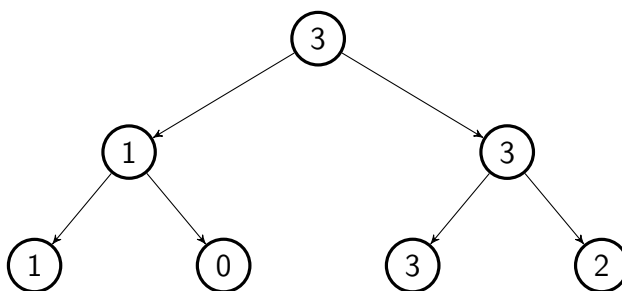


شما دانش‌پژوه و  $\Delta$  شما در این آزمون برابر با ۲۶۰۰۳ است!

**مسئله‌ی یک: درخت گاوی** ..... **۳۳ نمره**

ببعی یک جایگشت از اعداد ۰ تا  $2^n - 1$  را روی تخته یادداشت کرده است. گاوی بعد از دیدن دنباله‌ی ببعی، تصمیم گرفت تا تخته را تغییر دهد. گاوی یک درخت دودویی کامل کشید (درختی که در آن هر رأس یا برگ است و یا دقیقاً دو فرزند دارد). سپس روی برگ  $i$ -ام درخت، عدد  $i$ -ام از جایگشت ببعی را یادداشت کرد و بعد از آن جایگشت ببعی را از روی تخته پاک کرد. ببعی بعد از دیدن درخت گاوی، روی هر رأس غیر برگ درخت، یک عدد نوشت، به طوری که عدد نوشته شده روی هر رأس، برابر با بیشترین عدد یادداشت شده بر روی دو فرزندش باشد. سپس ببعی مجموع همه‌ی اعداد یادداشت شده روی راس‌های درخت را محاسبه کرد و آن را  $M$  نامید.

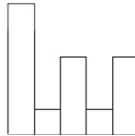
به عنوان مثال اگر  $n$  برابر ۲ و جایگشت ببعی برابر ۲، ۳، ۰، ۱ باشد، انگاه درخت گاوی به شکل زیر در می‌آید:



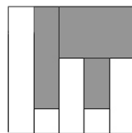
- ۲- الف (۱۱ نمره): اگر  $n$  برابر با ۳ باشد و بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن برای  $M$  را  $m_1$  و  $m_2$  بنامیم، باقیمانده‌ی تقسیم  $(m_1 * m_2)^2$  بر  $\Delta$  چند است؟  
پاسخ شما: .....
- ۲- ب (۱۱ نمره): اگر  $n$  برابر با ۱۲ باشد و بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن برای  $M$  را  $m_1$  و  $m_2$  بنامیم، باقیمانده‌ی تقسیم  $(m_1 * m_2)^2$  بر  $\Delta$  چند است؟  
پاسخ شما: .....
- ۲- ج (۱۱ نمره): اگر  $n$  برابر با  $10^6$  باشد و بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن برای  $M$  را  $m_1$  و  $m_2$  بنامیم، باقیمانده‌ی تقسیم  $(m_1 * m_2)^2$  بر  $\Delta$  چند است؟  
پاسخ شما: .....

**مسئله‌ی دو: عبور از سدّ دفاعی ایران! ..... ۳۳ نمره**

مسی و یارانش که خودشان را برای بازی امشب مقابل ایران آماده می‌کنند، پس از آنالیز بازی ایران دریافتند که نقطه‌ی قوت ایران در خط حمله‌ی این تیم است و در نتیجه تصمیم گرفتند دفاع خودشان را تقویت کنند. مربی آرژانتین سیستم دفاعیشان را به شکل تعدادی ستون کنار هم با ارتفاع‌های طبیعی مدل کرده است. برای مثال این یک سیستم دفاعی ۵ ستونه است:



که به ترتیب از چپ ارتفاع ستون‌ها برابر ۵، ۱، ۳، ۱، ۳ می‌باشد. یک سیستم دفاعی قوی است، اگر به شکل مستطیل باشد. حال مربی آرژانتین می‌خواهد با قرار دادن کم‌ترین تعداد مستطیل در شکل که هیچ دو مستطیلی با هم تلاقی نداشته باشند، شکل اولیه را به شکل یک مستطیل در بیاورد. برای مثال با ۳ مستطیل می‌توان شکل بالا را کامل کرد:



برای یک سیستم دفاعی، عدد  $M$  را برابر با کمترین تعداد مستطیل لازم برای ایجاد یک سیستم دفاعی قوی، به طوری که ارتفاع مستطیل نهایی بیشتر ارتفاع ستون‌های اولیه باشد، می‌نامیم. (به عنوان مثال، برای شکل بالا مقدار  $M$  برابر با ۴ است).

۳- الف (۱۱ نمره): فرض کنید سیستم دفاعی ۲۴۲ ستونه‌ای داریم که ارتفاع ستون  $i$ -ام برابر با بزرگ‌ترین توانی از ۳ است که  $i$  به آن بخش‌پذیر باشد. برای این حالت باقیمانده‌ی تقسیم  $M^f$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

۳- ب (۱۱ نمره): فرض کنید یک سیستم دفاعی با ۲۰۰۰۰ ستون داریم و ارتفاع ستون‌ها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$h_1 = 123 \cdot$$

$$h_2 = 456 \cdot$$

$$h_i = (h_{i-1} + h_{i-2}) \% 1234 + 1 \cdot$$

برای این حالت باقیمانده‌ی تقسیم  $M^f$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

۳- ج (۱۱ نمره): تمام سیستم‌های دفاعی ۲۰۰۰۰ ستونه که ارتفاع هر ستون حداکثر ۱۰۰۰۰ است را در نظر بگیرید. اگر برای همه این  $10000^{20000}$  سیستم، عدد  $M$  را محاسبه کنیم و عدد  $K$  را برابر با مجموع همه این اعداد تعریف کنیم، باقیمانده‌ی تقسیم  $K$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

**مسئله‌ی سه: گاوی و به هم ریختن توپ‌ها! ..... ۳۴ نمره**

ببعی  $n$  توپ با شماره‌ی ۱ تا  $n$  دارد. ببعی که بسیار مرتب و منظم است، همه‌ی این توپ‌ها را به ترتیب پشت سر هم قرار داده. در یک روز گرم آفتابی، گاوی تصمیم گرفت تا ترتیب توپ‌های ببعی را به هم بریزد. گاوی برای به هم ریختن ترتیب توپ‌ها، روش زیر را انتخاب کرد:

فرض کنید مقسوم علیه‌های عدد  $n$  به ترتیب برابر با  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  باشند. در این صورت گاوی به ازای هر عدد  $1 \leq i \leq k$  حرکت زیر را انجام می‌دهد:

ابتدا گاوی توپ‌ها را به ترتیب به دسته‌های  $d_i$  تایی تقسیم می‌کند. سپس ترتیب توپ‌های درون هر دسته را برعکس می‌کند. به عنوان مثال اگر ببعی ۶ توپ داشته باشد، گاوی توپ‌ها را به این شکل به هم می‌ریزد:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow 2, 1, 4, 3, 6, 5 \rightarrow 4, 1, 2, 5, 6, 3 \rightarrow 3, 6, 5, 2, 1, 4$$

ببعی بعد از این که توپ‌ها را دید، تصمیم گرفت گرفت مقدار عدد زیر را حساب کند:  
فرض کنید شماره‌ی نوشته شده بر روی توپ  $i$ -ام (از سمت چپ)، برابر با  $a_i$  باشد. در این صورت عدد مورد نظر ببعی برابر خواهد بود با:

$$M = \sum_{i=1}^n i * a_i$$

۳-الف (۱۱ نمره): اگر  $n$  برابر با ۷۲ باشد، در این صورت باقیمانده‌ی تقسیم  $M$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

۳-ب (۱۱ نمره): اگر  $n$  برابر با ۱۰۰۸۰ باشد، در این صورت باقیمانده‌ی تقسیم  $M$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

۳-ج (۱۲ نمره): اگر  $p$  برابر با ۱۳۰۹۹ و  $n$  برابر با  $p^p$  باشد، در این صورت باقیمانده‌ی تقسیم  $M$  بر  $\Delta$  چقدر است؟

پاسخ شما: .....

«پاینده و جاوید باشی دانش‌پژوه جان!»