به نام خدا

«هندسه‌ی کروی بدون روش‌های مثلثاتی»

نویسنده: شایان عزیزی

بازنگری: عباس فروزان‌نژاد

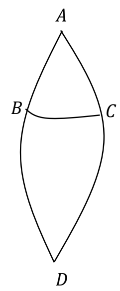
11 th IOAA Team

I.R. IRAN

۱۳۹۶

مقدمه

ابتدا داستان نوشته شدن این متن را برایتان نقل می‌کنم. قضیه‌ی معروفی در مورد مثلث‌های کروی هست که بیان می‌کند در هر *مثلث کروی متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به قاعده برابرند. هم‌چنین اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.* اگر سعی کنیم قسمت دوم این قضیه را به اثبات برسانیم و از فرمول سینوس کروی استفاده کنیم به این نتیجه می‌رسیم که سینوس دو ضلع باید برابر باشند، اما با نوشتن روابط مثلثاتی دیگر حکم قوی‌تر می‌شود و دو ضلع برابر می‌شوند. یک بار دو تن از دوستان از من پرسیدند (در حالی‌که نزدیک تخته سیاه بودیم) که شاید با روابط مثلثاتی درستی قضیه اثبات شود، اما شهود آن که تنها جواب برابری سینوس‌ها در این‌جا برابری اضلاع باشد چیست؟ ابتدا سعی کردم آن‌ها را سر در گم کنم(!) اما بعد فکری به ذهنم رسید. با گچ مثلثی روی تخته کشیدم و اضلاعی که قرار بود برابری‌شان اثبات شود را امتداد دادم.



به طور خلف فرض کنیم جواب دیگر برابری سینوس‌ها درست باشد یعنی $AB = 180 - AC$. با توجه به شکل چون $AD = 180°$، $BD = 180 - AB = AC$ و $CD = 180 - AC = AB$ و BC هم که مشترک است. پس باید دو مثلث هم‌نهشت باشند(ض‌ض‌ض) و $DBC = 180 - ABC = ACB$. این تنها در زمانی با برابری زوایای در تضاد نیست که هر دو قائمه باشند که در این حالت هم A قطب BC می‌باشد و $AB = AC = 90 = 180 - AB = 180 - AC$

بعدها کار دیگری باعث خرسندی شد(البته ابتدا صرفاً حس حل کردن یک مسئله را داشتم اما بعد به اهمیت آن‌چه داشت رخ می‌داد پی بردم) اثبات قضیه‌ای منتسب به اویلر بدون استفاده از مثلثات کروی. این اثبات در انتهای نوشته آمده است. به‌نظر می‌رسید هندسه‌ی کروی بدون هیچ استفاده‌ای از مثلثات هم پتانسیل‌های زیادی برای ارائه‌ی برخی حقایق ریاضی دارد. پس کار را شروع کردم نتیجه اثبات شدن قضایایی بود که در این نوشته آمده است. بعدها کتاب "هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی" نوشته‌ی ماروین. جی. گرینبرگ را مطالعه کردم و از الفاظ کتاب و بیان اصول اقلیدس در نگارش صفحه‌ی اول و دوم این نوشته استفاده شده‌است.

برای آن‌که آسان‌تر از **قضیه**هایی که اثبات کرده‌ایم استفاده کنیم، بر روی برخی از آن‌ها نامی گذاشته‌ایم.

نوشته البته از لحاظ ریاضی می‌تواند بسیار دقیق‌تر شود.

تمرین‌هایی در خلال نوشته مطرح شده که گاهی ممکن است از نتایج یک ***تمرین*** در ادامه متن استفاده شود.

از حقایقی که در روند اثبات **قضیه‌ی کم‌ترین فاصله** مطرح می‌شود در ادامه بسیار استفاده خواهد شد، پس تمامی مواردی که در متن اثبات آن می‌آید را در ذهن نگه دارید. هر جا نیاز باشد، اشاره شده است *"بنا به استدلالات قضیه‌ی کم‌ترین فاصله"*، در این‌جا اگر تمام زوایای اثبات قضیه را در ذهن داشته باشید به‌سرعت متوجه خواهید شد منظور کدام بخش از متن اثبات بوده‌است.

صحبتی بسیار مختصر در مورد هندسه‌ی نااقلیدسی کرده‌ایم؛ آن هندسه‌ای که ارایه‌ی آن برای برخی از نظریه‌پردازانش به بهای ناچیز مطرود شدن توسط برخی کوته‌اندیشان و نادان شناخته شدن از دید برخی بدخواهان تمام شده‌است.

هدف ما از این اشاره‌های کوتاه ایجاد یک شهود کلی از هندسه‌ی نااقلیدسی بوده و آشنایی با آن تفکری که خلاق باشد، توان زایایی و ایجاد دانش و بصیرت داشته باشد.

در ادامه بحث شده است که چه نسبتی بین هندسه‌ی کروی و هندسه‌ی ریمانی می‌تواند باشد.

هم‌چنین یکی از اهداف، آشنایی با زیبایی‌های تفکر ریاضی و ساخت یک دستگاه ریاضی بوده است.

هدف آموزشی‌تر اما ایجاد شهود از هندسه‌ی روی کره بوده است. ایجاد شهودی از خواص مثلث‌های کروی با توجه به طریقه‌ساختشان. برخی از نتایج می‌تواند در حل برخی از معادلات مثلثاتی برای مثلث‌ها هم کمک کند مانند همان که در بالا آمده است.

نکته‌ی جالب دیگر شباهت قضایای هندسه‌ی مسطحه و هندسه‌ی کروی است.

امیدوارم که بنده را از نواقص و ایراداتم مطلع سازید.

سربلند باشید!

shayan6azizi@gmail.com

مقدمه‌ای کوتاه در هندسه‌ی نااقلیدسی

با اصول اقلیدس آغاز می‌کنیم.

اصل اول) به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P منطبق نباشد خطی یکتا مانند L وجود دارد که از P و Q می‌گذرد.

اصل دوم) به ازای هر پاره‌خط AB و هر پاره‌خط CD نقطه‌ی منحصر به فردی چون E وجود دارد چنان‌که B بین A و E واقع می‌باشد و پاره‌خط CD با پاره‌خط BE قابل انطباق است.(به‌طور شهودی هر پاره‌خط را می‌توان به‌میزان پاره‌خط داده شده‌ی دیگری امتداد داد.)

تعریف دایره:

دو نقطه‌ی O و A داده شده‌اند. مجموعه‌ی همه‌ی نقطه‌هایی مانند P به‌طوری‌که پاره‌خط OP قابل انطباق با پاره‌خط OA باشد دایره‌ی به مرکز O نامیده می‌شود. هریک از پاره‌خط‌های OP یک شعاع این دایره نام دارد.

اصل سوم) به‌ازای هر نقطه‌ی O و هر نقطه‌ی A که بر O منطبق نباشد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA وجود دارد.

تعریف زوایای مکمل:

هرگاه دو زاویه‌ی $\widehat{BAD}$ و $\widehat{CAD}$ در ضلع AD مشترک باشند و دوضلع AB و AC روی یک خط قرار داشته باشند مکمل هستند.

تعریف زاویه‌ی قائمه:

زاویه $\widehat{ABC}$ را قائمه می‌گوییم هرگاه مکملش با خودش قابل انطباق باشد.

اصل چهارم) همه‌ی زاویه‌های قائمه قابل انطباقند.

به هندسه‌ای که با این چهار اصل به‌همراه بن‌داشت(اصل)های هیلبرت (ر.ک: ماروین ج. گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی) ساخته شود هندسه‌ی نتاری گفته می‌شود. یکی از نکات مهم در هندسه‌ی نتاری حتمی بودن وجود خط موازی خطی دیگر گذرنده از نقطه‌ای خارج آن خط است.

اصل پنجم؛ اصل توازی)

-هندسه‌ی اقلیدسی:

اصل توازی اقلیدسی) به ازای هر خط L و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر آن یک و *تنها* یک *خط* از P می‌گذرد چنان‌که با L موازی باشد.

-هندسه هذلولوی:

اصل توازی هذلولوی؛ بن‌داشت هذلولوی) یک خط L و یک نقطه‌ی P غیرواقع بر L وجود دارد به‌طوری‌که حداقل دو خط موازی با L از P می‌گذرد.

از قضیه‌ی بالا به‌سرعت اثبات می‌شود که مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌هایش کمتر از $180°$ است.

از طرفی در هندسه‌ی نتاری می‌توان نشان داد اگر مستطیل وجود داشته باشد مجموع زوایای هر مثلث برابر $180°$ است و بالعکس.(**تعریف مستطیل:** چهارضلعی‌ای با چهار زاویه قائمه)

از دو گزاره‌ی قبل قضیه‌ی زیر به نحوی اثبات می‌شود:

قضیه‌ی کلی هذلولوی) به ازای هر خط L و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر L، *حداقل دو خط* موازی L وجود دارد که از P می‌گذرد.

-هندسه ریمانی(بیضوی):

اصل توازی ریمانی(بیضوی)) به ازای هر خط L و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر آن هیچ *خطی* از P نمی‌گذرد چنان‌که با L موازی باشد.

پس هندسه‌ی ریمانی، نتاری نیست.

آن‌چه سعی داریم در ادامه به‌وجود بیاوریم یک الگوی سه‌بعدی اقلیدسی(همان کره) است برای بررسی هندسه ریمانی(بیضوی)ی دوبعدی.

به این ترتیب نمی‌توان صفحه‌ی هندسه‌ی ریمانی(با خمیدگی ثابت) را به‌طور کامل در فضای سه‌بعدی اقلیدسی قرار داد چرا که اثبات می‌شود کره تنها رویه‌ی با خمیدگی مثبت و ثابت است و آن‌هم سطح محدودی دارد.

پس الگوی ما از این نظر نقصی دارد.

منظور از الگو پیدا کردن موجوداتی اقلیدسی است که با توجه به خصوصیاتشان معرف اشیای غیر اقلیدسی باشند؛ در واقع پیدا کردن الگو پاسخی‌ست به این سوال که *"هندسه‌ی نااقلیدسی را چگونه باید از راه اقلیدسی تجسم کنیم؟"*

برای آن یک دستگاه اصول موضوع تشکیل می‌دهیم با حفظ چهار اصل اول در بالا موجودات اقلیدسی را به‌طوری محدود می‌کنیم که در شکل‌های نااقلیدسی اصل توازی صدق کنند.در واقع با ایجاد چنین الگوهای موفقی دیده می‌شود که اصل پنجم از چهار اصل اول (اصول هندسه‌ی نتاری) مستقل است.

الگوهای دوبعدی اقلیدسی‌ای برای بررسی هندسه‌ی هذلولوی دوبعدی وجود دارند(مانند الگوهای بلترامی-کلاین و الگوهای پوانکاره؛ ر.ک: ماروین ج. گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، فصل هفتم). هم‌چنین یک الگوی سه‌بعدی اقلیدسی برای هندسه‌ی دوبعدی هذلولوی *"شبه کره"* است.

یک الگوی (ناقص) سه‌بعدی اقلیدسی برای هندسه‌ی ریمانی دوبعدی، کره است. برای آن‌که منظور از الگو را ساده‌تر و شهودی‌تر بیان کنیم، مورچه‌ای را روی یک کره تصور کنید. فرض کنیم مورچه موجودی است کاملاً دوبعدی؛ یعنی تنها توانایی درک دو بعد را دارد نه بیشتر. تجربیات هندسی‌ای که مورچه روی کره دارد همان تجربیاتی است که از هندسه‌ی ریمانی دوبعدی نتیجه می‌شود. مثلاً این‌که مورچه هرچه تلاش کند نمی‌تواند از نقطه‌ای خارج یک خط، خطی موازی آن رسم کند. مورچه روی یک موجود سه‌بعدی اقلیدسی(کره) است اما اگر صفحه‌ی هندسه‌ی دوبعدی مورچه را سطح کره بگیریم مورچه هندسه‌ای نااقلیدسی تجربه می‌کند. این‌که مورچه روی کره قرار دارد را شما که موجودی سه‌بعدی هستید می‌دانید، او توانایی درک سه بعد را ندارد. همین‌طور اگر کیهان ما یک کیهان نااقلیدسی(و سه‌بعدی) باشد موجوداتی چهار بعدی شاید بتوانند یک کره‌ی چهار بعدی اقلیدسی بسازند و تجربیات ما در هندسه‌ی سه‌بعدی ریمانی را با ابزارهای هندسه اقلیدسی بررسی کنند.

در الگوی کره‌ی سه‌بعدی اقلیدسی برای هندسه مسطحه(دوبعدی) ریمانی:

نقاط روی کره نقاط ریمانی است،

دوایر عظیمه خطوط ریمانی هستند،

مثلث‌های کروی، مثلث‌های ریمانی هستند،

سطح کره صفحه‌ی ریمانی است،

دوایر صغیره و عظیمه دوایر ریمانی هستند،

و...

مشخصاً منظور از مثلث کروی، آن موجود سه‌ضلعی است که از برخورد دوایر عظیمه‌ای به‌وجود می‌آید که دوبه‌دو نامنطبق باشند.

برای کامل‌تر ساختن هندسه‌مان و مستقل ساختن براهین از نمودارها، چند بن‌داشت دیگر نیاز داریم.

دربن‌داشت‌های زیر منظور از خط همان کمان‌های روی کره است.

بن‌داشت اول) خطی که از نقطه‌ی A می‌گذرد و بین دو پاره‌خط AB و AC قرار دارد، پاره‌خط BC را قطع می‌کند.(قطعه‌بر)

تمرین: نشان دهید اگر خطی از A عبور کند و پاره‌خط BC *را قطع کند بین دو پاره‌خط AB و AC قرار دارد.*

بن‌داشت دوم) اگر پاره‌خط AD بین دو پاره‌خط AB و AC قرار داشته باشد (AD درون $\widehat{BAC}$) زاویه‌ی $\widehat{BAC}$ از زاویه‌های $\widehat{BAD}$ و $\widehat{DAC}$ بزرگ‌تر است.

تمرین: عکس بن‌داشت بالا را اثبات کنید.

بن‌داشت سوم) دو مثلث کروی در حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشتند.

بن‌داشت چهارم) دو مثلث کروی در حالت (ض‌زض) هم‌نهشتند.

توجه کنید در ساختن الگومان قرار است از خواص کره استفاده کنیم، مثلاً این‌که هر دایره‌ی عظیمه دو قطب دارد که فاصله‌ی آن‌ها از تک‌تک نقاط دایره قائمه است. و دوایر عظیمه که از قطب دایره‌ی عظیمه‌ای بگذرند، بر آن دایره‌ی عظیمه عمودند.

**مساحت کره‌ای به شعاع R برابر $4\pi R^2$ است.*

قضیه: *مثلث کروی ABC را روی کره‌ای به‌شعاع R در نظر بگیرید. مساحت این مثلث که با S نشان می‌دهیم برابر است با:*

$$S = \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi\right)R^2$$

زوایا برحسب رادیان می‌باشند.

تمرین: قضیه‌ی بالا را اثبات کنید.

جالب است بدانید گاوس با استفاده از هندسه دیفرانسیل نشان داد که برای سطح با خمیدگی ثابت K اگر ABC مثلثی ژئودزیک باشد(اضلاع آن ژئودزی باشند) مساحت از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$K \times S(ABC) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

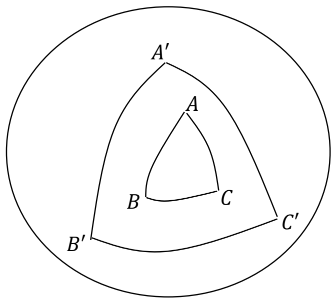
که زوایا برحسب رادیان هستند. کره رویه‌ای با خمیدگی ثابت $\frac{1}{R^2}$ است.

**پس مجموع زوایای هر مثلث کروی بیش از $180°$ می‌باشد.*

قضیه: *در هندسه‌ی کروی مستطیل وجود ندارد.*

تمرین: قضیه‌ی بالا را اثبات کنید.

موجودی را تحت عنوان *مثلث قطبی* معرفی می‌کنیم.
مثلث کروی ABC را در نظر بگیرید، $A'B'C'$ را مثلث قطبی ABC می‌گوییم.



امتداد کمان AC کره را به دو نیم‌کره تقسیم می‌کند هم‌چنین دارای دو قطب است. آن قطب که به B نزدیک‌تر است را B' می‌نامیم. مکان هندسی نقاط A' و C' نیز همین‌گونه است. مثلث $A'B'C'$ را مثلث قطبی ABC می‌نامیم.

تمرین: اگر زوایا را با حروف بزرگ رئوس و ضلع‌ها را با حروف کوچک رئوس روبه‌رو نشان دهیم، ثابت کنید:

$$a' = 180° - A,\quad b' = 180° - B,\quad c' = 180° - C$$
$$A' = 180° - a,\quad B' = 180° - b,\quad C' = 180° - c$$

قضیه: *هر دو مثلث کروی در حالت (زضز) هم‌نهشتند.*

اثبات:

دو مثلث ABC و DEF را در نظر بگیرید؛ فرض کنیم که $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{B} = \hat{E}$ و هم‌چنین $c = f$. اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و $D'E'F'$ به‌ترتیب مثلث‌های قطبی ABCو DEF باشند، داریم: $\widehat{C'} = 180 - c$ و $\widehat{F'} = 180 - f$ بنابراین $\widehat{C'} = \widehat{F'}$.

هم‌چنین دوباره از خواص مثلث قطبی داریم: $b' = 180 - \hat{B}$، $e' = 180 - \hat{E}$ و هم‌چنین $a' = 180 - \hat{A}$، $d' = 180 - \hat{D}$.

از آن‌ها نتیجه می‌شود $b' = e'$ و $d' = a'$. پس دو مثلث $A'B'C'$ و $D'E'F'$ در حالت (ض‌زض) هم‌نهشتند.

پس سایر اجزای متناظر: $\widehat{A'} = \widehat{D'}$ ، $\widehat{B'} = \widehat{E'}$ و $c' = f'$.

از خواص مثلث قطبی و سه تساوی بالا نتیجه می‌شود: $\hat{C} = \hat{F}$ ، $a = d$ و $b = e$. پس دو مثلث ABC و DEF (در حالت(ض‌زض)) هم‌نهشتند.

و یعنی حالت (زضز) برای هم‌نهشتی دو مثلث کروی قابل قبول است.

قضیه: *هر دو مثلث کروی در حالت (ززز) هم‌نهشتند.*

تمرین:قضیه‌ی بالا را اثبات کنید.

این قضیه بیان می‌کند که در هندسه‌ی ریمانی مثلث‌های متشابه وجود ندارد، به‌طور شهودی نمی‌توان یک مثلث را کوچک و بزرگ کرد بدون این‌که از شکل کلی خود بیافتد، هر مثلث با اندازه‌ی سه زاویه‌اش به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

قضیه: *هر دو مثلث کروی قائم‌الزاویه در حالت (وتر و یک ضلع) لزوماً هم‌نهشت هستند مگر این‌که آن اضلاع مذکور قائمه باشند.*

یعنی اگر فرض کنیم در دو مثلث ABC و DEF، $\hat{A} = \widehat{D} = 90°$، $a = d$ و $b = e \neq 90°$. باید نشان دهیم دو مثلث هم‌نهشت هستند.

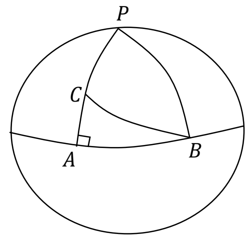
اثبات:

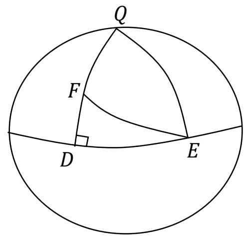
حالت اول $b, e < 90°$.

حالت دوم $b, e > 90°$.

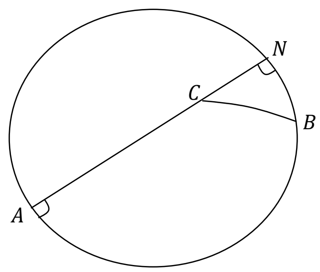
با حالت اول شروع می‌کنیم. اگر ضلع‌های AC و DF را در هر مثلث امتداد دهیم، از قطب اضلاع AB و DE عبور خواهند کرد. اگر قطب AB را P و

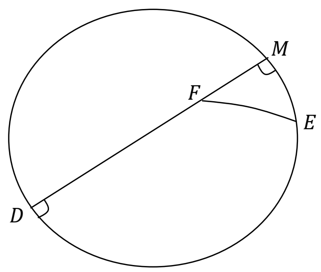
قطب DE را Q بنامیم، داریم: $PC = 90° - b$ و $QF = 90° - e$؛ همچنین $PB = QE = 90$. از طرفی $FE = BC$ زیرا فرض داریم که وترهای دو مثلث برابرند؛ پس دو مثلث PCB و QFE همنهشت می‌باشند. از آن‌جا $\hat{Q} = \hat{P}$ پس $c = f$ و دو مثلث ABC و DEF (بنا به حالت (ض‌ض‌ض)) همنهشتند.





در حالت دوم باز هم ضلع‌های AC و DF را امتداد می‌دهیم تا امتداد اضلاع AB و DE را در نقاط M و N قطع کنند. از آن‌جا که اگر ضلع‌های AC و DF را در هر مثلث امتداد دهیم، از قطب اضلاع AB و DE عبور خواهند کرد؛ بنابراین، $N = M = 90°$ و $CN = 180° - b$ و $FM = 180° - e$. پس $FM, CN < 90°$. از برابری وترها هم $BC = FE$. پس دو مثلث CNB و FME در حالت اول که اثبات کردیم همنهشتند. پس $\widehat{NCB} = \widehat{MFE}$ در نتیجه مکمل‌های آن‌ها یعنی $\widehat{ACB}$ و $\widehat{DFE}$ برابرند و در نتیجه دو مثلث ABC و DEF در حالت (ض‌زض) همنهشتند.





اما حالتی که $b, e = 90°$. برای این حالت مثال نقض وجود دارد. در این حالت C و F قطب‌های اضلاع روبه‌رویشان هستند؛ پس وتر نیز قائمه است و بی‌شمار مثلث با این شرایط وجود دارد.

قضیه: *هر دو مثلث کروی قائم‌الزاویه لزوماً در حالت (وتر و یک زاویه) هم‌نهشتند مگر آن‌که آن زاویه‌ها قائمه باشد.*

تمرین: قضیه بالا را اثبات کنید.

تعریف مثلث کروی متساوی‌الساقین:

هر مثلث کروی که دارای دو ضلع برابر باشد را مثلث کروی متساوی‌الساقین می‌نامیم. دو ضلع برابر را ساق و ضلع دیگر را قاعده می‌نامیم.

قضیه: *در هر متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به قاعده برابرند. هم‌چنین اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.*

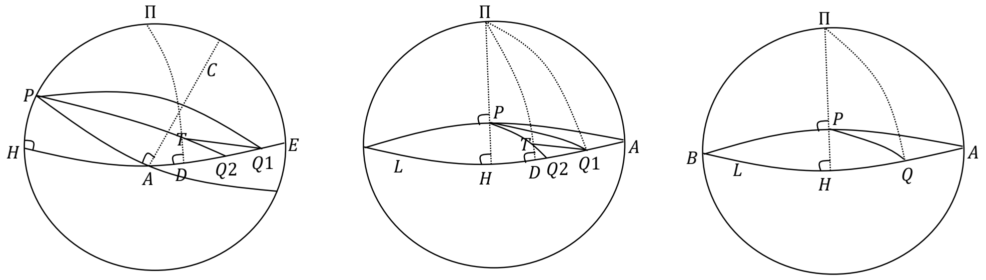
نیم‌ساز زاویه‌ی $\hat{A}$ در مثلث ABC که در آن $c = b$ را رسم می‌کنیم. بنابر "*قطعه‌بر*" نیم‌ساز، ضلع BC را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند. پس $AD = AD$، $b = c$ $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ (نیم‌ساز) و دو مثلث ABD و ADC هم‌نهشت و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قابل انطباق هستند.

تمرین: قسمت دوم قضیه‌ی بالا را اثبات کنید.

نقطه‌ی P و دایره‌ی عظیمه‌ی L را در نظر بگیرید که P قطب L نباشد، از P بر L دو عمود وارد می‌شود پای آن عمود که اندازه‌اش کم‌تر از $90°$ را H می‌نامیم.

قضیه‌ی کم‌ترین فاصله: *کوتاه‌ترین فاصله‌ی P تا دایره‌ی L همان طول PH است و با دور شدن از H روی L فاصله‌ی هر نقطه‌ی دل‌خواه Q تا P*

افزایش می‌یابد.
نمودارهای زیر را برای آسان‌تر شدن درک مسئله در نظر بگیرید.

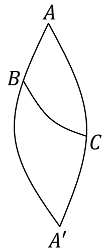


شکل 3 شکل 2 شکل 1

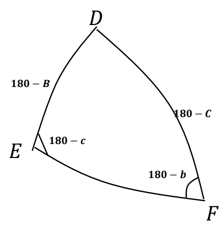
ابتدا به شکل 1 توجه کنید. از نقطه‌ی P عمود بر ΠH (Π قطب L) رسم کرده‌ایم تا در نقطه‌های A و B دایره‌ی L را قطع کند. نقطه‌ای دل‌خواه مانند Q بین H و A در نظر گرفتیم. بنابه بن‌داشت‌های اول و دوم زاویه‌ی $\widehat{HPQ}$ حاده است. این نتیجه را لم قضیه‌ی کم‌ترین فاصله می‌نامیم.
حال به شکل 2 توجه نمایید. نقاط $Q1$ و $Q2$ مفروضند که $HQ1 > HQ2$. می‌خواهیم اثبات کنیم که $PQ1 > PQ2$. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $PQ2 > PQ1$. در این‌صورت نقطه‌ای مانند T بر $PQ2$ وجود دارد که $PT = PQ1$. پس از قضیه‌ی مربوط به مثلث‌های متساوی‌الساقین، $\widehat{PTQ1} = \widehat{PQ1T}$. از طرفی $Q1P$ بین H و Π خط حامل ΠH را قطع کرده‌است پس $\widehat{PQ1Q2}$ و در نتیجه آن $\widehat{PQ1T}$ حاده است(به بن‌داشت‌های اول و دوم مراجعه کنید.) پس$\widehat{PTQ1}$ نیز حاده است.
حال اگر بخواهیم ارتفاع وارد از T را در مثلث $TQ1Q2$ رسم کنیم، کافی‌ست از Π به T وصل کرده امتداد دهیم تا دایره‌ی L را در نقطه‌ی D قطع کند. چون ΠT بین $\Pi Q2$ و ΠH قرار دارد، D بین H و$Q2$ واقع می‌شود. حال $DQ1 < 90°$، پس بنابه لم قضیه‌ی کم‌ترین فاصله $\widehat{DTQ1}$ و در نتیجه $\widehat{Q2TQ1}$ حاده می‌باشند؛ یعنی $\widehat{PTQ1}$ منفرجه است که این با حاده بودن این زاویه در تناقض است.
پس $PQ1 > PQ2$.
اما شرایط در حالتی که نقطه‌ی Q بیرون از HA (پشت کره در شکل‌های 1و2) باشد:
اگر در این حالت T به‌گونه‌ای باشد که $DQ1 > 90°$ چه؟
نشان می‌دهیم که چنین اتفاقی نمی‌افتد.
ابتدا نشان می‌دهیم در حالتی که نقطه‌ی Q بیرون از HA (پشت کره در شکل‌های 1و2) باشد لزوماً $PQ > 90°$. برای آن به شکل 3 توجه کنید که در آن کره را از نقطه‌ی A دیده‌ایم.
به‌ازای هر نقطه‌ی Q بین A و E، زاویه‌ی $\widehat{PAQ}$ منفرجه است (چرا؟). پس اگر از نقطه‌ی A دایره‌ی C را عمود بر PA رسم کنیم، PQ را بنابه بن‌داشت‌های اول و دوم قطع می‌کند. $PA = 90°$ (به‌علاوه PA عمود بر C، پس P قطب C) $PQ > 90°$.
حال شبیه اثبات بخش قبلی نقاط $Q1$ و $Q2$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اثبات کنیم که $PQ1 > PQ2$. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $PQ2 > PQ1$. در این‌صورت نقطه‌ای مانند T بر $PQ2$ وجود دارد که $PT = PQ1$. پس از قضیه‌ی مربوط به مثلث‌های متساوی‌الساقین، $\widehat{PTQ1} = \widehat{PQ1T}$. از طرفی $\widehat{PQ1T}$ حاده است (چرا؟) پس $\widehat{PTQ1}$ نیز حاده است. در ضمن نکته‌ی مهم این است که T در نیم‌کره‌ای که توسط C جدا شود و P در آن باشد قرار ندارد زیرا نشان دادیم برای هر Q بین A و E $PQ > 90°$ و هیچ کمان حاده‌ای با یک کمان منفرجه برابر نیست.
پس باز هم شبیه اثبات قسمت قبلی اگر ارتفاع TD را رسم کنیم، چون ΠT بین $\Pi Q2$ و ΠA قرار دارد، D بین A و$Q2$ واقع می‌شود. حال $DQ1 < 90°$، پس بنابه لم قضیه‌ی کم‌ترین فاصله $\widehat{DTQ1}$ و در نتیجه $\widehat{Q2TQ1}$ حاده می‌باشند؛ یعنی $\widehat{PTQ1}$ منفرجه است که این با حاده بودن این زاویه در تناقض است. پس $PQ1 > PQ2$.

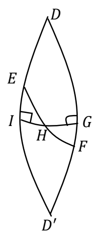
قضیه‌ی اجزای مکمل: *اگر در مثلث ABC، $\hat{B} = 180° - \hat{C}$ آن‌گاه* $b = 180° - c$. در ضمن در این شرایط ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی منفرجه، منفرجه است.
اثبات:
در مثلث ABC ، AB و AC امتداد می‌دهیم تا در نقطه‌ی A' یک‌دیگر را قطع کنند.

$\widehat{CBA'} = 180° - \hat{B} = \hat{C}$ ، هم‌چنین داریم $\widehat{BCA'} = 180° - \hat{C} = \hat{B}$.
چون ضلع BC بین دو مثلث مشترک است، دو مثلث ABC و $A'BC$ در حالت (زضز) هم‌نهشتند. پس $AB = A'C$ و $AC = A'B$. چون داریم $AA' = 180°$ از آن‌ها نتیجه می‌شود $b = 180° - c$.



بخش دوم قضیه‌ی بالا را اثبات می‌کنیم. مثلث قطبی ABC را رسم می‌کنیم. مثلثی مطابق شکل سمت راست در زیر به‌دست می‌آید.





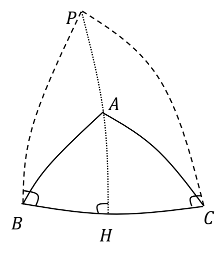
حال اضلاع DE و DF را امتداد می‌دهیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی D' قطع کنند. از این‌جا به بعد از شکل سمت چپ بهره بگیرید. داریم $DD' = 180°$. فرض کنیم بدون کاستن از کلیت مسئله $\hat{C}$ حاده باشد، DF منفرجه است. هم‌چنین DE حاده است. G را روی DF قرار می‌دهیم به‌طوری‌که $DG = 90°$ حال از G به DF عمود می‌کنیم تا EF را در H و ED' را در I قطع کند. $EI = \hat{B} - 90°$ و $GF = 180 - \hat{C} - 90° = \hat{B} - 90°$، پس $GF = EI$ از طرفی $\widehat{IEH} = 180° - (180° - c) = c$ و $\widehat{HFG} = 180° - b = c$، پس $\widehat{HFG} = \widehat{IEH}$ و هم‌چنین $\widehat{EIH} = \widehat{FGH} = 90°$ (چرا EIH قائمه است؟) . در نتیجه دو مثلث EIH و HGF هم‌نهشتند. پس $IH = GH$. در نتیجه هر دو آن‌ها حاده‌اند. پس مشابه استدلال‌های اثبات قضیه‌ی کم‌ترین فاصله $\widehat{IEH}$ و $\widehat{HFG}$ تند هستند. پس c حاده و b منفرجه است.

نتیجه) در مثلث ABC اگر $\hat{B}$ و AB حاده باشند و $\hat{C}$ منفرجه باشد، $\hat{C} < 180 - \hat{B}$.

تمرین: درستی نتیجه‌ی بالا را اثبات کنید.

قضیه‌ی زوایای مجاور: *اگر در مثلث* ABC، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ حاده باشند و a حاده یا قائمه، b و c نیز حاده‌اند.

ابتدا ارتفاع AH را در مثلث ABC رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا از قطب BC (P) عبور کند. از آن‌جا که BC حاده یا قائمه است، HC و HB نیز حاده هستند. پس بنابه قضیه‌ی کم‌ترین فاصله، $AC < PC = 90°$ و هم‌چنین $AB < PB = 90°$.



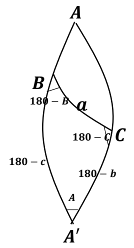
تمرین:نشان دهید اگر در مثلث ABC، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ منفرجه باشند و a حاده یا قائمه، b و c نیز منفرجه‌اند.

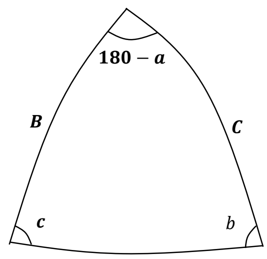
نامساوی‌های مثلثی:

قضیه اول: *در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع دیگر بزرگ‌تر است.*

اثبات:

مثلث ABC مفروض است، کافی‌ست نشان دهیم، $a < b + c$.
AB و AC را امتداد می‌دهیم تا در نقطه‌ی A' یک‌دیگر را قطع کنند. داریم $AA' = 180°$. (شکل سمت چپ در زیر)
حال مثلث قطبی مثلث $A'BC$ را رسم می‌کنیم، این مثلث دارای اجزای مثلث سمت راست در زیر خواهد بود.





پس با توجه به این‌که مجموع زوایای هر مثلث کروی بیش از $180°$ می‌باشد، برای آن می‌توان نوشت: $180° - a + b + c > 180°$؛ پس، $b + c > a$.

قضیه دوم: *برای هر مثلث دل‌خواه* ABC، $\begin{cases} \hat{A} > \hat{B} + \hat{C} - 180° \\ \hat{B} > \hat{A} + \hat{C} - 180° \\ \hat{C} > \hat{A} + \hat{B} - 180° \end{cases}$.

اثبات:

اگر باز هم مانند بخش قبل، ABو AC را امتداد می‌دهیم تا در نقطه‌ی A' یک‌دیگر را قطع کنند. داریم $AA' = 180°$.
با استفاده از همان شکل سمت چپ در بالا و برای مثلث $A'BC$ با توجه به این‌که مجموع زوایای هر مثلث کروی بیش از $180°$ می‌باشد، می‌توان نوشت: $\hat{A} + 180° - \hat{B} + 180° - \hat{C} > 180°$ و در نتیجه $\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} - 180°$. اثبات مابقی نامساوی‌ها هم به‌همین ترتیب انجام می-شود.

ضلع و زاویه برتر:

قضیه‌ی ضلع برتر: *اگر یک جفت ضلع و یک جفت زاویه (اضلاع روبه‌رو به زوایا) داشته باشیم، قضیه‌ی ضلع برتر بیان می‌کند آن ضلع بزرگ‌تر است که روبه‌روی زاویه‌ی بزرگ‌تر باشد.*

قضیه‌ی زاویه برتر: *اگر یک جفت ضلع و یک جفت زاویه(اضلاع روبه‌رو به زوایا) داشته باشیم، قضیه‌ی زاویه برتر بیان می‌کند آن زاویه بزرگ‌تر است که روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر باشد.*

ابتدا درستی چند گزاره را نشان می‌دهیم:

گزاره اول) *اگر در مثلثی ضلع برتر برقرار باشد، زاویه برتر نیز برقرار است و بالعکس.*

مثلث ABC را در نظر بگیرید. فرض کنیم ضلع برتر برای رئوس B و C برقرار باشد.

می‌خواهیم درستی زاویه‌ی برتر را نشان دهیم. فرض کنیم $b > c$. حال به‌طور خلف فرض کنیم که:

الف) $\hat{B} = \hat{C}$. در این صورت بنا به قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین $b = c$ که با فرض در تناقض است.

و یا

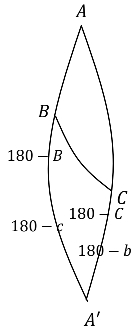
ب) $\hat{B} < \hat{C}$. در این صورت بنا به قضیه‌ی ضلع برتر $b < c$. که با فرض در تناقض است.

پس زاویه برتر بر قرار است.

قسمت دوم گزاره نیز به همین طریق اثبات می‌شود.

گزاره دوم) مثلث ABC را در نظر بگیرید. فرض کنیم که ضلع و زاویه‌ی برتر برای رئوس B و C برقرار باشد.

AB و AC را امتداد می‌دهیم تا در نقطه‌ی A' یک‌دیگر را قطع کنند. در مثلث $A'BC$ درستی ضلع برتر و زاویه برتر را نشان می‌دهیم.

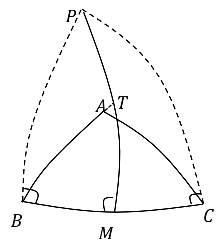


فرض کنیم $B > C$. بنابه ضلع برتر $b > c$. چون $B > C$ ،
$180° - B < 180° - C$. هم‌چنین چون $b > c$ ، $180° - c < 180° - b$.
پس ضلع برتر در $A'BC$ برقرار است پس زاویه برتر نیز.

گزاره سوم (**تعمیم قضیه‌ی زوایای مجاور**)) اگر در مثلث ABC ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ حاده باشند، حداقل یکی از ضلع‌های AB یا AC حاده هستند.

حالت $a \le 90°$ را در قضیه‌ی زوایای مجاور بررسی کردیم.

حال حالتی را در نظر بگیرید که $a > 90°$. عمود منصف BC را رسم می‌کنیم. این خط از قطب ضلع BC (P) عبور می‌کند و ضلع BC را در M قطع می‌کند. لزوماً $MB = MC$ حاده هستند.



بدون کاستن از کلیت مسئله امتداد BA، PM را در T قطع می‌کند. چون $BM < 90°$
بنابه قضیه‌ی کم‌ترین فاصله $BT < PB = 90°$ پس $BA < 90°$.

گزاره چهارم) اگر در مثلث ABC ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ حاده باشند و $a > 90°$، آن‌گاه $\hat{A} > 90°$.

از گزاره‌ی سوم می‌دانیم که b یا c حاده هستند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنیم b حاده باشد. به‌طور خلف فرض کنیم $A \le 90°$.

اگر $A = 90°$، چون b حاده است، مشابه استدلالات اثبات قضیه‌ی کم‌ترین فاصله، $a < 90°$.

اگر $A < 90°$ آن‌گاه بنا به قضیه‌ی زوایای مجاور(b ، C و Aحاده)، $a < 90°$.

چند حالت زیر را برای ضلع برتر (و بنا به گزاره‌ی اول زاویه‌ی برتر) بررسی می‌کنیم.

الف)$B, C, a < 90°$.

ب)$B, C > 90°$ و $a < 90°$.

پ)B و یا C حاده و $a < 90°$.

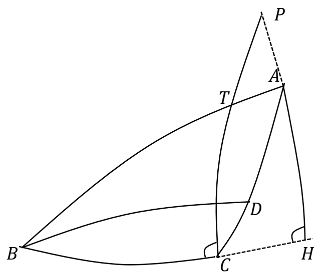
اثبات:

الف) اگر $\hat{B} > \hat{C}$ باید اثبات کنیم که $b > c$.

به‌طور خلف فرض می‌کنیم که $b < c$. به اندازه‌ی b روی AB جدا می‌کنیم و پاره‌خط AD به‌دست می‌آید $\widehat{DCA} = \widehat{ADC}$. $\widehat{DCA}$حاده است پس $\widehat{ADC}$ نیز حاده است. پس $\widehat{BDC}$ منفرجه است. بنا به نتیجه‌ی قضیه‌ی اجزای مکمل، $\widehat{BDC} < 180 - \hat{B}$ در نتیجه $\hat{B} < 180 - \widehat{BDC} =$ $\widehat{DCA}$ که این با $\hat{B} > \hat{C}$ در تناقض است.

ب) با توجه به گزاره‌ی دوم از همان حالت الف) نتیجه می‌شود.

پ) بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنیم $\hat{B}$ حاده و $\hat{C}$ منفرجه باشد.



ابتدا از A به BC عمود می‌کنیم (پای عمود H) و امتداد می‌دهیم. حال به BC از نقطه‌ی C عمودی رسم می‌کنیم. از بن‌داشت‌های 1 و2 این عمود AB را در نقطه‌ای مانند T قطع می‌کند. پس عمودهای AH و CT مطابق شکل می‌شوند؛ پس بیرون مثلث مطابق شکل یک‌دیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. $PH = 90°$ ، پس $AH < 90°$ به‌علاوه چون $\widehat{DCH}$ و $\hat{B}$ هر دو حاده هستند مطابق قضیه‌ی کم‌ترین فاصله، $AB > AC$.

زاویه‌ی برتر برای حالات بالا از گزاره‌ی اول) اثبات می‌شود.

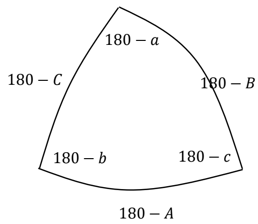
ت) B و C حاده باشند و $a > 90°$.

ث) B و C منفرجه باشند و $a > 90°$.

ج)B و یا C منفرجه باشند و $a > 90°$.

اثبات:

ت) B و C تند هستند و فرض می‌کنیم $B > C$. مثلث قطبی ABC را رسم می‌کنیم و اجزای آن مطابق شکل زیر است. از گزاره‌ی چهارم) $A > 90°$. پس ضلع $180° - A$ حاده است.



از گزاره‌ی سوم) حداقل یکی از اضلاع b یا c حاده هستند. پس حداقل یکی از $180 - b$ یا $180 - c$ منفرجه هستند. پس در مثلث رسم شده بنا به یکی از حالت‌های ب) یا پ) از زاویه‌ی برتر می‌توان استفاده کرد.

داریم $B > C$ پس $180 - B < 180 - C$. در نتیجه از زاویه‌ی برتر $180 - b < 180 - c$ پس $b > c$.

ث) این حالت بنا به گزاره دوم) از ت) نتیجه می‌شود.

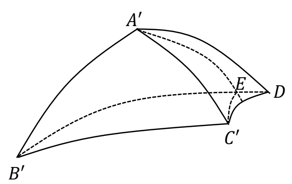
ج)مانند پ) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و مابقی اثبات مشابه آن است.

تمرین: حالت‌هایی را که دارای اجزای قائمه باشد بررسی کنید.

قضیه‌ی لولا:

مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ مفروضند به‌طوری‌که $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ و $A > A'$ می‌خواهیم نشان دهیم که $a > a'$.

روش اول: مطابق شکل زیر زاویه‌ی $\hat{A} - \widehat{A'}$ را با استفاده از نقطه‌ی D به $\widehat{A'}$اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که $A'D = A'C'$ ($\widehat{B'A'D} = \hat{A}$)

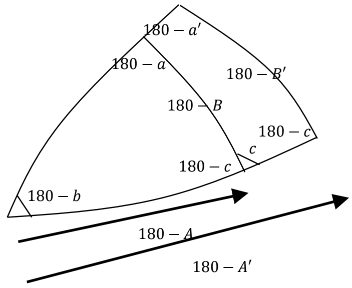


نیم‌ساز زاویه‌ی $\widehat{C'A'D}$ ، $B'D$ را در E قطع می‌کند. چون $A'C' = A'D$ و در مثلث متساوی‌الساقین ،نیم‌ساز و عمودمنصف منطبق‌اند(چرا؟)، $EC' = ED$ (چرا؟) . پس از قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین، $\widehat{EC'D} = \widehat{EDC'}$. پس $\widehat{B'C'D} > \widehat{B'DC'}$ پس بنا به قضیه‌ی ضلع برتر $B'D > B'C'$ حال وظیفه‌ی شماست نشان دهید که $B'D = a$. و قضیه اثبات می‌شود.

در روش دوم برای زوایای B و C ، B' و C' حالت‌های زیر را در نظر بگیریم.

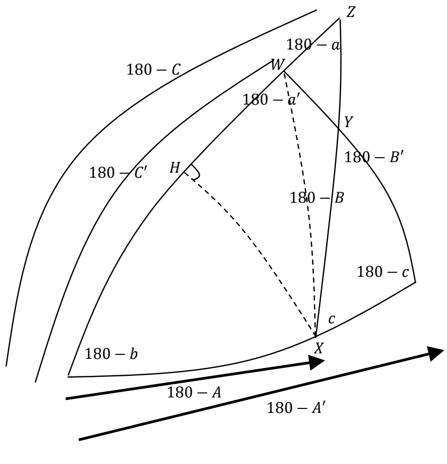
الف) از هر مثلث حداقل یک زاویه منفرجه باشد.

ب) B، C، B' و C' هر چهار حاده باشند.
پ) یکی از مثلث‌ها تنها یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد و دیگری هیچ زاویه‌ی باز نداشته باشد.
ت) یکی از مثلث‌ها دو زاویه‌ی منفرجه و دیگری دو زاویه‌ی حاده داشته باشد.
اثبات:
الف) ابتدا به‌عنوان ***تمرین*** نشان دهید که اگر از هر مثلث تنها یک زاویه منفرجه باشد، این زاویه در هر دو مثلث روبه‌رو به یک ضلع است (b یا c).
حال بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که B و B' باز باشند. حال چون $A > A'$، $180 - A < 180 - A'$. حال مثلث‌های قطبی دو مثلث را در نظر بگیرید. در آن دو زوایای با مقدار مشترک $180 - b$ وجود دارد. پس مثلث‌ها را طوری قرار می‌دهیم که این زوایا منطبق بشوند، حال نشان می‌دهیم مثلث قطبی ABC درون مثلث قطبی $A'B'C'$ قرار دارد(یعنی وضعیت مطابق شکل زیر است.)



اولاً که گفتیم $180 - A < 180 - A'$ پس مطابق شکل دو زاویه‌ی c و $180 - c$ داریم و به‌علاوه اضلاع $180 - B$ و $180 - B'$ حاده هستند،پس با توجه به قضیه‌ی اجزای مکمل محل برخورد اضلاعی که اندازه‌های $180 - B$ و $180 - B'$ دارند بیرون زاویه‌ی $180 - b$ است. پس مثلث قطبی ABC درون مثلث قطبی $A'B'C'$ می‌باشد پس مساحت کم‌تری دارد؛ یعنی مجموع زوایای کم‌تری دارد: $180 - b + 180 - a + 180 - c < 180 - a' + 180 - b + 180 - c$
پس $a > a'$.

حال اگر الف) در آن حالتی باشد که بیش از دو زاویه هم از بین چهار زاویه‌ی B، C، B' و C' باز باشند اثبات همین است.
ب) اضلاع AB، AC را در مثلث ABC و اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ را در مثلث $A'B'C'$ امتداد می‌دهیم تا به ترتیب نقاط D و D' به‌دست آیند و داریم $AD = 180°$ و $A'D' = 180°$ هم‌چنین $\hat{A} = \widehat{D}$ و $\widehat{A'} = \widehat{D'}$. بنا حالت الف) برای دو مثلث BDC و $B'C'D'$، $a > a'$.
پ) به همان روش ب) می‌توان با استفاده از الف) اثبات کرد.
ت)ابتدا توجه کنید برای آن‌که این حالت پیش بیاید باید a و a' ، هر دو منفرجه باشند ***(تمرین)*** . بنابه تعمیم قضیه‌ی زوایای مجاور حداقل یکی از اضلاع b یا c حاده هستند. فرض کنیم c حاده باشد. مثلث‌های قطبی دو مثلث را در نظر بگیرید. زاویه‌ی مشترک $180 - b$ را در این مثلث‌ها منطبق بر هم قرار می‌دهیم. توجه داریم که $180 - A < 180 - A'$. اگر مانند حالت الف) مثلث قطبی ABC درون مثلث قطبی $A'B'C'$ باشد که مانند الف) قضیه‌ی لولا اثبات می‌شود. اما اگر خلاف آن (مانند شکل زیر) باشد،



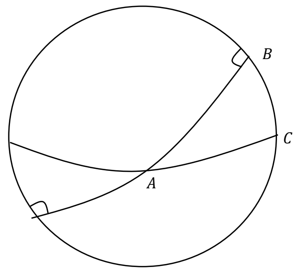
اشاره کردیم که در چنین حالتی a و a' ، هر دو منفرجه هستند پس $180 - a$ و $180 - a'$ هر دو حاده هستند پس بنابه استدلال‌های قضیه‌ی کم‌ترین فاصله ارتفاع XH مطابق شکل (بیرون $\widehat{WXZ}$) در مثلث قطبی مثلث ABC قرار دارد. از X به W وصل می‌کنیم.چون $180 - C < 180$، پس مشابه اثبات قضیه‌ی کم‌ترین فاصله $\widehat{HWX} > 180 - a$ پس $180 - a' > 180 - a$ و در نتیجه $a > a'$.

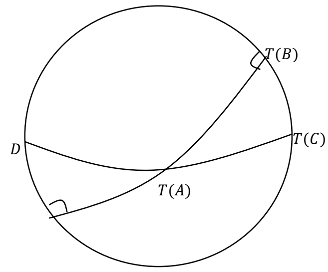
تمرین: حالت‌هایی را که دارای زوایای قائمه باشد بررسی کنید.

یک قضیه‌ی مهم:

قضیه‌ی اویلر (یکی از قضایای منسوب به لئونارد اویلر؛ آن‌که در زیر می‌آید!!!):
تبدیلی مانند T روی کره‌ی S داریم تصویر نقطه‌ی A روی کره تحت این تبدیل را با $T(A)$ نمایش می‌دهیم. اولاً تصویر کره تحت این تبدیل دقیقاً

همان کره‌ی قبلی می‌باشد. در ثانی طول کمان واصل هر دو نقطه مانند A و B تحت تبدیل ناورداست (صلب، ایزومتری)؛ یعنی: $AB = T(A)T(B)$
می‌خواهیم نشان دهیم نقطه‌ای مانند P روی کره قرار دارد، به‌طوریکه $T(P) = P$.
نقطه‌ی A را روی کره در نظر بگیرید. محل تصویر نقطه‌ی A، $T(A)$ ، نیز نقطه‌ای است روی کره، آن‌را با B نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب می-نامیم: $C: T(B) = T(T(A))$ و $D: T(C) = T(T(B)) = T(T(T(A)))$.
در ذهن داشته باشید که B, C, D تبدیل‌های A, B, C هستند.
پس دوایر عظمیه‌ی BC, CD تبدیل‌های دوایر عظمیه‌ی AB, BC.
عمود منصف‌های کمان‌های AB ، BC و CD را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که عمود منصف CD از نقطه‌ی تلاقی عمود منصف‌های AB و BC گذر می‌کند.
اول این‌که تصویر دایره‌ی عظیمه یک دایره‌ی عظیمه است، تصاویر نقاط رو به رو به هم، رو به رو به هم است.
دوم این‌که زاویه‌ی بین دو دایره‌ی عظیمه تحت این تبدیل حفظ می‌شود :

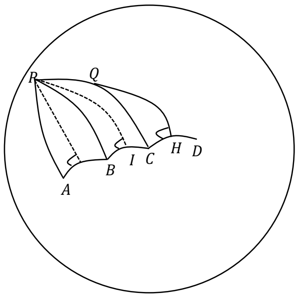




برای فهمیدن چرایی آن ابتدا شکل بالایی را در نظر بگیرید. تصویر نقطه‌ی A یکی از محل‌های برخورد تصویر دایره عظیمه‌هاست. (چون می‌توان دو نقطه‌ی منطبق با فاصله‌ی صفر نظر گرفت). از صلب بودن: $T(A)T(B) = 90°$ و $T(A)T(C) = 90°$. پس وضعیت $T(B)$, $T(C)$، مطابق شکل زیرین است (تصویر C مثلاً D نیست چون این با صلب بودن منافات دارد.) پس زاویه‌ی بین تصویر دو دایره عظیمه $T(B)T(C)$است که بنابه صلب بودن همان BC یعنی زاویه‌ی بین دو دایره‌ی عظیمه می‌باشد.

نقطه‌ی تلاقی عمود منصف‌های AB و BC را P می‌نامیم (آن‌که $PA \leq 90°$) . عمود منصف CD، PC را در Q قطع می‌کند. نشان می‌دهیم که Q بر P منطبق است. با توجه به شکل و از خاصیت عمود منصف $PA = PC = PB$.
از صلب بودن $AB = BC = CD$ و طبق آن‌چه در بالا نشان دادیم $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$.
مثلث‌های ABP و PBC در حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشتند. پس $\widehat{PBA} = \widehat{PBC}$. از طرفی $\widehat{PCB} = \widehat{PBC}$ و داریم $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ در نتیجه $\widehat{QCD} = \widehat{PCB}$ و مثلث‌های QCH و PCI در حالت دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشتند. پس $QC = PC$ و Q بر P منطبق است.
در نهایت هم $PB = PC = PD$.

حال بنا به ایزومتری بودن تبدیل، باید نقطه‌ای مانند X وجود داشته باشد که $X = T(P)$ و $XB = XC = XD$ که P خود این خاصیت را دارد. تنها توجه کنید که سه دایره‌ی صغیره با شعاع یکسان(این‌جا سه دایره‌ای که مرکزهاشان B و C و D است و شعاع $XB = XC = XD$ دارند.) اگر منطبق نباشند حداکثر در یک نقطه مشترکند پس در چنین حالتی نقطه‌ی X همان P است. $X = T(P) = P$.



اما باید نشان دهیم که اتفاق بالا می‌افتد و چنین دایره‌ی صغیره‌ای وجود دارد؛ $XB = XC = XD$ وجود دارد که هر سه قائمه نباشند. اگر به‌ازای هر A قرار باشد تنها $XB = XC = XD$ قائم به‌وجود آیند، همواره باید یک دایره‌ی عظیمه و تصویرش روی هم قرار بگیرند(چون باید زوایای PCI و PCH قائمه بشوند). گویی دوایر عظیمه همگی باید تحت تبدیل روی خودشان بچرخند. که این با صلب بودن منافات دارد. (به عنوان ***تمرین*** به‌سادگی مثال نقض بزنید.)پس چون یک تبدیل تنها یک خروجی برای هر ورودی دارد $T(P) = P$.