Subject ص ۲۲
Date

مثال: ریشه معادله $3xe^{x}-1=0$ را بدست آورید با روش دو بخشی؟

در بازه $(0.25, 0.27)$ ، $f(0.25) = -0.0288$ ، $f(0.27) = 0.0466$

n	a	b	c_n	$f(c_n)$	علامت
1	0.25	0.27	0.26	0.0089	−
2	0.25	0.26	0.255	−0.0099	+
3	0.255	0.26	0.2575	−0.005	

$c_1 = \frac{a+b}{2} = 0.26$

$c_2 = \frac{0.25+0.26}{2} = 0.255$

معیار و شرایط توقف روش دو بخشی:

$$|c_n - c_{n-1}| < \frac{b-a}{2^n}$$

اگر ε معیار دقت یا حداکثر خطای مطلق باشد داریم:

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$$

لذا برای بدست آوردن n (تعداد تکرار در روش دو بخشی) با معیار دقت و یا خطای ε در بازه (a,b) داریم:

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow 2^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon}$$

نکات: $\log_b a^n = n\log_b a$ ، $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

PAPCO

Subject: جلسه ۲۳
Date

از طرفین log می‌گیریم:

$$\log 2^n \geq \log \frac{b-a}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{با توجه به نکات}} n\log 2 \geq \log \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} \Rightarrow n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$n = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$$

(۳) برای مثال قبلی آن را حل کنید، بطوری که $|c_n - c_{n-1}| < 10^{-3}$

با توجه به معیار دقت و توقف 10^{-3} ابتدا n تعداد تکرار در روش دو بخشی را بدست می‌آوریم:

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \log_2 \frac{2\times 10^{-2}}{10^{-3}} \Rightarrow$$

$$n \geq \log_2 20 \Rightarrow n \geq \boxed{20 = 2^{\square}} \quad n \geq \boxed{20 = 2^{?} \text{ یا } 2^{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 3$$

$$\boxed{n = 3 + 1}$$

با ۴ تا تکرار به توقف روش می‌رسیم

(آنالیز عددی ۱ بابلیان [illegible])

Subject ص ۲٤
Date

مثال: با استفاده از روش دونیمی ریشه معادله $(2x+1)^2-4\cos\pi x=0$ را در فاصله $[3,1,4,1]$ با معیار دقت 10^{-3} بیابید؟ (جزوه دکتر فریدنیا)

مثال: معادله $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ یک ریشه در بازه $[1,2]$ دارد این ریشه را با دقت 10^{-3} بدست بیاورید؟ (جزوه دکتر فریدنیا)

$$f(1)=-2 \qquad f(2)=14$$

$$n \geq \log_2 \frac{1}{10^{-3}} \Rightarrow n \geq \log_2 10^3 \Rightarrow n=\left[\log_2 10^3\right]+1$$

$$n=\left[\log_2 10+\log_2 10+\log_2 10\right]+1 \Rightarrow n=9+1=10$$

تا ۱۰ تکرار انجام میدهیم.

Subject ۲۵
Date

n	a	b	c_n	$f(c_n)$	علامت
۱	۱	۲	۱,۵	۲,۳۷۵	−
۲	۱	۱,۵	۱,۲۵	−۱,۷۹۶۸۷	+
۳	۱,۲۵	۱,۵	۱,۳۷۵	۰,۱۶۲۱۱	−
⋮					
۱۰	۱,۳۶۴۳۱۱۲۵	۱,۳۶۷۱۸۷۵	۱,۳۶۵۲۴۴۳۵	۰,۰۰۰۰72	

$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5$

$c_2 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$

$c_3 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375$

خصوصیات روش دونیمی:

۱) از نظر اجرا ساده است

۲) روش همیشه همگرا است - تنها زمانی واگرا است که خطای محاسبه f(x) در یک نقطه‌ی تکین تشکیل شود یا عدد نبود

۳) روش نسبتاً کند است

۴) روش رشد با مرتبه تکرار نوع را برآورد می‌کند

۲-۳ روش نابجایی (False position)

این روش بسیار قدیمی است و مصریان قدیم آن را مورد استفاده قرار می‌دادند.

در این روش اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a).f(b)<0$ و معادله‌ی $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) داشته باشد از قاعده‌ی $x_n = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ استفاده می‌کنیم و الگوریتم روش نابجایی را داریم:

Subject ص ۲۶
Date

۱) ابتدا در بازه $[a,b]$ ، $f(x_1)$ را بدست می‌آوریم لذا ابتدا باید x_1 را طبق قاعده گفته شده بدست آوریم:

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

۲) اگر $f(a).f(x_1) < 0$ آنگاه ریشه در (a, x_1) است لذا برای x_2 داریم:

$$x_2 = \frac{a f(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

x_1 جای b را گرفته است

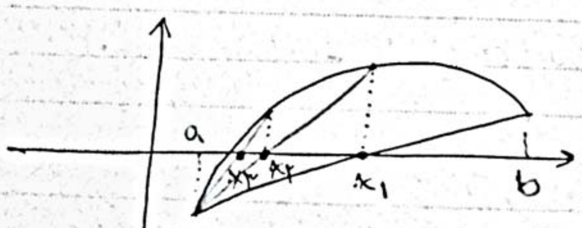
۳) اگر $f(a).f(x_1) > 0$ آنگاه ریشه در بازه (x_1, b) است لذا برای x_2 داریم:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

x_1 جای a را گرفته است

۴) اگر $f(a).f(x_1) = 0$ ریشه x_1 است و معادله حل شده است.

نمایش هندسی:



ابتدا a و b را به هم وصل می‌کنیم ریشه آن (برخوردش با محور xها) را x_1 می‌نامیم سپس x_1 را به a وصل می‌کنیم و ریشه آن را x_2 و به همین ترتیب تا به ریشه حقیقی برسیم.

PAPCO

Subject ۲۷
Date

مثال: ریشه معادله $3xe^{x}-1=0$ با روش نابجایی در بازه $(0.25, 0.27)$ را برآورد کنید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$ باشد؟

$f(0.25) = -0.0288 \qquad f(b) = 0.0466$

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0.25 f(0.27) - 0.27 f(0.25)}{f(0.27) - f(0.25)} = 0.257$$

$f(x_1) = 0.0003$

چون $f(a).f(x_1) < 0$ یعنی $f(0.25).f(0.0003) < 0$ پس ریشه بین (a, x_1) است $(0.25, 0.257)$

$$x_2 = \frac{a f(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)} = \frac{0.25 f(0.257) - 0.257 f(0.25)}{f(0.257) - f(0.25)}$$

$= 0.2574 \qquad f(x_2) = -0.0001$

چون $f(a).f(x_2) > 0$ پس ریشه بین (x_2, x_1) است
$(0.2574 \text{ و } 0.2577)$

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{0.2574 f(0.257) - 0.257 f(0.2574)}{f(0.257) - f(0.2574)}$$

$= 0.2574$

$|x_3 - x_2| = 0.0000 < 10^{-4}$

بنابراین در x_3 به جواب می‌رسیم.

همان طور که مشاهده می‌کنید با ۳ مرحله به جواب رسیدیم در حالی که همین مثال در مرحله ۲۲

Subject ص ۲۸
Date

با روش دونخی حل شد که باید چند دوره دیگر تکرار شود تا ۳ جواب برسیم.

خصوصیات روش نابجایی:

۱) این روش مانند روش دونخی همگرا است و عموماً از روش دونخی سریعتر است اگر تمام x_iها در یک طرف ریشه باشد همگرایی احتمالاً کند است.

۲) سرعت روش نابجایی از روش دونخی بیشتر است (تقریباً ۲/۵ برابر است)

۳) مرتبه همگرایی روش نابجایی یک است.

۴) این روش مانند روش دونخی ریشه با مرتبه تکرار زوج را برآورد نمی‌کند

$\boxed{۳\_۳}$ روش تکرار ساده یا نقطه ثابت (Simple Iteration Method)

در این روش معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ می‌نویسیم به طوری که α ریشه هر دو معادله است (هر دو معادله الزاماً هم ارز نیستند)

الگوریتم روش را داریم:

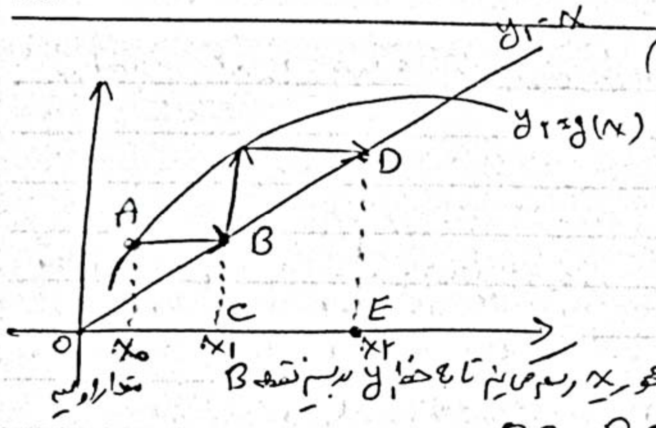
۱) تبدیل ؟ $x=g(x)$

۲) اگر g تابعی در $[a,b]$ باشد و $|g'(x)| \le L < 1$ باشد آنگاه معادله $x=g(x)$ تنها یک ریشه متعلق به $[a,b]$ است
در غیر این صورت واگرا است و این روش مناسب نمی‌باشد

~~۳) حل $x_{n+1}=g(x_n)$ مقدار x_0 $g(x_0)$ یا x_1 و فرمول را~~ ست

Subject ص ۲۹
Date

نمایش هندسی:



ابتدا از A به موازات محور x رسم می‌کنیم تا به خط y برسیم نقطه B

داریم $OC = BC$

که در حقیقت $OC = BC = g(x_0) = x_1$

در ادامه از نقطه B به y رسم می‌کنیم با حفظ زاویه قائمه و از آنجا به y (نقطه D)

داریم: $OE = DE = g(x_1) = x_2$

این روش را ادامه می‌دهیم تا به ریشه برسیم.

نکته: در روش تکرار ساده حتماً باید $g(x)$ مناسب باشد به عبارتی باید در شرط $|g'(x)| \le L < 1$ صدق کند که همگرایی این روش به انتخاب g و x_0 بستگی دارد.

مثال: معادله $f(x) = 2x^2 - x$ را با روش تکرار ساده و $x_0 = 1/2$ را حل کنید؟

حل: ابتدا تبدیل به $x = g(x) \leftarrow$

$x = 2x^2$

پس صدق کردن در شرط همگرایی:

$|g'(x)| = |4x| \le L < 1$

مشاهده می‌کنیم که همواره $4x > 1$ است و به ازای x های بزرگتر از یک این سیستم واگرا است.

Subject ۳۰
Date

مثال: $g(x) = 1 - x^2$ آیا با روش تکرار ساده حل می‌شود؟

مثال: حل $g(x) = \frac{1}{x+1}$ در بازه [۰٫۵ و ۰٫۷] با روش تکرار ساده؟

$$|g'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{1}{(0.5+1)^2} = \frac{1}{2.25} < 1$$

پس همگراست و ورشرط همگرایی صدق می‌کند

$$g(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$g(x_1) = \frac{1}{x_0+1} = \frac{1}{0.5+1} = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

$$g(x_2) = \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{0.667+1} = 0.599$$

$\vdots$

PAPCO