)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$p_{(x)}=u'_{(x)}$$

$$q_{(x)}=p'_{(x)}+p^2{(x)}=u''_{(x)}+u'^2{(x)} \quad , \quad C=2$$

$$y=e^{-\int p_{(x)}dx}\left[\int q_{(x)}e^{\int p_{(x)}dx}dx+c\right]=$$

$$=e^{-\int u'_{(x)}dx}\left[\int\left(u''_{(x)}+u'^2_{(x)}\right)e^{\int u'_{(x)}dx}+2\right]=$$

$$=e^{-u_{(x)}}\left[\int(u''_{(x)}+u'^2_{(x)})e^{u_{(x)}}dx+2\right]=$$

$$=e^{-u_{(x)}}[\int(u'_{(x)}e^{u_{(x)}})'dx+2]=e^{-u_{(x)}}[u'_{(x)}e^{u_{(x)}}+2]$$

$$\Rightarrow y=u'_{(x)}+2e^{-u_{(x)}}$$

$$\Rightarrow y_{(0)}=u'_{(0)}+2e^{-u_{(0)}}=1+2e^{\circ}=3$$

۲ـ ۶ معادلات خاص

الف) معادله برنولی: معادله برنولی به شکل کلی زیر می‌باشد:

$$y'+P_{(x)}y=y^n q_{(x)} \quad , \quad n\neq 0,1$$

اگر n=0 باشد در این صورت معادله بالا، معادله مرتبه اول خطی می‌شود.

و اگر n=1 باشد در این صورت معادله بالا، معادله مرتبه اول همگن می‌شود.

برای حل کردن معادله برنولی از تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ استفاده می‌کنیم که در این صورت معادله برنولی به معادله مرتبه اول خطی تبدیل می‌شود.

$$u=y^{1-n}\Rightarrow u'=(1-n)y'y^{-n}$$

$$y'+p_{(x)}y=y^n q_{(x)}\xRightarrow{\times(1-n)y^{-n}}$$

$$\underbrace{(1-n)y'y^{-n}}_{u'}+p_{(x)}(1-n)\underbrace{y^{1-n}}_{u}=(1-n)q_{(x)}$$

$u'+(1-n)u\,\rho_{(x)}=(1-n)q_{(x)}$ معادله مرتبه اول خطی

مثال : کدام یک از تبدیلات زیر معادله $y'+yp_{(x)}=y^4Q_{(x)}$ را تبدیل به یک معادله خطی خواهد کرد؟

۱) $z=y^3$ ۲) $z=y^{-3}$

۳) $z=y^4$ ۴) این معادله قابل تبدیل به معادله خطی نیست.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

این معادله برنولی می‌باشد و با تغییر متغیر $z=y^{1-4}$ به معادله خطی تبدیل می‌شوند.

نکته : $F=e^{(1-n)\int p_{(x)}e\,dx}$ عامل انتگرال ساز معادله برنولی می‌باشد.

ب) معادله لاگرانژو: معادله لاگرانژو به شکل کلی زیر می‌باشد:

$$y=xf(y')+g(y')$$

برای حل کردن معادله لاگرانژو ابتدا به جای y' در معادله p قرار می‌دهیم و سپس از معادله به دست آمده نسبت به x مشتق می‌گیریم در این حالت معادله به دست آمده یک معادله مرتبه اول خطی خواهد بود.

$$\xrightarrow{①\ p\to y'}y=xf(p)+g(p)\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\to p=f_{(p)}+xf'_{(p)}\frac{dp}{dx}+g'_{(p)}\frac{dp}{dx}\Rightarrow p-f_{(p)}=\left[xf'_{(p)}+g'_{(p)}\right]\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp}=\left[\frac{xf'_{(p)}+g'_{(p)}}{p-f_{(p)}}\right]\Rightarrow\frac{dx}{dp}-\frac{f'_{(p)}}{p-f_{(p)}}x=\frac{g'_{(p)}}{p-f_{(p)}}$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

ج) معادله کلرو: معادله کلرو به شکل کلی زیر می‌باشد:

$$y=xy'+f_{(y')}$$

برای حل کردن معادله کلرو، کافیست به جای y'، ثابت c را قرار دهیم.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ ـ معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را حل کنید.

$$\left(2xy^2+2\right)dx+\left(2x^2y+4y\right)dy=0$$

کدام‌یک از پاسخ‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

۱) $y=\frac{K-2x}{x^2+2}$ ۲) $y=\sqrt{\frac{K-2x}{x^2+2}}$ ۳) $y=-\sqrt{\frac{K-2x}{x^2+2}}$ ۴) $y=\pm\sqrt{\frac{K-2x}{x^2+2}}$

۲ ـ کدام‌یک از معادلات زیر، یک دیفرانسیل کامل می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $\cos x\frac{dy}{dx}+x^4-y^2\sin x+y^2\frac{dy}{dx}=0$ ۲) $\cos x\frac{dy}{dx}+x^4-y\sin x+y^2\frac{dy}{dx}=0$

۳) $\sin x\frac{dy}{dx}+x^4-y^2\sin x+y^2\frac{dy}{dx}=0$ ۴) $\cos x\frac{dy}{dx}+x^4-x\sin x+y^2\frac{dy}{dx}=0$

۳ ـ معادله غیرخطی $\frac{dy}{dx}+P_{(x)}y=Q_{(x)}y^n$ با کدام‌یک از تغییر متغیرهای زیر به معادله خطی تبدیل می‌شود؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $u=y^n$ ۲) $u=y^{-n}$ ۳) $u=y^{n-1}$ ۴) $u=y^{1-n}$

۴ ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}+xy=xy^{-3}$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $y=ce^{\frac{x^2}{2}}+x$ ۲) $y=1+ce^{-2x^2}$ ۳) $y=\left(1+ce^{-2x^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ۴) $y=\left(1+e^{-2x^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

۵ ـ کدام‌یک از معادلات، یک معادله دیفرانسیل کامل است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $x^3-y\sin x+\left(\cos x+2y^2\right)\frac{dy}{dx}=0$ ۲) $x^3-y\sin x+(\cos x+2y)\frac{dy}{dx}=0$

۳) $x^3-y^2\sin x+(\cos x+2y)\frac{dy}{dx}=0$ ۴) $x^3-y^2\sin x+\left(\cos x+y^2\right)\frac{dy}{dx}=0$

۶ ـ حل معادله دیفرانسیل $2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0$ برابر خواهد بود با: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

۱) $y=Kx^{\frac{3}{2}}$ ۲) $y=Kx^{-\frac{2}{3}}$ ۳) $y=Kx^{\frac{2}{3}}$ ۴) $y=Kx^{-\frac{3}{2}}$

۷ ـ در معادله دیفرانسیل معمولی $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$ عامل انتگرال (integration factor) با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۱)

۱) $x-2$ ۲) $\frac{1}{x-2}$ ۳) $e^{Ln(x-2)}$ ۴) $\frac{1}{(x-2)^2}$

۸ ـ فاکتور انتگرال μ برای معادله دیفرانسیل زیر با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

$$x\frac{dy}{dx}-2y=x^3\quad,\quad x>0$$

۱) x ۲) x^{-1} ۳) x^2 ۴) x^{-2}

۹ ـ معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $xy^2=c$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

۱) $xy^2=c$ ۲) $x^2-2y^2=c$ ۳) $y^2-2x^2=c$ ۴) $3y^2x=c$

۱۰ ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ که در همسایگی $x=0$ کراندار باشد در این نقطه مقدارش برابر است با:

(مهندسی نفت ۸۳)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) نامشخص

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\left(2xy^2+2\right)dx+\left(2x^2y+4y\right)dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)}=2xy^2+2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\delta P_{(x,y)}}{\delta y}=4xy \\ Q_{(x,y)}=2x^2y+4y \;\Rightarrow\; \dfrac{\delta Q_{(x,y)}}{\delta x}=4xy \end{array}\right\} \Rightarrow \text{معادله کامل است}$$

پس تابع $u(x,y)$ وجود دارد که:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta x}=2xy^2+2 \;\Rightarrow\; u(x,y)=x^2y^2+2x+g(g)$$

$$\Rightarrow\; \frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=2x^2y+g'(y)=2x^2y+4y+2y^2$$

$$\Rightarrow\; g(y)=2y^2 \;\Rightarrow\; u(x,y)=x^2y^2+2x+2y^2$$

پس جواب معادله عبارت است از:

$$x^2y^2+2x+2y^2=K \;\Rightarrow\; y^2\left(x^2+2\right)=K-2x$$

$$\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{\frac{K-2x}{x^2+2}}$$

۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\cos x\frac{dy}{dx}+x^4-y\sin x+y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\; \underbrace{\left(x^4-y\sin x\right)}_{P}dx+\underbrace{\left(\cos x+y^2\right)}_{Q}dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\; \dfrac{\delta P}{\delta y}=-\sin x \\ \Rightarrow\; \dfrac{\delta Q}{\delta x}=-\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow\; \frac{\delta P}{\delta y}=\frac{\delta Q}{\delta x}\ \text{معادله کامل است}$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

معادله $\frac{dy}{dx}+P_{(x)}y=Q_{(x)}y^n$، معادله برنولی می‌باشد که با تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ به معادله خطی تبدیل می‌شود.

۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{dy}{dx}+xy=xy^{-3} \;\rightarrow\; \text{معادله برنولی} \;\rightarrow\; u=y^{1+3}\ \text{تغییر متغیر}$$

$$\Rightarrow\; y^4=u \;\Rightarrow\; 4y^3y'=u' \;\Rightarrow\; y^3y'+xy^4=x \;\Rightarrow\; u'+4xu=4x \;\Rightarrow$$

$$u=e^{-\int 4xdx}\left[\int 4x.e^{\int 4xdx}.dx+c\right] \;\Rightarrow\; u=1+ce^{-2x^2} \;\Rightarrow\; y^4=1+ce^{-2x^2} \;\Rightarrow\; y=\left(1+ce^{-2x^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

۵ـ گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح می‌باشد.

گزینه ۱ $\rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -\sin x \quad , \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = -\sin x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است

گزینه ۲ $\rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -\sin x \quad , \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = -\sin x \quad \Rightarrow$ معادله کامل است

گزینه ۳ $\rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -2\sin x \quad , \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = -\sin x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

گزینه۴ $\rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta y} = -2y\sin x \quad , \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = -\sin x \quad \Rightarrow$ معادله کامل نیست

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{2xy^3}_{P}dx + \underbrace{3x^2y^2}_{Q}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \frac{\delta P}{\delta y} = 6xy^2 \\ \Rightarrow \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = 6xy^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$ معادله کامل است

پس تابع $u(x,y)$ وجود دارد که:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta x} = 2xy^3 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^2y^3 + g(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = 3x^2y^2 + g'(y) = 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{(y)} = c$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad x^2y^3 = c \quad \Rightarrow \quad y = Kx^{-\frac{2}{3}}$$

۷ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

معادله $y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$، معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی می‌باشد.

$$\rho_{(x)} = \frac{-1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{-1}{x-2}dx} = e^{-Ln|x-2|} = \frac{1}{x-2}$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad \rightarrow$ معادله مرتبه اول خطی

$$\Rightarrow \quad P_{(x)} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int P_{(x)}dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2Lnx} = x^{-2}$$

۹ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$xy^2 = c \overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow} y^2 + 2xyy' = 0 \overset{y' \to \frac{-1}{y'}}{\Rightarrow} y^2 + 2xy\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2xy}{y'} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad ydy = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = x^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x^2 + c$$

۱۰ـ گزینه دوم صحیح است.

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin}{x}\leftarrow$$ معادله دیفرانسیلی خطی

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right]=e^{-Lnx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{Lnx}dx+c\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\sin x dx+c\right]=\frac{1}{x}(-\cos x+c)\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{1}{0}(-1+c)$$

بنابراین برای کراندار بودن y در $x=0$ لازمست $c=1$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{x}(-\cos+1)\Rightarrow \lim_{x\to 0}=\lim_{x\to}\frac{1}{x}(-\cos+1)\overset{\text{هوپیتال}}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=0$$

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

۳ـ ۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به شکل کلی زیر باشد:

$$y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = g_{(x)}$$

که در این بخش ما به بررسی و حل سه نوع از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌پردازیم:

الف) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ب) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

ج) معادلات اویلر

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن $y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $y_{2(x)}, y_1(x)$ دو جواب مستقل خطی[3] معادله مزبور باشند در این صورت ترکیب خطی این دو جواب نشان دهنده جواب عمومی معادله می‌باشند.

جواب عمومی معادله $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

[3] برای تعیین مستقل خطی بودن $Y_n, \ldots, Y_3, Y_2, Y_1$ از رونسکین استفاده می‌کنیم.

$$w\left(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n\right) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \cdots & Y_n' \\ Y_1'' & Y_2'' & \cdots & Y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_1^{(n)} & Y_2^{(n)} & \cdots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

که اگر دترمینان برابر صفر نشود $Y_n, \ldots, Y_2, Y_1$ مستقل خطی می‌باشند.

حال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن $y''+p_{(x)}y'+q_{(x)}y=g_{(x)}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید y_h جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر با این معادله و y_p یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ناهمگن باشد در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی و ناهمگن مزبور برابر با مجموع این دو جواب می‌باشد.

$$y=y_h+y_p$$

۳ـ ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

این معادلات به شکل کلی زیر می‌باشند.

$$y''+ay'+by=0$$

فرض کنید جواب معادله دیفرانسیل فوق به شکل $y=e^{mx}$ باشد در این صورت داریم:

$$y=e^{mx}\to y'=me^{mx}\to y''=m^2e^{mx}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$y''+ay'+by=0\to m^2e^{mx}+ame^{mx}+be^{mx}=0\overset{\div e^{mx}}{\Rightarrow}m^2+am+b=0\leftarrow \text{معادله مشخصه}$$

معادله به دست آمده، معادله مشخصه نام دارد که برای حل آن سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{ll} m^2+am+b=0 & \nearrow\ \Delta>0\Rightarrow m=m_1,m_2\Rightarrow y_h=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \\ & \rightarrow\ \Delta=0\Rightarrow m=m_1\Rightarrow y_h=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x} \\ \Delta=a^2-4b & \searrow\ \Delta<0\Rightarrow m=p+iq,p-iq\Rightarrow y_h=e^{px}\left[c_1\sin(qx)+c_2\cos(qx)\right] \end{array}$$

مثال: کدام یک از موارد زیر جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y'+y=0$ می‌باشد؟

۱) $y=e^{\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

۲) $y=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(A\cos\frac{x}{2}+B\sin\frac{x}{2}\right)$

۳) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

۴) $y=Ae^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}x}+Be^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}x}$

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y''+y'+y=0\Rightarrow m^2+m+1=0\ \text{معادله مشخصه}$$

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\Rightarrow m=\frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2y''-3y'+y=0$ کدام است؟ (مهندسی نفت ۸۳)

۱) $y=c_1e^x+c_2e^{\frac{x}{2}}$ ۲) $y=c_1e^x+c_2e^{-\frac{x}{2}}$ ۳) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}$ ۴) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-\frac{x}{2}}$

حل : گزینه اول صحیح است.

$$2y'' - 3y' + y = 0 \to 2m^3 - 3m + 1 = 0 \text{ معادله مشخصه } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{x}{2}}$$

مثال : مدل تغییرات فشار در دامنه زمان برای یک سیستم فرآیند به صورت

$$A\frac{d^2p}{dt^2} + B\frac{dp}{dt} + CP = 0$$

است که در آن C, B, A مقادیر ثابت بوده و $B^2 - 4AC$ منفی می‌باشد نحوه تغییرات فشار درون سیستم عبارت است از: (مهندسی مخازن هیدروکربونی ۸۴)

۱) نمایی ۲) نوسانی ۳) ثابت ۴) خطی

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$AP'' + BP' + CP = 0 \to Am^2 + Bm + C = 0 \text{ معادله مشخصه}$$

$$, B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow P = e^{kt}[C_1 \sin(qt) + C_2 \cos(qt)]$$

همان طور که می‌بینید جواب معادله شامل $\sin$ و $\cos$ است در نتیجه تغییرات p در طول زمان به صورت نوسانی خواهد بود.

۳ـ۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

این معادلات به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$y'' + ay' + cy = g_{(x)}$$

که جواب عمومی این معادلات به شکل $y = y_h + y_p$ می‌باشد که y_h جواب عمومی معادله همگن متناظر با این معادله $\ll y'' + ay' + cy = 0 \gg$ و y_p یک جواب خصوصی معادله ناهمگن مزبور می‌باشد روش به دست آوردن y_h در بخش قبلی بررسی شد در این بخش روش به دست آوردن y_p را بررسی می‌کنیم.

روش کلی به دست آوردن y_p بدین صورت است که با توجه به $g_{(x)}$، تابعی را با ضرایب نامعلوم برای y_p حدس می‌زنیم و با توجه معادله اصلی، ضرایب را تعیین می‌کنیم.

حالت اول: اگر $g_{(x)}$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد در این صورت داریم:

اگر $g_{(x)} = p_n(x) \Rightarrow y_p = x^m Q_n(x)$

که:

m: تعداد ریشه‌های مساوی صفر معادله مشخصه

$Q_n(x)$: چند جمله‌ای کامل از درجه n

مثال : جواب عمومی معادله $y''-y'=x$ را به دست آورید.

ابتدا جواب عمومی معادله همگن را به دست می‌آوریم.

$$y''-y'=0 \to m^2-m=0 \left\langle \begin{matrix} m=0 \\ m=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_h=c_1+c_2e^x$$

حال برای جواب خصوصی داریم:

$g_{(x)}=x \;\leftarrow$ چند جمله ازدرجه اول $\Rightarrow y_p=x^1(Ax+B)$

$$\Rightarrow y_p=Ax^2+Bx$$

جواب خصوصی باید در معادله صدق کند پس داریم:

$$y'_p=2Ax+B\,,\;\; y''_p=2A\;\;,\;\; y''-y'=x$$

$$\Rightarrow 2A-2Ax-B=x \to \begin{cases} -2A=1 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{2} \\ 2A-B=0 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{1}{2}x^2-x$$

جواب عمومی معادله $\Rightarrow y_p=c_1+c_2e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$

حالت دوم: اگر $g_{(x)}$ حاصلضرب تابع e^{Bx} در چند جمله‌ای درجه n باشد داریم:

اگر $g_{(x)}=e^{Bx}p_n(x) \Rightarrow y_p=x^m e^{Bx} Q_n(x)$

که:

m: تعداد ریشه‌های مساوی B معادله مشخصه

$Q_n(x)$: چند جمله‌ای کامل از درجه n

مثال : شکل کلی جواب خصوصی معادله $y''-5y'=6y+x^2e^{3x}$ را به دست آورید.

$y''-5y'+6y=x^2e^{3x} \to m^2-5m+6=0$ معادله مشخصه $\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} m=2 \\ m=3 \end{matrix} \right.$

$$g_{(x)}=xe^{3x} \Rightarrow B=3, P_n(x)=x^2 \Rightarrow m=1$$

$$\Rightarrow \quad y_p=x^1e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$$

مثال : شکل کلی جواب خصوصی معادله $y''-5y'+6y=xe^{4x}$ را به دست آورید.

$y''-5y'+6y=xe^{4x} \to m^2-5m+6=0$ معادله مشخصه $\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} m=2 \\ m=3 \end{matrix} \right.$

$$g_{(x)}=xe^{4x} \Rightarrow B=4\;,\; p_n(x)=x \Rightarrow m=0$$

$$\Rightarrow y_p=x^\circ e^{4x}(Ax+B)=e^{4x}(Ax+B)$$

حالت سوم: اگر $g_{(x)}$ به صورت مقابل باشد.

$$g_{(x)} = P_n(x)\sin qx + Q_m(x)\cos qx$$

p_n : چند جمله‌ای از درجه n

Q_m: چند جمله از درجه m

در این صورت y_p به صورت زیر می‌باشد.

$$y_p = x^m[R_k(x)\sin qx + S_k(x)\cos qx]$$

که:

m: تعداد ریشه‌های مساوی iq+ معادله مشخصه است.

K: بالاترین درجه چندجمله‌ای‌های $Q_m(x), P_n(x)$ است

R_k, S_k: چند جمله‌ای کامل از درجه k

مثال : شکل کلی جواب خصوصی معادله $y'' + 25y = x\cos 5x + x^2 \sin 5x$ به چه صورت است؟

$$y'' + 25y = x\cos 5x + x^2\sin 5x \Rightarrow m^2 + 25 = 0 \text{ معادله مشخصه } \begin{cases} m = +5i \\ m = -5i \end{cases}$$

$$P_n(x) = x^2 \qquad Q_m(x) = x \qquad q = 5 \Rightarrow m = 1 \quad , \quad K = 2$$
$$\Rightarrow y_p = x\left[(Ax^2 + Bx + C)\sin 5x + (A'x^2 + B'x + C')\cos 5x\right]$$

حالت چهارم: اگر $g_{(x)}$ به صورت مقابل باشد:

$$g_{(x)} = e^{Bx}[P_n(x)\sin qx + Q_m(x)\cos q_x]$$

در این صورت y_p به صورت زیر می‌باشد:

$$y_p = x^m e^{Bx}[R_k(x)\sin qx + S_k(x)\cos q_x]$$

که:

m: تعداد ریشه‌های مساوی B+iq معادله مشخصه

k: بالاترین درجه چندجمله‌ای‌های $Q_m(x), P_n(x)$

R_k, S_k : چند جمله‌ای کامل از درجه k

نکته : اگر $g_{(x)}$ شامل مجموع چند عبارت باشد برای هر عبارت یک جواب خصوصی در نظر می‌گیریم و در نهایت جواب خصوصی کلی برابر با مجموع جواب‌های خصوصی به دست آمده برای عبارت‌ها می‌باشد.

مثال : جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

۱) $y_p = \frac{3}{17}\cos x + \frac{5}{17}\sin x$

۲) $y_p = -\frac{3}{17}\cos - \frac{5}{17}\sin x$

۳) $y_p = \frac{3}{17}\cos - \frac{5}{17}\sin x$

۴) $y_p = -\frac{3}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$ معادله مشخصه $\begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = -1 \end{cases}$

$g_{(x)} = 2\sin x \Rightarrow p_n(x) = 2, q = 1 \Rightarrow m = 0, k = 0$

$\Rightarrow y_p = x^\circ [A\sin x + B\cos x] = A\sin x + B\cos x$

$\Rightarrow y'_p = A\cos x \quad B\sin x, y'' = -A\sin x - B\cos x$

$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x \Rightarrow$ با جایگذاری $\Rightarrow$

$\Rightarrow -A\sin x - B\cos x - 3A\cos x + 3B\sin x - 4A\sin x - 4B\cos x = 2\sin x$

$\Rightarrow \sin x(-A + 3B - 4A) + \cos x(-B - 3A - 4B) = 2\sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3B - 5A = 2 \\ -5B - 3A = 0 \end{cases} \to A = -\frac{5}{17}, \quad B = \frac{3}{17}$$

۳ـ ۴ـ معادله اویلر

معادله اویلر به شکل $x^2y'' + axy' + by = 0$ می‌باشد این معادله با تغییر متغیر z=Lnx به یک معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} Lnx = z \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dz \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ x = e^z \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

با جایگذاری روابط در معادله اویلر داریم:

در این معادله y تابع z می‌باشد $y'' + (\alpha - 1)y' + by = 0$

معادله مشخصه $m^2 + (\alpha - 1)m + b = 0$

برای معادله مشخصه بالا سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی باشد (m_2, m_1)

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = c_1e^{m_1z} + c_2e^{m_2z} \\ x = e^z \end{matrix}\right\} \to y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

ب) ریشه‌های معادله مشخصه، با هم برابر باشند $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = c_1e^{mz} + c_2ze^{mz} \\ z = Lnx \\ x = e^z \end{matrix}\right\} \to y = (c_1 + c_2Lnx)x^m$$

ج)ریشه‌های معادله مشخصه موهومی باشند $m_2 = p - iq \ , \ m_1 = p + iq$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow y = e^{pz}(c_1 \cos qz + c_2 \sin qz) \\ z = \text{Ln}x \\ x = e^z \end{array}\right\} \to y = x^p(c_1 \cos q\text{Ln}x + c_2 \sin q \ln x)$$

مثال : با کدام تغییر متغیر می‌توان معادله $2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ را به یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت تبدیل نمود؟

(مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $z = x^3$ ۲) $z = \text{Ln}z$ ۳) $z = \dfrac{B}{\sqrt{x}}$ ۴) $z = \text{Ln}x$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال : جواب معادله دیفرانسیل مقابل با شرایط داده شده کدام است؟

$x^2y'' + xy' + 9y = 0$

$y_{(1)} = 2$

$y'_{(1)} = 0$

۱) $y = 2\cos(3\text{Ln}x) + 2\sin(3\text{Ln}x)$ ۲) $y = 2\text{Sin}(3\text{Ln}x)$

۳) $y = 2\cos(3\text{Ln}x)$ ۴) $y = \cos(3\text{Ln}x) + \sin(3\text{Ln}x)$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

روش اول:

$x^2y'' + xy' + 9y = 0$ معادله اویلر $\to$ تغییر متغیر $z = \text{Ln}x \Rightarrow y'' + (1-1)y' + 9y = 0$

$\Rightarrow m^2 + 9 = 0$ معادله مشخصه $\Rightarrow m = \pm 3i$

$\Rightarrow y = c_1 \cos(3\text{Ln}x) + c_2 \sin(3\text{Ln}x)$

$y_{(1)} = 2 \Rightarrow 2 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 2$

$y'_{(1)} = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{6}{x}\sin(3\text{Ln}x) + \dfrac{3c_2}{x}\cos(3\text{Ln}x)$

$\Rightarrow 0 = 3c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

روش دوم: با امتحان کردن شرایط $y'_{(1)} = 0, y_{(1)} = 2$ در گزینه‌ها نیز می‌توان به جواب رسید.

نکته : معادله دیفرانسیل $(Ax+B)^2y'' + a(Ax+B)y' + by = 0$ نیز نوعی معادله اویلر می‌باشد که با تغییر متغیر $Ax + B = e^z$ یا $Z=\text{Ln}(Ax+B)$ به معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$xy''+y'-\frac{1}{x}y=0 \rightarrow x^2y''+xy'-y=0 \rightarrow$ معادله اویلر

$\Rightarrow$ تغییر متغیر $x=e^z \Rightarrow y''+(1-1)y'-y=0 \Rightarrow m^2-1=0 \leftarrow$ معادله مشخصه

$\Rightarrow m=\pm 1 \Rightarrow y_{(x)}=c_1x+c_2x^{-1}$

$y_{1(x)}$ در $x=0$ محدود می‌باشد پس $c_2=0$

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$xy''+y'+\frac{4}{x}y=0 \Rightarrow x^2y''+xy'+4y=0 \leftarrow$ معادله اویلر

$x=e^z$ تغییر متغیر $\rightarrow y''+(1-1)y'+4y=0 \Rightarrow m^2+4=0 \leftarrow$ معادله مشخصه

$\Rightarrow m=\pm 2i \Rightarrow y=c_1\cos(2\mathrm{Ln}|x|)+c_2\sin(2\mathrm{Ln}|x|)$

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$x^2y''+xy'-y=0 \Rightarrow$ معادله اویلر $\Rightarrow x=e^z$ تغییر متغیر

$\Rightarrow y''+(1-1)y'-y=0 \Rightarrow m^2-1=0 \leftarrow$ معادله مشخصه $\Rightarrow m=\pm 1$

$y=c_1x+c_2x^{-1}$

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$x^2y''-xy'+y=0 \leftarrow$ معادله اویلر $\Rightarrow x=e^z$ تغییر متغیر

$\Rightarrow y''+(-1-1)y'+y=0 \Rightarrow m^2-2m+1=0$ معادله مشخصه

$\Rightarrow m_1=m_2=1 \Rightarrow y=c_1x+c_2x\mathrm{Ln}x$

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$\Rightarrow y''-4y'+5y=0 \Rightarrow m^2-4m+5=0 \leftarrow$ معادله مشخصه

$\Rightarrow m=2\pm i \Rightarrow y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$

دسته منحنی از مبدأ مختصات $(0,0)$ عبور می‌کند، پس داریم:

$y(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

۶ـ گزینه سوم صحیح است.

$x^2y''+xy'-4y=0 \leftarrow$ معادله اولر

$x=e^z$ تغییر متغیر $\Rightarrow y''+(1+1)y'-4y=0 \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2 \Rightarrow y=c_1x^2+c_2x^{-2}$

فصل چهارم

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها

۴ـ ۱ مقدمه

یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر، استفاده از سری‌ها می‌باشد که در این فصل به بررسی این روش می‌پردازیم معادله بسل و لژاندر از جمله معادله‌های معروف دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر هستند که در مسائل انتقال حرارت و جرم با آنها سر و کار داشتیم که در این فصل به حل و بررسی این معادلات نیز خواهیم پرداخت و در انتهای فصل به معرفی چند تابع مهم می‌پردازیم.

۴ـ ۲ نقاط عادی و تکین یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+y'f_1(x)+yf_2(x)=f_3(x)$ را در نظر بگیرید.

اگر در نقطه $x=x_0$ توابع $f_3(x), f_2(x), f_1(x)$ هر سه تعریف شده و معین باشند «$x=x_0$ ریشه مخرج هیچ کدام از توابع نباشد» در این صورت نقطه $x=x_0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل می‌باشد اما اگر حداقل یکی از توابع $f_3(x), f_2(x), f_1(x)$ در نقطه $x=x_0$ تعریف شده نباشد نقطه $x=x_0$ یک نقطه غیر عادی و یا تکین و یا منفرد برای معادله دیفرانسیل ذکر شده می‌باشد نقاط تکین خود به دو دسته منظم و نامنظم تقسیم می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌گردند.

اگر $x=x_0$ نقطه غیر عادی «تکین» معادله دیفرانسیل باشد و $(x-x_0)f_1(x)$ و $(x-x_0)^2f_2(x)$ در نقطه $x=x_0$ تعریف شده و معین باشند در این صورت $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل می‌باشد در غیر این صورت $x=x_0$ نقطه تکین نامنظم برای معادله دیفرانسیل است.

به عنوان مثال نوع نقاط $x=-1, x=1, x=0$ را در مورد معادله دیفرانسیل لژاندر مرتبه nام که به صورت زیر تعریف می‌شود تعیین می‌کنیم.

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad \rightarrow \quad \text{لژاندر مرتبه } n \text{ ام}$$

$$\Rightarrow y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$$

$$\Rightarrow f_1(x)=\frac{-2x}{1-x^2}\ ,\ \ f_2(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}\ ,\ \ f_3(x)=0$$

$$x=0\Rightarrow f_1(x)=0\ ,\ f_2(x)=n(n+1)\ ,\ f_3(x)=0$$

$x=1 \Rightarrow$ $f_1(x)=$ تعریف نمی‌شود و $f_2(x)=$ تعریف نمی‌شود و $f_3(x)=0$

$x=-1 \Rightarrow$ $f_1(x)=$ تعریف نمی‌شود و $f_2(x)=$ تعریف نمی‌شود و $f_3(x)=0$

در نقطه $x=0$ هر سه تابع $\left[f_3(x),f_2(x),f_1(x)\right]$ تعریف شده و مشخص می‌باشند پس نقطه $x=0$، یک نقطه عادی برای معادله لژاندار مرتبه n ام می‌باشد.

در نقطه $x=1$ و نقطه $x=-1$.توابع $f_2(x),f_1(x)$ تعریف نمی شوند پس نقاط $x=1$ و $x=-1$ جزء نقاط تکین معادله لژاندر مرتبه n ام می‌باشد حال به بررسی منظم و یا نامنظم بودن این توابع در نقاط $x=1,x=-1$ می‌پردازیم.

$$(x-x_0)f_1(x)\overset{x_0=1}{\Rightarrow}(x-1)\times\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)=\frac{2x}{1+x}\overset{x=x_0=1}{\Rightarrow}(x-x_0)f_1(x)=1$$

$$(x-x_0)^2f_2(x)\overset{x_0=1}{\Rightarrow}(x-1)^2\left(\frac{n(n+1)}{1-x^2}\right)=\frac{1-x}{1+x}n(n+1)\overset{x=x_0=1}{\Rightarrow}(x-x_0)^2f_2(x)=0$$

پس نقطه x=1، نقطه تکین منظم برای معادله لژاندر می‌باشد.

$$(x-x_0)f_1(x)\overset{x_0=-1}{\Rightarrow}(x+1)\times\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)=\frac{-2x}{1-x}\overset{x=x_0=-1}{\Rightarrow}(x-x_0)f_1(x)=1$$

$$(x-x_0)^2f_2(x)\overset{x_0=-1}{\Rightarrow}(x+1)^2\left(\frac{n(n+1)}{1-x^2}\right)=\frac{x+1}{1-x}n(n+1)\Rightarrow(x-x_0)^2f_2(x)=0$$

پس نقطه $x=-1$ نیز، یک نقطه تکین منظم برای معادله لژاندر می‌باشد.

مثال : نقطه x=0 در مورد معادله بسل معمولی از مرتبه P چه نقطه‌ای می‌باشد.

$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-p^2)y=0\leftarrow$ معادله بسل معمولی از مرتبه P

$$\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+\frac{\lambda^2x^2-p^2}{x^2}y=0$$

$$\Rightarrow f_1(x)=\frac{1}{x},f_2(x)=\frac{\lambda^2x^2-p^2}{x^2}$$

$\Rightarrow x=0\Rightarrow f_1(x),f_2(x)$ تعریف شده نیستند $\rightarrow$ نقطه تکین $X=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(x-x_0)f_1(x)=1\ \ ,\ \ \lim\limits_{x\to 0}(x-x_0)^2f_2(x)=-P^2\Rightarrow$ نقطه تکین منظم $X=0$

۴ـ۳ جواب‌های سری حول نقاط عادی و تکین یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

اگر $x = x_0$ یک نقطه عادی برای معادله بالا باشد در این صورت معادله دیفرانسیل قطعا دارای جوابی به شکل زیر می‌باشد.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 + C_1(x - x_0) + \ldots + C_n (x - x_0)^n + \ldots$$

که C_nها، با استفاده از مشتق گرفتن از جواب معادله $\ll y \gg$ و قرار دادن آن‌ها در معادله دیفرانسیل اصلی تعیین می‌گردند.

مثال : معادله $y'' - xy' + y = 0$ را با استفاده از سری‌ها حل کنید؟

$$\left.\begin{array}{l} y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \\ x = 0 \rightarrow \text{نقطه عادی} \Rightarrow x_0 = 0 \end{array}\right\} y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \xrightarrow{n \to n+1} y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} x^n$$

$$, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} \xrightarrow{n \to n+2} y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n$$

$$\text{جایگذاری در معادله} \rightarrow y'' - xy' + y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n - \underbrace{x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} x^n}_{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} x^{n+1}} + \sum_{x=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

در جمله دوم $n \to n-1$ تا توان x در همه جملات برابر n گردد

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$2C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

$$\Rightarrow 2C_2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left((n+1)(n+2) C_{n+2} - nC_n + C_n\right) = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2) C_{n+2} - nC_n + C_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{(n-1)C_n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

$$n = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-C_0}{2}$$

$n = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{0 \times C_1}{6} = 0 \rightarrow C_3 = C_5 = C_7 = \ldots = C_{2n+1} = 0$ همه ضرایب فرد به‌جزء C_1 صفر هستند یعنی

$$\Rightarrow y = \left(C_0 - \frac{C_0}{2} x^2 - \frac{C_0}{4!} x^4 - \frac{3C_0}{6!} x^6 \ldots\right) + C_1 x$$

نکته : بسط مک لورن تابع f(x) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$f_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n=f_{(0)}+\frac{f'_{(0)}}{1!}x+\frac{f''_{(0)}}{2!}x^2+\dots$$

بنابراین ضریب x^k در وسط مک لورن برابر است با $\frac{f^k{}_{(0)}}{k!}$

مثال : ضریب x_4 در بسط مک لورن حل دستگاه زیر کدام است؟ (مهندسی شیمی آزاد ۸۲)

$$y''+(\sin x)y=0\ ,\ \ y_{(0)}=1\ \ ,\ \ y'_{(0)}=1$$

۱) $-\frac{1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{24}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ضریب x^4 برابر است با $\frac{f^{(4)}_{(0)}}{4!}=\frac{y^{(4)}_0}{4!}$ بنابراین باید از معادله مشتق بگیریم تا مقدار $y^{(4)}_{(0)}$ را به دست آوریم.

$$y_{(0)}=1, y'_{(0)}=1, y''+(\sin x)y=0\Rightarrow y''_{(0)}+0\times1=0\Rightarrow y''_{(0)}=0$$

مشتق از معادله $\Rightarrow y'''+(\sin x)y'+(\cos x)y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$

$$y'''_{(0)}+0+1=0\Rightarrow y'''_{(0)}=-1$$

مشتق $\Rightarrow y^4+(\sin x)y''+(\cos x)y'+(\cos x)y'-(\sin x)y=0$

$$\Rightarrow x=0\Rightarrow y^4_{(0)}+0+1+1-0=0\Rightarrow y^4_{(0)}=-2$$

$$\Rightarrow\frac{y^{(4)}_0}{4!}=\frac{-2}{2\times3\times4}=-\frac{1}{12}$$

ـ جواب‌های سری حول نقطه تکین «روش فروبینوس»

اگر **x=0**، یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد.

$$y''+f_{1(x)}y'+f_{2(x)}y=0$$

در این صورت جواب معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

که برای به دست آوردن ضرایب $\ll C_n \gg$ مانند بخش قبل عمل می‌کنیم و مقدار r را با استفاده از معادله مشخصه زیر تعیین می‌کنیم.

معادله مشخصه : $r(r-1)+F_1r+F_2=0$

که

$$F_1 = \lim_{x\to 0} (xf_{1(x)})$$

$$F_2 = \lim_{x\to 0} (x^2 f_{2(x)})$$

فرض کنید r_2,r_1 جوابهای معادله مشخصه باشد در این صورت سه حالت زیر به وجود می‌آید.

۱ـ $r_1 \neq r_2$ و تفاضل r_2,r_1 ـ $\ll r_1 - r_2 \gg$ ـ عددی غیر صحیح باشد در این صورت معادله دارای دو جواب مستقل خطی زیر خواهد بود.

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum b_n x^n$$

که جواب عمومی معادله برابر است با ترکیب خطی y_2, y_1

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

۲ـ $r_1 \neq r_2$ و تفاضل r_2,r_1 $\ll r_1 - r_2 \gg$ عددی صحیح می‌باشد در این صورت معادله دارای دو جواب مستقل خطی زیر می‌باشد.

$$y_{1(x)} = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_{2(x)} = ky_{1(x)}\mathrm{Ln}x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

k: ضریب ثابت که با توجه به $y_{1(x)}, f_{1(x)}$ تعیین می‌گردد.

که جواب عمومی معادله برابر است با ترکیب خطی y_2, y_1

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

۳ـ اگر $r_1 = r_2 = r$ باشند در این صورت معادله دارای دو جواب مستقل خطی زیر خواهد بود.

$$y_{2(x)} = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_{2(x)} = y_1(x)\mathrm{Ln}(x) + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

که جواب عمومی معادله برابر است با ترکیب خطی y_2, y_1

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

مثال : ریشه‌های معادله شاخصی برای معادله $xy'' + 4y' + 4(x+1)y = 0$ در همسایگی x=0 عبارتند از:

۱) $r_2 = -3, r_1 = 3$ ۲) $r_2 = 0, r_1 = 3$ ۳) $r_2 = 0, r_1 = -3$ ۴) $r_1 = r_2 = -3$

حل : گزینه۳ صحیح می‌باشد.

$$xy'' + 4y' + 4(x+1)y = 0 \overset{\div x}{\Rightarrow} y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{4(x+1)}{x}y = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = \lim_{x\to 0}\left(xf_{1(x)}\right) = \underset{x\to 0}{x} \times \frac{4}{x} = 4$$

$$F_2 = \lim_{x\to 0}\left(x^2 f_2(x)\right) = \frac{4x^2(x+1)}{\underset{x\to 0}{x}} = 0$$

معادله مشخصه : $r(r-1)+F_1 r+F_2=0 \Rightarrow r(r-1)+4r+0=0 \Rightarrow$

$$r^2+3r=0 \begin{cases} r=0 \\ r=-3 \end{cases}$$

مثال : کدام معادله زیر با استفاده از سری فروبنیوس حول نقطه صفر قابل حل می‌باشد.

۱) $y''+5x^2y'+8xy=0$ ۲) $y''+4y'+2y=0$

۳) $x^2y''+xy'-xy=0$ ۴) $\left(1-x^2\right)y''+4xy'+\left(a(a-1)\right)=0$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برای استفاده از سری فروبینوس حول نقطه صفر باید نقطه صفر، نقطه تکین منظم برای معادله باشد که فقط در معادله گزینه سوم چنین حالتی مشاهده می‌شود.

$$x^2y''+xy'-xy=0 \to y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x}y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)=\dfrac{1}{x} \to \underset{x\to 0}{xf_1(x)}=1 \\ f_2(x)=\dfrac{-1}{x} \to \underset{x\to 0}{x^2f_2(x)}=0 \end{array}\right\}$$ پس x=0 یک نقطه تکین منظم می‌باشد.

۴ـ ۴ معادله بسل

معادله بسل به دو صورت، بسل معمول و بسل اصلاح شده می‌باشد.

معادله بسل معمولی $\to x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-p^2)y=0$

معادله بسل اصلاح شده $\to x^2y''+xy'-(\lambda^2x^2+p^2)y=0$

همان طور که قبلا بررسی شد نقطه x=0 یک نقطه تکین منظم برای هر دو معادله می‌باشد و برای حل کردن آنها از روش فروبینوس استفاده می‌کنیم.

۴ـ ۴ـ ۱ معادله بسل معمولی

معادله بسل معمولی به صورت $x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-P^2\right)y=0$ می‌باشد و همان طور که گفته شد با استفاده از روش فرنیوس حل می‌گردد.

$$x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-P^2\right)y=0 \quad \to \quad y''+\frac{1}{x}y'+\frac{\left(\lambda^2x^2-P^2\right)}{x^2}y=0$$

$$\Rightarrow \quad F_1=\lim_{x\to 0} xf_1(x)=1$$

و

$$F_2 = \lim_{x\to 0} x^2 f_2(x) = -P^2$$

$$: r(r-1)+F_1 r + F_2 = r(r-1)+r-P^2 = 0 \Rightarrow r^2 - P^2 = 0 \begin{cases} r = P \\ r = -P \end{cases}$$

همان طور که دیدید با حل معادله مشخصه، کاملا واضح است که جواب معادله بسل به p وابسته می‌باشد در حالت کلی جواب‌های معادله بسل را به صورت ترکیب خطی از توابع بسل بیان می‌کنیم و داریم:

اگر P عدد صحیح نباشد. $\Rightarrow y = AJ_p(\lambda x) + BJ_{-p}(\lambda x)$

اگر P عدد صحیح باشد. $\Rightarrow y = AJ_p(\lambda x) + By_p(\lambda x)$

که:

$J_p(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه P می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2x+p}$$

$J_{-p}(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه P- می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}$$

$y_p(x)$: تابع بسل نوع دوم از مرتبه P می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$

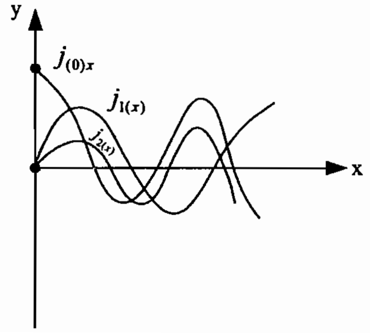
توجه: حفظ کردن شکل کلی توابع بسل ضروری نیست فقط به حالت‌های خاصی که در ادامه بررسی می‌شود توجه کنید.

تابع بسل نوع اول از مرتبه p"$J_p(x)$"

۱) اگر P عدد صحیح باشد در این صورت $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

۲)

$$x = 0, p = 0 \Rightarrow J_0(0) = 1$$
$$x = 0, p \neq 0 \Rightarrow J_p(0) = 0$$



۳)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p}J_{p}(x)\right]=x^{p}J_{p-1}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[J_0(x)\right]=J_{-1}(x)=-J_1(x)$$

$$\Rightarrow \int x^{p}J_{p-1}(x)\,dx=x^{p}J_{p}(x)+c$$

۴)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_{p}(x)\right]=-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[J_0(x)\right]=-J_1(x)$$

$$\Rightarrow \int x^{-p}J_{p+1}(x)dx=-x^{-p}J_{p}(x)+c$$

۵)

$$\mathscr{L}J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1+S^2}}$$

۶)

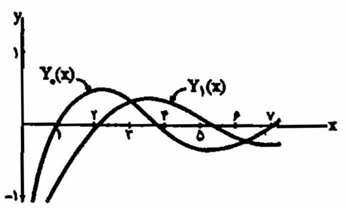
$$\mathscr{L}J_1(x)=\mathscr{L}(-J_0(x))'=\frac{-S}{\sqrt{1+S^2}}+1$$

تابع بسل نوع دوم از مرتبه P

۱) اگر P عدد صحیح باشد در این‌صورت:

$$Y_{-P}(x)=(-1)^{P}\,Y_{P}(x)$$

۲)



$$Y_P(0)=-\infty$$

۳)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{P}Y_{P}(x)\right]=x^{P}Y_{P-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[Y_{(0)}x\right]=Y_{-1}(x)=-Y_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int x^{P}Y_{P-1}dx=x^{P}Y_{P}(x)+C$$

۴)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-P}Y_P(x)\right]=-x^{-P}Y_{P+1}(x)$$
$$\Rightarrow \int x^{-P}Y_{P+1}dx=-x^{-P}Y_P(x)$$

۴-۲-۴- معادله بسل اصلاح شده

معادله بسل اصلاح شده به‌صورت $x^2y''+xy'-\left(\lambda^2x^2+P^2\right)y=0$ می‌باشد و همان‌طور که گفته شد با استفاده از روش فروبینوس حل می‌گردد.

جواب‌های معادله بسل اصلاح شده نیز به مقدار P بستگی دارد و داریم:

اگر P عدد صحیح نباشد $\Rightarrow \quad y_{(x)}=AI_P(\lambda x)+BI_{-P}(\lambda x)$

اگر P عدد صحیح باشد $\Rightarrow \quad y_{(x)}=AI_P(\lambda x)+BK_P(\lambda x)$

که:

$I_P(x)$: تابع بسل نوع سوم از مرتبه P که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_K(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+K+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+K}$$

$K_P(x)$: تابع بسل نوع چهارم از مرتبه P که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

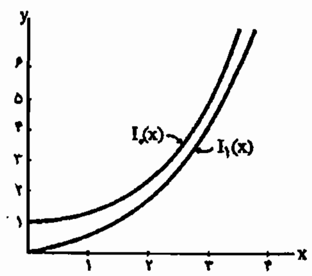
$$K_P(x)=\exp\left[\frac{1}{2}(P+1)\pi i\right]\left[J_P(ix)+iY_P(ix)\right]$$

تابع بسل نوع سوم از مرتبه P ، $I_P(x)$ [4]

۱) اگر P عدد صحیح باشد، در این‌صورت:

$$I_{-P}(x)=I_P(x)$$

۲)



$$x=0, P=0 \quad \Rightarrow \quad I_0(0)=1$$
$$x=0, P\neq 0 \quad \Rightarrow \quad I_P(0)=0$$

[4] تابع بسل نوع سوم را گاهی تابع بسل نوع اول اصلاح شده نیز می‌گویند.

۳)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{P}I_{P}(x)\right]=x^{P}I_{P-1}(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left[I_0(x)\right]=I_1(x)$$

$$\Rightarrow\ \int x^{P}I_{P-1}(x)dx=x^{P}I_{p}(x)+C$$

۴)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-P}I_{P}(x)\right]=+x^{-P}I_{p+1}(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left[I_0(x)\right]=I_1(x)$$

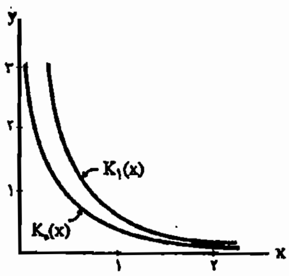
$$\Rightarrow\ \int\left[x^{-P}I_{P}(x)\right]dx=x^{-P}I_{P}(x)$$

تابع بسل نوع چهارم از مرتبه P ، $K_P(x)$[5]

۱) اگر P عدد صحیح باشد

$$K_{-P}(x)=K_{P}(x)$$

۲)



$$K_{P}(0)=+\infty$$

۳)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{P}K_{P}(x)\right]=-x^{P}K_{P-1}(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left[K_0(x)\right]=-K_1$$

$$\Rightarrow\ \int x^{P}K_{P-1}dx=-x^{P}K_{P}(x)+C$$

۴)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-P}K_{P}(x)\right]=-x^{-P}K_{P+1}$$

$$\int x^{-P}K_{P+1}(x)dx=-x^{-P}K_{P}(x)+C$$

[5] تابع بسل نوع چهارم را گاهی تابع بسل نوع دوم اصلاح شده نیز می‌گویند.

۴-۴-۳- معادله بسل به حالت کلی

معادله بسل در حالت کلی به فرم زیر می‌باشد:

$$x^2y''+x\left(a+2bx^r\right)y'+\left[C+dx^{2s}-b(1-a-r)+b^2x^{2r}\right]y=0$$

که در این‌صورت جواب، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y_{(x)}=x^{\frac{1-a}{2}}e^{\frac{-bx^r}{r}}\left[C_1Z_P\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)+C_2Z_{-P}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s}x^s\right)\right]$$

و

$$P=\frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-C}$$

و برای تعیین Z از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

		Z_P	Z_{-P}
اگر $\sqrt{d}$ حقیقی باشد	P عدد صحیح باشد	J_P	Y_P
	P عدد غیرصحیح باشد	J_P	J_{-P}
اگر $\sqrt{d}$ موهومی باشد	P عدد صحیح باشد	I_P	K_P
	P عدد غیرصحیح باشد	I_P	I_{-P}

نکته : اگر معادله بسل به‌صورت $x^2y''+axy'+\left[C+dx^{2s}\right]y=0$ باشد جواب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y_{(x)}=x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1Z_P\left(\frac{\sqrt{d}x^s}{s}\right)+C_2Z_{-P}\left(\frac{\sqrt{d}x^s}{s}\right)\right]$$

که Z_P و Z_{-P} با توجه به جدول بالا تعیین می‌گردد و $P=\frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-C}$

۴-۵- معادله لژاندر

معادله لژاندر به فرم کلی زیر می‌باشد:

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

و همان‌طور که در ابتدای فصل توضیح داده شد، برای معادله فوق نقطه $x=0$ یک نقطه عادی می‌باشد، بنابراین برای حل این معادله می‌توانیم از سری توانی استفاده کنیم.

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}C_mx^m$$

که در صورت جایگذاری رابطه فوق در معادله لژاندر به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$C_{m+2}=\frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+1)(m+2)}C_m$$

اگر n عددی صحیح و مثبت باشد جواب معادله لژاندر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

که:

$P_n(x)$: تابع لژاندر نوع اول از مرتبه n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \times n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$$

$Q_n(x)$: تابع لژاندر نوع دوم از مرتبه n

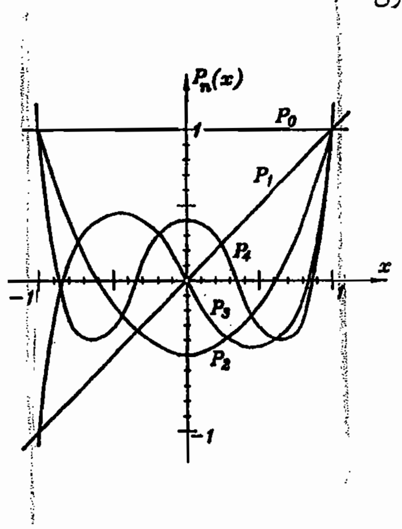
اگر n عدد فرد باشد، $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n که فقط شامل توان‌های فرد از x می‌باشد، خواهد بود.

در این حالت $Q_n(x)$ به صورت یک سری خواهد بود.

و اگر n عدد زوج باشد، $Q_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n که فقط شامل توان‌های زوج از x می‌باشد، خواهد بود.

و $P_n(x)$ به‌صورت یک سری خواهد بود.

تابع لژاندر نوع اول



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

$$P_{(2n+1)}(0) = 0$$

$$P'_{(2n)}(0) = 0$$

توابع لژاندر نوع اول که از مرتبه فرد می‌باشد، همگی از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

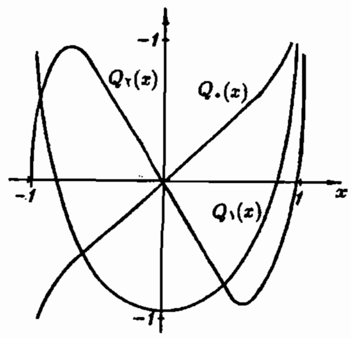
توابع لژاندر نوع اول که از مرتبه زوج می‌باشند، در مبدأ دارای ماکزیمم و یا مینیموم می‌باشند.

توابع لژاندر نوع دوم

$$Q_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} \text{Ln}\left|\frac{1+x}{x-1}\right| & |x| > 1 \end{cases}$$

$$Q_1(x) = Q_0(x) P_1(x) - 1$$

$$Q_2(x) = Q_0(x) P_2(x) - \frac{2}{3}$$



$$Q_0(1) = +\infty$$

$$Q_0(-1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+1} Q_n(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1} Q_n(x) = \pm\infty$$

۴-۶- معرفی توابع خاص

۴-۶-۱- تابع گاما

تابع گاما به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

خواص تابع گاما

۱)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0 + 1 = 1$$

۲)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

۳) اگر n عدد صحیح و مثبت باشد، در این‌صورت داریم:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

۴) اگر $0 < P < 1$ باشد، برای محاسبه گامای اعداد اعشاری می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\Gamma(P)\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin P\pi}$$

$$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$$

مثال : مقدار انتگرال $\int^\infty x^{-2.5} e^{-x} dx$ برابر است با:

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\Gamma(-1.5)=\int_0^{\infty} x^{-2.5}e^{-x}dx$$

$$n\Gamma(n)=\Gamma(n+1) \;\Rightarrow\; -1.5\Gamma(-1.5)=\Gamma(-0.5) \;\Rightarrow\; \Gamma(-1.5)=\frac{\Gamma(-0.5)}{-1.5}$$

$$n\Gamma(n)=\Gamma(n+1) \;\Rightarrow\; -0.5\Gamma(-0.5)=\Gamma(0.5) \;\Rightarrow\; \Gamma(-0.5)=\frac{\Gamma(0.5)}{-0.5}=-2\sqrt{\pi} \;\Rightarrow\; \Gamma(-1.5)=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-1.5}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

۴-۶-۲- تابع بتا

تابع بتا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

خواص تابع بتا

۱)

$$\beta(m,n)=\beta(n,m)$$

۲)

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

۴-۶-۳- تابع خطا

تابع خطا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$$

خواص تابع خطا

۱)

$$\operatorname{erf}(0)=0$$
$$\operatorname{erf}(\infty)=1$$

۲)

$$\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$$

۳)

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-u^2}du$$

$\operatorname{erfc}(x)$: مکمل تابع خطا

۴)

$$\operatorname{erfc}(0)=1$$
$$\operatorname{erfc}(\infty)=0$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ اگر $\int_0^T e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$ باشد مقدار $\operatorname{erfc}(T)$ برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۲ـ کدام تابع در فاصله $1 \le x \le 2$ می‌تواند جواب معادله زیر باشد؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - xy = 0$$

۱) $K_0(x), I_0(x)$ ۲) فقط $I_0(x)$ ۳) $Y_0(x), J_{(0)}(x)$ ۴) فقط $J_0(x)$

۳ـ کدام‌یک از عبارات زیر در مورد توابع بسل صحیح است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $\lim_{x\to 0} K_0 \to +\infty$ ۲) $\lim_{x\to 0} Y_0 \to +\infty$ ۳) $\lim_{x\to 0} J_0 \to +\infty$ ۴) $\lim_{x\to 0} I_0 \to +\infty$

۴ـ پاسخ یک معادله دیفرانسیل به‌صورت کلی $y = AJ_0(x) + BY_0(x)$ است. مقادیر ثابت انتگرال‌گیری با در نظر گرفتن شــرایط مرزی زیر عبارت است از: (مهندسی شیمی ۸۲)

$i)\ x = 0 \quad y = 1$

$ii)\ x = 0 \quad \frac{dy}{dx} =$ معین

۱) $B = 0 \ , \ A = 1$ ۲) $B = \frac{1}{2} \ , \ A = \frac{-1}{2}$

۳) $B = 1 \ , \ A = 0$ ۴) $B = \frac{-1}{2} \ , \ A = \frac{1}{2}$

۵ـ کدام معادله با استفاده از روش فروبینوس حول نقطه صفر قابل حل می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$ ۲) $y'' + 2xy' + 2y = 0$

۳) $y'' + 5x^2y' + 2xy = 0$ ۴) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1) = 0$

۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + y' - x\lambda^2 y = 0$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $y = c_1I_0(\lambda x) + c_2Y_0(\lambda x)$ ۲) $y = c_1I_0(\lambda x) + c_2K_0(\lambda x)$

۳) $y = c_1J_0(\lambda x) + c_2Y_0(\lambda x)$ ۴) $y = c_1I_0(\lambda^2 x) + c_2K_0(\lambda^2 x)$

۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - m^2x^2y = 0$ برابر است با: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

۱) $y = c_1I_0(x) + c_2k_0(x)$ ۲) $y = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)$

۳) $y = c_1I_0(mx) + c_2k_0(mx)$ ۴) $y = c_1J_0(mx) + c_2Y_0(mx)$

۸ـ در استوانه‌ای بلند فلزی به شعاع R که دمای سطح آن در حالت یکنواخت T_0 است رابطه توزیع دما از حل یک معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر حاصل شده است $T_{(2)} = c_1 J_0\left(\sqrt{r}\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{r}\right)$ توزیع دمای جسم کدام است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

۱) $\dfrac{T_{(r)}}{T_0} = J_0\left(\sqrt{\dfrac{r}{R}}\right)$ ۲) $\dfrac{T_{(r)}}{T_0} = Y_0\left(\sqrt{\dfrac{r}{R}}\right)$ ۳) $\dfrac{T_{(r)}}{T_0} = \dfrac{Y_0\left(\sqrt{r}\right)}{Y_0\left(\sqrt{R}\right)}$ ۴) $\dfrac{T_{(r)}}{T_0} = \dfrac{J_0\left(\sqrt{r}\right)}{J\left(\sqrt{R}\right)}$

۹ـ جهت حل معادله دیفرانسیل $4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ با روش فروبینوس، جواب معادله به‌صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$ در نظر گرفته می‌شود با تعیین معادله اندیس (Indicdal Equation) مقدار c کدام است؟ (مهندسی مخازن ۸۱)

۱) $-\frac{1}{2}, 0$ ۲) $0, \pm\frac{1}{2}$ ۳) $+\frac{1}{2}, 0$ ۴) $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

۱۰ـ کدام تابع بسل است که در مبدأ مقدار آن به سمت $+\infty$ میل می‌کند و با افزایش متغیر بسل کاهش می‌یابد؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۱)

۱) $Y_k(x)$ ۲) $I_k(x)$ ۳) $J_k(x)$ ۴) $K_k(x)$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\operatorname{erfc}(T)=1-\operatorname{erf}(T)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2dt}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{6}=\frac{2}{3}$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-xy=0 \Rightarrow xy''+y'-xy=0 \overset{\times x}{\Rightarrow} \underbrace{x^2y''+xy'-x^2y=0}_{\text{تابع بسل اصلاح شده}}$$

$$\Rightarrow y_{(x)}=AI_0(x)+bK_0(x)$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه ۱ صحیح است.

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y_{(0)}=1 \Rightarrow A=1 \quad , \quad B=0$$

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برای استفاده از روش فروبینوس حول نقطه صفر، لازم است $x=0$ نقطه تکین منظم برای معادله باشد.

$$x^2y''+xy'+2xy=0 \Rightarrow y''+\frac{1}{x}y+\frac{2}{x}y=0 \Rightarrow x=0 \text{ نقطه تکین}$$

$$f_1(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f_2(x)=\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}x f_1(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}x^2f_2(x)=2x=0 \Rightarrow x=0 \text{ نقطه تکین منظم}$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$xy''+y'-x\lambda^2y=0 \overset{\times x}{\Rightarrow} x^2y''+xy'-x^2\lambda y=0$$

$$x^2y''+axy'+\left[c+dx^{2s}\right]y=0 \Rightarrow a=1 \quad , \quad c=0 \qquad d=-\lambda^2 \quad , \quad s=1$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-c}=\frac{1}{1}\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2-0}=0 \Rightarrow P=0 \text{ و عدد صحیح}$$

$$d=-\lambda^2 \Rightarrow \sqrt{d}=\sqrt{-\lambda^2}=\lambda i \Rightarrow d=-\lambda^2 \text{ و } \sqrt{d} \text{ موهومی باشد}$$

$$\Rightarrow y_{(x)}=x^{\frac{1-a}{2}}\left[c_1I_0\left(\frac{\sqrt{|d|}x^s}{s}\right)+c_2K_0\left(\frac{\sqrt{|d|}x^s}{s}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y_{(x)}=x^{\frac{1-1}{2}}\left[c_1I_0(\lambda x)+c_2K_0(\lambda x)\right]$$

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$x^2y''+axy'+\left[c+dx^{2s}\right]y=0$$

$$x^2y''+xy'-m^2x^2y=0 \Rightarrow a=1 \ , \ c=0 \ , \ s=1 \text{ و } d=-m^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{d}=m\sqrt{i} \leftarrow \text{موهومی}$$

$$P=\frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-c} \Rightarrow P=\frac{1}{1}\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)-0}=0 \leftarrow \text{عدد صحیح}$$

$$\frac{\sqrt{|d|}x^s}{s}=mx$$

$$\Rightarrow y=c_1I_0(mx)+c_2K_0(mx)$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$T_{(r)}$ در مبدأ محدود می‌باشد پس c_2 باید برابر صفر شود.

$$\Rightarrow T_{(r)}=c_1J_0\sqrt{r} \Rightarrow r=R:T=T_0=c_1J_0\left(\sqrt{R}\right) \Rightarrow c_1=\frac{T_0}{J\left(\sqrt{R}\right)}$$

$$\Rightarrow T_{(r)}=\frac{T_0}{J_0\left(\sqrt{R}\right)}J_0\left(\sqrt{r}\right) \Rightarrow \frac{T_{(r)}}{T_0}=\frac{J_0\left(\sqrt{r}\right)}{J_0\left(\sqrt{R}\right)}$$

۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$4x\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+y=0 \Rightarrow y''+\frac{3}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1=\lim\limits_{x\to 0} x\times\frac{3}{2x}=\frac{3}{2} \\ F_2=\lim\limits_{x\to 0} x^2\times\frac{1}{4x}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{معادله مشخصه}: r(r-1)+\frac{3}{2}r+0 \Rightarrow r^2+\frac{1}{2}r=0 \rightarrow r_1=0, \quad r_2=-\frac{1}{2}$$

۱۰ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه چهارم صحیح می‌باشد.

فصل پنجم

تبدیل لاپلاس

۵ـ ۱ مقدمه

تبدیل لاپلاس یک عملگر انتگرالی است که از این تبدیل و معکوس آن برای حل معادلات دیفرانسیل خطی استفاده می‌کنیم که در این روش با تبدیل لاپلاس معادلات خطی، آنها را به معادلات جبری تبدیل می‌کنیم و سپس معادله جبری حاصل را حل می‌کنیم و با یافتن عکس تبدیل لاپلاس به جواب معادله دیفرانسیل می‌رسیم.

۵ـ ۲ تبدیل لاپلاس

فرض کنید $f_{(t)}$ تابعی حقیقی روی بازه $[0,\infty]$ باشد تبدیل لاپلاس $f_{(t)}$ را با $L\{f_{(t)}\}$ یا $F_{(s)}$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f_{(t)}\} = F_{(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad , \quad S>0$$

که لازمست انتگرال ناسره بالا همگرا باشد.

و تابع $f_{(t)}$ را عکس تبدیل لاپلاس تابع $F_{(s)}$ می‌نامیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L^{-1}\{F_{(s)}\} = f_{(t)}$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)} = t^{a}$ به چه صورت است؟

$$Lf_{(t)} = \int_0^{\infty} t^{a} e^{-st}\,dt$$

تغییر متغیر $\Rightarrow st = y, sdt = dy$

$$\Rightarrow L(f_{(t)}) = \int_0^{\infty} (\frac{y}{s})^{a} e^{-y} \frac{dy}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} y^{a} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

تبدیل لاپلاس چند تابع مهم و پر کاربرد در جدول زیر آمده است.

$f(t)$	$f(s)$
1	$\frac{1}{S}$
t	$\frac{1}{S^2}$
t^n	$\frac{n!}{S^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{S\mp a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{S}{S^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{S^2-\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\frac{S}{S^2-\omega^2}$
$e^{\pm at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(S\mp a)^2+\omega^2}$
$e^{\pm at}\cos\omega t$	$\frac{S}{(S\mp a)^2+\omega^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n f(s)}{dS^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} f(s)ds$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{f(s)}{S}$
$e^{\pm at}f(t)$	$f(S\mp a)$

تبدیل لاپلاس توابع مختلف

مثال : تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)} = \cos^2 t$ به چه صورت است؟

$$L(\cos^2 t) = L\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right) = \left(\frac{S}{S^2+4} + \frac{1}{S}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{S^2+2}{S(S^2+4)}$$

مثال : انتگرال $\int_0^\infty e^{-5x} \cos 2x dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{5}{21}$ ۳) $\frac{5}{29}$ ۴) $\frac{2}{25}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$L(\cos 2x) = \int_0^\infty e^{-sx} \cos 2x dx = \frac{S}{S^2+4} \overset{S=5}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{-5x} \cos 2x = \frac{5}{25+4}$$

برای یافتن معکوس تبدیل لاپلاس، ابتدا به تجزیه کسر می‌پردازیم و سپس با مراجعه به جدول می‌توانیم توابع را مشخص کنیم.

مثال : معکوس تبدیل لاپلاس $f_{(s)} = \frac{1}{S^2+S}$ به چه صورت می‌باشد.

$$f_{(s)} = \frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1}$$

برای به دست آوردن ضریب A، ابتدا طرفین معادله را در s ضرب می‌کنیم و سپس با قرار دادن s=0، مقدار A به دست می‌آید.

$$\times S \Rightarrow \frac{1}{s+1} = A + \frac{Bs}{s+1} \overset{s=0}{\Rightarrow} \frac{1}{0+1} = A + 0 \Rightarrow A = 1$$

و برای به دست آوردن B داریم:

$$\times S+1 \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{A(s+1)}{s} + B \overset{s=-1}{\Rightarrow} \frac{1}{-1} = A \times 0 + B \Rightarrow B = -1$$

$$\Rightarrow f_{(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow L^{-1}(f_{(s)}) = 1 - e^{-t}$$

مثال : معکوس تبدیل لاپلاس $f_{(s)} = \frac{1}{s(s+1)^2}$ به چه صورت می‌باشد.

$$f_{(s)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$\overset{\times s}{\Rightarrow} \frac{1}{(s+1)^2} = A + \frac{Bs}{s+r} + \frac{Cs}{(s+1)^2} \overset{s=0}{\Rightarrow} A = 1$$

$$\overset{\times (s+1)^2}{\Rightarrow} \frac{1}{s} = \frac{A(s+1)^2}{s} + B(s+1) + C \overset{s=-1}{\Rightarrow} C = -1$$

برای به دست آوردن B از طرفین معادله اخیر نسبت به s مشتق می‌گیریم.

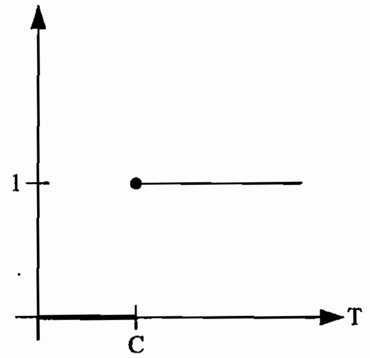
$$-\frac{1}{s^2} = \left(\frac{A(s+1)^2}{s}\right)' + B + 0 \overset{s=-1}{\Rightarrow} B = -1$$

$$\Rightarrow f_{(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

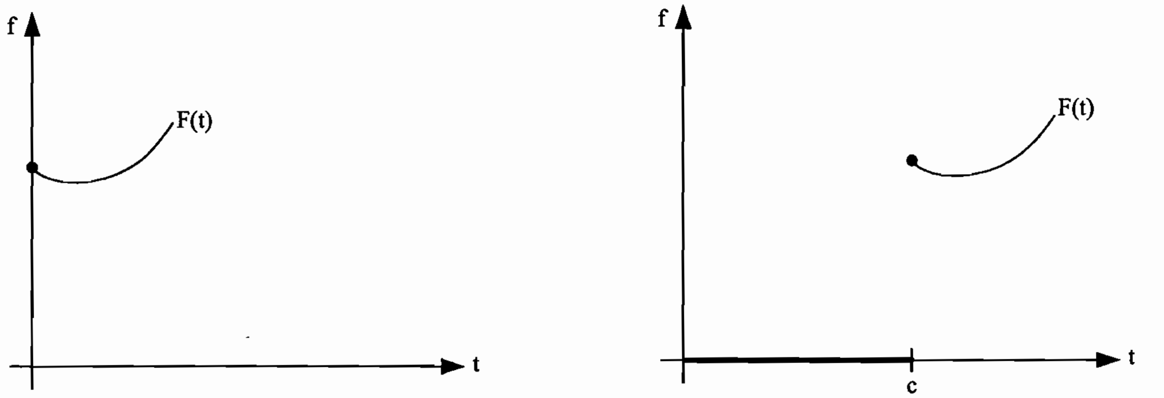
$$\Rightarrow L^{-1}(f_{(s)}) = 1 - e^{-t} - te^{-t} = 1 - e^{-t}(1+t)$$

تابع پله‌ای واحد: این تابع به صورت مقابل تعریف می‌شود.

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



اکنون تابع دلخواه $f_{(t)}$ را در نظر بگیرید در این صورت حاصلضرب $u_c(t)f(t-c)$ برابر است با همان تابع f که ابتدا به اندازه c واحـد به راست منتقل شده و سپس مقادیر تابع به ازای t<c صفر فرض شده است.



نکته : اگر تابع $f_{(t)}$ در حالت کلی به صورت زیر باشد.

$$f_t = \begin{cases} f_1(t) & 0 < t < a \\ f_2(t) & a < t < b \\ f_3(t) & b < t \end{cases}$$

در این صورت می‌توانیم $f_{(t)}$ را به فرم تابع پله‌ای به صورت زیر بنویسیم.

$$f_{(t)} = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]u_a(t) + [f_3(t) - f_2(t)]u_b(t)$$

نکته : تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد برابر است با:

$$L(u_c(t)) = \frac{e^{-cs}}{s}$$

نکته : اگر $F_{(s)}$ تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ باشد در این صورت داریم:

$$L(u_c(t)f(t-c)=e^{-cs}F(s)$$ و

$$L^{-1}(e^{-cs}F(s))=u_c(t)f(t-c)$$

مثال : اگر تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ برابر $F_{(s)}=\frac{s\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s^2+1}$ باشد، $f_{(t)}$ کدام است؟ (مهندسی نفت ۸۲)

۱) $f_{(t)}=\begin{cases}\cos t & t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$

۲) $f_{(t)}=\begin{cases}0 & t<\pi\\ \cos t & t>\pi\end{cases}$

۳) $f_{(t)}=\begin{cases}\sin t & t<\pi\\ \cos t & t>\pi\end{cases}$

۴) $f_{(t)}=\begin{cases}-\cos t & t<\pi\\ \sin t & t>\pi\end{cases}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$F_{(s)}=\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

با توجه به شکل $F_{(s)}$ تابع $f_{(t)}$ باید به شکل روبرو باشد:

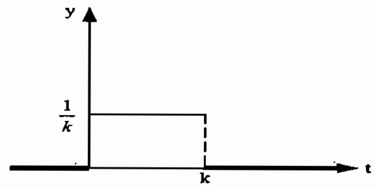
$$f_{(t)}=[u_0(t)-u_\pi(t)]\cos t$$

$$\Rightarrow Lf_{(t)}=L\{u_0(t)\cos t\}-L\{u_\pi(t)\cos t\}=$$

$$=\frac{s}{s^2+1}-e^{-\pi s}L(\cos(\pi+t)=\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

تابع دلتای دیراک: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود و به طور شهودی معرف یک ضربه واحد است.

$$g_k(t)=\begin{cases}\frac{1}{k} & 0<t<k\\ 0 & k<t \text{ یا } t<0\end{cases}$$



تابع دلتای دیراک را می‌توانیم به فرم تابع پله‌ای نیز بنویسیم که در این صورت داریم.

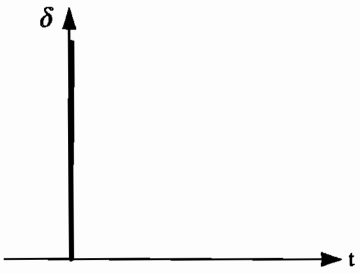
$$g_k(t)=\frac{1}{k}[u_0(t)-u_k(t)]$$

$$\Rightarrow Lg_k(t)=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-ks}}{s}\right]=\frac{1}{ks}(1-e^{-ks})$$

نکته : با توجه به شکل تابع دلتای دیراک کاملا مشخص است که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g_k(t)dt=1$$

اگر مقدار k به سمت صفر نزدیک کنیم در این صورت تابع دلتای دیراک به شکل زیر در می‌آید که آن را تابع ضربان ایده آل می‌نامیم و با $\delta_{(t)}$ نشان می‌دهیم.



$$\delta_{(t)} = \lim_{k\to 0} g_k(t)$$

در این صورت داریم:

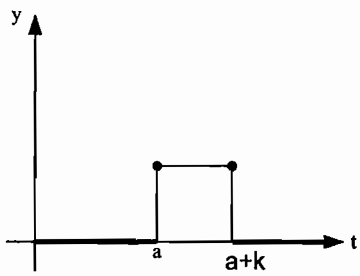
۱) $L\delta_{(t)} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{ks}(1-e^{-ks}) = 1$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{(t)} = 1$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(t)}\delta_{(t)} = f_{(0)}$

تابع دلتای دیراک و ضربان ایده آل را می‌توانیم به سمت راست و یا چپ نیز منتقل کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$g_k(t-a) = \begin{cases}\frac{1}{k} & a<t<a+k\\ 0 & \text{خارج از محدوده بالا}\end{cases}$$



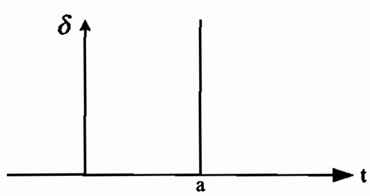
$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}g_k(t-a)dt = 1$

$\Rightarrow g_k(t-a) = \frac{1}{k}[u_a(t) - u_{a+k}(t)]$

$\Rightarrow L(g_k(t-a)) = \frac{e^{-as}}{ks}(1-e^{-ks})$

و در مورد تابع ضربان ایده آل داریم:

$$\delta(t-a) = \begin{cases}\infty & t=a\\ 0 & t\neq a\end{cases}$$



$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt = 1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)f_{(t)} = f_{(a)}$

$\Rightarrow L(\delta(t-a)) = e^{-as}$

مثال : لاپلاس $\delta(t-\pi)\cos t$ به چه صورت خواهد بود؟

$$L(\delta(t-\pi)\cos t)=\int_0^{\infty}\delta(t-\pi)\cos(t)^{-st}\,dt=\cos\pi e^{-\pi s}=-e^{-\pi s}$$

۳ـ۵ قضایا و خواص تبدیل لاپلاس

*: تبدیل لاپلاس یک تبدیل یک به یک است و هرگاه دو تابع دارای تبدیل لاپلاس یکسان باشند آن دو تابع یکسان هستند.

*: قضیه مقدار اولیه: اگر $f_{(s)}$ تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ باشد در این صورت داریم:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

*: قضیه مقدار نهایی: اگر $F_{(s)}$ تبدیل لاپلاس تابع $f_{(t)}$ باشد در این صورت داریم:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sf(s)$$

مثال : $L^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{s^2+4s+13}\right)$ وقتی که $t=0$ برابر است با:

۱) 1 ۲) 2 ۳) 0 ۴) -2

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\frac{2s^2+s}{s^2+4s+4}=2$$

***قضیه اول انتقال:** اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و a یک عدد حقیقی دلخواه باشد، داریم:

$$L(e^{at}f(t))=F(s-a)$$

$$L^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)$$

*** قضیه دوم انتقال:** اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد و $u_{(t)}$ نشان گر تابع پله‌ای واحد باشد در این صورت داریم:

$$L(f(t-a)u(t-a))=e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}(e^{-as}F(s))=f(t-a)u(t-a)$$

مثال : تبدیل لاپلاس $f_{(t)}=e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$ کدام است؟ (فرآوری و انتقال گاز ۸۴)

۱) $s-3$ ۲) $\dfrac{2s-21}{(s-3)^2+25}$ ۳) $\dfrac{2s+9}{s^2+34}$ ۴) $\dfrac{s+3}{(s-3)^2+25}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$L(f(t))=L(2e^{3t}\cos 5t-3e^{3t}\sin 5t)=\frac{2(s-3)}{(s-3)^2+25}-\frac{3\times 5}{(s-3)^2+25}=\frac{2s-21}{(s-3)^2+25}$$

*اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد در این صورت تبدیل لاپلاس حاصلضرب تابع $f(t)$ در t^n برابر خواهد بود با:

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^n(s)$$

$$L^{-1}(F^n(s)) = (-1)^n t^n f(t)$$

$F^n_{(s)}$: مشتق مرتبه n ام تابع $F(s)$ نسبت به s.

مثال : تبدیل لاپلاس $xe^{ax}\cos x$ عبارت است از: (مهندسی پلیمر ۸۰)

۱) $\dfrac{(s+a)^2-1}{\left[(s-a)^2+1\right]^2}$ ۲) $\dfrac{(s+a)^2-1}{\left[(s+a)^2+1\right]^2}$ ۳) $\dfrac{(s-a)^2-1}{\left[(s-a)^2+1\right]^2}$ ۴) $\dfrac{(s-a)^2-1}{\left[(s-a)^2-1\right]^2}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$L(x\underbrace{e^{ax}\cos x}_{f(x)}) = L(xf_{(x)}) = (-1)\frac{dF_{(s)}}{ds}$$

$$F_{(s)} = L(f_{(x)}) = L(e^{ax}\cos x) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1}$$

$$\Rightarrow (L(xf_{(x)}) = -\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+1}\right)' = \frac{(s-a)^2-1}{\left[(s-a)^2+1\right]^2}$$

مثال : اگر $F_{(s)} = \cot g^{-1}\dfrac{s}{w}$ باشد آنگاه تبدیل معکوس $F(s)$ کدام است؟ (فرآوری و انتقال گاز ۸۴)

۱) $\dfrac{\sin\omega t}{t}$ ۲) $t\sin\omega t$ ۳) $-\dfrac{\sin\omega t}{t}$ ۴) $-t\sin\omega t$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$L(tf_{(t)}) = -F'_{(s)} = -\frac{-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{s^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{S^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow tf_{(t)} = \sin\omega t \Rightarrow f_{(t)} = \frac{\sin\omega t}{t}$$

مثال : مقدار انتگرال $\int te^{-2t}(\sin t - \cos t)dt$ برابر است با:

۱) $\dfrac{1}{25}$ ۲) $\dfrac{2}{25}$ ۳) $-\dfrac{2}{25}$ ۴) $-\dfrac{1}{25}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\int te^{-2t}(\sin t - \cos t)dt = L(t(\sin t - \cos t))_{s=2} = -\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}\right)'_{s=2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=2} = \frac{1}{25}$$

* اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد و $f^n_{(t)}$ نشان گر مشتق مرتبه n ام تابع $f_{(t)}$ باشد در این صورت داریم:

$$L(f^n{}_{(t)}) = s^n F_{(s)} - s^{n-1}f_{(0)} - s^{n-2}f'_{(0)} - \ldots - f^{n-1}_{(0)}$$

$$L(f'_{(t)}) = SF_{(s)} - f_{(0)}$$

$$L(f''_{(t)}) = S^2F_{(s)} - Sf_{(0)} - f'_{(0)}$$

* اگر F(s) تبدیل لاپلاس تابع f(t) باشد در این صورت داریم :

$$L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F_{(s)}}{S}$$

$$L^{-1}\left(\frac{F_{(s)}}{S}\right) = \int_0^t f_{(u)}du$$

مثال : جواب معادله انتگرالی روبرو در نقطه $t = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$y' + \int_0^t y_{(t)}dt = 1 \quad , \quad y_{(0)} = 1$$

۱) 0 ۲) $1 + \frac{\pi}{2}$ ۳) 1 ۴) $1 - \frac{\pi}{2}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با گرفتن لاپلاس از معادله داریم:

$$L\left(y' + \int_0^t y_{(t)}dt\right) = L(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L(y') + L\left(\int_0^t y_{(t)}dt\right) = \frac{1}{s}$$

$$Sy_{(S)} - y_{(0)} + \frac{y_{(s)}}{S} = \frac{1}{S} \Rightarrow y_{(s)} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}(y_{(s)}) = L^{-1}\left(\frac{S}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right) = \cos t + \sin t$$

$$\Rightarrow y_{(\frac{\pi}{2})} = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

***قضیه پیچش «کانولوشن»:** اگر $G_{(s)}, F_{(s)}$ به ترتیب تبدیل لاپلاس توابع $g_{(t)}, f_{(t)}$ باشند در این صورت کانولوشن دو تابع g , f را با f * g نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

و داریم:

$$L(f * g) = F_{(s)}G_{(s)}$$

با توجه به تعریف کانولوشن مشخص است که f*g با g*f برابر می‌باشد.

نکته : $f*0=0*f=0$ می‌باشد اما $1*f \neq f$

$$1*f = f*1 = \int_0^t f_{(t)}dt \Rightarrow L(1*f) = \frac{L(f_{(t)})}{s}$$

مثال : جواب معادله انتگرالی $\int_0^t y_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ عبارت است از: (فرآوری و انتقال گاز ۸۳)

۱) $y_{(t)} = \pm\cos t$ ۲) $y_{(t)} = \pm\sin t$ ۳) $y_{(t)} = \pm t\cos t$ ۴) $y_{(t)} = \pm t\sin t$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$L\left(\int_0^t y_{(\tau)}y_{(t-\tau)}d\tau\right) = L\left(\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)\right)$$

$$y_{(s)}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{s}{s^2+1}\right)'\right) \Rightarrow y_{(s)}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_{(s)}^2 = \frac{1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y_{(s)} = \pm\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y_{(t)} = \pm\sin t$$

مجموعه تست‌های فصل پنجم

۱ ـ مطلوب است به‌دست آوردن $f(1)$ اگر داشته باشیم: (مهندسی شیمی ۸۴)

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\} \quad , \quad f(s)=\frac{2}{s(s-1)^3}+\frac{1}{s^2(s-1)^2}$$

۱) 1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۲ ـ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر داده شده است تبدیل لاپلاس آن کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 2\\ t & t>2\end{cases}$$

۱) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$ ۲) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2}$

۳۳) $f(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$ ۴) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$

۳ ـ معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. اگر تبدیل لاپلاس $y(t)$ را با $y_{(s)}$ نشان دهید آنگاه $Y_{(s)}$ با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=1 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

۱) $\frac{1}{s}$ ۲) $\frac{2}{s}$ ۳) $\frac{3}{s}$ ۴) $\frac{2}{s^2}$

۴ ـ تبدیل لاپلاس $L\left[e^{\frac{t}{3}}\right]$ کدام است؟ (مهندسی شیمی آزاد ۸۲)

۱) $\frac{3}{3s-1}$ ۲) $\frac{1}{3s-1}$ ۳) $\frac{1}{s-3}$ ۴) $\frac{1}{s+3}$

۵ ـ تبدیل لاپلاس $L\{\cosh 4x\}$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری آزاد ۸۴)

۱) $\frac{2s}{s^2-16}$ ۲) $\frac{2s}{s^2+16}$ ۳) $\frac{s}{s^2-16}$ ۴) $\frac{s}{s^2+16}$

۶ ـ تبدیل لاپلاس $L\{5!\}$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری آزاد ۸۲)

۱) $-\frac{5!}{s}$ ۲) $\frac{5!}{s}$ ۳) $\frac{5!}{s^4}$ ۴) $-\frac{5!}{s^4}$

۷ ـ تبدیل لاپلاس $L\left[\sin\frac{t}{3}\right]$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری آزاد ۸۲)

۱) $\frac{3}{9s^2+1}$ ۲) $\frac{1}{9s^2+1}$ ۳) $\frac{1}{9s^2-1}$ ۴) $\frac{3}{9s^2-1}$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل پنجم

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$f(t)=L^{-1}\{f(s)\}$$

$$f(s)=\frac{2}{s(s-1)^3}+\frac{1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{s}\times\frac{1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{s}\times\frac{2}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2}\times\frac{1}{(s-1)^2}$$

با توجه به $f(s)$ می‌توانیم از قضیه پیچش استفاده کنیم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1 \qquad L^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2}\right)=t^2e^t$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)=te^t$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\int_0^t t^2e^t dt+\int_0^t (t-\tau)\tau e^\tau d\tau$$

$$=\int_0^t t^2e^t dt+\int_0^t t\tau e^\tau d\tau-\int_0^t \tau^2e^\tau d\tau=t\int_0^t \tau e^\tau d\tau=t\left[e^\tau(\tau-1)\right]\Big|_0^t=t^2e^t-te^t+t$$

$$\Rightarrow \quad f(1)=1-1+1=1$$

۲ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با استفاده از تعریف لاپلاس $\Rightarrow \quad F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^2 e^{-st}dt+\int_2^\infty te^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^2+\left(-\frac{e^{-st}}{s}\left(t+\frac{1}{s}\right)\right)\Big|_2^\infty=$

$$=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y''+y=1 \quad\Rightarrow\quad s^2Y_{(s)}-sY(0)-y'(0)+Y_{(s)}=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad s^2Y_{(s)}+Y_{(s)}-s=\frac{1}{s} \quad\Rightarrow\quad Y_{(s)}\left(s^2+1\right)=\frac{s^2+1}{s} \quad\Rightarrow\quad Y_{(s)}=\frac{1}{s}$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$:L\left\{e^{\frac{t}{3}}\right\}=\frac{1}{s-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3s-1}$$

۵ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$L\{\cosh 4x\}=\frac{s}{s^2-4^2}=\frac{s}{s^2-16}$$

۶- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$L\{5!\} = 5!L\{1\} = \frac{5!}{s}$$

۷- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$L\left\{\sin\frac{t}{3}\right\} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{9s^2 + 1}$$

فصل ششم

فرمولاسیون و مدل سازی

۶ـ ۱ مقدمه

منظور از مدل سازی ریاضی، یافتن معادله یا معادلاتی است که میزان اثر پارامترها و متغیرهای مختلف را روی پاسخ و رفتار یک سیستم نشان می‌دهد به عبارت دیگر در مدل سازی ریاضی، معادله و یا معادلاتی به دست می‌آید که تغییرات متغیرهای ـ وابسته سیستم ـ به عنوان مثال T, C, V و ... ـ بر حسب متغیرهای مستقل سیستم $(t, z, y, x), (t, \theta, z, r), (t, \phi, \theta, r)$. بیان می‌شود.

برای انجام مدل سازی، ابتدا باید متغیرهای مستقل و وابسته سیستم را مشخص نمائیم. متغیرهای مستقل در سیستم کاتزین معمولا t, z, y, x و در سیستم استوانه‌ای t, θ, z, r و در سیستم کروی t, ϕ, θ, r می‌باشند و متغیر وابسته براساس سیستم مورد نظر می‌تواند تغییر کند به عنوان مثال در سیستم‌های انتقال جرم، متغیر وابسته می‌تواند c باشد و یا در مسائل انتقال مومنتوم، متغیر وابسته، سرعت u می‌باشد.

مدل سازی ریاضی به طور کلی به دو صورت انجام می‌شود.

۱) متمرکز «لامپد» Lumped

۲) توزیعی «دیفرانسیلی» Differential

در فرمولاسیون لامپد متغیر وابسته تنها تابع زمان می‌باشد و تابعیت مکانی ندارد در این حالت سیستم مورد مطالعه مانند یک نقطه مادی تلقی می‌شود به عنوان مثال، گرم شدن یک کره فلزی کوچک با ضریب هدایت حرارت زیاد ـ K بزرگ ـ در درون یک کوره را در نظر بگیرید در این حالت می‌توانیم از تابعیت T ـ متغیر وابسته ـ نسبت به شعاع صرفنظر کنیم زیرا اختلاف دمای نقاط مختلف آن ـ در شعاع‌های مختلف بسیار ناچیز است بنابراین دمای کره را می‌توان فقط تابعی از زمان دانست « $T_{(t)}$ » ، مدل سازی لامپد منجر به معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود «ODE» در فرمولاسیون دیفرانسیلی، علاوه بر تغییرات زمانی متغیر وابسته، تغییرات مکانی را هم در نظر می‌گیریم یعنی متغیر وابسته حداقل تابع دو متغیر «زمانی و مکانی» می‌باشد در این حالت یک جزء دیفرانسیلی بسیار کوچک

از جسم را در نظر می‌گیریم و با نوشتن موازنه‌ها و معادلات حاکم، معادله دیفرانسیل سیستم رابه دست آوریم که در این حالت یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای «PDE» خواهد بود.

نکته : جزء دیفرانسیلی در نظر گرفته شده، باید از نظر هندسی با سیستم مسئله هماهنگ باشد مثلا در کره جزء دیفرانسیلی کروی «یک پوسته کروی» و در سیستم استوانه‌ای یک جزء کوچک استوانه‌ای و در مختصات کارتزین، یک صفحه بسیار نازک و یا یک مکعب مستطیل خیلی کوچک در نظر می‌گیریم.

روش حل معادلات ODE در بخش معادلات توضیح داده شده است برای حل معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای «PDE» می‌توانیم از دو روش عددی و تحلیلی استفاده کنیم.

۶ـ ۲ تعاریف

گرادیان: برای کمیت‌های اسکالر تعریف می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{grad}\Psi = \nabla\Psi = \frac{\delta\Psi}{\delta x}i + \frac{\delta\Psi}{\delta y}j + \frac{\delta\Psi}{\delta z}k$$

دیورژانس: برای کمیت‌های برداری تعریف می‌شود که حاصل اش یک کمیت اسکالر است به عنوان مثال برای $A = A_x i + A_y i + A_z k$ داریم:

$$\text{div}A = \nabla . A = \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta A}{\delta y} + \frac{\delta A}{\delta z}$$

لاپلاسین: عملگر لاپلاسین در دستگاههای مختلف به شکل زیر بیان می‌شود.

مختصات کارتزین $\rightarrow \nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$

مختصات استوانه‌ای $\rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\frac{\delta}{\delta r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{\delta\theta^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$

مختصات کروی $\rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}(r^2\frac{\delta}{\delta r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\delta}{\delta\theta}(\sin\theta\frac{\delta}{\delta\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2}$

روابط بین مختصات کارتزین (x,y,z) و مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) به شکل زیر می‌باشد:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \;,\; \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \;,\; z = z$$

روابط بین مختصات کارتزین (x,y,z) و مختصات کروی (r,θ,ϕ) به شکل زیر می‌باشد.

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\,\sin\phi \quad z = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

انواع مشتقات نسبت به زمان

به طور کلی سه نوع مشتق نسبت به زمان داریم این مشتقات و مفهوم فیزیکی هر یک را با مثالی توضیح می‌دهیم. فرض کنید یک ناظر در یک قایق موتوری قصد دارد تغییرات یک کمیت ـ به عنوان مثال M ـ را بر حسب زمان در یک رودخانه اندازه گیری کند.

$$M = M(x_i, t)$$

$$dM = \frac{\delta M}{\delta t}dt + \frac{\delta M}{\delta x_i}dx_i$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{\delta M}{\delta t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\delta M}{\delta x_i}$$

سه حالت زیر را در نظر بگیرید.

الف) قایق به نقطه‌ای از رودخانه بسته شده و ساکن می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{\delta M}{\delta t}.\dfrac{\delta M}{\delta x_i} \\ ,\dfrac{dx_i}{dt} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{\delta M}{\delta t}$$

یعنی ناظر مشتق جزئی کمیت M را بر حسب زمان خواهد داشت.

ب) قایق توسط موتور خود با سرعتی مستقل از سرعت جریان آب رودخانه حرکت می‌کند و سرعت ناظر $V_i^a = \dfrac{dx_i^a}{dt}$ نسبت به بستر ثابت رودخانه است (x_i^a موقعیت مکانی قایق نسبت به مختصات ثابت بستر رودخانه است).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{\delta M}{\delta t} + \dfrac{dx_i}{dt}.\dfrac{\delta M}{\delta x_i} \\ \dfrac{dx_i}{dt} = V_i^a \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{\delta M}{\delta t} + V_i^a\frac{\delta M}{\delta x_i}$$

در این حالت ناظر مشتق کامل کمیت M را براساس سرعت دلخواه خود که مستقل از سرعت آب رودخانه است خواهد داشت.

ج) قایق با موتور خاموش روی جریان آب قرار دارد. و همراه با جریان آب رودخانه حرکت می‌کند. سرعت $V_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ سرعت آب رودخانه و قایق و ناظر است.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{\delta M}{\delta t} + \dfrac{dx_i}{dt}.\dfrac{\delta M}{\delta x_i} \\ \dfrac{dx_i}{dt} = V_i \end{array}\right\} \rightarrow \frac{DM}{Dt} = \frac{\delta M}{\delta t} + V_i\frac{\delta x}{\delta x_i}$$

در این حالت ناظر مشتق کامل کمیت M را براساس سرعت آب رودخانه خواهد داشت.

مشتق کامل $\dfrac{D}{Dt}$ در دستگاههای مختصات مختلف به شکل زیر بیان می‌شود.

مختصات کارتزین $\rightarrow \dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\delta}{\delta t} + u_x\dfrac{\delta}{\delta x} + u_y\dfrac{\delta}{\delta y} + u_z\dfrac{\delta}{\delta z}$

مختصات استوانه‌ای $\rightarrow \dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\delta}{\delta t}+u_r\dfrac{\delta}{\delta r}+\dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\delta}{\delta\theta}+u_z\dfrac{\delta}{\delta z}$

مختصات کروی $\rightarrow \dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\delta}{\delta t}+u_r\dfrac{\delta}{\delta r}+\dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\delta}{\delta\theta}+\dfrac{u_\phi}{r\sin\theta}\dfrac{\delta}{\delta\phi}$

در مسائل مهندسی شمی برای مدل سازی از سه قانون بقا استفاده می‌کنیم که در ادامه به بررسی هر یک از آنها می‌پردازیم.

ـ قانون بقای انرژی

قانون بقای انرژی به شکل زیر بیان می‌شود.

تجمع + تولید +مصرف ـ خروجی = ورودی

$q_{in}=q_{out}\pm q'+\dfrac{dE}{dt}\equiv \Delta E=\Delta Q-\Delta W$ قانون اول ترمودینامیک

ورود و خروج انرژی می‌تواند به دو صورت انجام شود.

۱) از طریق نفوذ مولکولی

q_{in} یا $q_{out}=-KA\nabla T$

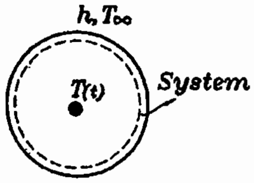
۲) از طریق جابجایی و توده سیال

q_{in} یا $q_{out}=hA\Delta T$ یا $=\dot{m}C_p\Delta T$

$\dfrac{dE}{dt}$ تغییرات محتوی انرژی کل سیستم نسبت به زمان را نشان می‌دهد که در حالت پایا برابر صفر است.

مثال: یک کره فلزی با شعاع کوچک R_0 و ضریب هدایت حرارتی بزرگ K با دمای ابتدایی T_0 در محیطی با دمای T_∞ سرد می‌شود $(T_0>T_\infty)$ توزیع دما در این کره به چه صورت می‌باشد؟

حل) با توجه به شعاع کم و ضریب هدایت حرارتی بزرگ کره، می‌توانیم از فرمولاسیون لامپد استفاده کنیم در این صورت دمای کره فقط تابع زمان خواهد بود پس با نوشتن قانون بقای انرژی داریم:



سیستم **Lumped**

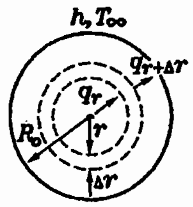
$$\left.\begin{array}{l}\Delta E=\Delta Q-\Delta W\\ ,\\ \Delta W=0\end{array}\right\}\rightarrow \Delta E=\Delta Q\rightarrow mC_p\frac{dT}{dt}=hA\Delta T$$

$$\Rightarrow mC_p\frac{dT_{(t)}}{dt}=-hA(T_{(t)}-T_\infty)\Rightarrow \frac{dT_{(t)}}{T_{(t)}-T_\infty}=-\frac{hA}{mC}dt$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow}\int\frac{dT_{(t)}}{T_{(t)}-T_\infty}=\int-\frac{hA}{mC}dt\Rightarrow Ln\frac{T_{(t)}-T_\infty}{T_0-T_\infty}=-\frac{hA}{mC}t$$

$$\Rightarrow \frac{T_{(t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{mC}T}$$

لازم به ذکر است که برای تعیین ثابت انتگرال گیری از شرط اولیه $T_{(t=0)} = T_0$ استفاده کردیم حال فرض کنید شعاع کره بزرگ بوده و همچنین ضریب هدایت حرارتی آن کوچک بوده است در این صورت باید از فرمولاسیون دیفرانسیلی استفاده کنیم که در این حالت دمای کره تابع شعاع و زمان خواهد بود بنابراین برای انجام مدل سازی از یک پوسته کروی به ضخامت Δr استفاده می‌کنیم و با نوشتن موازنه انرژی داریم:



جزء دیفرانسیل

تجمع + مصرف + تولید ـ خروجی = ورودی

تجمع = خروجی ـ ورودی <= تجمع + خروجی = ورودی

مکانیزم ورود و خروجی انرژی در پوسته کروی به صورت نفوذ ملکولی می‌باشد پس داریم:

$$q_r(4\pi r^2)\Delta t - q_{r+\Delta r}(4\pi r^2)\Delta t = \rho VCT_{(r,t+\Delta t)} - \rho VCT_{(r,t)}$$

$$\xrightarrow{\div 4\pi\Delta r\Delta t} \frac{q_r.r^2\Big|_r - q_r.r^2\Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = \frac{r^2\rho C(T_{(r,t+\Delta t)} - T_{(r,t)})}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\Delta r\to 0]{\Delta t\to 0} -\frac{\delta}{\delta r}(r^2 q_r) = \rho C r^2\frac{\delta T}{\delta t}\ ,\quad q_r = -K\frac{\delta T}{\delta r}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta r}\left(kr^2\frac{\delta T}{\delta r}\right) = \rho C r^2\frac{\delta T}{\delta t} \overset{k=cte}{\Rightarrow} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta}{\delta r}r^2\frac{\delta T}{\delta r}\right) = \frac{\rho C}{K}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta}{\delta r}r^2\frac{\delta T}{\delta r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta r}$$

$$\rho VCT_{(r,t+\Delta t)} - \rho VCT_{(r,t)} = \rho(4\pi r^2\Delta r)C(T_{(r,t+\Delta t)} - T_{(r,t)})$$

برای حل این معادله نیاز به یک شرط اولیه و دو شرط مرزی داریم که عبارتند از:

$t_{(r,0)} = T_0$ شرط اولیه

$T_{(0,t)} =$ محدود شرط مرزی یا $\frac{\delta T}{\delta r}(r=0,t) = 0$

$-\frac{K\delta T_{(R_0,t)}}{\delta r} = h(T_{R_0,t)} - T_\infty)$ شرط مرزی

ـ قانون بقای جرم

در حالت کلی قانون بقای جرم را می‌توان به اشکال زیر بیان نمود.

تجمع + تولید + مصرف ـ خروجی = ورودی

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \pm \dot{R} + \frac{dm}{dt}$$

ورود و خروج جرم می‌تواند ناشی از دو عامل باشد.

۱) از طریق نفوذ مولکولی که در این صورت با استفاده از قانون فیک بیان می‌شود.

$$J_A = -CD_{AS}\nabla x_A$$

که:

C: غلظت کل

x_A: کسر مولی جزء نفوذ کننده

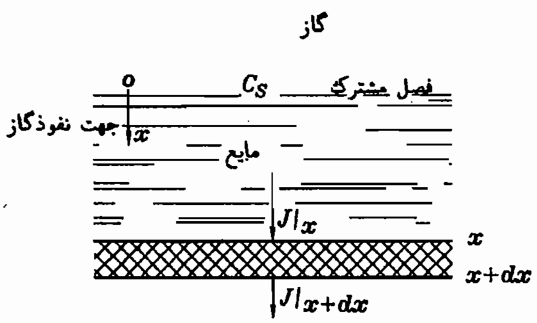
D_{AB}: ضریب نفوذ ماده A در محیط B

J_A: شار مولی

۲) حرکت توده‌ای: که در این صورت انتقال جرم از طریق اختلاط و به خاطر حرکت توده‌ای انجام می‌گیرد و می‌توانیم از نفوذ مولکولی صرفنظر کنیم.

$\frac{dm}{dt}$: تغییرات جرم محتوی مخزن را نسبت به زمان نشان می‌دهد که در حالت پایا برابر صفر است.

مثال : یک گاز توسط محلولی با یک واکنش درجه اول جذب می‌شود درحالت یکنواخت غلظت گاز را در فاز مایع به‌صورت تابعی از فاصله از سطح مشترک گاز و مایع به‌دست آورید؟



مثال : موازنه جرم را برای جزء دیفرانسیلی مشخص شده در شکل می‌نویسیم.

لازم به ذکر است چون در حالت یکنواخت می‌باشیم پس $\frac{dm}{dt}$ برابر صفر است و گاز توسط واکنش درجه اول مصرف می‌شود.

تجمع + تولید ـ مصرف = خروجی ـ ورودی

$$AJ\big|_x - AJ\big|_{x+\Delta x} = KC_x dx$$

$$j_x = -D\frac{dC_{(x)}}{dx}$$

$$j_{x+dx} = -D\left[\frac{dC_{(x)}}{dx} + \frac{d}{dx}\left(D\frac{dC_{(x)}}{dx}\right)dx\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(D\frac{dC_{(x)}}{dx}\right) = kC_{(x)} \xRightarrow{D=cte} \frac{d^2C_{(x)}}{dx^2} = \frac{K}{D}C_{(x)}$$

برای حل معادله فوق نیاز به دو شرط مرزی داریم که عبارتند از:

C_s: غلظت در فصل خشک

$$C_{(x=0)} = C_s$$

$$C_{(x\to\infty)} = 0$$

ـ قانون بقای مومنتوم

قانون بقای مومنتوم به طور کلی در اشکال زیر نوشته می‌شود لازم به ذکر است که این معادله کمی پیچیده تر از معادلات قبلی می‌باشد زیرا با کمیت‌های برداری سر و کار داریم

تجمع = مجموع نیروهای موثر بر سیستم + خروجی ـ ورودی

$$\dot{m}_{in}u - \dot{m}_{out}u + \sum F = \frac{d(mu)}{dt}$$

قانون دوم نیوتن $F = \frac{d(Mu)}{dt}$

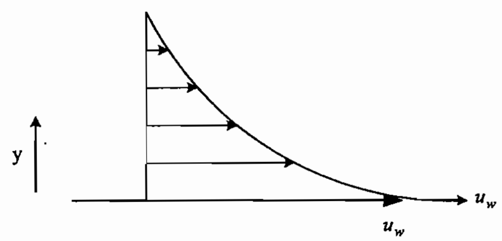
ورود و خروج مومنتوم می‌تواند ناشی از دو عامل زیر باشد:

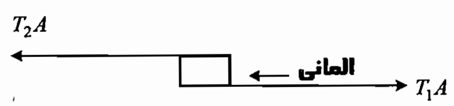
۱) نفوذ مولکولی: که در این صورت از قانون لزجت نیوتن استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\tau = -\mu\nabla u$$

۲) جابجایی و حرکت توده‌ای: که در این حالت می‌توان از نفوذ مومنتوم صرفنظر کرد.

مثال : سیال روی صفحه‌ای در حال سکون قرار دارد ناگهان صفحه را با سرعت می‌کشیم مطلوب است به دست آوردن توزیع سرعت سیال بر حسب فاصله از سطح صفحه در حالت ناپایدار؟





قانون بقای مومنتوم $F = \frac{d(mu)}{dt} \Rightarrow F = m\frac{du}{dt}$

$$F = \tau A|_y - \tau A|_{y+\Delta y} = \rho A.\Delta y\frac{du}{dt} \xrightarrow{\div\Delta y} \frac{\tau A|_y - \tau A|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = \rho A\frac{du}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\Delta y\to 0} -\dfrac{\delta T}{\delta y}=\rho\dfrac{du}{dt}\\ ,\ \tau=-\mu\dfrac{du}{dy}\end{array}\right\}\to -\frac{\delta}{\delta y}\left(-\mu\frac{\delta u}{\delta y}\right)=\rho\frac{du}{dt}$$

$$\xrightarrow{\mu=cte}\mu\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\rho\frac{du}{dt}\Rightarrow\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{1}{\nu}\frac{\delta u}{\delta t}$$

برای حل این معادله نیاز به دو شرط مرزی و یک شرط اولیه داریم:

$u_{(y,0)}=0\leftarrow$ شرط اولیه

$u_{(y=0,t)}=u_w\leftarrow$ شرط مرزی

$u_{(y\to\infty,t)}=0\leftarrow$ شرط مرزی

۶ـ ۳ معادلات انتقال

ـ معادله انرژی: معادله انرژی در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\rho C\frac{DT}{Dt}+\nabla.q=q''$$

در معادله فوق q نشانگر مقدار حرارت نفوذی به سیستم «جزء دیفرانسیلی» می‌باشد که می‌توان به جای آن از قانون فوریه استفاده کرد.

$$q=-K\nabla T$$

و q'' مقدار انرژی تولید شده به ازای حجم می‌باشد.

بنابراین در مختصات کارتزین معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$PC\left(\frac{\delta T}{\delta t}+u_x\frac{\delta T}{\delta x}+u_y\frac{\delta T}{\delta y}+u_z\frac{\delta T}{\delta z}\right)-K\left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta z^2}\right)=q''$$

اگر جابجایی و حرکت در سیستم وجود نداشته باشد.

$$\rho C\frac{\delta T}{\delta t}-K\left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta z^2}\right)=q''$$

اگر علاوه بر شرایط فوق، انتقال گرمای یک بعدی و بدون تولید انرژی در حالت پایا باشد داریم:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=0$$

ـ در مختصات استوانه‌ای معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho C\left(\frac{\delta T}{\delta t}+u_r\frac{\delta T}{\delta r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\delta T}{\delta\theta}+u_z\frac{\delta T}{\delta z}\right)-K\left(\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta T}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 T}{\delta\theta^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta z^2}\right)=q''$$

اگر انتقال گرما یک بعدی در جهت r در حالت پایا و بدون تولید انرژی باشد، داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta T}{\delta r}\right)=0$$

ـ در مشخصات کروی معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho C\left(\frac{\delta T}{\delta t}+u_r\frac{\delta T}{\delta r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\delta T}{\delta\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\delta T}{\delta\phi}\right)-K\left(\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta T}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\sin\theta\frac{\delta T}{\delta\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\delta^2 T}{\delta\phi^2}\right)=q''$$

اگر انتقال گرما، یک بعدی در جهت r، در حالت پایا و بدون تولید انرژی باشد، داریم:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta T}{\delta r}\right)=0$$

ـ معادله جرم: معادله جرم در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\frac{DC_A}{Dt}=D_{AB}\nabla^2 C_A+R_A$$

که معادله فوق در مختصات کارتزین به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\delta C_A}{\delta t}+u_x\frac{\delta C_A}{\delta x}+u_y\frac{\delta C_A}{\delta y}+u_z\frac{\delta C_A}{\delta z}=D_{AB}\left(\frac{\delta^2 C_A}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 C_A}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 C_A}{\delta z^2}\right)+R_A$$

$\frac{\delta C_A}{\delta t}$: نشانگر انتقال جرم در حالت ناپایا

$u.\nabla C_A$: نشانگر انتقال جرم در اثر جابجایی

$D_{AB}\nabla^2 C_A$: نشانگر انتقال جرم در اثر نفوذ مولکولی

R_A: نشانگر انتقال جرم در اثر واکنش شیمیایی

ـ در مختصات استوانه‌ای، معادله جرم به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\delta C_A}{\delta t}+u_r\frac{\delta C_A}{\delta r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\delta C_A}{\delta\theta}+u_z\frac{\delta C_A}{\delta z}=D_{AB}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta C_A}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 C_A}{\delta\theta^2}+\frac{\delta^2 C_A}{\delta z^2}\right)+R_A$$

ـ در مختصات کروی، معادله انتقال جرم به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\delta C_A}{\delta t}+u_r\frac{\delta C_A}{\delta r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\delta C_A}{\delta\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\delta C_A}{\delta\phi}=$$

$$=D_{AB}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta C_A}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\sin\theta\frac{\delta C_A}{\delta\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\delta^2 C_A}{\delta\phi^2}\right]+R_A$$

نکته : هرگاه واکنش شیمیایی و حرکت توده‌ای وجود نداشته باشد و انتقال جرم در حالت پایا فقط در یک جهت انجام بگیرد داریم:

مختصات کارتزین $\rightarrow \frac{\delta^2 C_A}{\delta x^2}=0$

مختصات استوانه‌ای $\rightarrow \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{\delta C_A}{\delta r}\right)=0$

مختصات کروی $\rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta C_A}{\delta r}\right)=0$

ـ معادله حرکت در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\mu\nabla^2\vec{u}-\nabla\vec{p}+\rho\vec{g}$$ معادلات ناویراستوکس

سرعت کمیت برداری می‌باشد و معادله حرکت در سه جهت نوشته می‌شود به عنوان مثال در مختصات کارتزین و در جهت x به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\rho\left(\frac{\delta u}{\delta t}+u_x\frac{\delta u_x}{\delta x}+u_y\frac{\delta u_x}{\delta y}+u_z\frac{\delta u_x}{\delta z}\right)=\mu\left[\frac{\delta^2 u_x}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u_y}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u_z}{\delta z^2}\right]-\frac{\delta p}{\delta x}+\rho g_x$$

۶ـ ۴ نکات مهم در حل تست‌های مدل سازی

نکته اول: تشخیص مکانیزم اصلی کنترل کننده فرایند انتقال: در جهت هایی که سیال دارای حرکت می‌باشد مکانیزم انتقال به صورت جابجایی می‌باشد و در جهت هایی که سیال دارای حرکت آرام و یا در حالت سکون می‌باشد مکانیزم انتقال، به صورت مولکولی می‌باشد که باید که معادله سیستم ظاهر گردد.

به عنوان مثال اگر مکانیزم انتقال در جهت z به صورت جابه‌جایی باشد باید جمله $\frac{\delta T}{\delta z}$ و معادله سیستم ظاهر شود و اگر مکانیزم انتقال در جهت z به صورت نفوذ مولکولی باشد باید جمله $\frac{\delta^2 T}{\delta z^2}$ در معادله سیستم ظاهر گردد.

نکته دوم: علامت مثبت و یا منفی عبارات ظاهر شده در معادله سیستم با توجه به جهت انتقال و شرایط مساله می‌توان تشخیص داد.

برای فهم بیشتر این نکات به مثالی که ذکر می‌گردد به دقت توجه کنید.

مثال : سیال جاری در یک لوله خنک می‌شود با فرض ثابت بودن خواص سیال، پایا بودن و پیستونی بودن plug سرعت و دما و ثابت بودن دمای دیواره لوله در T_w ، کدامیک از معادلات زیر توزیع دمای سیال (T) را نشان می‌دهد؟

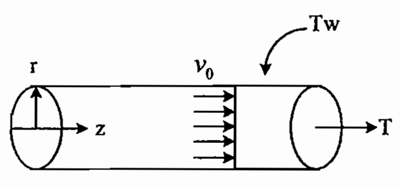
سرعت یکنواخت سیال = V_0، ظرفیت گرمای ویژه = C_p، ضریب انتقال گرمای جابجایی سیال = h، دانسیته سیال = p و شعاع لوله = R، است. (مهندسی شیمی ۸۳)

۱) $\frac{dT}{dz}-\frac{2h}{V_0 R\rho L_p}(T-T_w)=0$

۲) $\frac{dT}{dz}+\frac{2h}{V_0 R\rho C_p}(T-T_w)=0$

۳) $\frac{d^2T}{dz^2}+\frac{2h}{V_0 R\rho C_p}(T_w-T)=0$

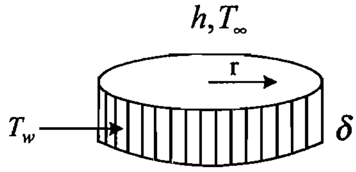
۴) $\frac{d^2T}{dz^2}+\frac{2h}{V_0 R\rho C_p}(T-T_w)=0$



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

حل تستی: سیال در جهت z دارای حرکت است و نفوذ مولکولی در این جهت نداریم پس باید در جهت z جمله $\frac{dT}{dz}$ ظاهر شود پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست است.

مثال : سطح جانبی دیسک دایره‌ای به ضخامت ناچیز δ در دمای T_W قرار دارد. ضریب انتقال حرارت متوسط برای دیسک و هوای اطراف که در دمای T_∞ قرار گرفته است h است کدام معادله توزیع دمای دیسک را پیش گویی می‌کند؟ ثابت هدایت حرارتی دیسک k است. (مهندسی شیمیی ۸۴)



۱) $\frac{d^2T}{dr^2}-\frac{h}{K\delta}(T-T_\infty)=0$

۲) $\frac{d^2T}{dr^2}-\frac{2h}{K\delta}(T-T_\infty)=0$

۳) $\frac{d}{dr}(r-\frac{dT}{dr})-\frac{h}{K\delta}r(T-T_\infty)=0$

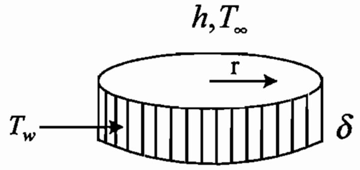
۴) $\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})-\frac{2h}{K\delta}r(T-T_\infty)=0$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در جهت r مکانیزم نفوذ داریم و نیز مختصات به کار رفته استوانه‌ای می‌باشد پس باید عبارت $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})$ در معادله سیستم ظاهر شود پس گزینه چهارم صحیح است.

مجموعه تست‌های فصل ششم

۱ـ سطح جانبی دیسک دایره‌ای به ضخامت ناچیز δ در دمای T_W قرار دارد. ضریب انتقال حرارت متوسط برای دیسک و هوای اطراف که در دمای T_∞ قرار گرفته است h است کدام توزیع دمای دیسک را پیشگویی می‌کند؟ ثابت هدایت حرارتی دیسک k است. (مهندسی شیمی ۸۴)



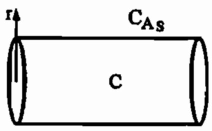
۱) $\dfrac{d^2T}{dr^2}-\dfrac{h}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

۲) $\dfrac{d^2T}{dr^2}-\dfrac{2h}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

۳) $\dfrac{d}{dr}\left(r-\dfrac{dT}{dr}\right)-\dfrac{h}{k\delta}r\left(T-T_\infty\right)=0$

۴) $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right)-\dfrac{2h}{k\delta}r\left(T-T_\infty\right)=0$

۲ـ جسم متخلخل استوانه‌ای شکل به شعاع R در نظر بگیرید که ابتدا غلظت ماده A در آن برابر C_{A_0} باشد. اگر این جسم ناگهانی در محلولی با غلظت C_{A_s} قرار بگیرد از کدام‌یک از معادلات زیر می‌توان تغییرات غلظت A را در داخل جسم به‌دست آورد؟ (D ضریب نفوذ ماده A در داخل جسم جامد می‌باشد) (مهندسی شیمی ۸۳)



۱) $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dC_A}{dr}\right]=0$

۲) $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dC_A}{dr}\right]=0$

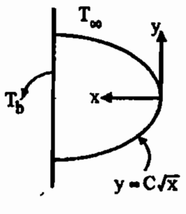
۳) $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{dC_A}{dr}\right]=\dfrac{1}{D}\dfrac{dC_A}{dt}$

۴) $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dC_A}{dr}\right]=\dfrac{1}{D}\dfrac{dC_A}{dt}$

۳ـ پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل برای تعیین رابطه توزیع دمای یک بعدی در پره‌ای به طول کم مطابق شکل زیر است با دمای پایه T_b که در محیطی با دمای T_∞ قرار گرفته است به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T=T_\infty+AK_0\left[x^{\frac{3}{4}}\right]+BI_0\left[x^{\frac{3}{4}}\right]$$

همواره داریم: (مهندسی شیمی ۹۳)



۱) $B\neq0\ ,\ A=0$

۲) $B=0\ ,\ A\neq0$

۳) $B=0\ ,\ A=0$

۴) $B\neq0\ ,\ A\neq0$

۴ ـ در انتقال حرارت از یک فین با سطح مقطع مثلثی شکل به هوای اطراف توزیع درجه حرارت به‌صورت توابع بسل می‌باشد $T-T_a = AI_0\left(1\sqrt{a}x\right)+BK_0\left(2\sqrt{ax}\right)$ در صورتی که شرایط مرزی به‌صورت:

$$B.C.1 = x = 0 \qquad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$B.C2 : x = L : \qquad T = T_L$$

باشد کدام عبارت صحیح است؟ **(مهندسی شیمی ۸۱)**

۱) هر دو ثابت A و B صفر هستند.

۲) ثابت A برابر صفر است.

۳) هر دو ثابت A و B غیرصفر است.

۴) ثابت B برابر صفر است.

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل ششم

۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
در متن درس حل شده است.

۲ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
تغییرات غلظت به صورت ناگهانی می‌باشد پس حالت سیستم به‌صورت ناپایا خواهد بود بنابراین در معادله سیستم بایستی جمله $\frac{dC_A}{dt}$ وجود داشته باشد و همچنین در مختصات استوانه‌ای باید جمله $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)$ در معادله سیستم ظاهر شود پس گزینه سوم صحیح است.

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
با توجه به اینکه T در $x=0$ دارای مقدار محدودی می‌باشد و اینکه $K_0(0)=+\infty$، در نتیجه لازمست که $A=0$ باشد.

۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
مشابه تست ۳ می‌باشد و گزینه چهارم صحیح است.

فصل هشتم

تعامد و توابع متعامد Qrthogonal function

۱ـ۸ تعامد یا اورتوگونالیتی

دو بردار غیر صفر $\vec{B},\vec{A}$ را عمود بر هم یا اورتوگونال می‌نامیم اگر ضرب داخلی آنها برابر صفر باشد.

$\vec{A}.\vec{B}=0\Rightarrow$ بر هم عمودند $\vec{B},\vec{A}$

$$B=(B_1,B_2,B_3),\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$$

$$\vec{A}.\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=\sum_{i=1}^{N}A_iB_i$$

این تعریف را می‌توان در مورد توابع زیر تعمیم داد. توابع را به صورت بردارهایی با بی نهایت مولفه در نظر گرفت. بنابراین تابع $f(x)$ بر $g(x)$ در بازه (a,b) عمود است اگر داشته باشیم.

$$<f_{(x)}\cdot g_{(g)}>=\int_a^b f_{(x)}\cdot g_{(x)}dx=0$$

به عنوان مثال توابع $f(x)=1$ و $g(x)=x$ در بازه $[-1,1]$ بر هم عمودند.

$$<F_{(x)}\cdot g_{(x)}>=\int_{-1}^{1}1\times x dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}=0$$

نرم هر تابع در بازه (a,b) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f_{(x)}\|=\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

توابع $f(x)$, $g(x)$ در بازه $[a,b]$ را اورتو نرمال می‌گوییم هرگاه داشته باشیم.

الف)

$$<f_{(x)},g_{(x)}>=\int_a^b f_{(x)}g_{(x)}dx=0$$

و

ب)

$$\|f_{(x)}\|=\|g_{(x)}\|=1$$

اگر مجموعه توابع $\Psi_1,\Psi_2,...,\Psi_n$ که در بازه (a,b) شده اند را در نظر بگیریم چنان چه به ازای هر دو عضو اختیاری از این مجموعه داشته باشیم.

$$\int_a^b \Psi_i(x)\Psi_j(x)dx=\begin{cases}\neq 0 & i=j\\ =0 & i\neq j\end{cases}$$

در این صورت مجموعه توابع را یک مجموعه اورتوگونال یا متعامد می‌نامند.

به عنوان مثال مجموعه توابع $\Psi_1=1,\Psi_2=x,\Psi_3=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2},\Psi_4=\frac{5x^3}{2}-\frac{3x}{2}$

در بازه $[-1,1]$ یک مجموعه اورتوگونال می‌باشد.

$$\int_{-1}^1 \Psi_1\Psi_2 dx=\int_{-1}^1 \Psi_1\Psi_3=\int_{-1}^1 \Psi_1\Psi_4=\int_{-1}^1 \Psi_2\Psi_3=\int_{-1}^1 \Psi_3\Psi_4=0$$

نکته : مجموعه توابع اورتوگونال، مستقل خطی می‌باشند.

اگر تابع $f(x)$ دربازه $[a,b]$انتگرال پذیر باشد و دسته توابع $\{\Psi_1(x),\Psi_2(x),...,\Psi_n(x)\}$ در این بازه متعامد باشند در این صورت می‌توانیم $f(x)$ را بر حسب این توابع بسط دهیم.

$$f_{(x)}=\sum_{i=0}^{\infty}C_i\Psi_i(x)$$

$$C_i=\frac{1}{\|\Psi_i(x)\|^2}\int_a^b f_{(x)}\Psi_i(x)dx$$

به عنوان مثال $\cos\frac{n\pi}{L}x,\ \sin\frac{n\pi}{L}x$ در بازه $[-L,L]$ تشکیل دسته توابع متعامد می‌دهند که بسط تابع $f(x)$ بر حسب این توابع در بازه $[-L,L]$ منجر به سری‌های فوریه می‌گردد که در فصل قبلی توضیح داده شده است.

در مواردی دسته توابع $\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3,...,\Psi_n$ متعامد نیستند اما می‌توان ضرب کردن تابعی مانند $w(x)$ در داخل انتگرال، شرایط اورتوگونالیتی را برقرار کرد که در این صورت این مجوعه را غیر اورتوگونال قابل تبدیل به اورتوگونال می‌نامیم و تابع ضرب شده به داخل انتگرال را تابع وزنی می‌نامیم.

$$\int_a^b \omega_{(x)}\Psi_i(x)\Psi_j(x)=0$$

به عنوان مثال توابع بسل $J_n(\mu_x),J_n(\lambda x)$ و در بازه $[0,1]$ متعامد نیستند.

اما با ضرب $\omega_{(x)}=x$ به داخل انتگرال داریم:

B نمی تواند صفر باشد چون در آن صورت جواب کلی معادله y=0 می‌گردد پس داریم:

$$B\sin\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}=n\pi \Rightarrow \lambda_n=n^2\pi^2, n=1,2,...$$

مقادیر ویژه معادله برابر است با $\lambda_n=n^2\pi^2$ و توابع ویژه نیز عبارتند از $\sin n\pi x$

قضیه: اگر $\Psi_m(x),...,\Psi_2(x),\Psi_1(x)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل اشتوروم لیوویل به ازای $\lambda_m,...,\lambda_2,\lambda_1$ باشند این دسته توابع نسبت به تابع وزنی $\omega_{(x)}$ متعامد هستند و داریم:

$$\int_a^b \omega_{(x)}\Psi_i(m)\ \Psi_j(x)dx=0$$

لازم به ذکر است که اگر $\omega_{(x)}$ مقدار ثابتی داشته باشد جواب‌های معادله اورتوگونال «متعامد» هستند و اگر $\omega_{(x)}$ مقدار ثابتی نباشد جواب‌های معادله نسبت به تابع وزنی $\omega_{(x)}$ متعامد هستند.

۸ـ ۳ انواع شرط مرزی

در معادلات دیفرانسیل با سه نوع شرط مرزی سر و کار داریم.

۱) شرط مرزی نوع اول یا دریکله: شرط مرزی نوع اول از مقدار تابع در مرزهای سیستم اطلاع می‌دهد. مانند دمای ثابت سطح جامد

$$T(x=L,t)=T_0$$

۲) شرط مرزی نوع دوم یا نیومن: شرط نوع مرزی دوم از مقدار مشتق تابع در مرزهای سیستم اطلاع می‌دهد مانند سطح عایق جامد

$$\frac{\delta T(x=L,t)}{\delta x}=0$$

۳) شرط مرزی نوع سوم یا روبین: شرط مرزی سوم از رابطه بین مشتق تابع و مقدار تابع در مرزها اطلاع می‌دهند مانند جابجایی در سطح جامد.

$$-K\frac{\delta T(x=L,t)}{\delta x}=h(T_{(x=L,t)}-T_\infty)$$

نکته: به طور کلی اگر شرط مرزی را به صورت $\alpha_1 y'+\alpha_2 y=\alpha_3$ نشان دهیم داریم:

اگر $\alpha_3=0\Rightarrow$ شرط مرزی همگن

اگر $\alpha_3\neq 0\Rightarrow$ شرط مرزی ناهمگن

اگر $\alpha_1=0\Rightarrow$ شرط مرکزی نوع اول

اگر $\alpha_2=0\Rightarrow$ شرط مرزی نوع اول

اگر $\alpha_1\neq 0,\alpha\neq 0\Rightarrow$ شرط مرزی نوع سوم

مثال : مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله زیر را با شرایط مرزی زیر را به دست آورید.

$y'' + \lambda y = 0$

الف) $y'_{(0)} = 0$, $y_{(L)} = 0$

ب) $y'_{(0)} = 0$, $y'_{(L)} = 0$

ج) $y'_{(0)} = 0$, $y_{(L)} = 0$

د) $y_{(0)=0}$, $y'_{(L)} = 0$

حل :

$y'' + \lambda y = 0$

$\rightarrow$ معادله مشخصه $m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m_1 = +\sqrt{\lambda} i \quad m_2 = -\sqrt{\lambda} i$

$\rightarrow$ جواب عمومی $= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

الف) $y_{(0)} = 0 \quad , \quad y_{(L)} = 0$

$y_{(0)} = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\left.\begin{matrix} y_{(L)} = 0 \Rightarrow 0 = B\sin\sqrt{\lambda}L \\ B \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{L} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 & \text{مقادیر ویژه} \\ \sin\frac{n\pi x}{L} & \text{توابع ویژه} \end{matrix}$$

ب) $y'_{(0)} = 0 \quad , \quad y'_{(L)} = 0$

$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$y'_{(0)} = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\left.\begin{matrix} y'_{(L)} = 0 \Rightarrow 0 = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L \\ A \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{L} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 & \text{مقادیر ویژه} \\ \cos\frac{n\pi}{L}x & \text{توابع ویژه} \end{matrix}$$

ج) $y'_{(0)} = 0 \quad , \quad y_{(L)} = 0$

$y'_{(0)=0} \Rightarrow B=0$

$$\left.\begin{matrix} y_{(L)} = 0 \Rightarrow 0 = A\cos\sqrt{\lambda}L \\ A \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2L} \rightarrow \lambda_n = (\frac{2n \pm 1}{2L}\pi)^2 & \text{مقادیر ویژه} \\ \cos\frac{2n \pm 1}{2L}x & \text{توابع ویژه} \end{matrix}$$

د) $y_{(0)} = 0 \quad , \quad y'_{(L)} = 0$

$y_{(0)} = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\left.\begin{matrix} y'_{(L)} = 0 \Rightarrow 0 = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \\ B \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2L} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_n = (\frac{2x \pm 1}{2L}\pi)^2 & \text{مقادیر ویژه} \\ \sin\frac{2x \pm 1}{2L}x & \text{توابع ویژه} \end{matrix}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید اگر دو شرط مرزی معادله دیفرانسیل یک نوع باشند یعنی یا هر دو نوع اول باشند «حالت الف» و یا هر دو نوع دوم باشند «حالت ب» مقادیر ویژه از رابطه $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ به دست می‌آید.

اگر شرایط مرزی هم نوع نباشند «مانند حالت ج و حالت د» مقادیر ویژه از رابطه $\lambda_n = (\frac{2n \pm 1}{2L}\pi)^2$ به دست می‌آید و اگر شرط مرزی موجود در $x=0$ از نوع اول باشد «مانند حالت الف و حالت د» در این صورت توابع ویژه به صورت سینوسی خواهد بود و اگر شرط مرزی موجود در $x=0$ از نوع دوم باشد مانند حالت ب و حالت ج در این صورت توابع ویژه به صورت کسینوسی خواهند بود.

مجموعه تست های فصل هشتم

۱ـ در رابطه $\int_a^b e^{-x}y(x)y_2(x)dx=0$ کدام گزینه صحیح است؟(مهندسی شیمی ۸۳)

۱) e^{-x} با تابع وزن y_1 و y_2 در فاصله $[a،b]$ مقاصد «اورتوگونال» است.

۲) e^{-x} و y_1 و y_2 در فاصله $[a،b]$ نسبت به هم اورتوگونال هستند.

۳) y_1 و y_2 در فاصله $[a،b]$ با تابع وزنی e^{-x} نسبت به هم اورتونرمال هستند.

۴) y_1 و y_2 در فاصله $[a،b]$ با تابع وزنی e^{-x} نسبت به هم اورتوگونال هستند.

۲ـ در مورد توابع $\sin nx$ و $\sin mx$ می‌توان گفت؟(مهندسی شیمی ۸۱)

۱) متعامد نیستند.

۲) در فاصله $0 \le x \le \pi$ متعامدند و تابع وزنه آنها x^2 است.

۳) در فاصله $0 \le x \le 2\pi$ متعامدند و تابع وزنه آنها x^2 است.

۴) در فاصله $0 \le x \le \pi$ متعامدند و تابع وزنه آنها برابر یک است.

پاسخ تست های طبقه بندی شده فصل هشتم

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

باتوجه به متن درس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزسنه۴ صحیح می‌باشد.

فصل نهم

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای partial Differential equation

۹ـ ۱ مقدمه

همان طور که در فصل مدل سازی توضیح داده شد در فرمولاسیون دیفرانسیلی در نهایت به یک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای می‌رسیم برای حل این معادلات به روش تحلیلی، می‌توانیم از سه روش، جدا سازی متغیرها و ترکیب متغیرها و تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. که در این فصل به بررسی این روشها می‌پردازیم.

۹ـ ۲ تعاریف

معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای شامل یک متغیر وابسته و حداقل دو متغیر مستقل می‌باشند به عنوان مثال در یک مخزن نیمه پیوسته، غلظت «C» وابسته به تغییر زمان و دبی جریان خروجی می‌باشد.

مرتبه یک معادله با مشتقات جزئی، بالاترین درجه مشتق جزئی ظاهر شده در معادله می‌باشد و درجه یک معادله با مشتقات جزئی، توان بالاترین مشتق جزئی در معادله می‌باشد. به عنوان مثال معادله دیفرانسیل $(\frac{\delta^3 u}{\delta x^3})^2+\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}+\frac{\delta u}{\delta y}=0$ دارای مرتبه سوم از درجه دوم می‌باشد.

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی مرتبه دوم که وابسته به دو متغیر مستقل می‌باشد به سه دسته تقسیم می‌شود.

$$A\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+B\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}+C\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+D\frac{\delta u}{\delta x}+E\frac{\delta u}{\delta y}+Fu=G$$

۱: اگر $B^2-4AC>0 \rightarrow$ معادله دیفرانسیل از نوع هذلولی می‌باشد

۲: اگر $B^2-4AC=0 \rightarrow$ معادله دیفرانسیل از نوع سهموی می‌باشد

۳: اگر $B^2-4AC<0$ معادله دیفرانسیل از نوع بیضوی می‌باشد

به عنوان مثال معادله لاپلاس $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=0$ جزء معادلات بیضوی می‌باشد و یا معادله نفوذ $\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ از نوع معادلات سهموی می‌باشد.

تعداد شرایط مرزی لازم مربوط به یک متغیر مستقل، برای به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل برابر است با مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به آن متغیر و تعداد شرایط اولیه لازم برای به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل برابر است با مرتبه معادله دیفرانسیل نسبت به زمان. به عنوان مثال برای به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$، لازم است دو شرط مرزی در جهت y و یک شرط مرزی در جهت x و یک شرط اولیه مشخص باشند.

۹ـ ۳ روش جدا سازی متغیرها Separation of variables

معادله دیفرانسیل پاره‌ای را در نظر بگیرید که در آن رابطه متغیر وابسته u به دو متغیر مستقل x و y بیان شده است برای حل این معادله با روش جدا سازی، فرض می‌کنیم جواب معادله به صورت حاصلضرب دو تابع مستقل g(y), f(x) می‌باشد و داریم:

$$u_{(x,y)}=f_{(x)}\cdot y_{(y)}$$

با جایگذاری معادله بالا در رابطه معادله دیفرانسیل و جدا سازی جملاتی که به y , x بستگی دارند، معادله به صورت یک تساوی بین تابعی صرفا از x و تابعی صرفا از y در می‌آید که تنها با برابر قرار دادن هر یک از دو طرف معادله با یک مقدار ثابت، صادق خواهد بود بنابراین از ترکیب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، دو معادله دیفرانسیل معمولی که هر یک شامل یک پارامتر نامعلوم است به دست می‌آید برای درک بهتر این روش به مثالی که ذکر می‌شود دقت کنید.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط مرزی و اولیه ذکر شده حل کنید « $T_{(x,t)}$ نشانگر توزیع دمای ناپایدار در یک جسم می‌باشد.»

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T}{\delta t}$$

الف) $T_{(x,t=0)}=T_0$

$T_{(x=0,t)=0}$

$T_{(x=L,t)}=0$

ب) $T_{(x,t=0)}=T_0$

$\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0$

$T_{(x=L,t)}=0$

ج) $T_{(x,t=0)}=T_0$

$\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0$

$\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=0$

د) $T_{(x,t=0)} = T_0$

$T_{(x,0,t)} = 0$

$\frac{\delta T}{\delta x}(x = L, t) = 0$

حل :

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$T(x,t) = f(x)Z(t) \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \frac{\delta^2 (f_{(x)} z_{(t)})}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta (f_{(x)} Z_{(t)})}{\delta t}$$

$$Z_{(t)} f''_{(x)} = \frac{f_{(x)} z'_{(t)}}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = \frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}}$$

طرف راست معادله فقط تابع t و طرف چپ معادله فقط تابع x می‌باشد پس این دو عبارت فقط زمانی می‌توانند با هم برابر باشند که مساوی یک مقدار ثابت باشند. مقدار ثابت می‌تواند مثبت یا منفی و یا حتی صفر باشد این مقدار باید با توجه به فیزیک مسئله تعیین می‌گردد پس داریم:

$$\frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = \frac{1}{\alpha}\frac{z'(t)}{z(t)} = \begin{cases} +\lambda^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{cases}$$

اگر $\frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = \frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}} = +\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}} = \alpha\lambda^2 \\ \frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{zdt} = \alpha\lambda^2 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \alpha\lambda^2 dt \Rightarrow z_{(t)} = ce^{+\alpha\lambda^2 t}$$

$$z_{(t)} = ce^{\alpha\lambda^2 t} \overset{t\to\infty}{\Rightarrow} z_{(t\to\infty)} \to \infty \Rightarrow T_{(x,t\to\infty)} = f_{(x)} z_{(t)} \to \infty$$

با گذشت زمان، دمای جسم به سمت بی‌نهایت می‌رود که این با فیزیک مسئله در تناقض است پس مقدار ثابت نمی تواند مثبت باشد.

اگر $\frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = \frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}} = 0 \to z_{(t)} = c \\ \frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}} = 0 \to f_{(x)} = ax + b \end{cases}$

با استفاده از شرایط مرزی قسمت الف $\begin{cases} T_{(x=0,t)} = 0 = f_{(x,0)} \times z_{(t)} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ T_{(x=L,t)} = 0 = f_{(x=L)} \times z_{(t)} = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

با استفاده از مقدار ثابت صفر، جواب نهایی به دست آمده، جواب حالت پایای سیستم «steady state» می‌باشد $T(x,t) = 0$

اگر $\frac{f''_{(x)}}{f_{(x)}}=\frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}}=-\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}}=-\lambda^2 \Rightarrow z_{(t)}=c_1e^{-\alpha\lambda^2 t} \\ \frac{F''_{(x)}}{F_{(x)}}=-\lambda^2 \Rightarrow f''_{(x)}+\lambda^2 f_{(x)}=0 \end{cases}$

معادله $f''_{(x)}+\lambda^2 f_{(x)}=0$ در سیستم اشتوم لیوویل صدق می‌کند پس جواب‌های به دست آمده برای آن متعامد هستند.

$f''_{(x)}+\lambda^2 f_{(x)}=0$

معادله مشخصه $m^2+\lambda^2=0 \Rightarrow m_1=+\lambda i \quad m_2=-\lambda i$

$f_{(x)}: A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$

$z_{(t)}=C_1e^{-\alpha\lambda^2 t}$

شرایط اولیه و مرزی

$\downarrow$

الف) $T_{(x=0,t)}=0 \Rightarrow f_{(x=0)}=0 \Rightarrow B=0$

$$\left.\begin{matrix} T_{(x=L,t)}=0 \Rightarrow f_{(x=L)}=0 \\ A\neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda_n=\frac{n\pi}{L}, n=1,2,3,...$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} f_{(x)}=A\sin\lambda_n x \\ z_{(t)}=C_1e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}\ n=1,2,3,... \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(x,t)=\underset{\text{جواب حالت پایا}}{\underset{\downarrow}{0}}+t\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\lambda_n xe^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

برای به دست آوردن ضریب C_n از شرط اولیه استفاده می‌کنیم.

$T_{(x,t=0)}=T_0=\Sigma C_n\sin\lambda_h x$

$$\Rightarrow C_n=\frac{\int_0^L T_0\sin\lambda_n xdx}{\int_0^L \sin^2\lambda_x xdx}=\frac{T_0\times\frac{L}{n\pi}[-\cos\frac{n\pi}{L}]_0^L}{\frac{L}{2}}=$$

$$=\frac{2T_0}{n\pi}(-\cos n\pi+1) \Rightarrow \begin{cases} c_n=0 & \leftarrow \text{زوج}\ n \\ c_n=\frac{4T_0}{n\pi} & \leftarrow \text{فرد}\ n \end{cases}$$

ب) $\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0 \Rightarrow F'_{(x)}=A\lambda\cos\lambda x-B\lambda\sin\lambda x \Rightarrow f'_{(x=0)}=0 \Rightarrow A=0$

$$T_{(x,L,t)}=0 \Rightarrow f_{(x=L)}=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} B\cos\lambda L=0 \\ B\neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda_n=(\frac{2n+1}{2L})\pi \quad , \quad n=1,2,...$$

$$T_{(x,t)}=0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\lambda_n x.e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

همانند حالت قبل با استفاده از شرط اولیه می‌توانیم ضریب C_n را به دست آوریم.

$T_{(x,t=0)}=T_0=\Sigma C_n\cos\lambda_n x$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\int_0^L T_0 \cos\lambda_n x d_x}{\int_0^L \cos^2\lambda_n x dx}$$

ج) $\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0 \Rightarrow f'_{(x)}=0 \Rightarrow A=0$

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=0 \Rightarrow f'_{(x=L)}=0= \left.\begin{matrix} B\lambda\sin\lambda L=0 \\ B\neq 0 \end{matrix}\right\} \to \lambda=\frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,3$$

$$T_{(x,t)}=0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x.e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{L} \qquad n=1,2,3,...$$

با استفاده از شرط اولیه مقدار ضریب C_n را به دست می‌آوریم.

د) $T_{(x=0,t)}=0 \Rightarrow f_{(x=0)}=0 \Rightarrow B=0$

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=0 \Rightarrow f'_{(x=L)}=0 \Rightarrow \lambda_n=(\frac{2x+1}{2L})\pi$$

$$T_{(x,t)}=0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n x e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n=(\frac{2n+1}{2L})\pi \qquad n=1,2,3,...$$

نکته : جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$ را می‌توان با توجه به نوع شرایط مرزی طبق جدول زیر تعیین نمود.

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$\Rightarrow T_{(x.t)}=T_{ss}+\Sigma C_n \Psi_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

	نوع شرط مرزی	Ψ_n	λn
X=0 X=L	اول دوم	$\sin\lambda_n x$	$(\frac{2n+1}{2L})\pi$
X=0 X=L	اول اول	$\sin\lambda_n x$	$\frac{n\pi}{L}$
X=0 X=L	دوم دوم	$\cos\lambda_n x$	$\frac{n\pi}{L}$
X=0 X=L	دوم اول	$\cos\lambda_n x$	$(\frac{2n+1}{2L})\pi$
X=0 X=L	نوع دوم نوع سوم	$\cos\lambda_n x$	از حل معادله $tg\lambda_n L = \frac{h}{k\lambda_n}$
X=0 X=L	نوع اول نوع سوم	$\sin\lambda_n x$	از حل معادله $\cot g\lambda_n L = \frac{-h}{k\lambda_n}$

Ψ_n با توجه به نوع شرط مرزی در x=0 تعیین می‌گردد و λ_n با توجه به همنوع بودن شرایط مرزی در x=0 و x=L تعیین می‌گردد که اگر هر دو شرط مرزی نوع اول باشند و یا نوع دوم باشد در این صورت λ_n برابر با $\frac{n\pi}{L}$ می‌شود.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر با توجه به شرایط مرزی و اولیه داده شده حل کنید.

ـ معادله توزیع دمای ناپایدار در یک جسم که از طریق جابجایی با محیط اطراف انتقال حرارت می‌کند.

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$T_{(x,t=0)=T_0}$$

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0$$

$$-K\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=h(T(L,t)-0)$$

حل :

$$T_{(x,t)} = f_{(x)}.z_{(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{f''_{(x)}}{f} = \frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow Z_{(t)} = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\Rightarrow f''_{(x)} + \lambda^2 f_{(x)} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f_{(x)} = A\sin\lambda_n x + B\cos\lambda_n x \\ f'_{(x)} = A\lambda_n\cos\lambda_n x - B\lambda_n \sin\lambda_n x \end{array}$$

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0 \Rightarrow f'_{(x=0)}=0 \Rightarrow A=0$$

$$-K\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=\lambda(T(x=L,t)-01 \Rightarrow K\lambda_n \sin\lambda_n L=h\cos\lambda_n L \Rightarrow tg\lambda_n L=\frac{h}{k\lambda_n}$$

$$T=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

مثال : در معادله پاره‌ای $\frac{\delta T}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$ با شرایط $\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=L}=0$ توابع ویژه $\phi_n(x)$ و مقادیر ویژه λ_n کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $\phi_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L},\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۲) $\phi_n(x)=\cos\frac{n\pi}{L}(x)\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۳) $\phi_n(x)=\cos\frac{2x+1}{2L}\pi x\ ,\ \lambda_n=\frac{2n+1}{2L}$

۴) $\phi_n(x)=\sin\frac{2x+1}{2L}\pi x\ ,\ \lambda_n=\frac{2n+1}{2L}\pi$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به این که هر دو شرط مرزی از یک نوع می‌باشند پس مقادیر ویژه برابر است با $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$ شرط مرزی در x=0 از نوع دوم می‌باشد پس توابع ویژه به صورت $\cos\lambda_n x$ خواهد بود.

مثال : صفحه‌ای در لحظه صفر دمای تمام نقاط آن T_0 است به طور ناگهانی درجه حرارت دو سمت آن را به مقدار معین T_1 می‌رسانیم. تغییرات دما نسبت به زمان و مکان چگونه است؟ (α مقدار ثابتی است و $\theta=T-T_1$) (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

۱) $\theta_{(x,t)}=\Sigma A_n\exp(-\alpha\lambda_n t)\sin(\lambda_n x)$

۲) $\theta_{(x,t)}=\Sigma A_n\exp(+\alpha\lambda_n t)\sin(\lambda_n x)$

۳) $\theta_{(x,t)}=\Sigma A_n\exp(-\alpha\lambda_n t)\sinh(\lambda_n x)$

۴) $\theta_{(x,t)}=\Sigma A_n\exp(\alpha\lambda_n t)\sinh(\lambda_n x)$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} T_{(x,0)}=T_0 \\ T_{(0,t)}=T_1 \\ T_{(L,t)}=T_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\theta=T-T_1} \begin{array}{l} \theta_{(x,0)}=\theta_0 \\ \theta_{(0,t)}=0 \\ \theta_{(L,t)}=0 \end{array}$$

با توجه به شرایط مرزی و اولیه مشخص است که در جهت x شرایط غیر همگن می‌باشد $-\ \theta_{(x,0)}=\theta_0-$ پس علامت λ^2 را طوری باید انتخاب کنیم که در جهت x به جواب‌های متعامد برسیم. هر دو شرط مرزی از یک نوع «هر دو نوع اول» هستند پس مقادیر ویژه برابر است با $\frac{n\pi}{L}$ و با توجه به نوع شرط مرزی در x=0 که نوع اول می‌باشد توابع ویژه عبارتند از $\sin\lambda_n x$.

۹ـ ۳ـ ۱ شرایط استفاده از روش جدا سازی

برای استفاده از روش جدا سازی در حل معادلات دیفرانسیل سه شرط کلی زیر لازم است:

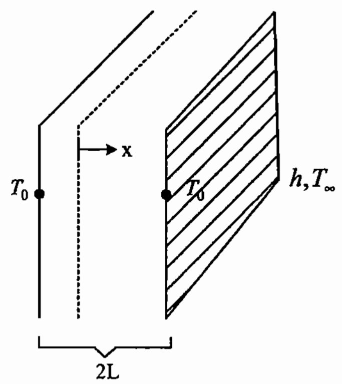
۱) **شرط فیزیکی مساله:** برای استفاده از روش جدا سازی متغیرها لازم است حداقل یک بعد مشخص در سیستم باشد مانند میله با طول L یا صفحه با ابعاد مشخص یا کره با شعاع مشخص. بنابراین در سیستم‌های نیمه بینهایت نمی توان از این روش استفاده کرد و در اجسام نیمه نهایت از روش ترکیب متغیرها و یا تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

۲) **شرط معادله دیفرانسیل:** برای استفاده از روش جدا سازی متغیرها لازم است معادله دیفرانسیل پاره ای، همگن باشند. در معادلات دیفرانسیل ناهمگن، از روش جمع آثار استفاده می‌کنیم بدین ترتیب که معادله دیفرانسیل ناهمگن را به یک معادله همگن تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از روش جدا سازی متغیرها، به حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌پردازیم.

۳) **شرط شرایط مرزی.** برای استفاده از روش جدا سازی متغیرها، لازم است حداکثر تعداد شرایط مرزی ناهمگن برابر یک باشد اگر تعداد شرایط مرزی ناهمگن بیشتر از یک باشد با استفاده از روش جمع آثار به حل معادله دیفرانسیل می‌پردازیم بدین ترتیب که شرایط مرزی ناهمگن را به شرایط مرزی همگن تبدیل می‌کنیم و سپس با روش جدا سازی متغیرها به حل معادله دیفرانسیل می‌پردازیم.

نکته : برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از روش جدا سازی، برای تعیین علامت ثابت جدا سازی لازم است ابتدا جهت ناهمگن را مشخص کنیم و سپس علامت ثابت جدا سازی را طوری انتخاب می‌کنیم که در جهت ناهمگن به معادلات اشتروم لیوویل برسیم که دارای جواب‌های متعامد باشد در مختصات کارترین جواب‌های متعامد شامل $\cos , \sin$ و در مختصات استوانه‌ای شامل توابع بسل y , J می‌باشد.

مثال : جسمی با ضخامت $2L$ و در دمای T_0 قرار دارد جسم را در محیط با دمای T_∞ قرار می‌دهیم که $T_0 > T_\infty$ می‌باشد برای این که دمای جسم را در T_0 ثابت نگه داریم حرارتی به میزان q'' در داخل جسم تولید می‌کنیم مطلوب است تعیین توزیع دمای ناپایدار در راستای x



$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{q''}{K}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$ معادله دیفرانسیل جزئی جسم

$T_{(x,t=0)}=T_0$ شرط اولیه

شرایط مرزی $\begin{cases}\dfrac{\delta T}{\delta X}(x=0,t)=0\\ T_{(x=L,t)}=T_0\end{cases}$

حل : همان طور که ملاحظه می‌کنید، معادله دیفرانسیل ناهمگن است پس با استفاده از روش جمع آثار این معادله را به معادله همگن تبدیل می‌کنیم در روش جمع آثار معادله PDE را به صورت حاصل جمع دو معادله PDE , ODE قرار می‌دهیم و همه شرایط ناهمگن را به معادله ODE می‌دهیم که با هر شرط ناهمگن قابل حل می‌باشد.

پس جواب معادله مزبور را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$T_{(x,t)}=V_{(x)}+u_{(x,t)}$

همان طور که می‌بینید $V_{(x)}$ تابعیت زمانی ندارد و یا به عبارت دیگر $V_{(x)}=T_{(x,t\to\infty)}$ می‌باشد یعنی $V_{(x)}$ نشانگر جواب حالت پایا می‌باشد بنابراین $V_{(x)}$ باید در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق کند.

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{q''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$T_{(x,t=0)}=T_0$$

$$\frac{\delta T}{\delta x}(x=0,t)=0$$

$$T_{(x=L,t)}=T_0$$

$$V_{(x)}=T_{(x,t\to\infty)}\Rightarrow\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}+\frac{q''}{k}=\frac{1}{\alpha}\overbrace{\cancel{\frac{\delta V_{(x)}}{\delta t}}}^{0}=0 \quad *$$

شرایط مرزی $V_{(x=L)}=T_0 \quad , \quad \dfrac{\delta V_{(x=0)}}{\delta x}=0$

$$\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}=-\frac{q''}{k}\Rightarrow V_{(x)}=-\frac{q''x^2}{2k}+c_1x+c_2$$

$$\frac{\delta V_{(x=0)}}{\delta x}=0\Rightarrow C_1=0$$

$$V_{(x=l)}=T_0\Rightarrow C_2=T_0+\frac{q''L^2}{2k}$$

$$\Rightarrow V_{(x)}=\frac{q''L^2}{2k}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)+T_0\leftarrow \text{steady state}$$ جواب حالت پایا

حال رابطه $T_{(x,t)}=V_{(x)}+U_{(x,t)}$ در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم.

$$\frac{\delta^2(V_{(x)}+u_{(x,t)})}{\delta x^2}+\frac{q''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta}{\delta t}(V_{(x)}+u_{(x,t)})$$

$$\frac{\delta^2 u_{(x,t)}}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}+\frac{q''}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta u_{(u,t)}}{\delta t}$$

با توجه به معادله * می‌دانیم که $\dfrac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}+\dfrac{q''}{K}=0$ پس داریم: $\dfrac{\delta^2 u_{(x,t)}}{\delta x^2}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\delta u_{(x,t)}}{\delta t}$

این معادله را می‌توان با روش جدا سازی متغیرها حل نمود چون همگن می‌باشد

برای شرایط مرزی داریم

$$\left(\frac{\delta u_{(x=0,t)}}{\delta x}\right)+\frac{\delta V_{(x=0)}}{\delta x}=0\Rightarrow\frac{\delta u_{(x=0,t)}}{\delta x}+0=0\Rightarrow\frac{\delta u_{(x=0,t)}}{\delta x}=0$$

$$u(x=L,t)+V(x=L)=T_0 \quad\Rightarrow\quad u(x=L,t)+T_0=T_0 \quad\Rightarrow\quad u_{(x,C,t)}=0$$

حال این معادله رابا شرایط اولیه مرزی زیر با روش جدا سازی متغیرها حل می‌کنیم.

$$\frac{\delta^2(u_{(x,t)})}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta u_{(x,t)}}{\delta t}$$

$$u_{(x,t=0)}=T_0-V_{(x)}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}(x=0,t)=0$$

$$u(x=L,t)=0$$

$$\Rightarrow u_{(x,t)}=0+\Sigma C_n\cos\lambda_n xe^{-\alpha\lambda_n^2 t} \quad,\quad \lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi$$

$$\Rightarrow T_{(x,t)}=V_{(x)}+u_{(x,t)}=\underbrace{T_0+\frac{q'L^2}{2K}[1-(\frac{x}{L})^2]}_{\text{جواب حالت پایا}}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\lambda_n xe^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

و $\lambda_n=(\frac{2n+1}{2L})\pi \;,\quad n=1,2,3,\dots,n$

مثال : معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را با توجه به شرایط مرزی و اولیه داده شده حل کنید.

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{1}{a}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$T_{(x,t=0)=T_0}$$

$$T_{(x=0,t)}=T_1$$

$$-K\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=h(T(x-L,t)-T_\infty)$$

حل : همان طور که می‌بینید دو شرط مرزی داده شده، ناهمگن می‌باشند پس باید از روش جمع آثار استفاده کنیم

$$T_{(x,t)}=u_{(x,t)}+V_{(x)}$$

$V_{(x)}$ جواب حالت پایا $(T_{(x,t\to\infty)}=V_{(x)})$ می‌باشد پس باید در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق کند پس داریم.

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

$$T_{(x=0,t)}=T_1$$

$$-K\frac{\delta T}{\delta x}(x=L,t)=h(T(x=L,t)-T_\infty)$$

$$\Rightarrow\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta V_{(x)}}{\delta t}=0$$

$$\begin{cases} V_{(x=0)} = T_1 \\ -K\dfrac{\delta V_{(x=L)}}{\delta x} = h(V_{(x,L)} - T_\infty) \end{cases}$$

$$\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x_2} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = ax + b$$

$$V_{(x=0)} = T_1 \Rightarrow b = T_1$$

$$-K\frac{\delta V_{(x=L)}}{\delta x} = h(V(x=l) - T_\infty) \Rightarrow -Ka = h[aL + T_1 - T_\infty]$$

$$\Rightarrow a = \frac{T_\infty - T_1}{hL - K}$$

$$\Rightarrow V_x = \left(\frac{T_\infty - T_1}{hL + K}\right)x + T_1$$

$$T_{(x,t)} = u_{(x,t)} + V_{(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2(u_{x,t)} + V_{(x)})}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta(u_{(x,t)} + V_{(x)})}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 u_{(x,t)}}{\delta x^2} + \overset{0}{\cancel{\frac{\delta^2 V_{(x)}}{\delta x^2}}} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta u_{(x,t)}}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 u_{(x,t)}}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta u_{(x,t)}}{\delta t}$$

شرایط مرزی $u(x=0,t) + V(x=0) = T_1 \Rightarrow u(x=0,t) + T_1 = T_1 \Rightarrow u(x=0,t) = 0$

$$-K\left[\frac{\delta u(x=L,t)}{\delta x} + \frac{\delta V(x=L)}{\delta x}\right] = h\left[u(x=L,t) + V(x=L) - T_\infty\right]$$

$$\Rightarrow -K\frac{\delta u(x=L,t)}{\delta x} = hu(x=L,t)$$

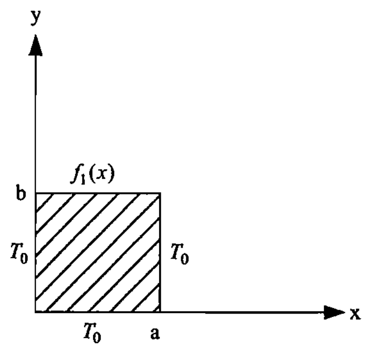
با توجه به نوع شرط مرزی $u(x=0,t)$ که نوع اول است پس تابع ویژه به صورت $\sin\lambda_n x$ خواهد بود و این که شروط مرزی از نوع اول و سوم می‌باشند پس مقدار ویژه از حل معادله $\cot g(\lambda_n L) = -\dfrac{h}{K\lambda_n}$ به دست می‌آید.

$$T_{(x,t)} = \underbrace{T_1 + \left(\frac{T_\infty - T_1}{hL + K}\right)x}_{\text{جواب حالت پایا}} + \sum C_n \sin\lambda_n x e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$\cot g(\lambda_h L) = -\frac{h}{K\lambda_n}$$

نکته : در سئوالات تستی می‌توانید با امتحان کردن شرایط مرزی در جواب پایا سیستم جواب را تشخیص دهید زیرا شرایط مرزی باید در جواب پایا صدق می‌کند.

مثال : معادله هدایت گرمایی در یک صفحه دو بعدی با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل موجود است توزیع دمای صفحه در حالت پایا چگونه است؟



$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}=0$$

$$T(x=0,y)=T_0$$

$$T(x=a,y)=T_0$$

$$T(x,y=0)=T_0$$

$$T(x,y=b)=f_1(x)$$

حل : با تغییر متغیر $\theta=T-T_0$ داریم

$$\frac{\delta^2\theta}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\theta}{\delta y^2}=0$$

شرایط مرزی :
$$\left|\begin{array}{l}\theta(u=0,y)=0\\ \theta(x=a,y)=0\\ \theta(x,y=0)=0\\ \theta(x,y=b)=f_1(x)-T_0\end{array}\right.$$

با توجه به شرایط مرزی مشخص است که در جهت x شرایط مرزی ناهمگن است «$\theta(x,y=b)=f_1(x)-T_0$» پس باید علامت ثابت را طوری انتخاب کنیم که در جهت x به جواب‌های اورتوگونال برسیم.

$$\theta(x,y)=X_{(x)}Y_{(y)}$$

با چاپگذاری درمعادله $Y_{(y)}X''_{(x)}+X_{(x)}Y''_{(y)}=0\Rightarrow\frac{X''_{(x)}}{X_{(x)}}=-\frac{Y''_{(y)}}{Y_{(y)}}=K\left|\begin{array}{l}+\lambda^2\\ \ \ 0\\ -\lambda^2\end{array}\right.$

بنابراین با انتخاب $K=-\lambda^2$ در جهت x به جواب‌های اورتوگونال در این جهت می‌رسیم.

$$\frac{X''_{(x)}}{X_{(x)}}=-\lambda^2\Rightarrow X''_{(x)}+\lambda^2X_{(x)}=0\Rightarrow X_{(x)}=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

$$\frac{-Y''_{(y)}}{Y_{(y)}} = -\lambda^2 \Rightarrow Y''_{(y)} - \lambda^2 Y_{(y)} = 0 \Rightarrow Y_{(y)} = A_1 \sinh \lambda y + B_1 \cosh \lambda y$$

$$X(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\left.\begin{matrix} X(x=a) = 0 \Rightarrow 0 = A \sin \lambda a \\ A \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda_n a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$Y(y=0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0 + \Sigma C_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y \Rightarrow$$

$$T = T_0 + \Sigma C_n \sin \lambda_n \sinh \lambda_n y$$

ضریب C_n با توجه به شرایط مرزی $\theta_{(x,y=b)} = f_1(x) - T_0$ تعیین می‌شود.

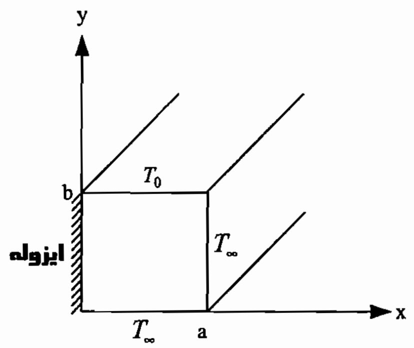
به معادله توزیع دما در صفحه $\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2}$ معادلهٔ لاپلاسین می‌گویند برای حل این معادلات از روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱ـ با توجه به شرایط مرزی مسئله، جهت ناهمگن را تعیین می‌کنیم.

۲ـ جواب در راستای ناهمگن باید به صورت cos , sin باشد و در راستای غیر اورتوگونال به صورت sinh , cosh باشد.

۳) با توجه به شرایط مرزی در جهت همگن ـ اورتوگونال ـ مقدار λ_n را تعیین می‌کنیم.

مثال : در شکل روبرو که نشان دهنده جسمی با طول زیاد می‌باشد توزیع پایای دما عبارت است از: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)



۱) $T - T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh(\lambda_n y)\cos(\lambda_n x), \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$

۲) $T - T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh(\lambda_n y)\cos(\lambda_n x), \lambda_n = (\frac{2n+1}{2a})\pi$

۳) $T - T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n y)\cosh(\lambda_n x), \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$

۴) $T - T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n y)\cosh(\lambda_n x), \lambda_n = (\frac{2n+1}{2a})\pi$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم.

شرایط مرزی جهت x : $T(x,0)=T_\infty$ و $T(x,b)=T_0$

شرایط مرزی جهت y : $\frac{\delta T(0,y)}{\delta x}=0$ و $T(\alpha,y)=T_\infty$

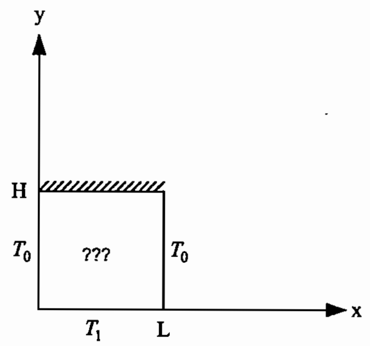
با تغییر متغیر $\theta=T-T_\infty$ داریم:

شرایط مرزی جهت x $\theta(x,0)=0 \quad \theta(x,b)=T_0-T_\infty=\theta_0$

شرایط مرزی جهت y $\frac{\delta\theta(0,y)}{\delta x}=0 \quad \theta(\alpha,y)=0$

همان طور که می‌بینید تنها شرط مرزی ناهمگن در جهت x می‌باشد پس باید در این جهت به جواب اورتوگونال برسیم. برای تعیین $\sin\lambda_n x$ یا $\cos\lambda_n x$ بودن جواب در جهت x به سراغ نوع شرط مرزی در x=0 می‌رویم و همان طور که مشخص است $\frac{\delta\theta(0,y)}{\delta x}=0$ از نوع دوم است پس جواب در جهت اورتوگونال به صورت $\cos\lambda_n x$ خواهد بود برای تعیین λ_n، به بررسی شروط مرزی در x=L , x=0 می‌پردازیم که در این جا یکی از نوع دوم $\frac{\delta\theta_{(0,y)}}{\delta x}=0$ و دیگری از نوع اول $\theta_{(x,y)}=0$ می‌باشد پس $\lambda_n=(\frac{2n+1}{2a})\pi$ می‌باشد برای تعیین جواب جهت غیر اورتوگونال یعنی جهت yها به سراغ شرط مرزی در y=0 می‌رویم که این شرط مرزی نوع اول است پس جواب در جهت y به صورت $\sinh(\lambda_n y)$ می‌باشد پس گزینه دوم صحیح است.

مثال : یک صفحه مطابق شکل در اختیار داریم توزیع دما در این صفحه با استفاده از روش جدا سازی متغیرها عبارت است از:



۱) $T_{(x,y)}=T_0+\Sigma A_n \sin\lambda_n x \sin\lambda_n y\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۲) $T_{(x,y)}=T_0+\Sigma A_n \sin\lambda_n x \sinh\lambda_n y\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۳) $T_{(x,y)}=T_0+\Sigma A_n \sinh\lambda_n x \sin\lambda_n y\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۴) $T_{(x,y)}=T_0+\Sigma A_n \sin\lambda_n x \cosh\lambda_n y\ ,\ \lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

شرایط مرزی جهت x $\rightarrow T_{(x,0)} = T_1 \qquad \frac{\delta T_{(x,H)}}{\delta y} = 0$

شرایط مرزی جهت y $\rightarrow T_{(0,y)} = T_0 \qquad T(L,y) = T_0$

با تغییر متغیر $\theta = T - T_0$ داریم:

شرایط مرزی جهت x $\rightarrow \theta(x,0) = T_1 - T_0 = \theta_1 \qquad \frac{\delta\theta(x,H)}{\delta y} = 0$

شرایط مرزی جهت y $\rightarrow \theta(0,y) = 0 \qquad \theta(L,y) = 0$

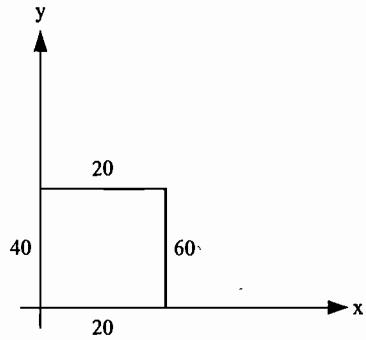
واضح است که شرایط مرزی در جهت x ناهمگن است پس در این جهت به جواب اورتوگونال می‌رسیم.

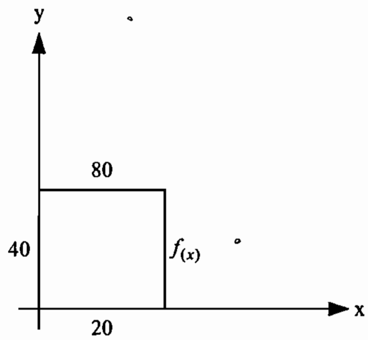
$x = 0 \Rightarrow \theta(0,y) = 0 \xrightarrow{1}$ شرط مرزی نوع اول $\Rightarrow \sin\lambda_n x$

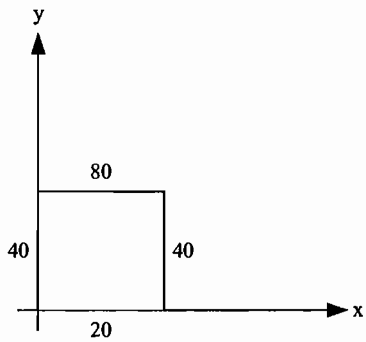
$x = L \Rightarrow \theta(L,y) = 0 \xrightarrow{2}$ هر دو شرط مرزی ۱ و ۲ از نوع اول $\Rightarrow \lambda_n = \frac{h\pi}{L}$

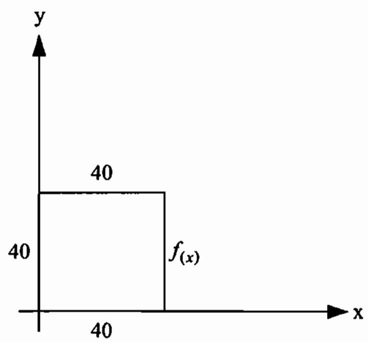
$y = 0 \Rightarrow \theta(x,0) = 0 \xrightarrow{3}$ شرط مرزی نوع اول $\Rightarrow \sinh\lambda_n y$

مثال : اشکال زیر مربوط به انتقال حرارت دو بعدی در حالت پایا می‌باشند کدامیک از مسائل زیر را به روش جدا سازی متغیرها می‌توان حل کرد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان طور که گفته شد برای حل کردن از طریق روش جدا سازی، حداکثر تعداد شرط‌های مرزی ناهمگن برابر یک می‌باشد که گزینه چهارم با تغییر متغیر $\theta = T - 40$ فقط دارای یک شرط مرزی ناهمگن $\theta(x_1, y) = f_{(x)} - 40$ خواهد بود.

برای حل معادله لاپلاس $\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}=0$ با چهار شرط ناهمگن زیر

$T_{(x,0)}=f_1(x) \qquad T_{(x,b)}=f_2(x)$

$T_{(0,y)}=f_3(x) \qquad T_{(a,y)}=f_4(x)$

به خاطر وجود چهار شرط مرزی ناهمگن نمی توانیم از روش جدا سازی متغیرها استفاده کنیم به همین جهت از روش جمع آثار استفاده می‌کنیم و با تغییر متغیر زیر داریم:

$$T_{(x,y)}=T_1(x,y)+T_2(x,y)+T_3(x,y)+T_4(x,y)$$

معادله را به چهار معادله و هر کدام با یک شرط مرزی ناهمگن تبدیل می‌کنیم و حال هر معادله را می‌توانیم از روش جدا سازی متغیرها حل کنیم.

معادله اول: $\frac{\delta^2 T_1}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T_1}{\delta y^2}=0$

شرایط مرزی: $T_{(x,b)}=T_{(x,0)}=T_{(0,y)}=0, T_{(a,y)}=f_4(x)$

معادله دوم: $\frac{\delta^2 T_2}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T_2}{\delta y^2}=0$

شرایط مرزی: $T_{(x,b)}=T_{(x,0)}=T_{(a,y)}=0, T_{(0,y)}=f_3(x)$

معادله سوم: $\frac{\delta^2 T_3}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T_3}{\delta y^2}=0$

شرایط مرزی: $T_{(x,b)}=T_{(0,y)}=T_{(a,y)}=0, T_{(x,0)}=f_1(x)$

معادله چهارم: $\frac{\delta^2 T_4}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T_4}{\delta y^2}=0$

شرایط مرزی: $T_{(x,0)}=T_{(0,y)}=T_{(a,y)}=0, T_{(x,b)}=f_2(x)$

مثال : یک لوله توپر در دمای اولیه T_0 قرار دارد اگر دمای سطح این میله را به T_1 برسانیم، مطلوب است تعیین توزیع دمای ناپایدار برای این میله در راستای شعاعی؟

$$\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\frac{\delta T}{\delta r})=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

شرط اولیه $T(r,t=0)=T_0$

شرایط مرزی $\begin{cases}\frac{\delta T(r=0,t)}{\delta r}=0 \quad \text{یا} \quad T(r=0,t)=\text{محدود} \\ T(r=R,t)=T_1\end{cases}$

با تغییر متغیر $\theta=T-T_1$ داریم

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(r\frac{\delta\theta}{\delta r})=\frac{1}{\alpha}\frac{\delta\theta}{\delta t}\\ \theta(r,t=0)=T_0-T_1=\theta_0\\ \frac{\delta\theta(r=0,t)}{\delta r}=0\\ \theta(r=R,t)=0\end{cases}$$

$$\theta_{(r,t)}=F_{(r)}Z_{(t)}$$

$$\Rightarrow\frac{z(t)}{r}\frac{\delta}{\delta r}(rf'(r))=\frac{f_{(r)}}{\alpha}z'_{(t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f_{(r)}r}\frac{\delta}{\delta r}(rf'_{(r)})=\frac{1}{\alpha}\frac{z'_{(t)}}{z_{(t)}}=K\left|\begin{array}{l}+\lambda^2\\ \ \ 0\\ -\lambda^2\end{array}\right.$$

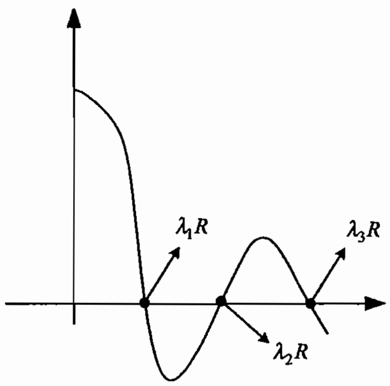
$$\Rightarrow K=-\lambda^2\Rightarrow z_{(t)}=e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$\frac{1}{f_{(r)}r}(f'_{(r)}+rf''_{(r)})=-\lambda_n^2\Rightarrow rf''_{(r)}+f'_{(r)}+\lambda_n^2 rf_{(r)}=0\leftarrow$ معادله بسل معمولی از مرتبه صفر

$$\Rightarrow f_{(r)}=C_1J_0(\lambda r)+C_2y_0(\lambda r)$$

$f_{(r=0)}=$ محدود $\Rightarrow C_2=0$

$\left.\begin{array}{l}f(r=R)=0=C_1J_0(\lambda R)=0\\ \qquad C_1\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow J_0(\lambda_n R)=0$ از حل این معادله به دست می‌آید λ_n



$$\Rightarrow\theta=0+\Sigma A_nJ_0(\lambda_n r)e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

نکته : در مختصات استوانه‌ای در جهت اورتوگونال به معادلات بسل می‌رسیم لازم به ذکر است که در تعیین ضرایب همواره به یاد داشته باشید که $y_p(0)=-\infty$

مثال : اگر معادله دیفرانسیل زیر نشان دهنده توزیع دما در یک کره توپر باشد، جواب عمومی معادله کدام است؟ « C_1 عدد ثابت»
(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(\alpha T)}{dr^2}+B^2T=0$$

۱) $T_{(r)}=C_1 I_0(Br)$

۲) $T_{(r)}=C_1\cos\frac{(Br)}{r}$

۳) $T_{(r)}=C_1 J_0(Br)$

۴) $Y_{(r)}=C_1\frac{\sin(Br)}{r}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در مختصات کروی باید از تغییر متغیر $\phi=rT$ استفاده کنیم.

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2}+B^2T=0\Rightarrow\frac{d^2(rT)}{dr^2}+B^2rT=0$$

$$\phi=rt\Rightarrow\frac{d^2(\phi)}{dr^2}+B^2\phi=0\Rightarrow\phi''+B^2\phi=0$$

معادله مشخصه $m^2+B^2=0\Rightarrow m_1=\beta i\quad m_2=-\beta i$

$$\Rightarrow\phi=rT=C_1\sin\beta r+C_2\cos\beta r\Rightarrow T=\frac{C_1\sin(Br)}{r}+C_2\frac{\cos(Br)}{r}$$

$T(r=0)=$ محدود $\Rightarrow C_2=0\Rightarrow T=C_1\frac{\sin(Br)}{r}$

روش تستی: در مختصات کروی جمله $\frac{\sin\lambda_n r}{r}$ در جهت اورتوگونال معادله ظاهر می‌شود.

۹ـ ۴ روش ترکیب متغیرها combination of variables

این روش برای حل آن دسته از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کاربرد دارد که دارای یک شرط مرزی در بی‌نهایت باشد و یا به عبارت دیگر در سیستم هایی که دارای بعد مشخصه تعریف نشده‌ای هستند مانند جسم نیمه بی نهایت.

در این روش با تعریف یک متغیر جدید که ترکیبی از متغیرهای مستقل سیستم است، معادله دیفرانسیل پاره‌ای تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی می‌گردد و سپس با اعمال شرایط مرزی و اولیه بر حسب متغیر جدید معادله حل و جواب حاصل می‌شود.

در سئوالات کنکور کارشناسی ارشد لزومی به اعمال این روش نیست لطفا به بررسی سه حالتی که در ادامه انجام شده دقت کنید.

حالت اول: برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ از تغییر متغیر $\eta=\frac{x}{\sqrt{k\alpha t}}$ استفاده می‌کنیم و به معادله دیفرانسیل معمولی $u''+\frac{K}{2}\eta u'=0$ می‌رسیم «K عدد ثابتی می‌باشد»

مثال : اگر جواب معادله $\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{\delta T}{\delta t}$ را به صورت $T=f_{(q)}$ فرض می‌کنیم که در آن $q=xt^n$ باشد به ازای چه مقدار از n به معادله $2\alpha\frac{d^2 f}{dq^2}+q\frac{df}{dq}=0$ می‌رسیم؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -1

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$2af''+qf'=0\Rightarrow f''+\frac{q}{2\alpha}f'=0\leftrightarrow u''+\frac{k}{2}\eta u'=0$$

$$\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{\delta T}{\delta t}\leftrightarrow\alpha\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{\delta u}{\delta t}$$

$$q=nt^n\leftrightarrow\eta=\frac{x}{\sqrt{k\alpha t}}$$

توان t در متغیر جدید برابر $-\frac{1}{2}$ است.

حالت دوم: برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای $x\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ از تغییر متغیر $\eta=\frac{x}{\sqrt{k\alpha f}}$ استفاده می‌کنیم و به معادله دیفرانسیل معمولی $u''+\frac{K}{3}\eta^2 u'=0$ می‌رسیم «k عدد ثابتی می‌باشد.»

حالت سوم: برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\frac{\delta}{\delta x}(\frac{1}{x}\frac{\delta u}{\delta x})$ از تغییر متغیر $\eta=\frac{x}{\sqrt[3]{9\alpha t}}$ استفاده می‌کنیم و به معادله دیفرانسیل معمولی $\eta u''+(3\eta^2-1)u'=0$ می‌رسیم.

۹ـ ۵ روش تبدیل لاپلاس

برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط مرزی و یا اولیه متغیر با زمان مناسب ترین روش برای حل استفاده از تبدیل لاپلاس می‌باشد در حالات دیگر معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نیز، می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود.

روابط تبدیل لاپلاس برای تابع دو متغیره $T_{(x,t)}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$L(T_{(x,t)})=\int_0^\infty T(x,t)e^{-st}dt=\overline{T}(x,s)$$

$$L\left(\frac{\delta T(x,t)}{\delta t}\right)=S\overline{T}(x,s)-T(x,0)$$

$$L\left(\frac{\delta T(x,t)}{\delta x}\right)=\frac{d\overline{T}(x,s)}{dx}$$

$$L\left(\frac{\delta^2 T(x,t)}{\delta x\delta t}\right)=\frac{d}{dx}\left(S\overline{T}(x,s)-T(x,0)\right)$$

(برای درک بهتر این روش به مثالی که ذکر می‌شود دقت کنید)

مثال : معادله دیفرانسیل $\frac{\delta T}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$ را با شرایط زیر حل کنید.

$$T(x,0)=0$$

$$T(0,t)=t$$

$$\lim_{x\to 0} T(x,t)=0$$

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$L\left(\frac{\delta T}{\delta t}\right)=\alpha L\left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}\right)$$

$$S\overline{T}_{(x,s)}-T_{(x,0)}=\alpha\frac{d^2\overline{T}(x,s)}{dx^2}\Rightarrow S\overline{T}_{(x,s)}=\alpha\frac{d^2\overline{T}_{(x,s)}}{d}$$

از شرایط مرزی و اولیه نیز تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$T_{(x,0)}=0$$

$$T_{(0,t)}=t\xrightarrow{L}T(0,s)=\frac{1}{S^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}T(x,t)=0\xrightarrow{L}\lim_{x\to\infty}T(x,s)=0$$

معادله درجه دوم با ضرایب ثابت $\leftarrow \Rightarrow\frac{d^2\overline{T}_{(x,s)}}{dx^2}-\frac{s}{a}\overline{T}(x,s)=0\rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{T}_{(x,s)}=C_1e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x}+c_2e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}T(x,s)=0\Rightarrow C_1=0\\ T(0,s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow C_2=\frac{1}{s^2}\end{array}\right\}\rightarrow\overline{T}_{(x,s)}=\frac{1}{S^2}e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}$$

۹ـ ۶ معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه IVP و مقدار مرزی BVP

با توجه به شرایط مرزی و مقدار اولیه تابع، معادلات دیفرانسیل به دو دسته مقدار اولیه و مقدار مرزی تقسیم می‌شوند در مسائل مقدار اولیه، مقادیر تابع و مشتقاتش در یک نقطه اولیه به عنوان شرایط مساله مشخص می‌شود و حداقل یکی از متغیرهای مستقل نامحدود می‌باشد به عنوان مثال در معادله انتقال حرارت هدایتی ناپایدار متغیر زمان از صفر تا بی نهایت می‌باشد و هیچ گونه شرطی در $t=\infty$ مشخص نمی باشد برای حل معادلات **دیفرانسیل معمولی** با مقدار اولیه IVP می‌توان از روش‌های تیلور، اویلر و رانگ کوتا استفاده کرد.

زمانی که محدوده تغییرات متغیرهای مستقل بسته باشد و برای تمام متغیرهای مستقل مقادیر معین باشد این مساله از نوع مقدارمرزی یا BVP می‌باشد در این حالت شرایط ذکر شده برای معادله دیفرانسیل عبارت است از مقادیر جواب‌ها در چند نقطه و تعداد شرایط برابر است با مرتبه معادله دیفرانسیل. برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از نوع مقدار مرزی می‌توان از روش‌های ذکر

شده در این فصل استفاده کرد و برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از نوع مقدار مرزی می‌توان از روش‌های تقاضای محدود و تیر اندازی استفاده نمود.

به عنوان مثال معادله زیر از نوع مقدار مرزی یا BVP می‌باشد.

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$

و معادله به شکل زیر از نوع مسائل اولیه می‌باشد.

$$y'' = f(x, y', y)$$

$$y(x_0) = \alpha \qquad y'(x_0) = \beta$$

روش‌های عددی ذکر شده در بخش محاسبات عددی به تفضیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

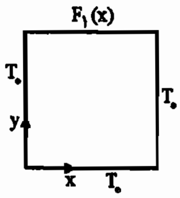
مثال : کدامیک از شرایط زیر معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + qy = r \quad a \le x \le b$ را تبدیل به یک مسئله با مقادیر مرزی (BVP) می‌نمایند؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

۱) $y(a) = y_i$, $y'(a) = d_i$
۲) $g_{(b)} = y_f$, $y'_{(b)} = d_f$
۳) $y_{(a)} = y_{(i)}$, $y_{(b)} = y_f$
۴) $y'_{(a)} = d_i$, $y''_{(a)} = e_i$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مجموعه تست‌های فصل نهم

۱ـ صفحه دوبعدی مطابق شکل از سه طرف دارای دمای T_0 بوده و توزیع دما در یک لبه نیز مشخص می‌باشد. توزیع دمای صفحه در حالت پایا چگونه است؟ (مهندسی شیمی ۸۴)



۱) در جهت x و y هر دو تابع sin می‌باشد.

۲) درجهت x و y هر دو تابع sinh می‌باشد.

۳) در جهت x تابع sin و در جهت y تابع sinh می‌باشد.

۴) در جهت x تابع sinh و در جهت y تابع sin می‌باشد.

۲ـ اگر تابع‌های $u(y,t)$ و $u_2(x,t)$ جواب معادلات زیر باشند:

$$\frac{\delta u_1}{\delta t}=\frac{\delta^2 u_1}{\delta y^2} \quad , \quad u_1(y,0)=y \qquad u_1(0,t)=0 \quad , \quad u_1(1,t)=0$$

$$\frac{\delta u_2}{\delta t}=\frac{\delta^2 u_2}{\delta x^2} \quad , \quad u_2(x,0)=1 \qquad u_2(0,t)=0 \quad , \quad \frac{\delta u_2}{\delta x}(1,t)=0$$

حل معادله $\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$ با شرایط مرزی و اولیه زیر کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

$$u(x,y,0)=y \qquad u(0,y,t)=0 \qquad \frac{\delta u}{\delta x}(1,y,t)=0$$

$$u(x,0,t)=0 \quad , \quad u(x,1,t)=0$$

۱) $u(x,y,t)=u_1+u_2$

۲) $u(x,y,t)=u_1u'_2+u'_1u_2$

۳) $r(x,y,t)=u_1\times u_2$

۴) چون شرایط اولیه u_1 و u_2 یکسان نیست نمی‌توان حل معادله u را از u_1 و u_2 به‌دست آورد.

۳ـ اگر جواب معادله $a\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{\delta T}{\delta t}$ را به‌صورت $T=f(q)$ فرض کنیم که در آن $q=xt^n$ باشد، به‌ازای چه مقدار از n معادله $2\alpha\frac{d^2 f}{dq^2}+q\frac{dt}{dq}=0$ می‌رسیم؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -1

۴ـ معادله دیفرانسیل زیر چه نوع معادله‌ای است و روش حل آن کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

$$\frac{d^2 u}{dx^2}-\frac{2du}{xdx}+u=0 \quad , \quad \begin{cases} u(0)=u_0 \\ u(1)=u_1 \end{cases}$$

۱) BVP (مسأله شرط مرزی) ـ روش جداسازی متغیرها

۲) BVP (مسأله شرط مرزی) ـ روش Shooting (شوتینگ)

۳) IVP (مسأله شرط اولیه) ـ روش Runge-Kutta (رانگ ـ کوتا)

۴) IVP (مسأله شرط اولیه) ـ روش تفاضل‌های محدود

۵ـ در معادله پاره‌ای $\frac{\delta T}{\delta t}=a\frac{\delta^2 T}{\delta t^2}$ با شرایط $\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=L}=0$ توابع ویژه $\phi_n(x)$ و مقادیر ویژه λ_n کدام است؟

۱) $\phi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}\quad,\quad\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۲) $\phi_n(x)=\cos\frac{n\pi}{L}x\quad,\quad\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$

۳) $\phi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2L}\pi x\quad,\quad\lambda_n=\frac{2n+1}{2L}\pi$

۴) $\phi_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2L}\pi x\quad,\quad\lambda_n=\frac{2n+1}{2L}\pi$

۶ـ روش ترکیب متغیرها (combination of uariable) برای حل کدام نوع معادلات دیفرانسیل جزئی با چه شرایطی قابل استفاده است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

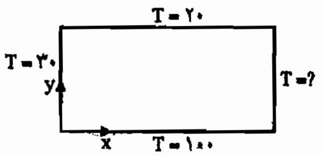
۱) معادلات هذلولی در محدوده حل نامتناهی

۲) معادلات سهموی که مقیاس طولی فیزیکی نداشته باشند.

۳) برای کلیه معادلات مشتقات جزئی با ضرایب فیزیکی برای بدون بعد کردن متغیرها

۴) معادلات بیضوی با مشخص بودن مقیاس طولی فیزیکی برای بدون بعد کردن متغیرها

۷ـ شکل روبه‌رو مربوط به یک مسئله انتقال حرارت حالت پایا در صفحه دوبعدی است. دمای دیوار سمت راست چه باشد تا بتوان این مسأله را به روش جداسازی متغیرها حل نمود؟ (مهندسی ۸۲)



۱) $T=0$

۲) $T=20$

۳) $T=30$

۴) $T=100$

۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\delta u}{\delta t}=a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ با شرایط مرزی $u(L,t)=B$ و $u(0,t)=A$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $B+\frac{A-B}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۲) $\frac{A-B}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۳) $B+\frac{A-B}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x$

۴) $A+\frac{B-A}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۹ـ معادله دیفرانسیل توزیع درجه حرارت غیرپایدار (transient) در یک میله به‌صورت $\frac{\delta u}{\delta t}=K\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ بیان شده است درصورتی‌که شرایط اولیه به‌صورت $u(x,0)=f(x)$ و شرایط مرزی به‌صورت $u(L,t)=0$ و $u(0,t)=0$ بیان شده باشد جواب عمومی معادله فوق کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}xe^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

۲) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\frac{n\pi}{L}xe^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

۳) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{L}xe^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}xe^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)t}$

۱۰ ـ معادله دیفرانسیل مربوط به توزیع دمای حالت پایدار یک استوانه بلند به شعاع r_0 برابر با $\frac{\delta^2 T}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta T}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 T}{\delta \theta^2}=0$ و نیز دمای سطح استوانه برابر با $f(\theta)$ است در این‌صورت توزیع درجه حرارت مطابق با کدام گزینه می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $T(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}\left(a_n \cos n\theta+b_n \sin n\theta\right)$

۲) $T(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} I_0(r)\left(a_n \cos n\theta+b_n \sin n\theta\right)$

۳) $T(r,\theta)\sum_{n=0}^{\infty} r^{n}\left(a_n \cos n\theta+b_n \sin n\theta\right)$

۴) $T(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} J_0(r)\left(a_n \cos n\theta+b_n \sin n\theta\right)$

۱۱ ـ کدام شرط مرزی برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\delta u(x,t)}{\delta t}=a\frac{\delta^2 u(x,t)}{\delta x^2}$ جزء شرایط همگن محسوب می‌شود؟ (A مقدار ثابتی است) (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $u(0,t)=A$

۲) $\frac{\delta u(0,t)}{\delta x}=A$

۳) $\frac{\delta u(0,t)}{\delta x}=u(0,t)$

۴) $\frac{\delta u(0,t)}{\delta x}=\left(u(0,t)-A\right)$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل نهم

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{شرایط مرزی}: \left.\begin{array}{l} T(x,0)=T_0 \\ T(x,a)=F_1(x) \\ T(0,y)=T_0 \\ T(a,y)=T_0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\theta=T-T_0} \begin{cases} \theta(x,0)=0 \\ \theta(x,a)=F_1(x)-T_0 \\ T(0,y)=0 \\ T(a,y)=0 \end{cases}$$

در جهت x ، دارای شرط مرزی ناهمگن $\left(\theta(x,a)=F_1(x)-T_0\right)$ می‌باشد پس باید در این جهت باید جواب‌ها به‌صورت اورتوگونال باشد. شرط مرزی در $x=0$ از نوع اول می‌باشد $\left(T(0,y)=0\right)$ بنابراین جواب‌های اورتوگونال به‌صورت sin می‌باشد در جهت y شرط مرزی در $y=0$، نیز از نوع اول است پس در جهت y جواب‌ها به‌صورت sinh خواهد بود.

۲ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
با توجه به شرایط اولیه مشخص است که $u(x,y,t)=u_1\times u_2$

۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
در متن درس این تست حل شده است.

۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه دوم صحیح می‌باشد.

۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
هر دو شرط مرزی از یک نوع می‌باشد پس مقادیر ویژه برابر $\frac{n\pi}{L}$ می‌باشد شرط مرزی در $x=0$ از نوع دوم می‌باشد، پس توابع ویژه به‌صورت cos خواهند بود.

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه دوم صحیح می‌باشد.

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
اگر دمای دیواره سمت راست $T=30$، و با تغییر متغیر $\theta=T-30$ شرایط مرزی در جهت x همگن می‌شود و می‌توان مسئله را به روش جداسازی متغیرها حل نمود.

۸ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
شرایط مرزی $u(L,t)=B$ و $u(0,t)=A$ باید در جواب حالت پایا $A+\frac{B-A}{L}x$ صدق کنند.

۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
هر دو شرط مرزی از یک نوع هستند پس مقادیر ویژه به‌صورت $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$ خواهد بود و همچنین شرط مرزی در $x=0$ از نوع اول می‌باشد پس توابع ویژه به‌صورت sin خواهد بود و همچنین توان e به شکل $-K\lambda_n^2 t$ می‌باشد.

۱۰ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\theta \text{ در جهت} \rightarrow \begin{cases} T(0,\theta)=\text{محدود} \quad \text{یا} \quad \dfrac{\delta T(0,\theta)}{\delta r}=0 \\ t(r_0,\theta)-=f(\theta) \end{cases}$$

$$r \text{ در جهت} \rightarrow \begin{cases} T(r,\theta)=T(r,\theta+2\pi) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\delta T(r,\theta)}{\delta\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta T(r,\theta+2\pi)}{\delta\theta} \end{cases}$$

در جهت θ شرایط به‌صورت ناهمگن می‌باشند $\left(T(r_0,\theta)=f(\theta)\right)$ پس جواب معادله در این جهت باید به‌صورت اورتوگونال باشد و در جهت r جواب‌ها باید به‌صورت غیراورتوگونال باشد پس جواب به‌صورت گزینه‌های یک و یا سه خواهد بود و همچنین با توجه به شرط مرزی «$T(0,\theta)=$ محدود»، گزینه سوم صحیح است.

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

فصل دهم

ریشه یابی

۱۰ـ ۱ مقدمه

در این فصل به بررسی روش‌های عددی یافتن ریشه‌های معادلات غیر خطی می‌پردازیم روش‌های عددی یـافتن ریشـه بـه طـور کلـی مبتنی بر حدس اولیه می‌باشد بدین صورت که در ابتدا فرض می‌کنیم $x_1 = a$ ریشه معادله $f_{(x)}$ می‌باشد سـپس بـا امتحـان کـردن $x_1 = a$ در معادله، حدس اولیه خود را تعدیل می‌کنیم با ادامه این روند دنباله زیر حاصل می‌شود.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$

این دنباله ممکن است در نهایت منجر به یافتن ریشه معادله گردد به شرطی که تفاضل بین عناصر متوالی این دنباله کاهش یابد

$|x_{n-1} - x_{n-2}| > |x_n - x_{n-1}|$

برای مقایسه سرعت همگرایی روش‌های مختلف از مفهوم مرتبه همگرایی استفاده می‌کنیم هر چه مرتبه همگرایی یک روش بزرگتر باشد بدین معنی است که روش مزبور، سریعتر به سمت جواب نهایی همگرا می‌شود.

در این فصل به بررسی روش‌های ۱ـ تکرار ساده ۲ـ نصف کردن ۳ـ نابجایی ۴ـ نیوتون رافسون ۵ـ وتری می‌پردازیم.

۱۰ـ ۲ روش تکرار ساده simple fixed point iteration

تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ در نظر بگیرید اگر شرایط زیر در بازه $[a,b]$ برقرار باشد، حتما تابع در این بازه دارای حداقل یک ریشه می‌باشد.

شرط ۱: تابع $f_{(x)}$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

شرط دوم: $f_{(a)}f_{(b)} < 0$

شرط سوم: $f'_{(x)}$ در بازه $[a,b]$، صفر نشود.

در روش تکرار ساده برای حل معادله $f_{(x)} = 0$، معادله را به شکل $g_{(x)} = x$ در می‌آوریم و با استفاده از تکرار ریشه معادله را به دست می‌آوریم.

رابطه بازگشتی $x_{n+1} = g_{(x_n)}$

تمام روابط بازگشتی منجر به یافتن جواب نمی شوند و همان طور که گفته شد لازم است که:

$$|x_{n-1} - x_{n-2}| > |x_n - x_{n-1}|$$

مثال : معادله $x^2 - 3x + 1 - 0$ را با استفاده از روش تکرار ساده حل کنید؟

$f_{(x)} = x_2 - 3x + 1 \Rightarrow f_{(x)} = 0 \Rightarrow x_1 = 2.618, x_2 = 0.382$

$g_{(x)} = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = x^2 + 1 \Rightarrow x = \dfrac{x^2+1}{3} \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{3}$

$x_0 = 1$ به عنوان حدس اولیه استفاده می‌کنیم و با استفاده از معادله بالا x_1 را به دست می‌آوریم و ادامه می‌دهیم.

$x_0 = 1 \rightarrow x_1 = 0.666$

$x_1 = 0.666 \rightarrow x_2 = 0.481$

$x_2 = 0.481 \rightarrow x_3 = 0.411$

$x_3 \Leftrightarrow 0.411 \rightarrow x_4 = 0.390$

اگر این روال را ادامه بدهیم به ریشه کوچکتر معادله یعنی 0.382 می‌رسیم.

روش تکرار ساده همیشه به جواب نمی رسد و به مقدار حدس اولیه بسیار حساس می‌باشد به عنوان مثال اگر از $x_0 = 3$ به عنوان حدس اولیه استفاده می‌کردیم، داشتیم:

$x_0 = 3 \rightarrow x_1 = 3.33$

$x_1 = 3.33 \rightarrow x_2 = 3.67$

$x_2 = 3.67 \rightarrow x_3 = 4.798$

همان طور که می‌بینید این سری جواب‌ها، واگرا می‌باشند و به سمت عدد خاصی میل نمی کنند.

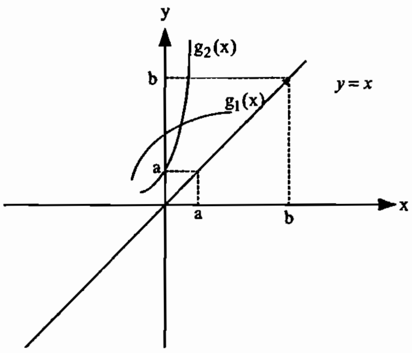
برای این که با استفاده از رابطه بازگشتی به جواب برسیم لازم است در انتخاب رابطه $x = g(x)$ بازگشتی نکات زیر را که شرط همگرایی رابطه بازگشتی در نظر بگیریم.

فرض کنید معادله در بازه $[a,b]$ دارای جواب می‌باشد و می‌خواهیم از رابطه به عنوان رابطه بازگشتی استفاده کنیم در این صورت لازم است دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $\forall x E[a,b] \Rightarrow g_{(x)} \in [a,b]$

۲) $\forall x E[a,b] \Rightarrow |g'_{(x)}| < 1$

برای درک بهتر این دو شرط به شکل زیر دقت کنید.



$g_1(x)$ در فاصله $a<x<b$ همواره بین مقادیر $a<g_1(x)<b$ تغییر می‌کند شیب خط $y=x$ مساوی یک است و همان طور که می‌بینید شیب خط $y=g_1(x)$ در بازه $[a,b]$، کمتر از یک است پس دو خط $(y=x)$، $(y=y_1(x))$ که در این بازه حتما همدیگر را قطع می‌کنند.

مثال : یک رابطه برگشتی مناسب برای حل معادله $x^3+x-1=0$ از روش تکرار ساده در بازه $[0,1]$ به دست آورید.

حل : ابتدا چک می‌کنیم که این معادله در این بازه ریشه دارد یا نه:

$f_{(x)}=x^3+x-1 \qquad [0,1]$

1: $f_{(x)}$ پیوسته است

$2: f_{(0)}=-1$ و $f_{(1)}=1 \Rightarrow f(0)f(1)<1$

$x^3+x-1=0 \Rightarrow x=1-x^3 \rightarrow$ رابطه بازگشتی $\rightarrow g(x)=1-x^3$

حال دو شرط را امتحان می‌کنیم.

۱) شرط اول برقرار است به ازای هر $0<x<1$، $g(x)$ نیز بین صفر و یک قرار دارد.

۲) شرط دوم برقرار نیست $g'_{(x)}=3x^2 \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow |g'_{(x)}| \not< 1$

پس رابطه بازگشتی همواره به جواب نمی رسد.

$x^3+x-1=0 \Rightarrow x^3=1-x \Rightarrow x=(1-x)^{\frac{1}{3}} \rightarrow$ رابطه برگشتی $\Rightarrow g_{(x)}=(1-x)^{\frac{1}{3}}$

۱: شرط اول برقرار است به ازای هر x در بازه $0<x<1$، $g(x)$ نیز $0<g_{(x)}<1$ می‌باشد.

۲:شرط دوم نیز برقرار است. $g'_{(x)}=-\dfrac{1}{3(1-x)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow |g'_{(x)}|<1$

پس رابطه $x_{n+1}=(1-x_n)^{\frac{1}{3}}$ رابطه بازگشتی مناسبی می‌باشد.

نکته : روش تکرار ساده دارای شرط همگرایی می‌باشد و روش کندی است مرتبه همگرایی این روش مرتبه اول است.

۱۰ـ ۳ روش نصف کردن Bisection methood

معادله f(x)=0 در بازه [a,b] را در نظر بگیرید که در این بازه دارای جواب می‌باشد ـ یعنی f(x) در این بازه پیوسته است و $f(a)f(b)<0$ می‌باشد. مراحل روش نصف کردن به قرار زیر است:

۱:بازه [a,b] را نصف می‌کنیم $C=\frac{a+b}{2}$

۲: از دو بازه به وجود آمده [a,c],[c,b]، بازه‌ای را انتخاب می‌کنیم که شرط داشتن ریشه در آن وجود داشته باشد یعنی اگر

الف) اگر $f(a)f(c)<0 \Leftarrow$ در بازه [a,c] ریشه‌ای وجود ندارد.

ب) اگر $f(c)f(b)<0 \Leftarrow$ در بازه [a,c] ریشه‌ای وجود ندارد.

ج) اگر $f(a)f(c)>0 \Leftarrow$ در بازه [a,c] ریشه‌ای وجود ندارد.

د) اگر $f(c)f(b)>0 \Leftarrow$ در بازه [c,b] ریشه‌ای وجود ندارد.

در بازه یا بازه هایی که ریشه وجود داشته باشد این عمل را تکرار می‌کنیم تا به جواب نهایی برسیم.

نکته : روش نصف کردن همواره همگرا می‌باشد ولی مانند روش تکرار ساده روش کندی است و مرتبه همگرایی این روش از مرتبه اول می‌باشد.

نکته : تعداد مراحل مورد نیاز نصف کردن برای پیدا کردن ریشه معادله در بازه [a,b] با میزان خطای ε برابراست با:

$$n=\frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}+1$$ تعداد مراحل نصف کردن

۱۰ـ ۴ روش نابجایی false position method

اصول کلی این روش مشابه روش نصف کردن می‌باشد فقط در این روش برای بهبود سرعت همگرایی از تقریب بهتری برای یافتن نقطه c استفاده می‌کنیم.

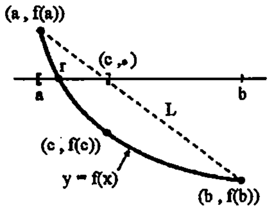
نقطه c را به صورت نقطه تقاطع محور xها با خط واصل بین نقاط $\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$, $\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ مشخص می‌کنیم. به عبارت دیگر می‌توانیم نقطه C را از روی معادله خط گذرانده از سه نقطه $\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$; $\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$, $\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ تعیین کنیم.

معادله خط گذرنده از $\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$, $\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow \frac{y-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

نقطه $\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$ در معادله خط بالا باید صدق کند پس داریم:

$$\frac{0-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow C=a+f(a)\frac{a-b}{f(b)-f(a)}$$

بعد از تعیین نقطه C با توجه به علامت حاصلضرب $f(a)f(c)$ و $f(b)f(c)$ همانند روش نصف کردن، کار را ادامه می‌دهیم در شکل زیر تعبیر هندسی این روش نشان داده شده است.



مثال : معادله x=cos x در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ دارای ریشه می‌باشد مقدار x_1 که از روش نابجایی به دست می‌آید کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi-2}$ ۲) $\frac{\pi}{n+2}$ ۳) $\frac{\pi}{2-\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{\pi+1.}$

۲) گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$y = x - \cos x$$

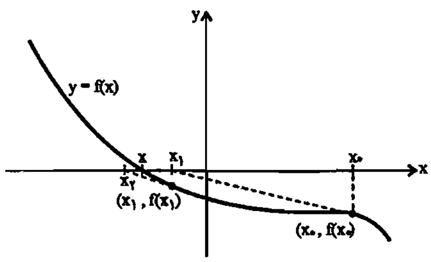
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \to y=-1 \\ x=\frac{\pi}{2} \to y=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \left|\begin{array}{l}0\\-1\end{array}\right. \;,\; \left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\end{array}\right. \;,\; \left|\begin{array}{l}c\\0\end{array}\right.$$

$$\frac{x_1-x_2}{y_{(x1)}-y_{(x2)}}=\frac{x_3-x_2}{y_{(x_3)}-y_{(x_2)}} \Rightarrow \frac{c-0}{0-(-1)}=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{2}-(-1)} \Rightarrow C=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{\pi}{\pi+2}$$

نکته : روش نابجایی همواره همگرا است و مرتبه همگرایی آن برابر 1.618 می‌باشد که از روش‌های تکرار ساده و نصف کردن «که دارای مرتبه همگرایی یک می‌باشند» سریعتر به جواب می‌رسد. تعداد عملیات ریاضی این روش با توجه به روش پیدا کردن نقطه c از روش نصف کردن بیشتر است.

۱۰ـ ۵ روش نیوتن رافسون Newton - Raphson method یا روش مماسی

در این روش با رسم خط مماس بر معادله از نقطه x_0 ـ که نقطه x_0 به عنوان حدس اولیه می‌باشد ـ به دنبال جواب مـی‌گـردیم در شکل زیر تعبیر هندسی این روش آمده است.



رابطه بازگشتی مورد استفاده در این روش به شکل زیر می‌باشد.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}}$$

روش نیوتن ـ رافسون نیز مانند روش تکرار ساده « $x_{x+1} = g_{(x_n)}$ » دارای شرط همگرایی می‌باشد.

$x_{n+1} = g_{(x_n)} \Rightarrow$ شرط همگرایی $|g'_{(g)}| < 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \Rightarrow g_{(x_n)} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \Rightarrow$$

$$g'_{(x_n)} = 1 - \frac{f'^2(x) - f_{(x)}f''_{(x)}}{f'^2{}_{(x)}} = \frac{f_{(x)}f''_{(x)}}{f'^2{}_{(x)}}$$

$\Rightarrow$ شرط همگرایی روش نیوتون رافسون $= |g'_{(x)}| < 1 \Rightarrow \left|\frac{f_{(x)}f''_{(x)}}{f^2_{(x)}}\right| < 1$

مثال : رابطه الگوریتم تکرار روش نیوتن برای مقایسه تقریبی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ عبارت است از:

۱) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{1}{2x_n})$

۲) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{2x_n})$

۳) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$

۴) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{2}{xn})$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{(x)} = x^2 - \frac{1}{2}, f'_{(x)} = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \frac{1}{2}}{2x_n} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{2x_n})$$

نکته : در معادلاتی که رابطه x در معادله $f(x)$ از درجه اول باشد برای استفاده از روش نیوتن رافسون لازم است x توانی غیر از یک داشته باشد به عنوان مثال برای پیدا کردن ریشه دوم A داریم:

$$x = \sqrt{A} \Rightarrow f_{(x)} = x - \sqrt{A} \Rightarrow f'_{(x)} = 1$$

$$\Rightarrow x_n + 1 = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \Rightarrow x_n + 1 = x_n - \frac{x_n - \sqrt{A}}{1} \Rightarrow x_n + 1 = \sqrt{A}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید رابطه بازگشتی به دست آمده، رابطه مناسبی نیست پس داریم:

$$x = \sqrt{A} \Rightarrow x^2 = A \Rightarrow f_{(x)} = x^2 - A \Rightarrow f'_{(x)} = 2x$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_x^2 - A}{2x_n}$$

نکته : برای به دست آوردن ریشه‌های تکراری از مرتبه m یک معادله، از رابطه بازگشتی زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{mf_{(x_n)}}{f'_{(x_n)}}$$

نکته : روش نیوتن رافسون به مقدار حدس اولیه حساس می‌باشد به همین جهت حدس اولیه را توسط روش‌های نصف کردن و یا نابجایی ـ که همواره همگرا هستند ـ تعیین می‌کنیم و سپس بقیه مراحل را با روش نیوتن رافسون ادامه می‌دهیم.

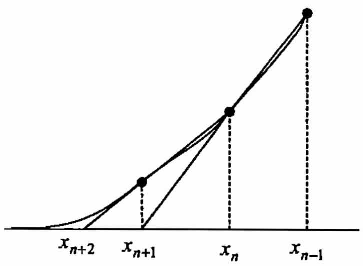
نکته : برای پیدا کردن ریشه‌های ساده، روش نیوتن رافسون دارای مرتبه همگرایی 2 می‌باشد در مورد ریشه‌های تکراری مرتبه همگرایی این روش کاهش می‌یابد.

۱۰ـ ۶ روش تری secant method

زمانی که شکل تابع پیچیده باشد به طوری که مشتق گیری از آن مشکل باشد به جای روش نیوتن رافسون از روش وتری استفاده می‌کنیم که در این صورت رابطه بازگشتی به صورت زیر می‌باشد:

$$x_{n+1} = x_n - f_{(x_n)} \frac{x_n - x_{n-1}}{f_{(x_n)} - f_{(x_{n-1})}}$$

تجسم هندسی این روش در شکل زیر آمده است:



نکته : روش وتری همواره همگراست و مرتبه همگرایی این روش برابر 1.618 می‌باشد در نتیجه سرعت همگرایی روش وتری از روش نیوتون رافسون کمتر است.

روش	مرتبه همگرایی برای ریشه ساده	شرط همگرایی
تکرار ساده	1	دارد
نصف کردن	1	ندارد
نابجایی	1.618	ندارد
نیوتن رافسون	2	دارد
وتری	1.618	ندارد

مجموعه تست‌های فصل دهم

۱ـ شرط همگرایی روش نیوتن ـ رافسون برای حل معادله غیرخطی $f(x)=0$ چیست؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) $|f''(x)|<1$ ۲) $|f'(x)|<1$ ۳) $f''(x)f(x)<[f'(x)]^2$ ۴) $f''(x)f(x)>[f'(x)]^2$

۲ـ شرط همگرایی در روش نیوتن ـ رافسون برای حل معادلات غیرخطی چیست؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

۱) $\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}>1$ ۲) $\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]}<1$ ۳) $\frac{f(x)f''(x)-1}{[f'(x)]^2}<1$ ۴) $\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]}>1$

۳ـ با روش نیوتن ـ رافسون ریشه معادله زیر از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

$f(x)=x^3-4x+2=0$

۱) $x_{n+1}=3x_n^2-4$ ۲) $x_{n+1}=x_n^3-4x_n+2$ ۳) $x_{n+1}=\frac{2x_n^3-2}{3x_n^2-4}$ ۴) $x_{n+1}=\frac{x_n^3-4x_n+2}{3x_n^2-4}$

۴ـ در روش نیوتن ـ رافسون برای حل $f(x)=x^3-2x-4=0$ چنان‌چه مقدار x در مرحلـه تکـرار r، $x^{(r)}=1$ باشـد، $x^{(r+1)}$ چقدر است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) 2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 8

۵ـ برای حل معادله $f(x)=x^2-2+\cos x$ به روش نیوتن ـ رافسون چنان‌چه $x_0=\pi$ باشد آنگاه:

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

۱) $x_1=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2\pi}$ ۲) $x_1=\pi-\frac{3}{2\pi}$ ۳) $x_1=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2\pi}$ ۴) $x_1=\pi+\frac{3}{2\pi}$

۶ـ با استفاده از روش نیوتن ـ رافسون برای حل معادله $\sin x-x^2+2-e^{-x}=0$ و فرض $x_0=0$ مقدار x_1 چقدر است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) 1

۷ـ همگرایی کدام‌یک از روش‌های عددی حل معادلات غیرخطی زیر به انتخاب حدس اولیه مناسب و نزدیک به ریشه حسـاس‌تـر است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

۱) روش QD ۲) روش نصف کردن محدوده ۳) روش نیوتن ـ رافسون ۴) روش Regula-falsi

۸ـ شرط همگرایی و به کارگیری روش تقارب متوالی (successive Approxi mation) برای حل معـادلات غیرخطـی بـه‌صـورت $x=Q_{(x)}$ عبارت است از: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

۱) $Q'_{(x)}<0$ ۲) $Q'_{(x)}>0$ ۳) $|Q'_{(x)}|>0$ ۴) $|Q'_{(x)}|<1$

۹ـ کدام‌یک از روش‌های زیر همواره به پاسخ همگرا خواهد شد؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

۱) روش نصف کردن فاصله Half interual

۲) روش جایگزینی مستقیم Direct substitution یا Fixed-point interaction

۳) روش نیوتن ـ رافسون Newton-Raphson

۴) هیچ‌یک از روش‌های فوق همگرایی تضمین شده‌ای ندارند.

۱۰ـ در حل معادله $x^4-3x^2+x+1=0$ به روش نیوتن ـ رافسون و حدس اولیه $x_0=2$ مقدار x_1 کدام است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل نهم

۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه دوم صحیح می‌باشد.

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

رابطه بازگشتی نیوتن $\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 4x_n + 2}{3x_n^2 - 4}$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{3x_n^3 - 4x_n - x_n^3 + 4x_n - 2}{3x_n^2 - 4} = \frac{2x_n^3 - 2}{3x_n^2 - 4}$$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

رابطه برگشتی نیوتن $\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2x_n - 4}{3x_n^3 - 2}$

$$\Rightarrow \quad x_r = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{r+1} = 1 - \frac{1-2-4}{3-2} = 6$$

۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

رابطه برگشتی نیوتن $\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2 + \cos x_n}{2x_n - \sin x_n}$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pi - \frac{\pi^2 - 2 - 1}{2\pi - 0} = \frac{2\pi^2 - \pi^2 + 3}{2\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2\pi}$$

۶ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

رابطه برگشتی نیوتن $\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sin x - x^2 + 2 - e^{-x}}{\cos x - 2x + e^{-x}}$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 - \frac{0+2-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

۷ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

۸ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه یک صحیح می‌باشد.

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

رابطه برگشتی نیوتن $\Rightarrow \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^4-3x_n^2+x_n+1}{4x_n^3-6x_n+1}$

$$\Rightarrow \quad x_0=2 \quad \Rightarrow \quad x_1=2-\frac{2^4-3\times 2^2+2+1}{4\times 2^3-6\times 2+1}=\frac{5}{3}$$

فصل یازدهم

درون یابی

۱۱ـ ۱ مقدمه

فرض کنید مقدار تابع $f(x)$ در نقاط $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مشخص باشد برای محاسبه مقدار تقریبی $f(x)$ در نقاطی به غیر از نقاط مشخص شده $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ که این نقاط بین x_1 و x_n قرار دارند از چندجمله‌ای درون یاب استفاده می‌کنیم اگر نقاط $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ متساوی الفاصله باشند. یعنی $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = |x_3 - x_4| = ... = |x_{n-1} - x_n|$ از روش تفاضلات پیشرو و پسرو نیوتن استفاده می‌کنیم و اگر این نقاط متساوی الفاصله نباشند از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

۱۱ـ ۲ روش تفاضلات پیشرو نیوتن

همان طور که گفته شد زمانی که نقاط درون یاب متساوی الفاصله باشد از این روش استفاده می‌کنیم تفاضلات پیشرو نیوتن در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ اولین تفاضل پیشرو

$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} - f_i$ دومین تفاضل پیشرو

$\vdots$

$\Delta^n f_i : \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$ امین تفاضل پیشرو n

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^n f_i$
x_0	f_0	$\Delta f_0 = f_1 - f_0$	$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$	
x_1	f_1	$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_1 = f_3 - 2f_2 + f_1$	
x_2	f_2	$\Delta f_2 = f_3 - f_2$	.	
x_3	f_3	$\Delta f_3 = f_4 - f_3$	.	
$\vdots$ x_n	$\vdots$ f_n		.	

چند جمله‌ای درون یاب در حالت تفاضل پیشرو به صورت زیر می‌باشد.

$$p_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{r}{s} \Delta^s f_0 = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)\Delta^n f_0}{n!}$$

که داریم:

$$x = x_0 + rh$$

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$$

همانطور که مشخص است از داده‌های اول هر ستون در تشکیل چند جمله‌ای درون یاب استفاده شده است.

نکته : اگر نقطه x نزدیک به نقاط درون یاب ابتدای جدول باشد استفاده از روش تفاضلات پیشرو مناسب تر است.

مثال : با توجه به مقادیر جدول زیر مطلوب است محاسبه $f(0.73)$ با استفاده از روش تفاضل‌های نیوتن پیشرو از درجه سه: (مهندسی شیمی ۸۴)

Xi	Fi
0.4	0.423
0.6	0.684
0.8	1.030
1	1.557

۱) 0.446 ۲) 0.893 ۳) 1.786 ۴) 2.679

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.4	0.423	0.261	0.085	0.096
0.6	0.684	0.346	0.181	
0.8	1.030	0.527		
1	1.557			

$$x = x_0 + rh \Rightarrow r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.73 - 0.4}{0.2} = 1.65$$

$$P_3(0.73) = 0.423 + 1.65 \times 0.261 + \frac{1.65 \times 0.65}{2} \times 0.085 + \frac{1.54 \times 0.65 \times (-0.35)}{6} \times 0.096 = 0.893$$

۱۱ـ ۳ روش تفاضلات پسرو نیوتن

تفاضلات پسرو در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

اولین تفاضل پسرو $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

دومین تفاضل پسرو $\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$

$\vdots$

n امین تفاضل پسرو $\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^n f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$\nabla f_1 = f_1 - f_0$		
x_2	f_2	$\nabla f_2 = f_2 - f_1$	$\nabla^2 f_2 = f_2 - 2f_1 + f_0$	
x_n	f_n	$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$	$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-3}$	$\nabla^n f_n$

چند جمله‌ای درون یاب در حالت تفاضل پسرو به صورت زیر می‌باشد:

$$p_n(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{-r}{s} \nabla^s f_n = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

نکته : اگر نقطه x نزدیک به نقاط درون یاب انتهای جدول باشد از روش تفاضلات پسرو نیوتن مناسب تر است.

۱۱ـ ۴ روش لاگرانژ Legendre method

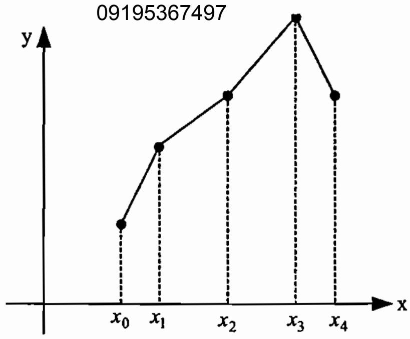
هرگاه نقاط درون یاب متساوی الفاصله نباشند می‌توانیم از روش لاگرانژ استفاده کنیم که در این روش چند جمله‌ای درون یاب به صورت زیر می‌باشد.

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x)$$

که داریم

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_n)} \qquad i \neq j$$

در روش لاگرانژ با استفاده از n نقطه یک چند جمله‌ای درجه $n-1$ تشکیل می‌دهیم که از تمام این نقاط عبور می‌کند.



مثال : با استفاده از میان یابی مرتبه دوم لاگرانژ مقدار تابع در x=0.5 را تخمین بزنید.(مهندسی شیمی ۸۳)

x	f(x)
-8	54.586
-5	18.586
-0.5	-1.664
0	-0.414
1	0.586
2. 5	7.336

۱) $f(0.5)=-0.414$ ۲) $f(0.5)=0.665$

۳) $f(0.5)=-1$ ۴) $f(0.5)=0.00$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن سئوال باید از میان یابی مرتبه دوم لاگرانژ استفاده کنیم به همین جهت از سه نقطه $x=-0.5$ و x=0 و x=1 برای تشکیل چند جمله‌ای درجه دوم لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$P_2(0.5)=L_0(0.5)f(-0.5)+L_1(0.5)f_{(0)}+L_2(0.5)f_{(1)}$$

$$L_0(0.5)=\frac{(0.5-0)(0.5-1)}{(-0.5-0)(-0.5-1)}=-0.333$$

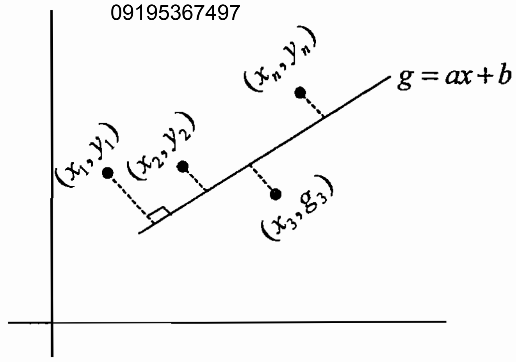
$$L_1(0.5)=\frac{(0.5+0.5)(0.5-1)}{(0+0.5)(0-1)}=1$$

$$L_2(0.5)=\frac{(0.5+0.5)(0.5-0)}{(1+0.5)(1-0)}=0.333$$

$$P_2(0.5)=-0.333\times(-1.664)+1\times(-1.414)+0.333\times(0.584)=-0.665$$

۱۱ـ ۵ برازش منحنی توسط روش کمترین مربعات

فرض کنید مجموعه نقاط $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ را داشته باشیم می‌خواهیم تابعی مثل f(x) را به دست آوریم به طوری که این متغیرها را به هم مرتبط کنید و نیز مجموع مربعات خطا نیز حداقل شود فرض کنید f(x) را به صورت خطی با معادله ax+b در نظر می‌گیریم.



برای مینیمم شدن مجموع مربعات باید عبارت زیر مینیمم شود.

$$E=\sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B-y_i)^2$$

هدف با به دست آوردن بهترین B, A می‌باشد پس از معادله بالا نسبت به B , A مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\delta E}{\delta A}=0\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}x_i(Ax_i+B-y_i)=0\Rightarrow A\sum_{i=1}^{n}x_i^2+B\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\frac{\delta E}{\delta B}=0\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B-y_i)=0\Rightarrow A\sum_{i=1}^{n}xi+nB=\Sigma y_i$$

از حل این دو معادله دو مجهولی مقادیر B , A مشخص میشوند.

مثال) معادله بهترین خط درون یاب این نقاط را بیابید.

X	-1	0	2	3	4
y	-3	-1	3	5	7

حل :

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
-1	-3	1	3
0	-1	0	0
2	3	4	6
3	5	9	15
4	7	16	28
$\Sigma x_i=8$	$\Sigma y_i=11$	$\Sigma x_i^2=30$	$\Sigma x_iy_i=52$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\sum_{i=1}^{n}x_i^2+B\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum x_iy_i\Rightarrow\\ \Rightarrow A\sum_{i=1}^{n}x_i+nB=\sum y_i\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}30A+8B=52\\ 8A+5B=11\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\ ,\\ B=-1\end{matrix}$$

$$\Rightarrow y = Ax + B \Rightarrow y = 2x - 1$$

اگر بخواهیم منحنی برازنده با معادله $y = ax^2 + bx + c$ باشد برای پیدا کردن ضرایب a, b, c داریم:

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i + nc = \sum y_i$$
$$a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + C\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i$$

نکته : اگر بخواهیم نقاط را با معادله $y = mx^A$ برازش کنیم برای به دست آوردن m از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$y = mx^A \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} (mx_i^A - y_i)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\delta E}{\delta m} = 0 \Rightarrow 2\sum x_i^A (mx_i^A - y_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} mx_i^{2A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^A y_i$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^A y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2A}}$$

نکته : اگر بخواهیم نقاط را با معادله $y = \frac{1}{Ax + B}$ برازش کنیم برای یافتن مقادیر A و B داریم.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{Ax+B} \Rightarrow \frac{1}{y} = Ax + B \\ \text{تغییر متغیر} \qquad Y = \frac{1}{y} \end{array}\right\} \to Y = Ax + B$$

$x_i \quad y_i \quad Y_i = \frac{1}{y_i}$

. . .

. . .

مثال : اگر از نقاط

x_i	0	0.5	1
y_i	1	0.5	0.1

منحنی $y = \frac{1}{Ax + B}$ برازش کنیم در این صورت مقادیر A, B برابر خواهد بود با:

۱) $A = 9 \;,\; B = 0.166$ ۲) $A = 10 \;,\; B = -0.166$ ۳) $A = 8 \;,\; B = 0.84$ ۴) $A = 9 \;,\; B = -0.666$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

x_i	y_i	$Y_i=\frac{1}{y_i}$	x_i^2	x_iY_i
0	1	1	0	0
0.5	0.5	2	0/25	1
1	0.1	10	1	10
$\Sigma x_i=1.5$		$\Sigma y_i=13$	$\Sigma x_i^2=1.25$	$\Sigma x_i y_i=11$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}1.25A+1.5B=11\\ 1.5A+3B=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=9\quad,\quad B=-0.1666$$

نکته : اگر بخواهیم نقاط را با معادله $y=\frac{1}{(Ax+B)^2}$ برازش کنیم برای یافتن مقادیر B, A داریم.

$$\left.\begin{matrix}y=\frac{1}{(Ax+B)^2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{y}}=Ax+B\\ \text{تغییر متغیر}\quad Y=\frac{1}{\sqrt{y}}\end{matrix}\right\}\rightarrow Y=Ax+B$$

نکته : اگر بخواهیم نقاط را با معادله $y=\frac{D}{x+c}$ برازش کنیم برای یافتن مقادیر D ,C داریم:

$$\left.\begin{matrix}y=\frac{D}{x+c}\Rightarrow yx+cy=D\Rightarrow y=-\frac{xy}{C}+\frac{D}{C}\\ \text{تغییر متغیر}\quad X=xy,A=-\frac{1}{C},B=\frac{D}{C}\end{matrix}\right\}\rightarrow y=AX+B$$

نکته : اگر بخواهیم نقاط رابا معادله $y=Ce^{Dx}$ برازش کنیم برای یافتن D , C داریم:

$$\left.\begin{matrix}y=Ce^{Dm}\overset{Ln}{\Rightarrow}Lny=LnC+Dx\\ \text{تغییر متغیر}\quad Y=Lny\quad B=LnC\quad A=D\end{matrix}\right\}\rightarrow y=Ax+B$$

مجموعه تست‌های فصل یازدهم

۱ ـ با توجه به مقادیر جدول زیر مطلوب است محاسبه $f(0.73)$ با استفاده از روش تفاضل‌های نیوتن پیشرو از درجه سوم:

(مهندس شیمی ۸۴)

x_i	f_i
0.4	0.423
0.6	0.684
0.8	1.030
1.0	1.557

۱) 0.446 ۲) 0.893 ۳) 1.786 ۴) 2.679

۲ ـ اطلاعات زیر برای انتقال حرارت از یک جسم نامشخص به‌دست آمده است. این اطلاعات را به فرم $Nu = aRe^m Pr^n$ برازش کنید.

(مهندسی شیمی ۸۴)

Re	Pr	Nu
1000	1	20
1000	10	12.6

۱) $u = 19.95 \ , \ m = 0 \ , \ n = 0.2$ ۲) $a = 0.023 \ , \ m = 0.735 \ , \ n = 0.53$

۳) $a = 0.2 \ , \ m = 0.5 \ , \ m = 0.3$ ۴) $a = 58.40 \ , \ m = -0.117 \ , \ n = -0.106$

۳ ـ با استفاده از میان‌یابی مرتبه دوم لاگرانژ مقدار تابع در $x = 0.5$ را تخمین بزنید. (مهندسی شیمی ۸۳)

x	f_i
-8	54.586
-5	18.586
-0.5	-1.664
0	-1.414
1	0.586
2.5	7.336

۱) $f(0.5) = -0.414$ ۲) $f(0.5) = -0.665$ ۳) $f(0.5) = -1.000$ ۴) $f(0.5) = 0.000$

۴ ـ با توجه به مقادیر داده شده در جدول، کدام گزینه می‌تواند اطلاعات مربوط در جدول را پیش‌بینی نماید؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

x	3	4	5	6
y	6	24	60	120

۱) $y = 2x^3 + 4x + 1$ ۲) $y = 2x^2 - 3x + 2$ ۳) $y = 3x^3 + 3x + 5$ ۴) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

۵ ـ خط $y = mx$ را به اطلاعات زیر برازش کنید. (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

$(1,2) \ , \ (2,2.5) \ , \ (-1,-1)$

۱) $m = 0.5$ ۲) $m = 0.917$ ۳) $m = 1.5$ ۴) $m = 1.667$

۶ ـ با استفاده از رابطه اینترپولاسیون «درون‌یابی» درجه دوم از سه نقطه زیر عرض نقطه‌ای به‌طول 1.5 را به‌دست آورید؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

x	1	2	3
y	1	3	2

۱) 1.375 ۲) 2.175 ۳) 1.575 ۴) 2.375

۷ ـ با استفاده از داده‌های زیر تقریب $f(2)$ با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ درجه 2 برابر است با: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

x	$x_0=1$	$x_1=4$	$x_2=6$
f	0	1.38	1.79

۱) 0.562 ۲) 0.633 ۳) 0.725 ۴) 0.856

۸ ـ داده‌های $i=1,2,...,N$ و (x_i, y_i) موجود است. خط $y=mx$ به این داده‌ها برازش می‌شود. m توسط کدام گزینه به‌دست می‌آید؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

۱) $m=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\dfrac{y_i}{x_i}}{N}$

۲) $m=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i}$

۳) $m=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_ix_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$

۴) $m=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_ix_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\left[\sum_{i=1}^{N}x_i\right]^2}$

۹ ـ یک چندجمله‌ای درجه دوم درون‌یاب برای داده زیر برابر کدام است؟ (مهندسی هیدروکربوری ۷۷)

x	y
-1	-1
0	0
+1	-1

۱) $-x^2$ ۲) $-x^2+1$ ۳) x^2-1 ۴) x^2

۱۰ ـ تعداد چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از n که n+1 نقطه مجزا را درون‌یابی می‌کند .... (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۷۷)

۱) بیش از یک است. ۲) صفر است. ۳) نامتناهی است. ۴) یک است.

پاسخنامه مجموعه‌های تست‌های فصل یازدهم

۱ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.4	0.423			
		0.261		
0.6	0.684		0.085	
		0.346		0.0096
0.8	1.030		0.81	
		0.527		
1	1.557			

$$\left.\begin{aligned}&P_3(x)=\sum_{s=0}^{3}\binom{r}{s}\Delta^2 f_0\\&x=x_0+rh\Rightarrow r=\frac{0.73-0.4}{0.2}=1.65\end{aligned}\right\}\to P_3(0.73)=0.423+1.65+\frac{1.65\times0.65}{2}\times0.085+\frac{1.65\times0.65\times(-0.35)}{6}\times0.096$$

$$=0.893$$

۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با امتحان کردن گزینه‌ها، گزینه اول صحیح می‌باشد.

دو معادله داریم و سه مجهول پس لازم است از طریق امتحان کردن گزینه‌ها به جواب برسیم.

۳ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

این تست در متن درس به‌طور کامل حل شده است.

۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

به ازای $x=3$، تنها در گزینه چهارم $y=6$ حاصل می‌شود.

۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$m=\frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}=\frac{1\times2+2\times3.5+(-1)\times(-1)}{1^2+2^2+(-1)^2}=1.667$$

۶ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P_2(1.5)=L_0(1.5)f(1)+L_1(1.5)f(2)+L_2(1.5)f(3)$$

$$\Rightarrow\quad P_2(1.5)=\frac{(1.5-2)(1.5-3)}{(1-2)(1-3)}\times1+\frac{(1.5-1)(1.5-2)}{(1-2)(2-3)}\times3+\frac{(1.5-1)(1.5+2)}{(3-1)(3-2)}\times2=2.375$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P_2(2)=L_0(2)f(0)+L_1(2)f(4)+L_2(2)f(6) \Rightarrow$$

$$P_2(2)=L_0(2)\times 0+\frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)}\times 1.38+\frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)}\times 1.79=0.562$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

این سه نقطه فقط در این گزینه صدق می‌کنند.

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برای درون‌یابی $n+1$ نقطه توسط یک چندجمله‌ای درجه n فقط یک رابطه وجود دارد که از همه این نقاط عبور کند اما بی‌نهایت چندجمله‌ای بزرگتر از n می‌تواند وجود داشته باشد که $n+1$ نقطه را درون‌یابی کند.

فصل دوازدهم

مشتق گیری عددی

۱۲ـ ۱ مقدمه

برای مشتق گیری عددی از تفاضلات پیشرو و پسرو و مرکزی استفاده می‌کنیم. در تعریف مشتق از مفاهیم خطای محلی و خطای کلی برای مقایسه دقت مشتق گیری عددی استفاده می‌کنیم که در ادامه در مورد هر یک از روشها توضیح داده می‌شود.

۱۲ـ ۲ محاسبه مشتق عددی با استفاده از تفاضلات پیشرو

بسط تابع $f_{(x_i+h)}$ حول نقطه x_i به صورت زیر می‌باشد.

$$f_{(x_i+h)} = f_{(x_i)} + hf'_{(x_i)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)} + \frac{h^3}{3!}f''_{(x_i)} + \ldots.$$

که $h \to 0$ می‌باشد.

در این صورت اگر از جمله $\frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)}$ و جملات بعدی صرفنظر کنیم داریم:

$$f_{(x_i+h)} = f_{(x_i)} + hf'_{(x_i)} \Rightarrow f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i+h)} - f_{(x_i)}}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

که در این صورت می‌گوییم خطای محلی از مرتبه $O(h^2)$ می‌باشد برای تعریف خطای کلی داریم:

$$f_{(x_i+h)} = f_{(x_i)} + hf'_{(x_i)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)} + \frac{h^3}{3!}f'''_{(x_i)} + \ldots$$

$$\Rightarrow f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i+h)} - f_{(x_i)}}{h} - \frac{h}{2!}f''_{(x_i)} - \frac{h^2}{3!}f''(x_i)$$

حال اگر از جملات $\frac{h}{2!}f''_{(x_i)}$ به بعد صرفنظر کنیم داریم:

$$f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i+h)} - f_{(x_i)}}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

که در این صورت می‌گوییم خطای کلی روش تفاضلات پیشرو از مرتبه $O(h^1)$ می‌باشد برای محاسبه مشتق دوم $f''_{(x)}$ از طریق تفاضلات پیشرو داریم:

$$f_{(x_i+h)} = f_{(x_i)} + hf'_{(x_i)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)} + \frac{h^3}{3!}f'''_{(x_i)} + \dots$$

$$f_{(x_i+2h)} = f_{(x_i)} + 2hf'_{(x_i)} + \frac{4h^2}{2!}f''_{(x_i)} + \frac{8h^3}{3!}f'''_{(x_i)} + \dots$$

$$\Rightarrow f_{(x_i+2h)} - 2f_{(x_i+h)} = -f_{(x_i)} + h^2 f''_{(x_i)} + \underbrace{h^3 f'''_{(x_i)}}_{\to 0} + \dots$$

$$f''_{(x_i)} = \frac{f_{(xi+2h)} - 2f_{(xi+1)} + f_{(xi)}}{h^2} - \underbrace{hf'''_{(xi)}}_{\to 0}$$

در این صورت خطای محلی در محاسبه مشتق دوم با استفاده از تفاضلات پیشرو از مرتبه $O(h^3)$ می‌باشد و خطای کلی در محاسبه مشتق دوم با استفاده از تفاضلات پیشرو از مرتبه $O(h^1)$ می‌باشد.

۱۲ـ۳ محاسبه مشتق عددی با استفاده از تفاضلات پسرو

بسط تابع $f_{(x_i-h)}$ حول نقطه x_i به صورت زیر می‌باشد.

$$f_{(x_i-h)} = f_{(x_i)} - hf'_{(x_i)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)} - \frac{h^3}{3!}f'''_{(x_i)}$$

که $h \to 0$

$$f_{(x_i-h)} = f_{(x_i)} - hf'_{(x_i)} \Rightarrow f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i)} - f_{(x_i-h)}}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$

که در این صورت خطای محلی در محاسبه مشتق اول با استفاده از تفاضلات پسرو ازمرتبه $O(h^2)$ می‌باشد.

$$f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i)} - f_{(x_i-h)}}{h} + \frac{h^1}{2!}f''_{(x_i)} - \frac{h^2}{3!}f'''_{(x_i)}$$

$$\Rightarrow f'_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i)} - f_{(x_i-h)}}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$

که در این صورت خطای کلی در محاسبه مشتق اول با استفاده از تفاضلات پسرو از مرتبه $O(h^1)$ می‌باشد برای محاسبه مشتق دوم $f''_{(x)}$ از طریق تفاضلات پسرو داریم:

$$f_{(x_i-h)} = f_{(x_i)} - hf'_{(x_i)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x_i)} - \frac{h^3}{3!}f'''_{(xi)}$$

$$f_{(x_i-2h)} = f_{(x_i)} - 2hf'_{(x_i)} + \frac{4h^2}{2!}f''_{(x_i)} - \frac{8h^3}{3!}f'''_{(x_i)}$$

$$\Rightarrow f_{(x_i-2h)} - 2f_{(x_i-h)} = -f_{(x_i)} + h^2 f''_{(x_i)} - h^3 f''_{(x_i)}$$

$$\Rightarrow f''_{(x_i)} = \frac{f_{(x_i-2h)} - 2f_{(x_i-h)} + f_{(x_i)}}{h^2} = \frac{\nabla^2 f_i}{h^2}$$

و یا $f''_{(x_i)} = \dfrac{f_{(x_i-2h)} - 2f_{(x_i-h)} + f_{(x_i)}}{h^2} - hf''_{(x_i)}$

خطای محلی در محاسبه مشتق دوم با استفاده از تفاضلات پسرو از مرتبه $O(h^3)$ می‌باشد و خطای کلی در محاسبه مشتق دوم با استفاده از تفاضلات پسرو از مرتبه $O(h^1)$ می‌باشد.

۱۲ـ ۴ محاسبه مشتق عددی با استفاده از تفاضلات مرکزی

$$f(x_i+h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \ldots$$

$$f(x_i-h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \ldots$$

$$\Rightarrow f(x_i+h) - f(x_i-h) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x_i) + \ldots$$

$$\Rightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} = \frac{\delta f_i}{2h}$$

خطای محلی محاسبه مشتق اول با استفاده از تفاضل مرکزی از مرتبه $O(h^3)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!}f'''(x_i) + \ldots$$

خطای کلی محاسبه مشتق اول با استفاده از تفاضل مرکزی از مرتبه $O(h^2)$ می‌باشد.

همان طور که ملاحظه کردید محاسبه مشتق اول بر حسب تفاضل مرکزی دقیق تر از تفاضل پیشرو و پسرو است چون برای محاسبه مشتق نقطه i، از اطلاعات نقطه جلوتر $i+1$ و عقب تر $i-1$ به طور همزمان استفاده می‌کنیم و مرتبه خطایش هم بالاتر است.

برای محاسبه مشتق دوم از طریق تفاضلی مرکزی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

که در این صورت خطای محلی در محاسبه مشتق دوم بر حسب تفاضل مرکزی از مرتبه $O(h^4)$ می‌باشد و خطای کلی در محاسبه مشتق دوم بر حسب تفاضل مرکزی از مرتبه $O(h^2)$ می‌باشد.

	مشتق اول	مشتق دوم
تفاضل پسرو	$f'_{(i)} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h} = \dfrac{\nabla f_i}{h}$	$f''_{(i)} = \dfrac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} = \dfrac{\nabla^2 f_i}{h^2}$
تفاضل مرکزی	$f'_{(i)} = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \dfrac{\delta f_i}{2h}$	$f''_{(i)} = \dfrac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = \dfrac{\delta^2 f_i}{h^2}$
تفاضل پیشرو	$f'_{(i)} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h} = \dfrac{\Delta f_i}{h}$	$f''_{(i)} = \dfrac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} = \dfrac{\Delta^2 f_i}{h^2}$

نکته :

		تفاضل پسرو	تفاضل پیشرو	تفاضل مرکزی
خطای کلی	مشتق اول	Oh^1	Oh^1	Oh^2
	مشتق دوم	Oh^1	Oh^1	Oh^2
خطای محلی	مشتق اول	Oh^2	Oh^2	Oh^3
	مشتق دوم	Oh^3	Oh^3	Oh^4

در سئوالات اگر اشاره به نوع خطا نشود منظور همان خطای کلی می‌باشد.

مثال : خطای مشتق دوم داده شده، با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) $2h$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

رابطه ارائه شده مربوط به تفاضل مرکزی می‌باشد که خطای کلی این روش از مرتبه دو، Oh^2 است.

مثال : خطای مطلق مشتق عددی تابع $f_{(x)} = xe^{-\frac{x}{2}}$ در نقطه $x=0.3$ با استفاده از روش تفاضل‌های مرکزی نسبت به مشتق تحلیلی کدام است؟ $h=0.1$ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 0.98×10^{-3} ۲) 1.02×10^{-3} ۳) 0.98×10^{-3} ۴) 1.02×10^{-3}

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$y = xe^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow y' = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow y'_{(0.3)} = e^{-\frac{0.3}{2}} - \frac{0.3}{2}e^{-\frac{0.3}{2}} = 0.73160$$

$$y'_{(0.3)} = \frac{y_{(0.4)} - y_{(0.2)}}{2h} = \frac{0.4\times e^{-\frac{0.4}{2}} - 0.2e^{-\frac{0.2}{3}}}{2\times0.1} = 0.73262$$

$$\Rightarrow \text{خطای مطلق} = |0.73160 - 0.73262| - 1.02\times10^{-3}$$

۱۲ـ ۵ معرفی عملگرها

در این قسمت به معرفی عملگردها و روابط موجود بین آنها می‌پردازیم.

∇: عملگر تفاضل پسرو

δ: عملگر تفاضل مرکزی

Δ: عملگر تفاضل پیشرو

E: عملگر انتقال

E^{-1}: عملگر معکوس انتقال

$\nabla f_{(x)} = f_{(x)} - f_{(x-h)}$

$\delta f_{(x)} = \frac{1}{2}(f_{(x+h)} - f_{(x-h)})$

$\Delta f_{(x)} = f_{(x+h)} - f_{(x)}$

$Ef_{(x)} = f_{(x+h)} \quad , \quad E^k f_{(x)} = f_{(x+kh)}$

$E^{-1} f_{(x)} = f_{(x-h)} \quad , \quad E^{-k} f_{(x)} = f_{(x-kh)}$

$E\nabla = \Delta$

$\Delta - \nabla = \delta^2$

$E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = \delta$

$\nabla = 1 - E^{-1}$

$\Delta = E - 1$

مجموعه تست‌های فصل دوازدهم

۱ـ خطای مطلق مشتق عددی تابع $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$ در نقطه $x=0.3$ با استفاده از روش تفاضل‌های مرکزی نسبت به مشتق تحلیل کدام است؟ $(h=0.1)$ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 0.98×10^{-2} ۲) 1.02×10^{-3} ۳) 0.98×10^{-3} ۴) 1.02×10^{-3}

۲ـ مشتق $f(x)$ را توسط روش تفاضل مرکزی (Centeral Diff) در نقطه $x=0.5$ و با $h=0.25$ به‌دست آورید؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	1.2	1.1035	0.925	0.6363	0.2

۱) -1.16 ۲) -0.912 ۳) -0.859 ۴) -0.934

۳ـ در جدول اختلافات محدود زیر $\Delta^2 y_2$ کدام است؟ (اعداد فرضی هستند) (مهندسی شیمی ۸۲)

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0				
		1			
x_1	y_1		5		
		2		8	
x_2	y_2		6		10
		3		9	
x_3	y_3		7		
		4			
x_4	y_4				

۱) 3 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 7

۴ـ کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۴)

۱) $E\nabla=\Delta$ ۲) $E\nabla=1+\Delta$ ۳) $E\nabla=1-\nabla$ ۴) $E\nabla=1+\Delta$

۵ـ با استفاده از جدول زیر تفاضل دوم پسرو تابع y را در نقطه $x=20$ تعیین کنید. (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۲)

x	0	20	40	60	80
y	0	106	1600	3000	5810

۱) 106 ۲) 1334 ۳) 1494 ۴) وجود ندارد.

۶ـ کدام رابطه عددی زیر مشتق دوم y را $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ در نقطه i براساس تفاضل‌های مستقیم (forward Diffetence) نشان می‌دهد؟ $(\Delta x=h)$ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۱)

۱) $\frac{(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)}{h^2}$ ۲) $\frac{(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})}{h^2}$ ۳) $\frac{(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)}{h^2}$ ۴) $\frac{(y_{i-1}-2y_{i-1}+y_i)}{h^2}$

۷ـ کدام عبارت از فرمول $f'_i = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right] f_i$ حاصل می‌شود؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۱)

۱) $f'_i = \frac{1}{2h}\left(-f_{i-1} + f_{i+1}\right)$

۲) $f'_i = \frac{1}{2h}\left(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right)$

۳) $f'_i = \frac{1}{6h}\left(-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}\right)$

۴) $f'_i = \frac{1}{6h}\left(-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}\right)$

۸ـ خطای مشتق دوم داده شده، با کدام گزینه برابر است؟

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) $2h$

۹ـ مقادیر عددی تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده است و مقدار تقریبی مشتق دوم تابع را با استفاده از فرمول $f''_{(x_i)} = \frac{\delta^2 f_i}{h^2}$ که در آن $\delta^2 f_i = f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}$ (تفاضل مرکزی) می‌باشد محاسبه می‌کنیم، مقدار تقریبی $f''_{(2.1)}$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۰)

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4
f(x)	1.414214	1.449138	1.483290	1.516575	1.549193

۱) $f''_{(2.1)} = 0.772$ ۲) $f''_{(2.1)} = 0.0772$ ۳) $f''_{(2.1)} = -0.772$ ۴) $f''_{(2.1)} = -0.0772$

پاسخ مجموعه تست‌های فصل دوازدهم

۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

این تست در متن درس، به‌طور کامل حل شده است.

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$f'_{(x_i)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{0.6363 - 1.1025}{2 \times 0.25} = -0.9344$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه یک صحیح می‌باشد.

۵ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\nabla^2 f_n = f_n 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

f_{n-2} در جدول موجود نیست.

۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} .2f_i + f_{i+1}$$

$$\Delta^3 f_i = \left(f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}\right) - \left(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\right) = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

$$\Rightarrow \quad f'_i = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) = \frac{1}{h}\left[\left(f_{i+1} - f_i\right) - \frac{1}{2}\left(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\right) + \frac{1}{3}\left(f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6h}\left(-11f_i+18f_{i+1}-9f_{i+2}+2f_{i+2}\right)$$

۸ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه دوم صحیح می‌باشد.

۹ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\delta^2 f=f_{i-1}-2f_i+f_{i+1} \Rightarrow \delta^2 t_{(2.1)}=-7.72\times10^{-4}=1.414214-2(1.449138)+1.483290$$

$$\Rightarrow f''_{(2.1)}=\frac{\delta^2 f}{h^2}=-0.0772$$

فصل سیزدهم

انتگرال گیری

۱۳ـ ۱ مقدمه

در این فصل، روش‌های انتگرال گیری عددی توضیح داده می‌شود که در مورد توابع پیچیده که تعیین تحلیلی انتگرال آنها مشکل می‌باشد از این روشها استفاده می‌شود. روش‌های انتگرال گیری عددی به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

۱. روش مستطیلی

۲. روش ذوزنقه

۳.روش سیمپسون

۴.روش سیمپسون $\frac{3}{8}$

که در ادامه به توضیح هر یک از این روشها می‌پردازیم.

۱۳ـ ۲ روش مستطیل

این روش ساده ترین روش انتگرال گیری عددی می‌باشد که در آن تابع را به‌صورت یک تابع پله‌ای تقریب می‌زنیم و از رابطه زیر برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کنیم.

$$\int_a^b f_{(x)}dx = h[f_{(x_0)} + f_{(x_1)} + \ldots + f_{(x_n)}]$$

$$h = \frac{b-a}{h} \quad x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = a+h \quad , \quad x_2 = x_1 + h \ldots x_n = b$$

۱۳ـ ۳ روش ذوزنقه

در این روش تابع مورد نظر را با استفاده از چند جمله‌ای درجه اول لاگرانژ تقریب می‌زنیم که در نتیجه تابع تحت انتگرال به صورت توابع تکه تکه خطی تقریب زده می‌شود و از رابطه زیر برای انتگرال گیری استفاده می‌کنیم.

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \frac{h}{2}[f_{(x_0)} + f_{(x_n)} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{(x_i)}) = \frac{h}{2}(f_{(x_0)} + 2f_{(x_1)} + 2f_{(x_2)} + 2f_{(x_3)} + \dots + 2f_{(x_{n-1})} + f_{(x_n)})$$ و

$$h = \frac{b-a}{n}$$

هر چه h کوچکتر باشد ـ n یا تعداد تقسیمات بیشتر باشد ـ دقت محاسبات افزایش می‌یابد میزان خطای این روش متناسب با h^2 می‌باشد که نشانگر این است که مرتبه خطا Oh^2 است در نتیجه استفاده از این روش برای انتگرال گیری توابع با درجه یک و کمتر بدون خطا می‌باشد خطای محاسبه انتگرال با این روش از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\Psi) \ , \ a \le \Psi \le b$$

که با توجه به رابطه اخیر می‌توانیم تعداد حداقل تقسیمات لازم برای این که خطای انتگرال گیری کوچکتر از مقدار معین ε باشد را تعیین کنیم.

$$h = \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)Q}}$$

که Q مقدار ماکزیمم $f''_{(x)}$ در بازه $a \le x \le b$ می‌باشد.

$$Q = Max(f''_{(x)}) \ , \ a \le x \le b$$

مثال: با استفاده از قانون ذوزنقه و گام h=0.5 مقدار انتگرال $I = \int_0^1 (x^3 + 2x)dx$ چقدر است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) 2125.1 ۲) 2575.1

۳) 3125.1 ۴) 5.1

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

X	0	0.5	1
F(x)	0	1. 125	3

$$\Rightarrow \int_a^b f_{(x)} = \frac{0.5}{2}(0 + 3 + 2\times 1.125) = 1.3125$$

۱۳ـ ۴ روش سیمپسون معمولی

در این روش تابع مورد نظر انتگرال گیری با استفاده از چند جمله لاگرانژ درجه دوم تقریب زده می‌شود در نتیجه ازرابطه زیر برای انتگرال گیری استفاده می‌کنیم.

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_{2x} + 4\Sigma f_{\text{فرد}} + 2\Sigma f_{\text{زوج}})$$

لازم به ذکر است زمانی می‌توانیم از روش سیمپسون معمولی استفاده کنیم که تعداد تقسیمات زوج باشد میزان خطای این روش متناسب با h^4 می‌باشد در نتیجه استفاده از این روش برای انتگرال گیری توابع با درجه 3 و کمتر بدون خطا می‌باشد و خطای محاسبه انتگرال با این روش از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon = \frac{b-a}{180} \ h^4 f^4(\Psi) \ , \quad a \le \Psi \le b$$

مثال : حاصل انتگرال زیر با استفاده از روش سیمپسون چه قدر است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

$$I = \int_0^{0.6} f_{(x)}dx$$

X	F(x)
0	0
0.1	0.010
0.2	0.039
0.3	0.087
0.4	0.152
0.5	0.230
0.6	0.319

۱) I=0.17 ۲) I=0.167

۳) I=0.068 ۴) I=0.067

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$I = \frac{h}{3}(f + f + 4\Sigma f + 2\Sigma f) =$$

$$= \frac{0.1}{3}(0 + 0.319 + 4(0.01 + 0.087 + 0.23) + 2(0.039 + 0.152)) = 0.067$$

۱۳ـ ۵ روش سیمپسون $\frac{3}{8}$

در این روش تابع موردنظر انتگرال گیری با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ درجه سوم تقریب زده می‌شود و از رابطه زیر برای انتگرال گیری استفاده می‌کنیم.

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \frac{3h}{8}(f_0 + f_{3n} + 2\Sigma f_{\text{مضرب } 3} + 3\Sigma f_{\text{مابقی}})$$

لازم به ذکر است زمانی می‌توانیم از روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ استفاده کنیم که تعداد تقسیمات مضربی از 3 باشد میزان خطای این روش نیز متناسب با $h^4\left(\frac{1}{h^4}\right)$ می‌باشد در نتیجه استفاده از این روش برای انتگرال گیری توابع با درجه 3 و کمتر بدون خطا است. خطای محاسبه انتگرال با این روش از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon = \frac{b-a}{80}h^4 f^4(\Psi) \quad , \quad a \le \Psi \le b$$

مثال : با استفاده از روش سیمپسون معمولی و $\frac{3}{8}$ حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

X	F(x)
0	$0 \to f_0$
1	$1 \to f_1$
2	$2 \to f_2$
3	$3 \to f_3$
4	$4 \to f_4$
5	$5 \to f_5$
6	$6 \to f_6$

$\frac{1}{3}$ سیمپسون $I = \frac{1}{3}[0 + 14 + 4(1+5+12) + 2(3+8)] = 36$

$\frac{3}{8}$ سیمپسون $I = \frac{3}{8}[0 + 14 + 2(5) + 3(1+3+8+12)] = 36$

نکته : اگر در سئوال نوع روش سیمپسون ذکر نشود برای حل از سیمپسون معمولی استفاده می‌کنیم.

مثال : مقدار $\int_1^3 x^2dx$ با روش سمپسون $\frac{1}{3}$ با طول h=1 برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۰)

۱) $\frac{12}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{19}{3}$ ۴) $\frac{26}{3}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به این که میزان خطای روش سیمپسون برای توابع با درجه 3 و کمتر برابر صفر است پس

$$\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{26}{3}$$

مثال : تعداد تقسیمات برای آن که انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{Ln}(\cos x)$ از روش سیمپسون با دقت $\pm 10^{-5}$ محاسبه شود چه مقدار است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری)

۱) N=6 ۲) N=7 ۳) N=8 ۴) N=10

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\varepsilon=\frac{b-a}{180}h^4f^4(\psi)$$

$$\Rightarrow h=\left(\frac{1804}{(b-a)Q}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$f_{(x)}=\mathrm{Ln}_{(\cos x)}\to f'_{(x)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tgx\to f''_{(x)}=-(1+tg^2x)$$

$$f'''=-2tgx(1+tg^2x)\to f^4{}_{(x)}=-2(1+tg^2x)(1+3\tan^2x)$$

در $0<x<\frac{\pi}{4}$ مقدار ماکزیمم $f^4_{(x)}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ حاصل می‌شود.

$$f^4{}_{(x)}=-2(1+1)(1+3)=-16\Rightarrow Q=16$$

$$\Rightarrow h=\left(\frac{180\times10^{-5}}{(\frac{\pi}{4}-0)\times16}\right)^{\frac{1}{4}}=0.1094\to h=\frac{b-a}{n}\Rightarrow n=\frac{b-a}{h}$$

$$\Rightarrow h=\frac{\frac{\pi}{4}-0}{0.1094}=7.2$$

بنابراین تعداد تقسیمات را 8 در نظر می‌گیریم.

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال دو گانه زیر که در هر راستای y , x از روش ذوزنقه استفاده کنید.

$\bar{y}$ / $\downarrow x$	1	2	3
4	10	20	30
5	40	50	60
6	70	80	90

برای انتگرال گیری دو گانه، ابتدا یک جهت را ثابت در نظر می‌گیریم.

ثابت $y=1\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}(10+70+2\times40)=80$

ثابت $y=2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}(20+80+2\times 50)=100$

ثابت $y=3 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{2}(30+90+2\times 60)=120$

$I_{total} = \frac{1}{2}(80+120+2\times 100)=200$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال دو گانه زیر که در راستای x از روش ذوزنقه و در راستای y از روش سیمپسون استفاده کنید.

$\vec{y}$ / $\downarrow x$	0	0.5	1
0	0	0.5	1
0.25	1	1.5	2
0.5	2	2.5	3

ثابت $y=0 \Rightarrow I_1 = \frac{0.25}{2}(0+2+2\times 1)=0.5$

ثابت $y=0.5 \Rightarrow I_2 = \frac{0.25}{2}(0.5+2.5+2\times 1.5)=0.75$

ثابت $y=1 \Rightarrow I_3 = \frac{0.25}{2}(1+3+2\times 2)=1$

$I_{total} = \frac{0.5}{3}(0.5+1+4\times 0.75)=0.75$

مجموعه تست‌های فصل سیزدهم

۱ـ مقدار $\int_1^3 x^2dx$ با روش سیمسون $\frac{1}{3}$، با طول گام $h=1$ برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) $\frac{12}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{19}{3}$ ۴) $\frac{26}{3}$

۲ـ مقدار تقسیمات برای آنکه انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin xdx$ از روش سیمپسون با حداکثر خطای 0.00005 محاسبه شود، چقدر است؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

۱) $N=8$ ۲) $N=6$ ۳) $N=10$ ۴) $N=12$

۳ـ جدول زیر تابع $f(x,y)$ را برای نقاط مختلف x و y نشان می‌دهد:

y \ x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
0	0	0.095	0.18	0.26	0.34
0.1	0.095	0.18	0.26	0.34	0.4
0.2	0.18	0.26	0.34	0.4	0.47
0.3	0.26	0.34	0.4	0.47	0.53
0.4	0.34	0.4	0.47	0.53	0.59
0.5	0.4	0.47	0.53	0.59	0.64

انتگرال زیر با روش ذوزنقه‌ای به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ (مهندسی شیمی ۸۳)

$$\int_{y=0}^{0.5}\int_{x=0}^{0.4} f(x,y)dxdy$$

۱) 0.0917 ۲) 0.082 ۳) 0.0723 ۴) 0.0503

۴ـ با استفاده از قانون ذوزنقه و گام $h=0.5$ مقدار انتگرال $I=\int_0^1 (x^3+2x)dx$ چقدر است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) 1.2125 ۲) 1.2575 ۳) 1.3125 ۴) 1.5

۵ـ با استفاده از جدول زیر مطلوب است محاسبه انتگرال تابع $f(x)$ در محدوده $x=1$ تا $x=1.8$ (از روش ذوزنقه‌ای استفاده شود و $h=0.1$ فرض گردد.) (مهندسی شیمی ۸۱)

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
f(x)	1.543	1.669	1.811	1.971	2.151	2.352	2.577	2.828	3.107

۱) 1.77 ۲) 2.51 ۳) 17.7 ۴) 25.1

۶ـ تابع $f(x)$ به‌صورت جدول (انتگرال‌گیری) زیر در فاصله 1- و 0 نمایش داده شده است. مقـدار تقریبـی انتگـرال ایـن تـابع از $x=-1$ تا $x=0$ براساس فرمول سیمسون کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

(فرمول سیمسون $I=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$)

x	$y=f(x)$
−1	2
−0.75	1.125
−0.5	0.5
−0.25	0.125
0	0

۱) 0.97　۲) 1.33　۳) 1.68　۴) 6.17

۷ـ خطای انتگرال زیر با استفاده از روش سیمسون چقدر است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

x	$f(x)$
0	0
0.1	0.010
0.2	0.039
0.3	0.087
0.4	0.152
0.5	0.230
0.6	0.319

$$I=\int_0^{0.4} f(x)dx$$

۱) $I=0.17$　۲) $I=0.167$　۳) $I=0.068$　۴) $I=0.067$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل سیزدهم

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تابع از درجه دو می‌باشد پس خطای روش سیمپسون برابر صفر است.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$h=\sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)Q}}$$

$$f(x)=e^x\sin x \Rightarrow f'(x)=e^x(\sin x+\cos x) \Rightarrow f''_{(x)}=2e^x\cos x \Rightarrow f^{(3)}_{(x)}=2e^x(\cos x-\sin x)$$

$$f^{4}_{(x)}=-4e^x\sin x$$

$$\Rightarrow Q=4e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=19.24$$

$$\Rightarrow h=h=\sqrt[4]{\frac{180\times 0.00005}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\times(19.24)}}=0.1314 \Rightarrow n=\frac{b-a}{h}=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{0.1314}=12$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$y=0$ ثابت $\Rightarrow I_1=\frac{0.1}{2}\left[0+0.34+2(0.095+0.18+0.26)\right]=0.0705$

$y=0.1$ ثابت $\Rightarrow I_2=\frac{0.1}{2}\left[0.095+0.4+2(0.18+0.26+0.34)\right]=0.10275$

$y=0.2$ ثابت $\Rightarrow I_3=\frac{0.1}{2}\left[0.18+0.47+2(0.26+0.34+0.4)\right]=0.1325$

$y=0.3$ ثابت $\Rightarrow I_4=\frac{0.1}{2}\left[0.26+0.53+2(0.34+0.4+0.47)\right]=0.1605$

$y=0.4$ ثابت $\Rightarrow I_5=\frac{0.1}{2}\left[0.34+0.59+2(0.4+0.47+0.53)\right]=0.1865$

$y=0.4$ ثابت $\Rightarrow I_6=\frac{0.1}{2}\left[0.4+0.64+2(0.47+0.53+0.59)\right]=0.211$

ثابت $\Rightarrow I_{total}=\frac{0.1}{2}\left[0.0705+0.211+2(0.10275+0.1325+0.1605+0.1865)\right]=0.0723$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$I=\int_0^1(x^3+2x)dx=\frac{0.5}{2}\left(f(0)+2f(0.5)+f(1)\right)=\frac{0.5}{2}(0+1\times 1.125+3)=1.3125$$

مثال : اگر برای تابع $y(x)$ داشته باشیم $\frac{dy}{dx}=f_{(x,y)}=x^2+y^2, y=(0.5)=0.2$ و برای محاسبه $g(l)$ از سه جمله اول بسط تیلور استفاده شود $y(1)$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 0.4845 ۲) 0.492 ۳) 0.345 ۴) 0.47

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

بسط تیلور سه جمله‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{2!}y''_i$$

$$h=1-0.5=0.5$$

$$\Rightarrow y_{(1)}=y_{(0.5)}+0.5y'_{(0.5)}+\frac{0.5^2}{2}y''_{(0.5)}$$

$$y'=x^2+y^2 \Rightarrow y''=2x+2yy'=2x+2y(x^2+y^2), y_{0.5}=0.2$$

$$\Rightarrow y'_{(0.5)}=0.25+0.04=0.29 \qquad y''_{(0.5)}=2\times 0.5+2\times 0.2(0.29)=1.116$$

$$\Rightarrow y_{(1)}=0.2+0.5\times 0.29+\frac{0.5^2}{2}\times 1.116=0.4845$$

۱۴ـ۳ روش اولر

اساس کار این روش براساس بسط تیلور می‌باشد که تا مشتق اول در نظر می‌گیریم بنابراین داریم:

$$y_{i+1}=y_i+hy'_i+O(h^2)$$

که در این صورت خطای برشی این روش از مرتبه Oh^2 می‌باشد و خطای کلی این روش از مرتبه Oh^1 است.

مثال : با استفاده از روش اویلر «Euler» $\frac{dy}{dx}$ را در $x=0.2$ محاسبه کنید. (مهندسی شیمی ۸۳)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\frac{y}{x+1} \qquad \begin{cases} y_{(0)}=0 \\ y'_{(0)}=1 \end{cases} \quad h=0/1$$

۱) $y'_{(0.2)}=0.00$ ۲) $y'_{(0.2)}=1.00$ ۳) $y'_{(0.2)}=1.01$ ۴) $y'_{(0.2)}=1.02$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y_{i+1}=y_i+hy'_i$$

در نتیجه برای محاسبه y'_{i+1} داریم.

$$y'_{i+1}=y'_i+hy''_i=y'_i+h(x_iy_i+\frac{y_i}{x_i+1})$$

$$\Rightarrow y'_{(0.2)}=y'_{(0.1)}+h(0.1y_{(0.1)}+\frac{y_{(0.1)}}{0.1+1})$$

همان طور که مشخص است برای محاسبه $y'_{(0.2)}$ لازم است $y_{(0/1)}, y'_{(0.1)}$ محاسبه گردند.

$$y_{(0.1)}=y_{(0)}+hy'_{(0)}=0+0.1\times 1=0.1$$

$$y'_{(0.1)} = y'_{(0)} + hy''_{(0)} = 1 + 0/1(0\times 1 + \frac{0}{0+1}) = 1$$

$$\Rightarrow y'_{(0.2)} = 1 + 0.1(0.1\times 0.1 + \frac{0.1}{0.1+1}) = 1.01$$

مثال : چنان چه داشته باشیم $\frac{dy}{dx} = 2e^x - y$ و $y(0)=2$ با روش اولر و گام $h=0.5$ و $y(1)$ به کدام عدد نزدیکتر است.

۱) 00.2 ۲) 15.2 ۳) 35.2 ۴) 65.2

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$y_{i+1} = y_i + h(y'_i) = y_i + h(2e^{xi} - y_i)$$

$$\Rightarrow y_{(0.5)} = y_{(0)} + 0.5(2e^{\circ} - y_{(0)}) = 2 + 0.5(2-2) = 2$$

$$y_{(1)} = y_{(0.5)} + h(2e^{0.5} - y_{0.5}) = 2 + 0.5(2e^{0.5} - 2) = 2.65$$

۱۴ـ ۴ روش اولر اصلاح شده یا روش هیون

اساس کار این روش نیز رابطه تیلور می‌باشد که تا مشتق دوم در نظر می‌گیریم بنابراین داریم.

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!}y''_i = y_i = +hy'_i + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}\right)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1})$$

که y'_{i+1} را از روش اولر معمولی محاسبه می‌کنیم.

خطای برشی روش اولر اصلاح شده از مرتبه Oh^3 می‌باشد و خطای کلی این روش از مرتبه Oh^2 است.

مثال : اگر از روش بهبود یافته برای حل معادله دیفرانسیل $y' = x + y^2$ با شرط اولّیه $y_0 = 1, x_0 = 1$ استفاده شود مقدار y در x_1 با گام $h=0.2$ چیست؟ (مهندسی پلیمر ۸۲)

۱) 516.1 ۲) 816.1 ۳) 216.1 ۴) 016.1

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y' = x + y^2 \qquad y_{(1)} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i^2 + x_{i+1} + y_{i+1}^2) =$$

$$= y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i^2 + x_{i+1} + (y_i + hy'_i)^2) =$$

$$= 1 + \frac{0.2}{2}(1 + 1^2 + 1.2 + (1 + 0.2(1+1^2)^2) = 1.516$$

مثال : مقدار تفاوت در حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = x + 3y$ و یافتن $y_{(1)}$ با استفاده از روش اویلر و اویلر تغییر یافته با شرط اولیه $y_{(0)} = 1$ و طول قدم واحد برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 5

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$y' = x + 3y$

روش اولر $y_{i+1} = y_i + hy'_i = 1 + 1(0+3) = 4$

روش اولر اصلاح شده $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2}(x_i + 3y_i + x_{i+1} + 3y_{i+1}) =$

$= y_i + \frac{h}{2}\left(x_i + 3y_i + x_{i+1} + 3(y_i + hy'_i)\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2}(0 + 3 + 1 + 3(4)) = 9$

$\Rightarrow 9 - 4 = 5$

۱۴ـ ۵ روش رانگ کاتا

رابطه بازگشتی برای محاسبه y_{i+1} در این روش به صورت زیر میباشد.

$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$

که d , c , b , a اعداد مثبتی می‌باشد که $a+b+c+d=1$

اگر در رابطه بازگشتی d,c,b,a مخالف صفر باشند روش رانگ کاتا، مرتبه چهارم است و اگر $d = 0,\ a, b, c \neq 0$ باشد روش رانـگ کاتـا مرتبه سوم است و اگر $c, d = 0,\ a, b, c \neq 0$ باشد روش رانگ کوتا مرتبه دوم می‌باشد.

در روش رانگ کاتای مرتبه دوم داریم:

$y' = f_{(x,y)}$

$y_{(x_0)} = y_0$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \qquad a = b = \frac{1}{2} \qquad c = d = 0$

$K_1 = hf(x_i, y_i)$

$K_2 = hf(x_i + h, y_i + K_1)$

خطای برشی روش رانگ کاتای مرتبه دوم از مرتبه Oh^3 می‌باشد و خطای کلی از مرتبه Oh^2 است و جواب‌های به دست آمده از روش رانگ کاتای مرتبه دوم با جواب‌های روش اولر اصلاح شده برابر است.

در روش رانگ کاتای مرتبه سوم داریم:

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \qquad a = c = \frac{1}{6} \qquad b = \frac{4}{6} \qquad d = 0$

$K_1 = hf(x_i, y_i)$

$K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$

$K_3 = hf(x_i + h, y_i + 2K_2 - K_1)$

خطای برشی این روش از مرتبه Oh^4 می‌باشد و خطای کلی از رتبه Oh^3 است.

در روش رانگ کاتای مرتبه چهارم داریم:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$K_1=hf(x_i,y_i)$$

$$K_2=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{K_1}{2})$$

$$K_3=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{K_2}{2})$$

$$K_4=hf(x_i+h,y_i+K_3)$$

خطای برسی این روش از مرتبه Oh^5 می‌باشد و خطای کلی از مرتبه Oh^4 است.

مثال : پاسخ معادله $y'=x+y$ از رونگ کاتا مرتبه چهارم عبارت است از:

$$y'=x+y$$

$$y_{(0)}=1$$

$$y_{(2)}=?$$

۱) 15　　۲) 10　　۳) 11　　۴) 16

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y'=x+y=f_{(x,y)}$$

$$K_1=hf_{(x_0,y_0)}=2f_{(0,1)}=2_{(0+1)}=2$$

$$K_2=hf(x+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_1}{2})=2f(0+\frac{2}{2},1+\frac{2}{2})=2(1+2)=6$$

$$K_3=hf(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_3}{2})=2f(0+\frac{2}{2},1+\frac{6}{2})=2(1+4)=10$$

$$K_4=hf(x_0+h,y_0+K_3)=2f(0+2,1+10)=2(2+11)=26$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)=1+\frac{1}{6}(2+12+20+26)=11$$

همان طور که در ابتدای فصل گفته شد برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی BVP از دو روش تیر اندازی و تفاضل محدود استفاده می‌شود.

$$y''=f_{(x,y,y')}$$

$$y_{(a)}=y_1$$

$$y_{(b)}=y_2$$

مجموعه تست‌های فصل چهاردهم

۱ـ چنان‌چه داشته باشیم $\frac{dy}{dx}=2e^x-y$ و $y_{(0)}=2$ با روش اولر و گام $h=0.5$ و $y(1)$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

(مهندسی شیمی۸۴)

۱) 2.00 ۲) 2.15 ۳) 2.35 ۴) 2.65

۲ـ با استفاده از روش اولر مقدار $y(0.1)$ را در معادله $y'_{(0)}=2$ و $y_{(0)}=1$ و $y''+xy'+y=0$ با طول گام $h=0.1$ به‌دست آورید؟ (مهندسی شیمی ۸۴)

۱) 1.2 ۲) 1.1 ۳) 1 ۴) 0.2

۳ـ با استفاده از روش اولر (Euler)، $\frac{dy}{dx}$ را در $x=0.2$ محاسبه کنید. (مهندسی شیمی ۸۳)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\frac{y}{x+1} \qquad \begin{cases} y_{(0)}=0 \\ y'_{(0)}=1 \end{cases} \qquad h=0.1$$

۱) $y'_{(0.2)}=0.00$ ۲) $y'_{(0.2)}=1.00$ ۳) $y'_{(0.2)}=1.01$ ۴) $y'_{(0.2)}=1.02$

۴ـ مقدار تفاوت در حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=x+3y$ و یافتن $y_{(1)}$ و با استفاده از روش اویلر و اویلر تغییر یافته با شرط اولیه $y_{(0)}=1$ و طول قدم واحد برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 5

۵ـ هرگاه فرمول Runge-Kutta به‌صورت زیر نوشته شود:

$$K_1=hf\left(x_0,y_0\right)$$

$$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3=hf\left(x_0+h,y_0+2K_2-K_1\right)$$

$$y=y_0+\frac{1}{6}\left(K_1+4K_2+K_3\right)$$

و منحنی $f(x)$ از نقطه $\left(y_0=1,x_0=2\right)$ بگذرد به ازای $x=3$ مقدار y چقدر است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

(اگر $\frac{dy}{dx}=e^x\frac{Lnx}{(y+5)}$)

۱) 1.7 ۲) 2.7 ۳) 3.7 ۴) 4.7

۶ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=3x^2y$ در شرایط مرزی $y_0=2$ و $x_0=1$ داده شده است. با استفاده از روش اولر Euler method مقدار y_1 در $x_1=x_0+h$ با گام $h=0.1$ چه مقدار می‌باشد؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) 2.6 ۲) 1.8 ۳) 2.2 ۴) 1.4

۷ ـ برای معادله دیفرانسیلی $\frac{dy}{dx}=xy$ در شرط اولیه $x_0=1$ و $y_0=2$، مقدار y در $x=x_0+h$ با گام $h=0.5$ با استفاده از روش اصلاح شده اولر (هیون) چیست؟ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) 2.171
۲) 2.221
۳) 2.322
۴) 2.325

۸ ـ با استفاده از روش اویلر و $h=0.1$، $y(0.1)$ را محاسبه کنید. (مهندس مخازن هیدروکربوری ۸۴)

$y''-y+x=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=2$

۱) -0.91
۲) 1.05
۳) 1.1
۴) 1.2

۹ ـ خطای کلی روش رانگ کوتای مرتبه m در محاسبه $y(x_N)$ اگر $y(x_0)=y_0$ باشد از چه مرتبه‌ای است. اگر طول گام h استفاده شود؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ۸۳)

۱) از مرتبه h^m
۲) از مرتبه $h^{\frac{m}{2}}$
۳) از مرتبه h^{m+1}
۴) از مرتبه $h^{\frac{m}{2}+1}$

۱۰ ـ با استفاده از روش اویلر بهبود یافته (Modifield Euler method) برای معادله با مقدار اولیه $y_{(0)}=1$ و $y'=x+\sqrt{y}$ مقدار $y_1=y(0.2)$ برابر است با: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز)

۱) $y_1=y(0.2)\simeq 1.253045$
۲) $y_1=y(0.2)\simeq 1.494530$
۳) $y_1=y(0.2)\simeq 1.115417$
۴) $y_1=y(0.2)\simeq 1.229545$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل چهاردهم

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر}\rightarrow y_{i+1}=y_i+hy'_i=y_i+h\left(2e^{x_i}-y_i\right)\quad\Rightarrow\quad y_1=2+0.5(2\times1-2)=2$$

$$y_2=2+0.5\left(2e^{0.5}-2\right)=2.65$$

۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر}\rightarrow y_{i+1}=y_i+hy'_i=1+0.1\times2=1.2$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر}\rightarrow y_{i+1}=y_i+hy'_i\quad\Rightarrow\quad y'_{i+1}=y'_i+hy''_i=y'_i+h\left[x_iy_i+\frac{y_i}{x_i+1}\right]$$

$$y_1=y_0+hy'_0=0+0.1\times1=0.1$$

$$y'_1=y'_0+hy''_0=1+0.1\left[0\times1+\frac{0}{0+1}\right]=1$$

$$y'_2=y'_1+hy''_1=1+0.1\left[0.1\times0.1+\frac{0.1}{0.1+1}\right]=1.01$$

۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در متن درس، حل شده است.

۵ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{aligned}h\rightarrow1\rightarrow K_1&=f(2,1)=\frac{e^2\text{Ln}2}{6}=0.853\\ \rightarrow K_2&=f(2.5,1.429)=1.736\\ \rightarrow K_3&=(3,3.619)=2.560\end{aligned}\right|\rightarrow y=1+\frac{1}{6}\left(0.853+4(1.736)+2.560\right)=2.26$$

۶ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر}\rightarrow y_{i+1}=y_i+hy'_i\quad\Rightarrow\quad y_1=y_{(1,1)}=2+0.1\left(3\times1^2\times2\right)=2.6$$

۷ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\text{اولر اصلاح شده}\Rightarrow\quad y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(y'_i+y'_{i+1}\right)=y_i+\frac{h}{2}\left(x_iy_i+x_{i+1}y_{i+1}\right)$$

$$\text{اولر}\Rightarrow\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i=2+0.5(1\times2)=3$$

$$\text{اولر اصلاح شده}\Rightarrow\quad y_1=2+\frac{1}{2}\times0.5[1\times2+1.5\times3]=3.625$$

۸ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر اصلاح شده}\Rightarrow\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i\quad\Rightarrow\quad y_1=1+0.1\times2=1.2$$

۹ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به متن درس گزینه یک صحیح می‌باشد.

۱۰ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{اولر اصلاح شده} \rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y'_i + y'_{i+1}\right) = y_i + \frac{0.2}{2}\left(x_i + \sqrt{y_i} + x_{i+1} + \sqrt{y_{i+1}}\right)$$

$$\text{اولر} \rightarrow y_{i+1} = y_i + h\left(y'_i\right) \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1 + 0.2\left(0 + \sqrt{1}\right) = 1.2$$

$$\text{اولر اصلاح شده} \rightarrow y_1 = 1 + \frac{0.2}{2}\left[\left(0 + \sqrt{1}\right) + \left(0.2 + \sqrt{1.2}\right)\right] = 1.229545$$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}$$ تفاضل پیشرو

$$\begin{cases}\dfrac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\dfrac{u_{i,1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n}}{\Delta x^2}\\ \dfrac{\delta u}{\delta x}=\dfrac{u_{i+1,n}-u_{i-1,n}}{2\Delta x}\end{cases}$$ تفاضل مرکزی و صریح

$$\Delta x=\Delta t=1$$

$$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta t}=\frac{1}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}-\frac{\delta u}{\delta x}\Rightarrow$$

$$u_{i,n+1}-u_{i,n}=\frac{1}{2}(u_{i+1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n})-\left(\frac{u_{i+1,n}-u_{i-1,n}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_{i,n+1}=u_{i-1,n}$$

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

که با جایگزینی تفاضل صریح (پیشرو در زمان و مرکزی در مکان) داریم:

$$\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}=\alpha\frac{u_{i,1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow u_{i,n+1}=\lambda(u_{i+1,n}+u_{i-1,n})+(1-2\lambda)u_{i,n}$$

$$\lambda=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$$

که اگر این معادله را به شکل زیر بنویسیم.

$$u_{i,n+1}=au_{i+1,n}+bu_{i,n}+cu_{i-1,n}$$

در این صورت شرط لازم و کافی برای پایداری عبارتست از:

$$a,b,c>0\quad,\quad a+b+c\le 1$$

بنابراین برای معادله بالا، شرط لازم و کافی پایداری عبارت است از:

$$\left.\begin{matrix}1-2\lambda>0\Rightarrow\lambda<\dfrac{1}{2}\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}0<\lambda<\frac{1}{2}$$

برای حالت دو بعدی نیز داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\left[\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right]\quad,\qquad \Delta x=\Delta y$$

شرط لازم و کافی برای پایداری:

$$0<\lambda<\frac{1}{4}$$

و برای حالت سه بعدی داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\alpha\left[\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\right] \quad , \quad \Delta x=\Delta y=\Delta z$$

شرط لازم و کافی برای پایداری:

$$0<\lambda<\frac{1}{6}$$

وجود شرط پایداری باعث ایجاد محدودیت در روش تفاضل محدود صریح می‌شود که جزء اشکالات این روش می‌باشد ولی در عوض در این روش محاسبات ساده تر می‌باشد.

۱۵-۴ روش ضمنی implicit method

در این روش مشتقات مکانی را در زمان t+1 در نظر می‌گیریم بنابراین لازم است دستگاه معادلات حاصل شده به طور هم زمان حل گردد ولی در عوض این روش همواره پایدار است.

مثال : جهت حل معادله $\frac{\delta T}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$ با روش ضمنی (implicit) با فرض $\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}=0.25$ کدام معادله حاصل می‌شود.

۱) $-T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۲) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۳) $-0.25T_{i-1,n+1}-1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۴) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}+0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

حل : گزینه دوم صحیح می‌باشد.

$\frac{\delta T}{\delta t}=\frac{T_{i,n+1}-T_{i,n}}{\Delta t}$ تفاضل پیشرو

$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}=\frac{T_{i+1,n+1}-2T_{i,n+1}+T_{i-1,n+1}}{\Delta x^2}$ تفاضل مرکزی و ضمنی

$$\Rightarrow \frac{\delta T}{\delta t}=\alpha\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$$

$$\frac{T_{i,n+1}-T_{i,n}}{\Delta t}=\alpha\frac{T_{i+1,n+1}-2T_{i,n+1}+t_{i-1,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow -\lambda T_{i-1,n+1}+(1+2\lambda)T_{i,n+1}-\lambda T_{i+1,n+1}=T_{i,n} \quad , \quad \lambda=0.25$$

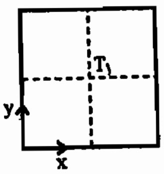
نکته : اگر نصف مشتقات مکانی را در زمان n و نصف باقیمانده را در زمان n+1 در نظر بگیریم در این صورت از روش کرانک - نیکلسون استفاده کرده ایم که این روش نیز همواره پایدار می‌باشد.

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{1}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\bigg|_{n+1}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\bigg|_{n}$$

مجموعه تست‌های فصل پانزدهم

۱ـ معادله لاپلاس مطابق زیر توزیع دما را در صفحه مقابل بیان می‌کند با توجه به شرایط مرزی زیر و با استفاده از روش عددی تفاوت‌های محدود (Finite Difference) و با انتخاب $\Delta x = \Delta y = 0.5$، دمای T_1 عبارت است از: (مهندسی شیمی ۸۴)

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 T}{\delta y^2}=0 \qquad T(0,y)=0 \quad , \quad T(1,y)=50 \quad , \quad T(x,0)=T(x,1)=100$$



۱) 25
۲) 37.5
۳) 62.5
۴) 75

۲ـ جهت حل معادله $\frac{\delta T}{\delta t}=a\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$ با روش ضمنی (implicite) با فرض $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}=0.25$ کدام معادله حاصل می‌شود؟

(مهندسی شیمی ۸۴)

۱) $-T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$
۲) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$
۳) $-0.25T_{i-1,n+1}-1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$
۴) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}+0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۳ـ شکل معادله تفاضل محدود finite Diffrence برای معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از تفاضل مرکـزی Central Diff عبــارت است از: (مهندسی شیمی ۸۳)

$$y''+3y'-5y=4x$$

۱) $(1+3h)y_{i+1}-\left(2+5h^2+3h\right)y_i+y_{i-1}=4h^2x_i$
۲) $\left(1+\frac{3}{2}h\right)y_{i+1}-\left(2+5h^2\right)y_i+\left(1-\frac{3}{2}h\right)y_{i-1}=4h^2x_i$
۳) $\left(1+5h^2\right)y_{i+1}-(2+3h)y_i+(1-3h)y_{i-1}=4h^2x_i$
۴) $y_{i+1}-\left(2+5h^2+3h\right)y_i+(1-3h)y_{i-1}=4h^2x_i$

۴ـ شرط مرزی زیر را مطابق شکل تفاضل‌های محدود نوشته و شکل صحیح را مشخص کنید: (مهندسی شیمی ۸۳)

$$k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=-h\left[T_{(L)}-T_\infty\right]$$

(مقدار ثابت L و h و k) , $\left[n=\frac{L-x_0}{\Delta x}\right]$, (نقطه مرزی $x_0=0$)

۱) $T_{n-1}-T_n\left[1+\frac{\Delta xh}{k}\right]+\frac{\Delta hT_\infty}{k}=0$
۲) $T_{n-1}+T_n\left[\frac{h\Delta x}{k}-1\right]-\frac{h\Delta xT_\infty}{k}=0$
۳) $T_{n-1}-T_{n+1}\left[1+\frac{2\Delta xh}{k}\right]+\frac{2\Delta xhT_\infty}{k}=0$
۴) هیچ‌کدام

۵ـ هنگام استفاده از روش تفاضل محدود برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=0$ معادله تفاضلی برابر است با: (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j}+u_{i,j+1}+4u_{i,j}=0$ ۲) $u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}+u_{i,j+1}=0$

۳) $u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}+u_{i,j}=0$ ۴) $u_{i-1,j}+j_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j}=0$

۶ـ برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\delta u}{\delta t}=a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ در صورتی‌که $\lambda=a\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ باشد و از روش تفاضل محدود ضمنی استفاده شود شرط پایداری عبارت است از: (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) $0<\lambda\le 2$ ۲) $0<\lambda\le 4$ ۳) $0<\lambda\le\infty$ ۴) $0<\lambda\le\frac{1}{2}$

۷ـ در مقایسه روش explicit و implicit برای حل معادلات غیرپایای انتقال حرارت کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی شیمی ۸۲)

۱) روش implicit همواره پایدار و روش explicit تحت شرایطی پایدار است.

۲) روش implicit خطای منتشر شده بیشتر از روش explicit دارد.

۳) روش implicit و explicit هر دو تحت شرایطی پایدارند اما محدوده پایداری حل روش implicit بیشتر است.

۴) روش explicit منجر به دستگاه معادلات خطی می‌شود ولی روش implicit مستقیماً مقدار تابع در قدم بعدی را محاسبه می‌کند.

۸ـ معادله دیفرانسیل معمولی $y''+xy=\sin x$ اگر به روش تفاضل‌های محدود حل شود، فرمول نقطه‌ای آن چگونه خواهد شد؟ $(\Delta x=h)$ (مهندسی شیمی ۸۱)

۱) $y_{i+1}+h^2\left(x_i+\sin x_i\right)y_i+y_{i-1}=0$ ۲) $y_{i+1}-\left(2-h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=h^2\sin x_i$

۳) $y_{i+1}+h^2x_iy_i+y_{i-1}=\sin x_i$ ۴) $y_{i+1}+\left(2+h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=-h^2\sin x_i$

۹ـ معادله دیفرانسیل زیر به شکل تفاضل‌های محدود نوشته می‌شود. کدام شکل قابل قبول است؟ (مخازن هیدروکربوری ۸۳)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2\frac{\delta u}{\delta r}\right)-u=0 \qquad \Delta r=h$$

۱) $u_{i-1}-u_i\left(2+\frac{2h}{r_i}+h^2\right)+u_{i+1}\left(1+\frac{2h}{r_i}\right)=0$ ۲) $u_{i-1}\left(1-\frac{h}{r_i}\right)-u_i\left(2+h^2\right)+u_{i+1}\left(1+\frac{h}{r_i}\right)=0$

۳) $u_{i-1}\left(1-\frac{h}{2}\right)-u_i\left(2+h^2\right)+u_{i+1}\left(1+\frac{h}{r_i}\right)=0$ ۴) $u_{i-1}\left(1-\frac{h}{r_i}\right)-u_i\left(2-\frac{2h}{r_i}+h^2\right)+u_{i+1}\left(1-\frac{2h}{r_i}\right)=0$

پاسخنامه مجموعه تست‌های فصل پانزدهم

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$T_{i,j}=\frac{T_{i-1,j}+T_{i+1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}}{4}=\frac{0+50+100+100}{4}=62.5$$

۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
در متن درس حل شده است.

۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تفاضل مرکزی
$$y''=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$
$$y'=\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

$$\Rightarrow\ y''+3y'-5y=4x\ \Rightarrow\ \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+3\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-5y_i=4x_i$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{3}{2}h\right)y_{i+1}-\left(2+5h^2\right)y_i+\left(1-\frac{3}{2}h\right)y_{i-1}=4h^2x_i$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} k\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=L}=k\dfrac{T_n-T_{n-1}}{\Delta x} \\ T_L=T_n \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=-h\left[T_{(L)}-T_\infty\right]=T_n-T_{n-1}+\frac{h\Delta x}{k}\left(T_n-T_\infty\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T_{n-1}-T_n\left(1+\frac{\Delta xh}{k}\right)+\frac{\Delta xhT_\infty}{k}=0$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.
در متن درس حل شده است.

۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه سوم صحیح می‌باشد.

۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
با توجه به متن درس گزینه یک صحیح می‌باشد.

۸ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$y''+xy=\sin x\ \Rightarrow\ \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+x_iy_i=\sin x_i$$

$$\Rightarrow\ y_{i+1}-\left(2-h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=h^2\sin x_i$$

۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r^2}+\left(r^2\frac{\delta u}{\delta r}\right)-u=0 \;\Rightarrow\; r^2\frac{\delta^2 r}{\delta r^2}+2r\frac{\delta u}{\delta r}-r^2u=0 \;\Rightarrow$$

$$r\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+2\frac{\delta u}{\delta r}-ru=0 \;\Rightarrow\; r_i\left(\frac{u_{i+1}-2u_{i-1}}{h^2}\right)+2\left(\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}\right)-r_iu_ih^2=0$$

$$\Rightarrow\; u_{i-1}\left(r_i-h\right)-u_ir_i\left(2+h^2\right)+u_{i+1}\left(r_i+h\right)=0 \;\Rightarrow\; u_{i-1}\left(1-\frac{h}{r_i}\right)-u_i\left(2+h^2\right)+u_{i+1}\left(1+\frac{h}{r_i}\right)=0$$

مراجع

۱- معادلات دیفرانسیل، تألیف دکتر بهمن مهری و دکتر داریوش شادمان، انتشارات فاطمی
۲ـ کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی، تألیف دکتر منوچهر نیک‌آذر و دکتر ریاض خراط، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر

یادداشت

یادداشت

پارسه ماهان سنجش
www.arshd87.blogfa.com
09195367497

پارسه ماهان سنجش
www.arshd87.blogfa.com
09195367497

یادداشت

یادداشت