فصل ۲

سینماتیک در یک بُعد

۲-۱) دونده‌ی ماراتن، مسافت mi ۲۶ (تقریبا km ۴۲) را در ۲ ساعت و ۹ دقیقه می‌دود. سرعت متوسط او را بر حسب مایل بر ساعت و متر بر ثانیه به دست آورید. به طور متوسط، یک مایل را در چند دقیقه می‌دود؟

حل:

$$t' = ۹ \ \text{min} \Rightarrow t' = ۹ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۱۵ \ \ h$$

t زمان کل حرکت:

$$t = ۲ + ۰/۱۵ \Rightarrow t = ۲/۱۵ \ \ h$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب مایل بر ساعت:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۲۶}{۲/۱۵} \Rightarrow \overline{v} = ۱۲/۱ \ \ \frac{mi}{h}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب متر بر ثانیه:

$$\overline{v} = ۱۲/۱ \ \ \frac{mi}{h} \Rightarrow \overline{v} = ۱۲/۱ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \Rightarrow \overline{v} = ۵/۴۱ \ \ \frac{m}{s}$$

Δt زمان لازم برای طی مسافت یک مایل:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۱۲/۱ = \frac{۱}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۱۲/۱} \Rightarrow \Delta t = ۰/۰۸۳ \ \ h$$

$$\Delta t = ۰/۰۸۳ \ \ h \Rightarrow \Delta t = ۰/۰۸۳ \times ۶۰ \Rightarrow \Delta t = ۴/۹۶ \ \ \text{min}$$

۲-۲) قهرمان دوی سرعت، مسافت m ۱۰۰ را در مدت s ۹/۸۵ می‌دود. سرعت متوسط او را بر حسب کیلومتر بر ساعت و مایل بر ساعت به دست آورید.

حل:

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب متر بر ثانیه:

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \overline{v}=\frac{۱۰۰}{۹/۸۵}\Rightarrow \overline{v}=۱۰/۲\ \frac{m}{s}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب کیلومتر بر ساعت:

$$\overline{v}=۱۰/۲\ \frac{m}{s}\Rightarrow \overline{v}=۱۰/۲\times\frac{\frac{۱}{۱۰۰۰}}{\frac{۱}{۳۶۰۰}}\Rightarrow \overline{v}=۳۶/۷\ \frac{km}{h}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب مایل بر ساعت:

$$\overline{v}=۳۶/۷\ \frac{km}{h}\Rightarrow \overline{v}=۳۶/۷\times\frac{۱}{۱/۶۰۹}\Rightarrow \overline{v}=۲۲/۸\ \frac{mi}{h}$$

۲-۳) راننده‌ای برای صرفه‌جویی در مصرف سوخت، مسافت mi ۱۲۸ را با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۵۵ می‌پیماید. اگر این راننده با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۶۴ حرکت می‌کرد چند دقیقه، زودتر به مقصد می‌رسید؟

حل:

$t_۱$ مدت زمان لازم برای حرکت با سرعت $\frac{km}{h}$ ۵۵:

$$x=vt_۱\Rightarrow ۱۲۸=۵۵t_۱\Rightarrow t_۱=۲/۳۳\ h$$

$t_۲$ مدت زمان لازم برای حرکت با سرعت $\frac{km}{h}$ ۶۴:

$$x=vt_۲\Rightarrow ۱۲۸=۶۴t_۲\Rightarrow t_۲=۲\ h$$

Δt مدت زمانی که زودتر می‌رسد:

$$\Delta t=t_۱-t_۲\Rightarrow \Delta t=۲/۳۳-۲\Rightarrow \Delta t=۰/۳۳\ h$$
$$\Delta t=۰/۳۳\ h\Rightarrow \Delta t=۰/۳۳\times۶۰\Rightarrow \Delta t=۱۹/۸\ \min$$

۲-۴) در مساله‌ی ۲-۳ فرض کنید راننده، دو بار توقف می‌کند. یک بار به مدت min ۱۸ برای صرف غذا و بار دیگر به مدت min ۵ برای بنزین زدن می‌ایستد. سرعت متوسط او را طوری به دست آورید تا کل زمان حرکت او برابر زمان حرکت با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۵۵ (بدون توقف) باشد.

حل:

t' کل زمان توقف‌های اتومبیل:

$t' = ۱۸ + ۵ \Rightarrow t' = ۲۳ \ \ \min \Rightarrow t' = ۲۳ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۳۸ \ \ h$

$t_۱$ زمان کل حرکت و t زمان کل حرکت بدون توقف است. با استفاده از مساله‌ی ۲-۳ می‌توان نوشت:

$t_۱ = t' + t \Rightarrow ۲/۳۳ = ۰/۳۸ + t \Rightarrow t = ۲/۳۳ - ۰/۳۸ \Rightarrow t = ۱/۹۵ \ \ h$

$x = vt \Rightarrow ۱۲۸ = v \times ۱/۹۵ \Rightarrow v = ۶۵/۶۴ \ \ \frac{mi}{h}$

۲-۵) راننده‌ای با سرعت $۱۰۰ \ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. به مدت $۱ \ s$ به آینه، نگاه می‌کند. در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را طی کرده است؟

حل:

$v = ۱۰۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۱۰۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۷/۸ \ \ \frac{m}{s}$

x مسافت طی شده در مدت نگاه راننده به آینه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$x = vt \Rightarrow x = ۲۷/۸ \times ۱ \Rightarrow x = ۲۷/۸ \ \ m$

۲-۶) در آگهی تبلیغاتی اتومبیل مسابقه‌ای، ادعا شده است این اتومبیل می‌تواند در مدت $۶/۸۵ \ s$ به سرعت $۹۰ \ \frac{km}{h}$ برسد. شتاب متوسط اتومبیل را به دست آورید. شتاب اتومبیل چند برابر شتاب گرانش زمین است؟ (شتاب گرانش زمین $g = ۹/۸ \ \frac{m}{s^۲}$ فرض شود.)

حل:

$v = ۹۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۹۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۵ \ \ \frac{m}{s}$

$\overline{a}$ شتاب متوسط با استفاده از تعریف شتاب متوسط به دست می‌آید:

$\overline{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow \overline{a} = \frac{۲۵ - ۰}{۶/۸۵ - ۰} \Rightarrow \overline{a} = ۳/۶۵ \ \ \frac{m}{s^۲}$

نسبت شتاب متوسط به شتاب گرانش زمین:

$\frac{\overline{a}}{g} = \frac{۳/۶۵}{۹/۸} \Rightarrow \frac{\overline{a}}{g} = ۰/۳۷ \Rightarrow \overline{a} = ۰/۳۷ g$

۲-۷) $۳۰ \ s$ پس از پرتاب فضاپیمایی، سرعتش به $۱۲۰۰ \ \frac{km}{h}$ می‌رسد. شتاب متوسط فضاپیما را به دست آورید. شتاب فضاپیما چند برابر شتاب گرانش زمین است؟ (شتاب گرانش زمین $۹/۸ \ \frac{m}{s^۲}$)

حل

$v = ۱۲۰۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۱۲۰۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۳۳۳/۳ \ \ \frac{m}{s}$

$\bar{a}$ شتاب متوسط با استفاده از تعریف شتاب متوسط به دست می‌آید:

$$\bar{a}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow \bar{a}=\frac{۳۳۳/۳-۰}{۳۰-۰}\Rightarrow \bar{a}=۱۱/۱\ \frac{m}{s^۲}$$

نسبت شتاب متوسط به شتاب گرانش زمین:

$$\frac{\bar{a}}{g}=\frac{۱۱/۱}{۹/۸}\Rightarrow \frac{\bar{a}}{g}=۱/۱۳\Rightarrow \bar{a}=۱/۱۳g$$

۲-۸) راننده‌ای برای طی مسافت $۴۸۴\ mi$ ابتدا $۱/۷۵\ h$ با سرعت $۶۰\ \frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند سپس به مدت $۲۰\ \min$ توقف می‌کند. پس از آن $۳/۲۰\ h$ با سرعت $۶۲/۵\ \frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند سپس $۴۵\ \min$ توقف می‌کند. دوباره به راه می‌افتد و مسافت $۱۰۸\ mi$ را با سرعت $۶۵\ \frac{mi}{h}$ می‌پیماید سپس $۱۵\ \min$ توقف می‌کند. اگر مسافت باقی‌مانده را با سرعت متوسط $۶۰\ \frac{mi}{h}$ طی کند کل زمان مسافرت او را به دست آورید. سرعت متوسط او را در این سفر به دست آورید.

حل:

$$x_۱=v_۱t_۱\Rightarrow x_۱=۶۰\times ۱/۷۵\Rightarrow x_۱=۱۰۵\ mi$$

$$t'_۱=۲۰\ \min\Rightarrow t'_۱=۲۰\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۱=۰/۳۳\ h$$

$$x_۲=v_۲t_۲\Rightarrow x_۲=۶۲/۵\times ۳/۲\Rightarrow x_۲=۲۰۰\ mi$$

$$t'_۲=۴۵\ \min\Rightarrow t'_۲=۴۵\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۲=۰/۷۵\ h$$

$$x_۳=v_۳t_۳\Rightarrow ۱۰۸=۶۵t_۳\Rightarrow t_۳=۱/۶۶\ h$$

$$t'_۳=۱۵\ \min\Rightarrow t'_۳=۱۵\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۳=۰/۲۵\ h$$

$x=۴۸۴\ mi$ کل مسافت طی شده:

$$x=x_۱+x_۲+x_۳+x_۴\Rightarrow ۴۸۴=۱۰۵+۲۰۰+۱۰۸+x_۴\Rightarrow ۴۸۴=۴۱۳+x_۴\Rightarrow x_۴=۷۱\ mi$$

$$x_۴=v_۴t_۴\Rightarrow ۷۱=۶۰t_۴\Rightarrow t_۴=۱/۱۸\ h$$

t زمان کل حرکت:

$$t=t_۱+t'_۱+t_۲+t'_۲+t_۳+t'_۳+t_۴\Rightarrow t=۱/۷۵+۰/۳۳+۳/۲+۰/۷۵+۱/۶۶+۰/۲۵+۱/۱۸\Rightarrow$$
$$t=۹/۱۲\ h$$

$\bar{v}$ سرعت متوسط در طی سفر:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \bar{v}=\frac{۴۸۴}{۹/۱۲}\Rightarrow \bar{v}=۵۳/۱\ \frac{mi}{h}$$

۲-۹) شخصی از شهر A به شهر B رانندگی می‌کند. $۷۵\ \min$ با سرعت $۹۰\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند سپس

min ۱۵ توقف می‌کند. پس از آن min ۴۵ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۷۵ به سفر خود، ادامه می‌دهد. سپس h ۲/۲۵ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۱۰۵ حرکت می‌کند تا به مقصد برسد. فاصله‌ی شهرهای A و B را به دست آورید. سرعت متوسط اتومبیل را در این سفر به دست آورید.

حل:

$$t_1 = ۷۵ \ \ min \Rightarrow t_1 = ۷۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t_1 = ۱/۲۵ \ \ h$$

$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow x_1 = ۹۰ \times ۱/۲۵ \Rightarrow x_1 = ۱۱۲/۵ \ \ km$$

$$t_1' = ۱۵ \ \ min \Rightarrow t_1' = ۱۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۲۵ \ \ h$$

$$t_2 = ۴۵ \ \ min \Rightarrow t_2 = ۴۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t_2 = ۰/۷۵ \ \ h$$

$$x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow x_2 = ۷۵ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_2 = ۵۶/۲۵ \ \ km$$

$$x_3 = v_3 t_3 \Rightarrow x_3 = ۱۰۵ \times ۲/۲۵ \Rightarrow x_3 = ۲۳۶/۲۵ \ \ km$$

x فاصله‌ی دو شهر A و B:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = ۱۱۲/۵ + ۵۶/۲۵ + ۲۳۶/۲۵ \Rightarrow x = ۴۰۵ \ \ km$$

t کل زمان حرکت:

$$t = t_1 + t_1' + t_2 + t_3 \Rightarrow t = ۱/۲۵ + ۰/۲۵ + ۰/۷۵ + ۲/۲۵ \Rightarrow t = ۴/۵ \ \ h$$

$\bar{v}$ سرعت متوسط در کل سفر:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{۴۰۵}{۴/۵} \Rightarrow \bar{v} = ۹۰ \ \ \frac{km}{h}$$

t' کل زمان رانندگی:

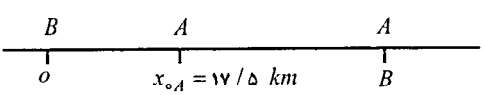
$$t' = t_1 + t_2 + t_3 = ۱/۲۵ + ۰/۷۵ + ۲/۲۵ \Rightarrow t' = ۴/۲۵ \ \ h$$

$\bar{v}'$ سرعت متوسط، هنگام رانندگی:

$$\bar{v}' = \frac{\Delta x}{\Delta t'} \Rightarrow \bar{v}' = \frac{۴۰۵}{۴/۲۵} \Rightarrow \bar{v}' = ۹۵/۳ \ \ \frac{km}{h}$$

۲-۱۰) دوچرخه‌سوار A با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۲۵ و دوچرخه‌سوار B با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۳۲ حرکت می‌کنند. سر ظهر، A به اندازه‌ی km ۱۷/۵ از B جلوتر است. پس از چه مدت B از A، سبقت می‌گیرد؟ در این مدت، دوچرخه سواران از محلی که ظهر در آن‌جا بودند چه قدر دور شده‌اند؟

حل: معادلات مکان ـ زمان دوچرخه‌سواران با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:



$$x = vt + x_o \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + x_{oA} \\ x_B = v_B t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۲۵t + ۱۷/۵ \\ x_B = ۳۲t \end{cases}$$

وقتی دوچرخه‌سوار B به دوچرخه‌سوار A می‌رسد:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۵t + ۱۷/۵ = ۳۲t \Rightarrow ۳۲t - ۲۵t = ۱۷/۵ \Rightarrow ۷t = ۱۷/۵ \Rightarrow t = ۲/۵ \ h$$

Δx_A جابجایی دوچرخه‌سوار A از محلی که ظهر در آن‌جا بود:

$$\Delta x_A = x_A - x_{۰A} \Rightarrow \Delta x_A = ۲۵ \times ۲/۵ + ۱۷/۵ - ۱۷/۵ \Rightarrow \Delta x_A = ۶۲/۵ \ km$$

Δx_B جابجایی دوچرخه‌سوار B از محلی که ظهر در آن‌جا بود:

$$\Delta x_B = x_B - x_{۰B} \Rightarrow \Delta x_B = ۳۲ \times ۲/۵ - ۰ \Rightarrow \Delta x_B = ۸۰ \ km$$

۲-۱۱) دو دانش‌آموز قهرمان دوی صحرانوردی، یکی با سرعت ثابت $۵/۲ \frac{m}{s}$ و دیگری با سرعت ثابت $۴/۵ \frac{m}{s}$ می‌دود. این دو دانش‌آموز در مسابقه‌ی دو به مسافت $۱/۶ \ km$ شرکت می‌کنند. دانش‌آموز سریع، وقتی شروع به دویدن می‌کند که دیگری از یک نقطه‌ی مشخص مسیر، عبور کند. این نقطه در چه فاصله‌ای از خط شروع مسابقه باشد تا هر دو دونده با هم به خط پایان برسند؟

حل:

$$x = ۱/۶ \ km \Rightarrow x = ۱/۶ \times ۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۱۶۰۰ \ m$$

t زمان دویدن دانش‌آموز سریع با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

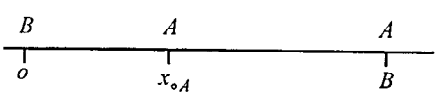
$$x = vt \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۵/۲t \Rightarrow t = ۳۰۷/۷ \ s$$

$x_۰$ فاصله‌ی دانش‌آموز دیگر از دانش‌آموز سریع با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۴/۵ \times ۳۰۷/۷ + x_۰ \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۱۳۸۵ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = ۲۱۵ \ m$$

۲-۱۲) دو دانش‌آموز در مسیری می‌دوند. دانش‌آموز A با سرعت ثابت $۴ \frac{m}{s}$ می‌دود و دانش‌آموز B سریع‌تر از A می‌دود. دانش‌آموز B، $۶ \ s$ پس از A شروع به دویدن می‌کند و پس از $۲۰ \ s$ به او می‌رسد. سرعت دانش‌آموز B را به دست آورید. قبل از این که به هم برسند چه مسافتی را می‌دوند؟

حل: $x_{۰A}$ مسافتی که دانش‌آموز A در مدت $۶ \ s$ می‌دود با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:



$$x = vt \Rightarrow x_{۰A} = ۴ \times ۶ \Rightarrow x_{۰A} = ۲۴ \ m$$

معادلات مکان ـ زمان دانش‌آموزان با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + x_{۰A} \\ x_B = v_B t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۴۰ \times ۲۰ + ۲۴ \\ x_B = v_B \times ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰۴ \ m \\ x_B = ۲۰ v_B \end{cases}$$

وقتی دانش‌آموز B به دانش‌آموز A می‌رسد:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۰ v_A = ۱۰۴ \Rightarrow v_A = ۵/۲ \ \frac{m}{s}$$

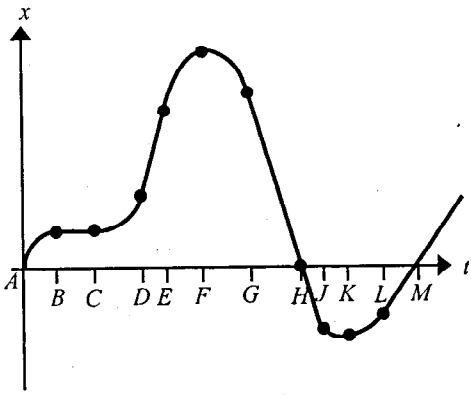
Δx_A جابه‌جایی دانش‌آموز A از وقتی که دانش‌آموز B شروع به حرکت می‌کند:

$$\Delta x_A = ۴ \times ۲۰ + ۲۴ \Rightarrow x_A = ۱۰۴ \ m$$

Δx_B جابه‌جایی دانش‌آموز B:

$$x_B = ۴ \times ۲۰ + ۲۴ \Rightarrow x_B = ۸۰ + ۲۴ \Rightarrow x_B = ۱۰۴ \ \ m$$

۲-۱۳) نمودار مکان ـ زمان جسمی به صورت شکل مقابل است. فواصلی را مشخص کنید که در آن‌ها شتاب: مثبت، صفر یا منفی است.



حل: در هر یک از بازه‌ها مشتق تابع را رسم کرده و ابتدا و انتهای مسیر را با هم مقایسه می‌کنیم. مشتق تابع در نقطه‌ی تماس بر منحنی مماس است. اگر مشتق، مثبت بود سرعت، مثبت است. اگر مشتق، منفی بود سرعت، منفی است. اگر مشتق، صفر بود سرعت، ثابت است.

در پایان مسیر، اگر سرعت، بیش از سرعت در ابتدا باشد شتاب، مثبت است و اگر کمتر باشد شتاب، منفی است و اگر هر دو یکسان بودند شتاب، صفر است. بنا بر این می‌توان نوشت:

$$AB: \left.\frac{dx}{dt}\right|_B \prec \left.\frac{dx}{dt}\right|_A \Rightarrow a \prec ۰$$

$$BC: \left.\frac{dx}{dt}\right|_C = \left.\frac{dx}{dt}\right|_B = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

$$CD: \left.\frac{dx}{dt}\right|_D \succ \left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_C = ۰\right) \Rightarrow a \succ ۰$$

$$DE: \left.\frac{dx}{dt}\right|_E = \left.\frac{dx}{dt}\right|_D \Rightarrow a = ۰$$

$$EF: \left.\frac{dx}{dt}\right|_F \prec \left.\frac{dx}{dt}\right|_E \Rightarrow a \prec ۰$$

$$FG: -\left.\frac{dx}{dt}\right|_G \succ \left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_F = ۰\right) \Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_G \prec ۰ \Rightarrow a \prec ۰$$

$$GH: -\left.\frac{dx}{dt}\right|_H = -\left.\frac{dx}{dt}\right|_G \Rightarrow a = ۰$$

$$HJ: -\left.\frac{dx}{dt}\right|_J = -\left.\frac{dx}{dt}\right|_H \Rightarrow a = ۰$$

$$JK: -\left.\frac{dx}{dt}\right|_K \prec -\left.\frac{dx}{dt}\right|_J \Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_K \succ \left.\frac{dx}{dt}\right|_J \Rightarrow a \succ ۰$$

$$KL: \left.\frac{dx}{dt}\right|_L \succ \left.\frac{dx}{dt}\right|_K \Rightarrow a \succ ۰$$

$$LM: \left.\frac{dx}{dt}\right|_M = -\left.\frac{dx}{dt}\right|_L \Rightarrow a = ۰$$

۲-۱۴) در شکل مساله‌ی ۲-۱۳ فواصلی را مشخص کنید که در آن‌ها سرعت مثبت، صفر یا منفی است.

حل: بر اساس شکل مساله‌ی قبل، خطوط مماس بر منحنی در نقاط پایانی و ابتدایی مسیر به عنوان معیار تعیین علامت سرعت در نظر می‌گیریم.

با توجه به شکل مساله‌ی ۲-۱۳ می‌توان نوشت:

در نقاط F و K سرعت برابر صفر است.

$$AB: \left.\frac{dx}{dt}\right|_B \succ ۰ \quad , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_A \succ ۰ \Rightarrow v \succ ۰$$

$$BC:\left.\frac{dx}{dt}\right|_B=\left.\frac{dx}{dt}\right|_A=0\Rightarrow v=0$$

$$CD:\left.\frac{dx}{dt}\right|_D\succ 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_C\succ 0\Rightarrow v\succ 0$$

$$DE:\left.\frac{dx}{dt}\right|_E\succ 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_D\succ 0\Rightarrow v\succ 0$$

$$EF:\left.\frac{dx}{dt}\right|_F=0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_E\succ 0\Rightarrow v\succ 0$$

$$FG:\left.\frac{dx}{dt}\right|_G\prec 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_F=0\Rightarrow v\prec 0$$

$$GH:\left.\frac{dx}{dt}\right|_H\prec 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_G\prec 0\Rightarrow v\prec 0$$

$$Hj:\left.\frac{dx}{dt}\right|_J\prec 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_H\prec 0\Rightarrow v\prec 0$$

$$JK:\left.\frac{dx}{dt}\right|_K\prec 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_J\prec 0\Rightarrow v\prec 0$$

$$KL:\left.\frac{dx}{dt}\right|_L\succ 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_K=0\Rightarrow v\succ 0$$

$$LM:\left.\frac{dx}{dt}\right|_M\succ 0\ ,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_L\succ 0\Rightarrow v\succ 0$$

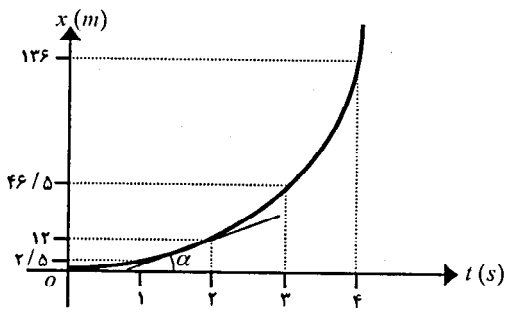
۲-۱۵) رابطه‌ی مکان ـ زمان جسمی به صورت: $x=2t+0/5t^4$ است. (x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.) نمودار x را به صورت تابعی از t بین لحظات: $t=0$ تا $t=4\ s$ رسم کنید. با استفاده از این نمودار، سرعت متوسط جسم را در این فاصله‌ی زمانی به دست آورید. سرعت لحظه‌ای را در $t=2\ s$ به دست آورید؟

حل:

t	x
۰	۰
۱	۲/۵
۲	۱۲
۳	۴۶/۵
۴	۱۳۶

$x=2t+0/5t^4$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t=4)-x(t=0)}{4-0}=\frac{136-0}{4}=34\ \frac{m}{s}$$

برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای در $t=2\ s$ مماسی را رسم می‌کنیم و از روی آن سرعت لحظه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}=\tan\alpha\Rightarrow v=\frac{12}{0/67}\Rightarrow v=18\ \frac{m}{s}$$

۲-۱۶) به کمک نمودار رسم شده در مساله‌ی ۲- ۱۵، سرعت لحظه‌ای را در لحظات: $t=0/5\ s$ و $t=1\ s$ و $t=1/5\ s$ و $t=2\ s$ و $t=3\ s$ و $t=3/5\ s$ به دست آورید. آیا شتاب حرکت، ثابت است یا با زمان تغییر می‌کند؟ شتاب لحظه‌ای را در $t=1\ s$ و $t=3\ s$ به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای در لحظات: $0/5\ s$ و $1\ s$ و $1/5\ s$ و $2\ s$ و $3\ s$ و $3/5\ s$ خطوط مماس بر نمودار رسم می‌کنیم و شیب آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$t=۰/۵\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۰/۵} \Rightarrow v=۲/۲۵\ \frac{m}{s} \qquad t=۲\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۲} \Rightarrow v=۱۸\ \frac{m}{s}$$

$$t=۱\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۱} \Rightarrow v=۴\ \frac{m}{s} \qquad t=۳\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۳} \Rightarrow v=۵۶\ \frac{m}{s}$$

$$t=۱/۵\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۱/۵} \Rightarrow v=۸/۷۵\ \frac{m}{s} \qquad t=۳/۵\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۳/۵} \Rightarrow v=۸۷/۷۵\ \frac{m}{s}$$

چون تغییرات x بر حسب زمان t از درجه‌ی ۴ می‌باشد. بنابراین شتاب تغییر می‌کند و ثابت نیست.

$$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow v=۲+۲t^{۲} \Rightarrow a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow a=۶t^{۲} \Rightarrow \begin{cases} a|_{t=۱}=۶\ \frac{m}{s^{۲}} \\ a|_{t=۲}=۵۴\ \frac{m}{s^{۲}} \end{cases}$$

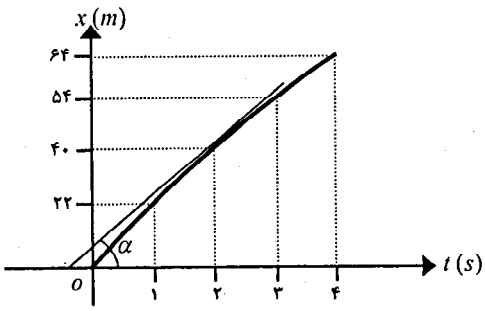
۲-۱۷) رابطه‌ی مکان ـ زمان جسمی به صورت: $x=۲۴t-۲t^{۲}$ است. (x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.) نمودار x را به صورت تابعی از t بین لحظات: $t=۰$ و $t=۴\ s$ ترسیم کنید. با استفاده از نمودار، سرعت متوسط را در این فاصله‌ی زمانی و سرعت لحظه‌ای را در $t=۲\ s$ به دست آورید؟

حل:

t	x
۰	۰
۱	۲۲
۲	۴۰
۳	۵۴
۴	۶۴

$x=۲۴t-۲t^{۲}$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t=۴)-x(t=۰)}{۴-۰}=\frac{۶۴-۰}{۴}=۱۶\ \frac{m}{s}$$

مماس در نقطه‌ی $t=۲\ s$ را ترسیم کنیم و از روی مثلث حاصل می‌توان نوشت:

$$v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۲} \Rightarrow v=\tan\alpha \Rightarrow v=\frac{۴۰}{۲/۵} \Rightarrow v=۱۶\ \frac{m}{s}$$

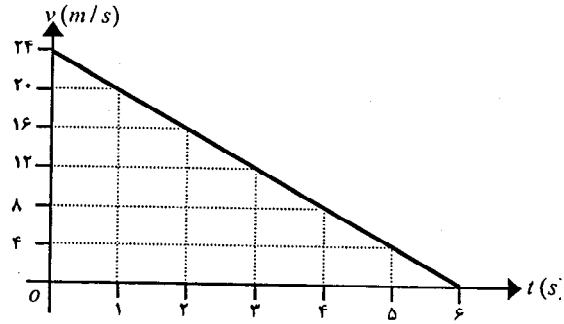
۲-۱۸) به کمک نمودار رسم شده در مساله‌ی ۲-۱۷، سرعت لحظه‌ای را در لحظات: $t=۰/۵\ s$ و $t=۱\ s$ و $t=۲\ s$ و $t=۳\ s$ به دست آورید. نمودار تغییرات v را به صورت تابعی از t رسم کنید. شتاب لحظه‌ای را در $t=۱\ s$ و $t=۲\ s$ به دست آورید. آیا شتاب ثابت است یا به زمان، بستگی دارد؟

حل: برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای در لحظات: $۰/۵\ s$ و $۱\ s$ و $۱/۵\ s$ و $۲\ s$ و $۳\ s$ و $۳/۵\ s$ خطوط مماس بر نمودار رسم می‌کنیم و شیب آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$t=۰/۵\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۰/۵} \Rightarrow v=۲۲\ \frac{m}{s} \qquad t=۲\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۲} \Rightarrow v=۱۶\ \frac{m}{s}$$

$t=۱\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۱} \Rightarrow v=۲۰\ \frac{m}{s}$

$t=۳\ s \Rightarrow v=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=۳} \Rightarrow v=۱۲\ \frac{m}{s}$



$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow v=۲۴-۴t$

t	x
۰	۲۴
۱	۲۰
۲	۱۶
۳	۱۲
۴	۸
۵	۴
۶	۰

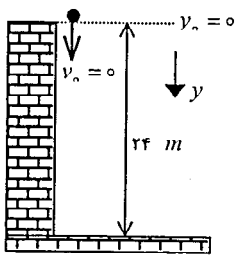
با توجه به معنی سرعت بر حسب زمان شتاب ثابت است و مقدار آن عبارت است از:

$$\begin{cases}\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a=\frac{dv}{dt}\end{cases} \Rightarrow a=\overline{a}$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{v(t=۴)-v(t=۰)}{۴-۰} \Rightarrow a=\frac{۸-۲۴}{۴} \Rightarrow a=-۴\ \frac{m}{s^۲}$$

شتاب، ثابت است پس در لحظات: $t=۱\ s$ و $t=۲\ s$ نیز همین مقدار را دارد.

۲-۱۹) سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع m ۲۴ رها می‌شود. سرعت آن را هنگام برخورد به زمین و زمان سقوط آن را محاسبه کنید.



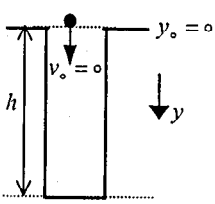
حل: با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲g(y-y_۰) \Rightarrow v^۲-۰=۲\times۹/۸\times۲۴ \Rightarrow v^۲=۴۷۰ \Rightarrow v=۲۱/۷\ \frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v=gt+v_۰ \Rightarrow ۲۱/۷=۹/۸t+۰ \Rightarrow t=۲/۲۱\ s$$

۲-۲۰) دانشجویی، سنگی را در چاهی می‌اندازد و فاصله‌ی زمانی بین رها شدن سنگ و شنیدن صدای برخورد سنگ با آب ته چاه را اندازه‌گیری می‌کند. با این روش، عمق چاه را تخمین می‌زند. اگر این فاصله‌ی زمانی s ۳/۱۵ باشد عمق چاه را به دست آورید. (از زمان لازم برای رسیدن صوت از ته چاه به دهانه‌ی آن، صرف‌نظر کنید.)

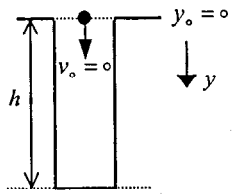


حل: y ارتفاع چاه با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۰t+y_۰ \Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times(۳/۱۵)^۲ \Rightarrow h=۴۸/۶\ m$$

۲-۲۱) در مساله‌ی ۲-۲۰ دانشجوی دیگری، فرض می‌کند سرعت صوت $۳۳۰\ \frac{m}{s}$ است و زمان لازم برای رسیدن صوت از ته چاه به دهانه‌ی آن را در نظر می‌گیرد. با استفاده از داده‌های مساله‌ی ۲-۲۰ عمق چاه را به دست آورید.

حل: $t_۱$ زمان سقوط سنگ، با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:



$$y = \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ + v_۰t_۱ + y_۰ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times t_۱^۲ \Rightarrow h = ۴/۹\ t_۱^۲ \qquad (۱)$$

صوت با سرعت ثابت حرکت می‌کند. $t_۲$ زمان رسیدن صدای برخورد سنگ از ته چاه به دانشجو با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$y = vt_۲ + y_۰ \Rightarrow h = ۳۳۰\,t_۲ \qquad (۲)$$

t کل زمان سقوط:

$$t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow ۳/۱۵ = t_۱ + t_۲ \Rightarrow t_۲ = ۳/۱۵ - t_۱$$

رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی (۲) جاگذاری می‌کنیم:

$$h = ۳۳۰(۳/۱۵ - t_۱) \Rightarrow h = ۱۰۳۹/۵ - ۳۳۰t_۱$$

رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$۱۰۳۹/۵ - ۳۳۰t_۱ = ۴/۹t_۱^۲ \Rightarrow ۴/۹t_۱^۲ + ۳۳۰t_۱ - ۱۰۳۹/۵ = ۰ \Rightarrow$$

$$t_۱ = \frac{-۳۳۰ \pm \sqrt{۳۳۰^۲ - ۴\times ۴/۹ \times (-۱۰۳۹/۵)}}{۲\times ۴/۹} \Rightarrow t_۱ = \frac{-۳۳۰ \pm \sqrt{۱۲۹۲۷۴/۲}}{۹/۸} \Rightarrow$$

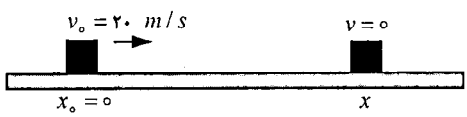
$$t_۱ = \frac{-۳۳۰ \pm ۳۵۹/۵}{۹/۸} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = \dfrac{-۳۳۰ + ۳۵۹/۵}{۹/۸} \\ t_۱' = \dfrac{-۳۳۰ - ۳۵۹/۵}{۹/۸} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = \dfrac{۲۹/۵}{۹/۸} \\ t_۱' = \dfrac{-۶۸۹/۵}{۹/۸} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳/۰۱\ s \\ t_۱' = -۷۰/۴\ s \end{cases}$$

$t_۱ = ۳/۰۱\ s$ جواب مساله است. با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$h = ۴/۹ \times (۳/۰۱)^۲ \Rightarrow h = ۴۴/۴\ m$$

۲-۲۲) سرعت اتومبیلی $۷۲\ \frac{km}{h}$ است. راننده، ترمز می‌کند و حرکت اتومبیل به طور یکنواخت با شتاب $۴/۲\ \frac{m}{s^۲}$ کُنْد می‌شود. قبل از توقف، اتومبیل چه مسافتی را طی می‌کند؟

حل: حرکت، کُنْد شونده است پس شتاب با علامت **منفی** در روابط، جاگذاری می‌شود:

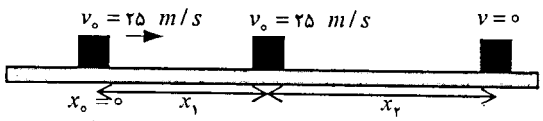


$$v_۰ = ۷۲\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_۰ = ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_۰ = ۲۰\ \frac{m}{s}$$

اتومبیل می‌ایستد پس: $v = ۰$ است. x مسافت توقف با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x - x_۰) \Rightarrow ۰ - ۲۰^۲ = ۲(-۴/۲)x \Rightarrow -۴۰۰ = -۸/۴x \Rightarrow x = ۴۷/۶\ m$$

۲-۲۳) اتومبیلی با سرعت $90\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. راننده در فاصله‌ی ۴۰ متری جلوی خود در وسط جاده، مانعی را می‌بیند. اگر زمان واکنش راننده $0/48\ s$ (یعنی مدت زمانی که راننده پس از دیدن مانع، ترمز می‌کند) و حداکثر شتاب اتومبیل، هنگام ترمز گرفتن $7/6\ \frac{m}{s^2}$ باشد آیا اتومبیل قبل از برخورد با مانع می‌ایستد؟



حل: حرکت، کُند شونده است پس شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود:

$$v_0 = 90\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_0 = 90 \times \frac{1000}{3600} \Rightarrow v_0 = 25\ \frac{m}{s}$$

x_1 مسافت طی شده در مدت زمان واکنش راننده با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_1 = v_0 t + x_0 \Rightarrow x_1 = 25 \times 0/48 \Rightarrow x_1 = 12\ m$$

x_2 مسافت طی شده در طی حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - 25^2 = 2 \times (-7/6) x_2 \Rightarrow -625 = -15/25 x_2 \Rightarrow x_2 = 41/1\ m$$

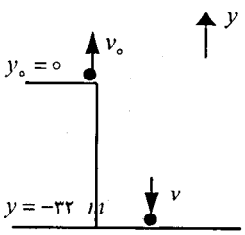
x کل مسافت طی شده از لحظه‌ی دیدن تا لحظه‌ی توقف:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 12 + 41/1 \Rightarrow x = 53/1\ m$$

چون کل مسافت طی شده بیش‌تر از m ۴۰ است پس اتومبیل، حتما با مانع، برخورد می‌کند.

۲-۲۴) سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع m ۳۲ به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. سنگ s ۳/۲۵ پس از پرتاب به زمین، برخورد می‌کند. سرعت اولیه‌ی سنگ و سرعت سنگ را هنگام برخورد با زمین به دست آورید.

حل: v_0 سرعت اولیه‌ی سنگ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:



$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow -32 = -\frac{1}{2} \times 9/8 \times (3/25)^2 + v_0 \times 3/25 \Rightarrow$$

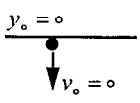
$$-32 = -51/8 + 3/25 v_0 \Rightarrow 19/8 = 3/25 v_0 \Rightarrow v_0 = 6/1\ \frac{m}{s}$$

v سرعت اولیه‌ی سنگ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -9/8 \times 3/25 + 6/1 \Rightarrow v = -25/8\ \frac{m}{s}$$

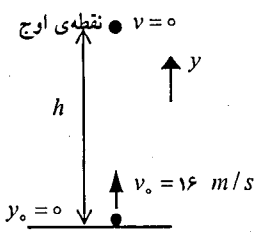
۲-۲۵) سنگی از بالای پلی با سرعت اولیه‌ی $10\ \frac{m}{s}$ به طور قائم به طرف پایین، پرتاب می‌شود. سنگ s ۱/۴ پس از پرتاب به سطح آب، برخورد می‌کند. ارتفاع پل را از سطح آب به دست آورید.

حل: h ارتفاع پل با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:



$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \times 9/8 \times (1/4)^2 + 10 \times 1/4 \Rightarrow h = 23/6\ m$$

۲-۲۶) توپی با سرعت $16\ \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب می‌شود. توپ، حداکثر تا چه ارتفاعی، بالا می‌رود؟ این توپ چه مدت در هوا می‌ماند؟



حل: در نقطه‌ی اوج $v=0$ است. h ارتفاع اوج توپ با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

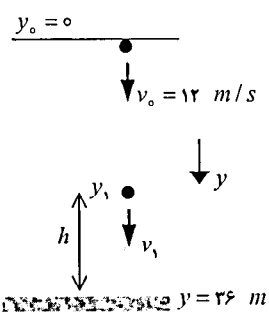
$$v^2-v_0^2=-2g(y-y_0)\Rightarrow 0-16^2=-2\times 9/8h\Rightarrow$$
$$-256=-19/6h\Rightarrow h=13/1\ m$$

توپ به محل اولیه، برگشته است پس: $y=0$ است.

t زمان پرواز توپ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0\Rightarrow 0=-\frac{1}{2}\times 9/8t^2+16t\Rightarrow -4/9t^2+16t=0\Rightarrow t(-4/9t+16)=0\Rightarrow$$
$$\begin{cases}t=0\\-4/9t+16=0\Rightarrow 4/9t=16\Rightarrow t=3/3\ s\end{cases}$$

۲-۲۷) ارتفاع پنجره‌ای از سطح زمین $36\ m$ است. از بالای پنجره، سنگی با سرعت $12\ \frac{m}{s}$ به طرف پایین، پرتاب می‌شود. $1/25\ s$ پس از پرتاب، ارتفاع سنگ را از سطح زمین به دست آورید. سرعت سنگ را در این لحظه به دست آورید. سنگ با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟



حل: y_1 ارتفاع سقوط توپ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0\Rightarrow y_1=\frac{1}{2}\times 9/8\times(1/25)^2+12\times 1/25\Rightarrow$$
$$y_1=7/7+15\Rightarrow y_1=22/7\ m$$

h ارتفاع توپ از سطح زمین:

$$h=36-y_1\Rightarrow h=36-22/7\Rightarrow h=13/3\ m$$

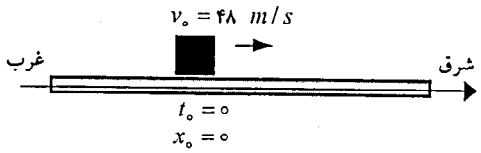
v_1 سرعت توپ با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v=gt+v_0\Rightarrow v_1=9/8\times 1/25+12\Rightarrow v_1=12/25+12\Rightarrow v_1=24/25\ \frac{m}{s}$$

برای محاسبه‌ی سرعت نهایی توپ از رابطه‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2g(y-y_0)\Rightarrow v^2-12^2=2\times 9/8(36-0)\Rightarrow v^2-144=705/6\Rightarrow$$
$$v^2=705/6+144\Rightarrow v^2=849/6\Rightarrow v=29/1\ \frac{m}{s}$$

۲-۲۸) جسمی با سرعت $48\ \frac{m}{s}$ به شرق حرکت می‌کند. در لحظه‌ی: $t=0$ شتاب ثابت $3/6\ \frac{m}{s^2}$ در جهت غرب به آن، وارد می‌شود. جسم پس از چه مدتی، دوباره به همان مکانی برمی‌گردد که در لحظه‌ی: $t=0$ آن‌جا بوده است؟ جابه‌جایی جسم را به دست آورید. جسم چه مسافتی را می‌پیماید؟



حل: شتاب در جهت غرب است پس، شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

جسم به محل اول برمی‌گردد پس: $x = ۰$ است.

t زمان برگشت به مکان اولیه با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}\times(-۳/۶)t^۲ + ۴۸t + ۰ \Rightarrow ۰ = -۱/۸t^۲ + ۴۸t \Rightarrow t(-۱/۸t + ۴۸) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = ۰ \\ -۱/۸t + ۴۸ = ۰ \Rightarrow ۱/۸t = ۴۸ \Rightarrow t = ۲۶/۷\ s \end{cases}$$

جسم به مکان اولیه، برگشته است پس جابه‌جایی آن برابر صفر است.

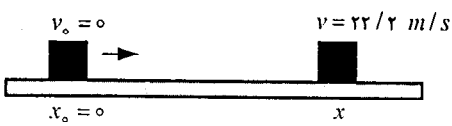
x مسافت توقف با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x - x_۰) \Rightarrow ۰ - ۴۸^۲ = ۲(-۳/۶)x \Rightarrow -۲۳۰۴ = -۷/۲x \Rightarrow x = ۳۲۰\ \ m$$

جسم به محل اول برگشته است پس X کل مسافت طی شده‌ی جسم برابراست با:

$$X = ۲x \Rightarrow X = ۲\times ۳۲۰ \Rightarrow X = ۶۴۰\ \ m$$

۲-۲۹) اتومبیلی با شتاب ثابت $۴/۵\ \frac{m}{s^۲}$ از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. وقتی سرعت اتومبیل به $۸۰\ \frac{km}{h}$ می‌رسد اتومبیل چه مسافتی را طی کرده است؟



حل:

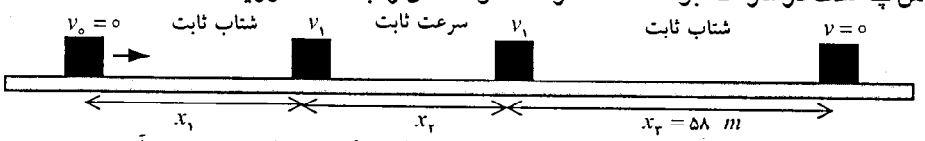
$$v = ۸۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۸۰\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۲/۲\ \frac{m}{s}$$

x جابجایی جسم با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x - x_۰) \Rightarrow (۲۲/۲)^۲ - ۰ = ۲\times۴/۵(x - ۰) \Rightarrow ۴۹۳/۸ = ۹x \Rightarrow x = ۵۴/۹\ \ m$$

۲-۳۰) اتوبوسی از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند به مدت $۶\ s$ با شتاب ثابت $۳/۲\ \frac{m}{s^۲}$ حرکت می‌کند. سپس به مدت $۴۸\ s$ با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در نهایت، سرعتش به طور یکنواخت، کاهش می‌یابد و $۵۸\ m$ دورتر از محل ترمزگیری می‌ایستد. اتوبوس چه مسافتی را طی کرده است؟ اتوبوس چه مدت در حرکت، بوده است؟ سرعت متوسط آن را به دست آورید.

حل:



$x_۱$ جابجایی اتوبوس در طی حرکت تند شونده با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲}\times۳/۲\times۶^۲ + ۰ \Rightarrow x_۱ = ۵۷/۶\ \ m$$

$v_۱$ سرعت اتوبوس در انتهای حرکت تند شونده با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v_۱ = at_۱ + v_۰ \Rightarrow v_۱ = ۳/۲ \times ۶ + ۰ \Rightarrow v_۱ = ۱۹/۲ \ \frac{m}{s}$$

$x_۲$ جابجایی اتوبوس در طی حرکت با سرعت ثابت از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_۲ = v_۱ t_۲ \Rightarrow x_۲ = ۱۹/۲ \times ۴۸ \Rightarrow x_۲ = ۹۲۱/۶ \ m$$

x جابجایی کل اتوبوس:

$$x = x_۱ + x_۲ + x_۳ \Rightarrow x = ۵۷/۶ + ۹۲۱/۶ + ۵۸ \Rightarrow x = ۱۰۳۷/۲ \ m$$

$t_۳$ زمان طی جابجایی $x_۳$:

$$x_۳ = \frac{v + v_۱}{۲} t_۳ \Rightarrow ۵۸ = \frac{۰ + ۱۹/۲}{۲} t_۳ \Rightarrow ۵۸ = ۹/۶ t_۳ \Rightarrow t_۳ = ۶ \ s$$

t زمان کل حرکت:

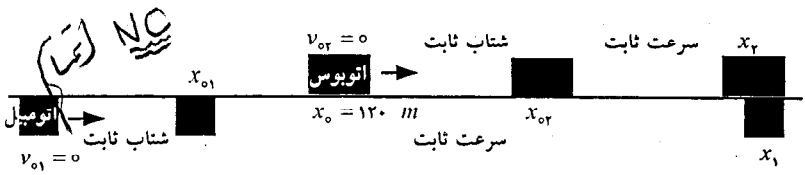
$$t = t_۱ + t_۲ + t_۳ \Rightarrow t = ۶ + ۴۸ + ۶ \Rightarrow t = ۶۰ \ s$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۱۰۳۷/۲}{۶۰} \Rightarrow \overline{v} = ۱۷/۳ \ \frac{m}{s}$$

۳۱-۲) اتومبیل و اتوبوسی به طور هم‌زمان، شروع به حرکت می‌کنند. اتومبیل m ۱۲۰ عقب‌تر از اتوبوس است. اتومبیل s ۵ با شتاب ثابت $\frac{m}{s^۲}$ ۳/۸ و اتوبوس s ۶/۳ با شتاب ثابت $\frac{m}{s^۲}$ ۲/۷ حرکت می‌کند. سپس، هر یک از آن‌ها با سرعت ثابت، حرکت می‌کنند. آیا اتومبیل از اتوبوس، جلو می‌افتد؟ اتومبیل چه مدت پس از شروع حرکت از اتوبوس، سبقت می‌گیرد و چه مسافتی را طی کرده است؟

حل:



برای اتومبیل

$x_{۰۱}$ مسافت طی شده در طی حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x_{۰۱} = \frac{۱}{۲} a_۱ t_{۰۱}^۲ + v_{۰۱} t_{۰۱} + x_{۰۱} \Rightarrow x_{۰۱} = \frac{۱}{۲} \times ۳/۸ \times ۵^۲ \Rightarrow x_{۰۱} = ۴۷/۵ \ m$$

$v_۱$ سرعت در انتهای حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v_۱ = a_۱ t_{۰۱} + v_{۰۱} \Rightarrow v_۱ = ۳/۸ \times ۵ + ۰ \Rightarrow v_۱ = ۱۹ \ \frac{m}{s}$$

$t_{۰۱} = ۵ \ s$ مدت زمان حرکت شتاب‌دار و $t_۱$ مدت زمان حرکت با سرعت ثابت و t زمان کل حرکت باشد:

$$t = t_{۰۱} + t_۱ \Rightarrow t = ۵ + t_۱ \Rightarrow t_۱ = t - ۵$$

$x_۱$ معادله‌ی مکان ـ زمان اتومبیل در طی حرکت با سرعت ثابت:

$$x_۱ = v_۱ t_۱ \Rightarrow x_{۰۱} \Rightarrow x_۱ = ۱۹(t - ۵) + ۴۷/۵ \Rightarrow x_۱ = ۱۹t - ۱۹ \times ۵ + ۴۷/۵ \Rightarrow x_۱ = ۱۹t - ۴۷/۵$$

برای اتوبوس

$x_{o۲}$ مسافت طی شده در طی حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x_{o۲} = \frac{۱}{۲} a_۲ t_{o۲}^۲ + v_{o۲} t_{o۲} + x_o \Rightarrow x_{o۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲/۷ \times (۶/۳)^۲ + ۱۲۰ \Rightarrow x_{o۲} = ۱۷۳/۶ \ m$$

$v_۲$ سرعت اتومبیل در انتهای حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$v_۲ = a_۲ t_{o۲} + v_o \Rightarrow v_۲ = ۲/۷ \times ۶/۳ + ۰ \Rightarrow v_۲ = ۱۷ \ \frac{m}{s}$$

$t_{o۲} = ۶/۳ \ s$ مدت زمان حرکت شتاب‌دار و $t_۲$ مدت زمان حرکت با سرعت ثابت و t زمان کل حرکت باشد:

$$t = t_{o۲} + t_۲ \Rightarrow t = ۶/۳ + t_۲ \Rightarrow t_۲ = t - ۶/۳$$

$x_۲$ معادله‌ی مکان ـ زمان اتوبوس در طی حرکت با سرعت ثابت:

$$x_۲ = v_۲ t_۲ + x_{o۲} \Rightarrow x_۲ = ۱۷(t - ۶/۳) + ۱۷۳/۶ \Rightarrow x_۲ = ۱۷t - ۱۷ \times ۶/۳ + ۱۷۳/۶ \Rightarrow x_۲ = ۱۷t + ۶۶/۵$$

وقتی، اتومبیل به اتوبوس می‌رسد

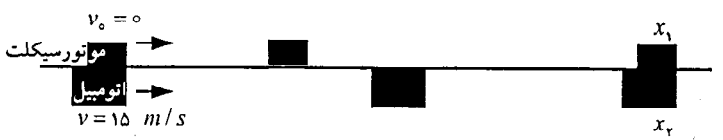
$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۱۹t - ۴۷/۵ = ۱۷t + ۶۶/۵ \Rightarrow ۱۹t - ۱۷t = ۶۶/۵ + ۴۷/۵ \Rightarrow ۲t = ۱۱۴ \Rightarrow t = ۵۷ \ s$$

$x_۱$ کل مسافت طی شده توسط اتومبیل:

$$x_۱ = ۱۹ \times ۵۷ - ۴۷/۵ \Rightarrow x_۱ = ۱۰۸۳ - ۴۷/۵ \Rightarrow x_۱ = ۱۰۳۵/۵ \ m$$

۲-۳۲) موتورسیکلتی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب ثابت $۴/۲ \ \frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. در این لحظه، اتومبیلی با سرعت ثابت $۵۴ \ \frac{km}{h}$ از موتورسیکلت، سبقت می‌گیرد و با همین سرعت به حرکت خود، ادامه می‌دهد. چه مدت پس از سبز شدن چراغ، موتورسیکلت به اتومبیل می‌رسد؟ سرعت موتورسیکلت را در این لحظه به دست آورید.

حل:



برای موتورسیکلت

$x_۱$ مکان موتورسیکلت در هر لحظه با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x = \frac{۱}{۲} a t^۲ + v_o t + x_o \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۴/۲ t^۲ + ۰ \Rightarrow x_۱ = ۲/۱ t^۲$$

برای اتومبیل

$$v = ۵۴ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۵۴ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۱۵ \ \frac{m}{s}$$

$x_۲$ مکان اتومبیل با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt + x_o \Rightarrow x_۲ = ۱۵t + ۰ \Rightarrow x_۲ = ۱۵t$$

وقتی موتورسیکلت به اتومبیل می‌رسد:

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۲/۱t^۲ = ۱۵t \Rightarrow ۲/۱t^۲ - ۱۵t = ۰ \Rightarrow t(۲/۱t - ۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ ۲/۱t - ۱۵ = ۰ \Rightarrow t = ۷/۱ \ s \end{cases}$$

سرعت موتورسیکلت هنگام رسیدن به اتومبیل با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v_۱ = ۴/۲ \times ۷/۱ + ۰ \Rightarrow v_۱ = ۲۹/۸ \ \frac{m}{s}$$

۲-۳۳) موتورسیکلتی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب ثابت $۴/۲ \ \frac{m}{s^۲}$ از حال سکون به راه می‌افتد. در این لحظه، اتومبیلی با سرعت ثابت $۷۲ \ \frac{km}{h}$ از موتورسیکلت، جلو می‌افتد. موتورسیکلت T ثانیه با شتاب ثابت، حرکت می‌کند و سپس با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. $۴۲ \ s$ پس از سبز شدن چراغ راهنما، موتورسیکلت به اتومبیل می‌رسد. سرعت موتورسیکلت را در این لحظه به دست آورید. موتورسیکلت چه مسافتی را طی کرده است؟

حل:

برای موتورسیکلت

$x_۱$ جابجایی موتورسیکلت در طی حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x'_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۴/۲T^۲ \Rightarrow x'_۱ = ۲/۱T^۲$$

سرعت موتورسیکلت در انتهای حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴/۲T + ۰ \Rightarrow v = ۴/۲T \qquad (۱)$$

t مدت زمان حرکت موتورسیکلت با سرعت ثابت:

$$T + t = ۴۲ \Rightarrow t = ۴۲ - T \qquad (۲)$$

با استفاده از روابط **(۱)** و **(۲)** جابجایی موتورسیکلت در طی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x'_۲ = ۴/۲T(۴۲ - T) + ۰ \Rightarrow x'_۲ = ۱۷۶/۴T - ۴/۲T^۲$$

$x_۱$ کل جابجایی موتورسیکلت:

$$x_۱ = x'_۱ + x'_۲ \Rightarrow x_۱ = ۲/۱t^۲ + ۱۷۶/۴T - ۴/۲T^۲ \Rightarrow x_۱ = ۱۷۶/۴T - ۲/۱T^۲$$

برای اتومبیل

$$v = ۷۲ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۰ \ \frac{m}{s}$$

$x_۲$ مکان اتومبیل با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x_۲ = ۲۰ \times ۴۲ \Rightarrow x_۲ = ۸۴۰ \ m$$

وقتی موتورسیکلت به اتومبیل می‌رسد

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۱۷۶/۴T - ۲/۱T^۲ = ۸۴۰ \Rightarrow -۲/۱T^۲ + ۱۷۶/۴T - ۸۴۰ = ۰ \Rightarrow$$

$$T=\frac{-۱۷۶/۴\pm\sqrt{(۱۷۶/۴)^۲-۴(-۲/۱)(-۸۴۰)}}{۲(-۲/۱)}\Rightarrow T=\frac{-۱۷۶/۴\pm۱۵۵/۱}{-۴/۲}\Rightarrow\begin{cases}T=۵/۱\ s\\T'=۷۸/۹\ s\end{cases}$$

$T=۵/۱\ s$ جواب مساله است.

v سرعت موتورسیکلت هنگام رسیدن به اتومبیل با جاگذاری $T=۵/۱\ s$ در رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید:

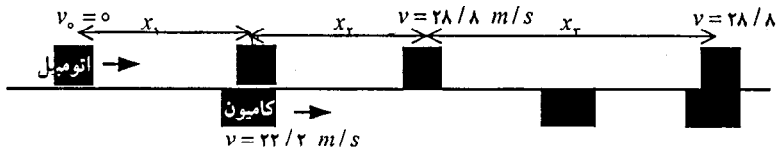
$$v=۴/۲T\Rightarrow v=۴/۲\times۵/۱\Rightarrow v=۲۱/۴\ \frac{m}{s}$$

با جاگذاری $T=۵/۱\ s$ در رابطه‌ی $x_۱$ فاصله‌ی موتورسیکلت از چراغ راهنما به دست می‌آید:

$$x_۱=۱۷۶/۴T-۲/۱T^۲\Rightarrow x_۱=۱۷۶/۴\times۵/۱-۲/۱\times(۵/۱)^۲\Rightarrow x_۱=۸۴۵\ \ m$$

۲-۳۴) اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب ثابت $۲/۸\ \frac{m}{s^۲}$ به راه می‌افتد. $۳/۱\ s$ بعد، کامیونی با سرعت ثابت $۸۰\ \frac{km}{h}$ از اتومبیل، جلو می‌افتد. اتومبیل با شتاب ثابت به حرکتش ادامه می‌دهد تا سرعتش $۱۰۴\ \frac{km}{h}$ می‌شود. پس از آن، با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. چه مدت پس از سبز شدن چراغ راهنما، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟ در این لحظه، اتومبیل، شتاب دارد یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند و چه مسافتی را طی کرده است؟

حل:



برای اتومبیل

$x_۱$ مسافت طی شده در مدت $t_۱=۳/۱\ s$ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\times۲/۸\times(۳/۱)^۲\Rightarrow x_۱=۱۳/۵\ \ m$$

$v_۱$ سرعت اتومبیل پس از مدت $t_۱=۳/۱\ s$ با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۱=۲/۸\times۳/۱\Rightarrow v_۱=۸/۶\ \frac{m}{s}$$

$x_۲$ مسافتی طی شده‌ی اتومبیل پس از سبقت کامیون تا رسیدن به سرعت $۱۰۴\ \frac{km}{h}$ با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v=۱۰۴\ \frac{km}{h}\Rightarrow v=۱۰۴\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}\Rightarrow v=۲۸/۸\ \frac{m}{s}$$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\Rightarrow(۲۸/۸)^۲-(۸/۶)^۲=۲\times۲/۸x_۲\Rightarrow ۸۲۹/۴-۷۳/۹=۵/۶x_۲\Rightarrow$$

$$۷۹۵/۵=۵/۶x_۲\Rightarrow x_۲=۱۳۴/۹\ \ m$$

$t_۲$ زمان لازم برای طی مسافت $x_۲$ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=at_۲+v_۱\Rightarrow ۲۸/۹=۲/۸t_۲+۸/۷\Rightarrow ۲۰/۲=۲/۸t_۲\Rightarrow t_۲=۷/۲\ \ s$$

$t_۲$ زمان حرکت با سرعت ثابت و $x_۲$ مکان اتومبیل در لحظه‌ی رسیدن به کامیون است. با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می توان نوشت:

$$x = vt + v_۰ \Rightarrow x_۲ = vt_۲ + x_۲ \Rightarrow x_۲ = ۲۸/۸t_۲ + ۱۳۴/۹$$

برای کامیون:

t زمان حرکت کامیون پس از سبقت از اتومبیل تا وقتی که اتومبیل به کامیون می‌رسد:

$$t = t_۲ + t_۲ \Rightarrow t = ۷/۲ + t_۲$$

x مسافت طی شده توسط کامیون پس از سبقت گرفتن از کامیون است. با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$v = ۸۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۸۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۲/۲\ \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x = ۲۲/۲(۷/۲ + t_۲) \Rightarrow x = ۱۵۹/۸ + ۲۲/۲t_۲$$

وقتی، اتومبیل به کامیون می‌رسد:

$$x_۲ = x \Rightarrow ۲۸/۸t_۲ + ۱۳۳/۹ = ۱۵۹/۸ + ۲۲/۲t_۲ \Rightarrow ۶/۶t_۲ = ۲۴/۹ \Rightarrow t_۲ = ۳/۷\ s$$

با جاگذاری در رابطه‌ی $x_۲$ داریم:

$$x_۲ = ۲۸/۸t_۲ + ۱۳۵/۶ \Rightarrow x_۲ = ۲۸/۸ \times ۳/۷ + ۱۳۴/۹ \Rightarrow x_۲ = ۱۰۴ + ۱۳۴/۹ \Rightarrow x_۲ = ۲۴۱/۶\ m$$

t کل زمان حرکت برای رسیدن به کامیون:

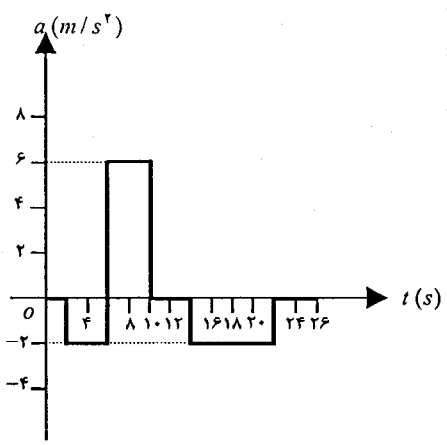
$$t = t_۱ + t_۲ + t_۲ \Rightarrow t = ۳/۱ + ۷/۲ + ۳/۷ \Rightarrow t = ۱۴\ s$$

x کل مسافت طی شده‌ی اتومبیل برای رسیدن به کامیون:

$$x = x_۱ + x_۲ \Rightarrow x = ۱۳/۴ + ۲۴۱/۶ \Rightarrow x = ۲۵۵\ m$$

اتومبیل با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۲-۳۵) در راستای محور xها نمودار شتاب ـ زمان جسمی به صورت مقابل است. فرض کنید در لحظه‌ی $t = ۰$ ، $v = ۰$ و $x = ۰$ است. نمودار سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان جسم را رسم کنید.

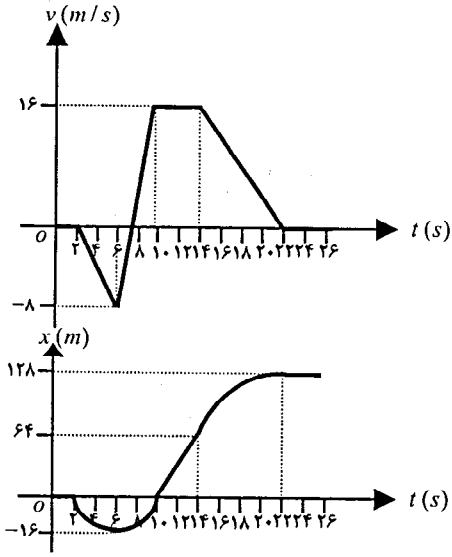


حل: سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان جسم برابر تغییرات سرعت جسم است. پس می‌توان سرعت جسم را در انتهای هر بازه‌ی زمانی به دست آورد:

$$[۰-۲]: \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۰$$

$$[۲-۶]: \Delta v = -۲ \times ۴ \Rightarrow \Delta v = -۸\ \frac{m}{s} \Rightarrow v = -۸\ \frac{m}{s}$$

$$[۶-۱۰]: \Delta v = ۴ \times ۶ \Rightarrow \Delta v = ۲۴\ \frac{m}{s} \Rightarrow v = ۱۶\ \frac{m}{s}$$



$[۱۰-۱۴]: \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۱۶ \dfrac{m}{s}$

$[۱۴-۲۲]: \Delta v = -۲ \times ۸ \Rightarrow \Delta v = -۱۶ \dfrac{m}{s} \Rightarrow v = ۰$

$[۲۲-۲۶]: \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۰$

سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان جسم برابر جابه‌جایی جسم است. پس می‌توان مسافت طی شده‌ی جسم را در انتهای هر بازه‌ی زمانی به دست آورد:

$[۰-۲]: \Delta x = ۰ \Rightarrow x = ۰$

$[۲-۶]: \Delta x = -۱۶ \ m \Rightarrow x = -۱۶ \ m$

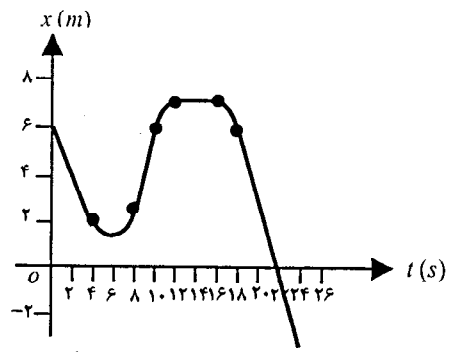
$[۶-۱۰]: \Delta x = ۱۶ \ m \Rightarrow x = ۰$

$[۱۰-۱۴]: \Delta x = ۶۴ \ m \Rightarrow x = ۶۴ \ m$

$[۱۴-۲۲]: \Delta x = ۶۴ \ m \Rightarrow x = ۱۲۸ \ m$

$[۲۲-۲۶]: \Delta x = ۰ \Rightarrow x = ۱۲۸ \ m$

۲-۳۶) در راستای محور xها نمودار مکان ـ زمان جسمی به صورت مقابل است. در کدام فواصل زمانی: $v = ۰$ ، $v \succ ۰$ ، $v \prec ۰$ ، $a = ۰$ ، $a \succ ۰$ ، $a \prec ۰$ است.



حل:

$[۰-۴]: \begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} \prec ۰ \Rightarrow v \prec ۰ \ , \ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۴} \prec ۰ \Rightarrow v \prec ۰ \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۰} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۴} = cte \Rightarrow a = ۰ \end{cases}$

$[۴-۸]: \begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۴} , \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۶} = ۰ , \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۸} \succ ۰ \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۸} \succ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۴} \Rightarrow a \succ ۰ \end{cases}$

$[۸-۱۰]: \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۸} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۰} \succ ۰ \Rightarrow v \succ ۰ , a = ۰$

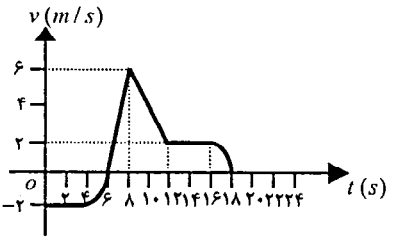
$[۱۰-۱۲]: \begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۸} \succ ۰ , \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۲} \succ ۰ \Rightarrow v \succ ۰ \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۲} \prec \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۸} \Rightarrow a \prec ۰ \end{cases}$

$[۱۲-۱۶]: \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۲} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۶} = ۰ \Rightarrow v = ۰ \ , \ a = ۰$

$[۱۶-۱۸]: \begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۶} \prec ۰ , \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۸} \prec ۰ \Rightarrow v \prec ۰ \\ -\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۸} \succ -\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۶} \Rightarrow a \prec ۰ \end{cases}$

$[۱۸-۲۴]: \begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۸} \prec ۰ , \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۲۴} \prec ۰ \Rightarrow v \prec ۰ \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۱۸} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=۲۴} \Rightarrow a = ۰ \end{cases}$

۲-۳۷) در راستای محور xها نمودار سرعت ـ زمان جسمی به صورت مقابل است. در کدام فواصل زمانی: $a=0$ ، $a\succ 0$ و $a\prec 0$ است؟



حل:

$[6-8]: v|_{t=6} = v|_{t=8} = cte \Rightarrow a \succ 0$

$[8-12]: v|_{t=12} = v|_{t=8} = cte \Rightarrow a \prec 0$

$[12-16]: v|_{t=12} = v|_{t=16} = cte \Rightarrow a = 0$

$[16-18]: -v|_{t=18} \succ -v|_{t=16} \Rightarrow v|_{18} \prec v|_{16} = cte \Rightarrow a \prec 0$

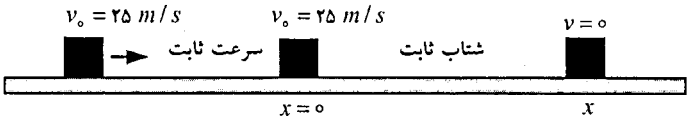
$[0-2]: v = cte \Rightarrow a = 0$

$[2-4]: v = cte \Rightarrow a = 0$

$[4-6]: v|_{t=6} \succ v|_{t=4} \Rightarrow a \succ 0$

۲-۳۸) در بزرگراهی، اتومبیلی با سرعت $125\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. ترمزها می‌توانند با شتاب $6/8\ \frac{m}{s^2}$ سرعت اتومبیل را کاهش دهند. پس از ترمزگیری، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل:



حرکت کُنْد شونده است پس شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

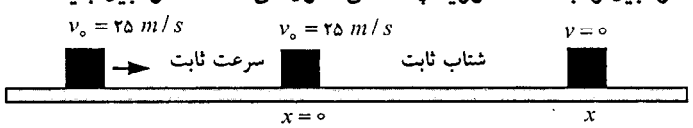
$$v_0 = 125\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_0 = 125 \times \frac{1000}{3600} \Rightarrow v_0 = 34/7\ \frac{m}{s}$$

x مسافت توقف با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - (34/7)^2 = 2 \times (-6/8)x \Rightarrow -1204/1 = -13/6x \Rightarrow x = 88/5\ m$$

۲-۳۹) اتومبیلی با سرعت ثابت $90\ \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. در نقطه‌ی مشخصی، ترمزها به کار می‌افتد و حرکت اتومبیل با شتاب ثابت، کُنْد می‌شود و پس از طی مسافت $65\ m$ می‌ایستد. پس از ترمزگیری، شتاب حرکت اتومبیل را به دست آورید چه مدتی، طول می‌کشد تا اتومبیل بایستد؟

حل:



$$v_0 = 90\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_0 = 90 \times \frac{1000}{3600} \Rightarrow v_0 = 25\ \frac{m}{s}$$

a شتاب اتومبیل با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

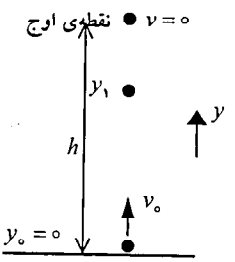
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - 25^2 = 2a \times 65 \Rightarrow -625 = 130a \Rightarrow a = -4/81\ s$$

علامت **منفی** شتاب، نشان دهنده‌ی حرکت کُنْد شونده است.

t زمان توقف با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -4/81t + 25 \Rightarrow 4/81t = 25 \Rightarrow t = 5/2\ s$$

۲-۴۰) توپی به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. s ۱/۲۵ بعد، به $\frac{۳}{۴}$ حداکثر ارتفاع خود می‌رسد. حداکثر ارتفاع و سرعت اولیه‌ی توپ را به دست آورید.



حل: h ارتفاع اوج توپ با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^۲-v_۰^۲=-۲g(y-y_۰)\Rightarrow ۰-v_۰^۲=-۲\times ۹/۸h\Rightarrow h=۰/۰۵v_۰^۲ \quad (۱)$$

طبق فرض مساله:

$$y_۱=\frac{۳}{۴}h\Rightarrow y_۱=\frac{۳}{۴}\times ۰/۰۵v_۰^۲\Rightarrow y_۱=۰/۰۴v_۰^۲$$

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y_۱=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۰t\Rightarrow ۰/۰۴v_۰^۲=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times(۱/۲۵)^۲+v_۰(۱/۲۵)\Rightarrow ۰/۰۴v_۰^۲=-۷/۷+۱/۲۵v_۰$$

$$۰/۰۴v_۰^۲-۱/۲۵v_۰+۷/۷=۰\Rightarrow v_۰=\frac{۱/۲۵\pm\sqrt{(۱/۲۵)^۲-۴(۰/۰۴)(۷/۷)}}{۲\times ۰/۰۴}\Rightarrow v_۰=\frac{۱/۲۵\pm\sqrt{۰/۳۳}}{۰/۰۸}\Rightarrow$$

$$v_۰=\frac{۱/۲۵\pm ۰/۵۷}{۰/۰۸}\Rightarrow\begin{cases}v_{۰۱}=\dfrac{۱/۲۵+۰/۵۷}{۰/۰۸}\\ v_{۰۲}=\dfrac{۱/۲۵-۰/۵۷}{۰/۰۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{۰۱}=\dfrac{۱/۸۲}{۰/۰۸}\\ v_{۰۲}=\dfrac{۰/۶۸}{۰/۰۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{۰۱}=۲۲/۷۵\ \dfrac{m}{s}\\ v_{۰۲}=۸/۵\ \dfrac{m}{s}\end{cases}$$

با توجه به سرعت‌های حاصله و رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$v_{۰۱}=۲۲/۷۵\ \frac{m}{s}\Rightarrow h_۱=۰/۰۵(۲۲/۷۵)^۲\Rightarrow h_۱=۲۵/۹\ m$$

$$v_{۰۲}=۸/۵\ \frac{m}{s}\Rightarrow h_۲=۰/۰۵(۸/۵)^۲\Rightarrow h_۲=۳/۶\ m$$

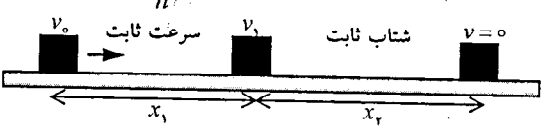
۲-۴۱) در جاده‌ی خشک، شتاب کُنْد شونده‌ی اتومبیلی $\frac{m}{s^۲}$ ۶/۲۸ و در جاده‌ی خیس، شتاب کُنْد شونده‌ی آن $\frac{m}{s^۲}$ ۳/۲ است. میانگین زمان واکنش راننده s ۰/۷۵ است. راننده در لحظه‌ی: $t=۰$ مانعی را در جاده می‌بیند. در هر یک از حالات زیر، اتومبیل، قبل از توقف چه مسافتی را می‌پیماید؟

الف) سرعتش در جاده‌ی خشک $\frac{mi}{h}$ ۴۰ است.

ب) سرعتش در جاده‌ی خیس $\frac{mi}{h}$ ۴۰ است.

ج) سرعتش در جاده‌ی خشک $\frac{mi}{h}$ ۷۵ است.

د) سرعتش در جاده‌ی خیس $\frac{mi}{h}$ ۷۵ است.



حل: در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل با سرعت ثابت، حرکت می‌کند.

الف) حرکت کُنْد شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

$$v_۰=۴۰\ \frac{mi}{h}\Rightarrow v_۰=۴۰\times\frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰}\Rightarrow v_۰=۱۷/۹۰\frac{m}{s}$$

x_1 مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt \Rightarrow x_1 = ۱۷/۹ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۱۳/۴ \ m$$

x_2 مسافت طی شده در حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \Rightarrow ۰ - (۱۷/۹)^2 = ۲ \times (-۶/۲۸)(x_2) \Rightarrow -۳۲۰/۴۱ - ۱۲/۵۶ x_2 \Rightarrow x_2 = ۲۵/۵ \ m$$

x کل مسافت طی شده:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۱۳/۴ + ۲۵/۲ \Rightarrow x = ۳۸/۶ \ m$$

ب) حرکت کُند شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

$$v_0 = ۴۰ \ \frac{mi}{h} \Rightarrow v_0 = ۴۰ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_0 = ۱۷/۹ \ \frac{m}{s}$$

x_1 مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt \Rightarrow x_1 = ۱۷/۹ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۱۳/۴ \ m$$

x_2 مسافت طی شده در حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \Rightarrow ۰ - (۱۷/۹)^2 = ۲ \times (-۳/۲) x_2 \Rightarrow -۳۲۰/۴۱ = -۶/۴ x_2 \Rightarrow x_2 = ۵۰/۱ \ m$$

x کل مسافت طی شده:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۱۳/۴ + ۵۰/۱ \Rightarrow x = ۶۳/۵ \ m$$

ج) حرکت کُند شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

$$v_0 = ۷۵ \ \frac{mi}{h} \Rightarrow v_0 = ۷۵ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_0 = ۳۳/۵ \ \frac{m}{s}$$

x_1 مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_1 = vt \Rightarrow x_1 = ۳۳/۵ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۲۵/۱ \ m$$

x_2 مسافت طی شده در حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow ۰ - (۳۳/۵)^2 = ۲ \times (-۶/۲۸) x_2 \Rightarrow -۱۱۲۲/۲۵ = -۱۲/۵۶ x_2 \Rightarrow x_2 = ۸۹/۴ \ m$$

x کل مسافت طی شده:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۲۵/۱ + ۸۹/۴ \Rightarrow x = ۱۱۴/۵ \ m$$

د) حرکت کُند شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط، جاگذاری می‌شود.

$$v_0 = ۷۵ \ \frac{mi}{h} \Rightarrow v_0 = ۷۵ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_0 = ۳۳/۵ \ \frac{m}{s}$$

x_1 مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_1 = vt \Rightarrow x_1 = ۳۳/۵ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۲۵/۱ \ m$$

x_2 مسافت طی شده در حرکت شتاب‌دار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

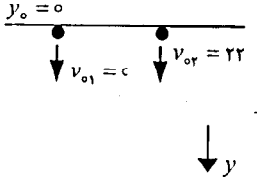
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow ۰ - (۳۳/۵)^2 = ۲(-۳/۲) x_2 \Rightarrow -۱۱۲۲/۲۵ = -۶/۴ x_2 \Rightarrow x_2 = ۱۷۵/۴ \ m$$

x کل مسافت طی شده:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۲۵/۱ + ۱۷۵/۴ \Rightarrow x = ۲۰۰/۵ \ m$$

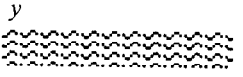
۲-۴۲) سنگی از بالای صخره‌ای در بالای یک دریاچه، رها می‌شود. $۱/۴\ s$ بعد، سنگ دیگری از بالای صخره با سرعت اولیه‌ی $۲۲\ \frac{m}{s}$ به طرف پایین، پرتاب می‌شود. هر دو سنگ در یک لحظه به سطح آب می‌رسند. ارتفاع صخره و زمان سقوط سنگ‌ها را به دست آورید.

حل: برای هر دو سنگ با استفاده از معادلات مکان ـ زمان می‌توان نوشت:



$$y = \frac{۱}{۲} g t^۲ + v_۰ t + y_۰ \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ t_۱^۲ \\ y_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ t_۲^۲ + ۲۲ t_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۴/۹ t_۱^۲ \\ y_۲ = ۴/۹ t_۲^۲ + ۲۲ t_۲ \end{cases}$$

سنگ دوم $۱/۴\ s$ دیرتر پرتاب شده است پس: $t_۲ = t_۱ - ۱/۴$ با جاگذاری در روابط فوق داریم:



$$y_۲ = ۴/۹(t_۱ - ۱/۴)^۲ + ۲۲(t_۱ - ۱/۴) \Rightarrow y_۲ = ۴/۹\left(t_۱^۲ + ۱/۹۶ - ۲/۸ t_۱\right) + ۲۲ t_۱ - ۳۰/۸ \Rightarrow$$
$$y_۲ = ۴/۹ t_۱^۲ + ۹/۶ - ۱۳/۷ t_۱ + ۲۲ t_۱ - ۳۰/۸ \Rightarrow y_۲ = ۴/۹ t_۱^۲ + ۸/۳ t_۱ - ۲۱/۲$$

هر دو سنگ با هم به سطح آب می‌رسند

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow ۴/۹ t_۱^۲ = ۴/۹ t_۱^۲ + ۸/۳ t_۱ - ۲۱/۲ \Rightarrow ۴/۹ t_۱^۲ - ۴/۹ t_۱^۲ - ۸/۳ t_۱ + ۲۱/۲ = ۰ \Rightarrow$$
$$-۸/۳ t_۱ + ۲۱/۲ = ۰ \Rightarrow ۸/۳ t_۱ = ۲۱/۲ \Rightarrow t_۱ = ۲/۶\ s$$

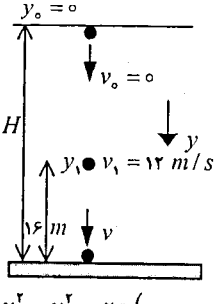
با جاگذاری مقدار فوق در $y_۱$ یا $y_۲$ ارتفاع پل به دست می‌آید:

$$y_۱ = ۴/۹ \times (۲/۶)^۲ \Rightarrow y_۱ = ۳۳/۸\ m$$

۲-۴۳) سنگی از ارتفاع H رها می‌شود. در ارتفاع ۱۶ متری سطح زمین، سرعت سنگ $۱۲\ \frac{m}{s}$ است. هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید:

الف) سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین ب) ارتفاع H ج) زمان سقوط سنگ

حل:



الف) v سرعت برخورد به زمین با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g(y - y_۱) \Rightarrow v^۲ - ۱۲^۲ = ۲ \times ۹/۸(H - H + ۱۶) \Rightarrow$$
$$v^۲ - ۱۴۴ = ۳۱۳/۶ \Rightarrow v^۲ = ۳۱۳/۶ + ۱۴۴ \Rightarrow v^۲ = ۴۵۷/۶ \Rightarrow v = ۲۱/۴\ \frac{m}{s}$$

ب) ارتفاع H با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

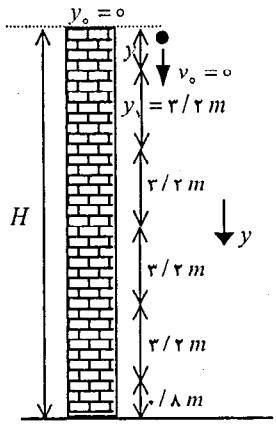
$$v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲g(y_۱ - y_۰) \Rightarrow ۱۲^۲ - ۰ = ۲ \times ۹/۸(H - ۱۶) \Rightarrow ۱۴۴ = ۱۹/۶H - ۱۹/۶ \times ۱۶ \Rightarrow$$
$$۱۴۴ = ۱۹/۶H - ۳۱۳/۶ \Rightarrow ۱۴۴ + ۳۱۳/۶ = ۱۹/۶H \Rightarrow ۴۵۷/۶ = ۱۹/۶H \Rightarrow H = ۲۳/۳\ m$$

ج) t زمان سقوط سنگ با استفاده از نتایج قسمت الف و با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = gt + v_۰ \Rightarrow ۲۱/۴ = ۹/۸t \Rightarrow t = ۲/۱۸\ s$$

۲-۴۴) گلدانی به طور تصادفی از بالای ساختمانی، رها می‌شود. شخصی در خیابان ایستاده و سقوط آن را می‌بیند. وی متوجه می‌شود که زمان بین گذشتن گلدان از لبه‌ی پنجره‌ی طبقه‌ی پنجم و گذشتن آن از لبه‌ی پنجره‌ی طبقه‌ی چهارم $۰/۳۶\ s$ است. فاصله بین دو طبقه‌ی متوالی $۳/۲\ m$ و لبه‌ی پنجره‌ی طبقه‌ی اول $۰/۸\ m$ بالاتر از سطح زمین است. گلدان از چه ارتفاعی رها شده است؟

حل: $v_۱$ سرعت گلدان در لبه‌ی طبقه‌ی پنجم با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:



$$y_۱ = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۱t \Rightarrow ۳/۲ = \frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times(۰/۳۶)^۲ + v_۱(۰/۳۶) \Rightarrow$$

$$۳/۲ = ۰/۶ + ۰/۳۶\,v_۱ \Rightarrow ۲/۶ = ۰/۳۶\,v_۱ \Rightarrow v_۱ = ۷/۲\ \frac{m}{s}$$

y فاصله بین طبقه‌ی پنجم و پشت‌بام با استفاده از زابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

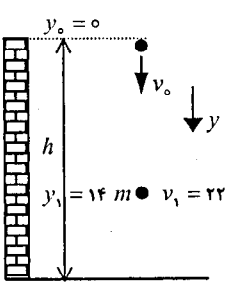
$$v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲gy \Rightarrow (۷/۲)^۲ - ۰ = ۲\times ۹/۸\,y \Rightarrow ۵۱/۸ = ۱۹/۶\,y \Rightarrow$$
$$y = ۲/۶\ m$$

H ارتفاع ساختمان:

$$H = ۰/۸ + ۳/۲ + ۳/۲ + ۳/۲ + ۳/۲ + ۲/۶ \Rightarrow H = ۱۶/۲\ m$$

۲-۴۵) سنگی از بام ساختمانی به طور قائم به طرف پایین، پرتاب می‌شود. سنگ از مقابل پنجره‌ای که $۱۴\ m$ پایین‌تر از بام است با سرعت $۲۲\ \frac{m}{s}$ می‌گذرد و $۲/۸\ s$ پس از پرتاب به زمین می‌رسد. سرعت اولیه‌ی سنگ و ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

حل: $v_۰$ سرعت اولیه‌ی سنگ با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:



$$v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲g(y_۱ - y_۰) \Rightarrow ۲۲^۲ - v_۰^۲ = ۲\times ۹/۸\times ۱۴ \Rightarrow ۴۸۴ - v_۰^۲ = ۲۷۴/۴$$

$$۴۸۴ - ۲۷۴/۴ = v_۰^۲ \Rightarrow v_۰^۲ = ۲۰۹/۶ \Rightarrow v_۰ = ۱۴/۳\ \frac{m}{s}$$

h ارتفاع ساختمان با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times(۲/۸)^۲ + ۱۴/۳\times ۲/۸ \Rightarrow h = ۷۸/۵\ m$$

۲-۴۶) قطار مسافری با سرعت $۲۸\ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. راننده، قطار باری را روی همان ریل در جلوی خود می‌بیند در این لحظه، نوک قطار مسافری $۳۵۰\ m$ از آخرین واگن قطار باری، عقب‌تر است و قطار باری با سرعت $۶\ \frac{m}{s}$ در همان جهت قطار مسافری، حرکت می‌کند. حداکثر شتاب کُنْد شونده‌ی ترمز قطار مسافری $-۰/۷۱\ ms^{-۲}$ است. اگر زمان واکنش راننده: الف) $۰/۴\ s$ ب) $۰/۹\ s$ باشد آیا قطارها

برخورد می‌کنند؟ مکان تصادف را نسبت به مکانی به دست آورید که راننده، اولین بار، قطار باری را دیده است. در لحظه‌ی تصادف، سرعت نسبی قطارها را به دست آورید.

حل:

الف) در مدت زمان واکنش راننده $t_1 = ۰/۴\ s$ هر دو قطار با سرعت ثابت، حرکت می‌کنند.

قطار مسافری

$x_{۰۱}$ مسافت طی شده در مدت زمان واکنش راننده با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_{۰۱} = vt_1 \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۸ \times ۰/۴ \Rightarrow x_{۰۱} = ۱۱/۲\ m$$

قطار باری

$x_{۰۲}$ مسافت طی شده در مدت زمان واکنش راننده با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_{۰۲} = vt_1 + x_۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۶ \times ۰/۴ + ۳۵۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۳۵۲/۴\ m$$

وقتی، قطار مسافری ترمز می‌کند

قطار مسافری:

با استفاده از معادله‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x_1 = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_1t + x_{۰۱} \Rightarrow x_1 = \frac{۱}{۲}(-۰/۷۱)t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲m \Rightarrow x_1 = -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲$$

قطار باری

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x_۲ = v_۲t + x_{۰۲} \Rightarrow x_۲ = ۶t + ۳۵۲/۴$$

وقتی که دو قطار برخورد می‌کنند:

$$x_1 = x_۲ \Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲ = ۶t + ۳۵۲/۴ \Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲ - ۶t - ۳۵۲/۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$-۰/۳۶t^۲ + ۲۲t - ۳۴۱/۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{۲۲^۲ - ۴(-۰/۳۶)(-۳۴۱/۲)}}{۲ \times (-۰/۳۶)} \Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{-۷/۳}}{-۰/۷۲}$$

چون زیر رادیکال منفی است پس برای t جوابی به دست نمی‌آید بنابراین دو قطار برخورد نمی‌کنند.

ب) در زمان واکنش راننده $t_1 = ۰/۹\ s$ دو قطار با سرعت ثابت حرکت می‌کنند:

قطار مسافری

$x_{۰۱}$ مسافت طی شده در مدت زمان واکنش راننده با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_{۰۱} = v_1t_1 \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۸ \times ۰/۹ \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۵/۲\ m$$

قطار باری

$x_{۰۲}$ مسافت طی شده در مدت زمان واکنش راننده با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x_{۰۲} = v_۲t_1 + x_۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۶ \times ۰/۹ + ۳۵۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۳۵۵/۴\ m$$

وقتی، قطار مسافری ترمز می‌کند

قطار مسافری

با استفاده از معادله‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_{01}t + x_{01} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\times(-0/72)t^2 + 28t + 25/2 \Rightarrow x_1 = -0/36t^2 + 28t + 25/2$$

قطار باری

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x_2 = v_2 t + x_{02} \Rightarrow x_2 = 6t + 355/4$$

وقتی که دو قطار برخورد می‌کنند:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow -0/36t^2 + 28t + 25/2 = 6t + 355/4 \Rightarrow -0/36t^2 + 28t + 25/2 - 6t - 355/4 = 0 \Rightarrow$$

$$-0/36t^2 + 22t - 330/2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4(-0/36)(-330/2)}}{2\times(-0/36)} \Rightarrow t = \frac{-22 \pm \sqrt{8/5}}{-0/72} \Rightarrow$$

$$t = \frac{-22 \pm 2/9}{-0/72} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-22 + 2/9}{-0/72} \\ t' = \dfrac{-22 - 2/9}{-0/72} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-19/1}{-0/72} \\ t' = \dfrac{-24/9}{-0/72} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 26/5 \ s \\ t' = 34/6 \ s \end{cases}$$

$t = 26/5 \ s$ جواب مساله است.

برای محاسبه‌ی مکان برخورد $t = 26/5 \ s$ را در یکی از روابط x_1 یا x_2 جاگذاری می‌کنیم:

$$x_2 = 6t + 355/4 \Rightarrow x_2 = 6\times 26/5 + 355/4 \Rightarrow x_2 = 514/4 \ m$$

v سرعت قطار مسافربری در لحظه‌ی تصادف با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

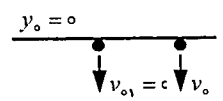
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -0/72\times 26/5 + 28 \Rightarrow v = 9/2 \ \frac{m}{s}$$

v' سرعت نسبی سرعت دو قطار در لحظه‌ی تصادف:

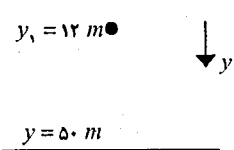
$$v' = v - v_2 \Rightarrow v' = 9/2 - 6 \Rightarrow v' = 3/2 \ \frac{m}{s}$$

۲-۴۷) توپی از بالای صخره‌ای به ارتفاع $50 \ m$ رها می‌شود. وقتی از نقطه‌ای به ارتفاع $12 \ m$ پایین‌تر از لبه‌ی صخره می‌گذرد توپ دیگری به طرف پایین، پرتاب می‌شود. سرعت اولیه‌ی توپ دوم چه قدر باشد تا هردو توپ با هم به سطح زمین برسند؟

حل:



سنگ اول



t_1 زمان سقوط ارتفاع $12 \ m$ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 + y_0 \Rightarrow 12 = \frac{1}{2}\times 9/8t_1^2 + 0 \Rightarrow 12 = 4/9t_1^2 \Rightarrow$$

$$t_1^2 = 2/5 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2/5} \Rightarrow t_1 = 1/56 \ s$$

$t_۲$ کل زمان سقوط:

$$y=\frac{۱}{۲}gt_۲^۲+v_۰t_۲+y_۰\Rightarrow ۵۰=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^۲\Rightarrow ۵۰=۴/۹t_۲^۲\Rightarrow t_۲^۲=۱۰/۲\Rightarrow t_۲=۳/۱۹\ s$$

t زمان سقوط از ارتفاع $y_۱$ تا سطح زمین:

$$t=t_۲-t_۱\Rightarrow t=۳/۱۹-۱/۵۶\Rightarrow t=۱/۶۳\ s$$

زمان حاصله، زمان سقوط سنگ دوم باشد هر دو سنگ با هم به سطح زمین می‌رسند.

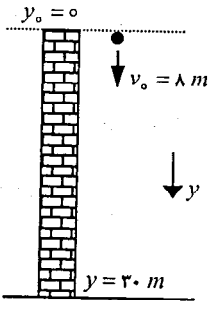
برای سنگ دوم

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_{۰۲}t+y_۰\Rightarrow ۵۰=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times(۱/۶۳)^۲+v_۰\times ۱/۶۳\Rightarrow ۵۰=۱۳+۱/۶۳v_۰\Rightarrow$$

$$۵۰-۱۳=۱/۶۳v_۰\Rightarrow ۳۷=۱/۶۳v_۰\Rightarrow v_۰=۲۲/۷\ \frac{m}{s}$$

۲-۴۸) سنگی با سرعت اولیه‌ی $۸\ \frac{m}{s}$ از بالای ساختمانی به ارتفاع m ۳۰ به طرف پایین، پرتاب می‌شود. سنگ، پس از چه مدتی به زمین می‌رسد. سرعتش را قبل از برخورد به زمین به دست آورید.



حل: t زمان سقوط سنگ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۰t+y_۰\Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^۲+۸t\Rightarrow ۴/۹t^۲+۸t-۳۰=۰\Rightarrow$$

$$t=\frac{-۸\pm\sqrt{۸^۲-۴\times ۴/۹\times(-۳۰)}}{۲\times ۴/۹}\Rightarrow t=\frac{-۸\pm\sqrt{۶۵۲}}{۹/۸}\Rightarrow t=\frac{-۸\pm ۲۵/۵}{۹/۸}$$

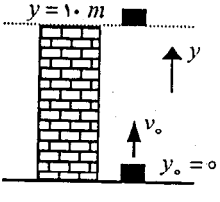
$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\dfrac{-۸+۲۵/۵}{۹/۸}\\ t_۲=\dfrac{-۸-۲۵/۵}{۹/۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\dfrac{۱۷/۵}{۹/۸}\\ t_۲=\dfrac{-۳۳/۵}{۹/۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۱/۸\ s\\ t_۲=-۳/۳\ s\end{cases}$$

زمان منفی وجود ندارد پس: $t_۱=۱/۸\ s$ جواب مساله است.

v سرعت برخورد با زمین با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v=gt+v_۰\Rightarrow v=۹/۸\times ۱/۸+۸\Rightarrow v=۱۴/۵+۸\Rightarrow v=۲۵/۶\ \frac{m}{s}$$

۲-۴۹) کارگری روی بام ساختمانی به ارتفاع m ۱۰ ایستاده است. کارگر دیگری جسمی را از روی زمین، برای او پرتاب می‌کند. کارگر اول، وقتی آن را می‌گیرد که جسم می‌خواهد به پایین برگردد. اگر این جسم به مدت s ۲/۵ در هوا باشد با چه سرعتی از دست کارگر روی زمین، پرتاب شده است؟



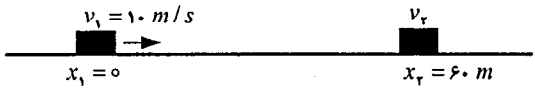
حل: $v_۰$ سرعت اولیه‌ی جسم با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۰t+y_۰\Rightarrow ۱۰=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times(۲/۵)^۲+v_۰\times ۲/۵\Rightarrow$$

$$۱۰=-۳۰/۶+۲/۵v_۰\Rightarrow ۲/۵v_۰=۴۰/۶\Rightarrow v_۰=۱۶/۳\ \frac{m}{s}$$

۲-۵۰) جسمی با شتاب ثابت، حرکت می‌کند و در مدت s ۲ از دو نقطه به فاصله‌ی m ۶۰ عبور می‌کند. اگر سرعت جسم، هنگام عبور از نقطه‌ی اول $\frac{m}{s}$ ۱۰ باشد سرعتش را هنگام عبور از نقطه‌ی دوم به دست آورید.

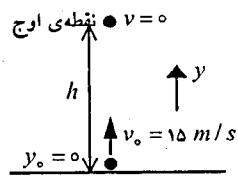
حل:



$$x = \frac{v_2 + v_1}{2} t \Rightarrow 60 = \frac{v_2 + 10}{2} \times 2 \Rightarrow 60 = v_2 + 10 \Rightarrow v_2 = 60 - 10 \Rightarrow v_2 = 50\ \frac{m}{s}$$

۲-۵۱) توپی با سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۵ به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. توپ، حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ توپ چه مدت زمانی در هوا می‌ماند؟

حل: h ارتفاع اوج با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:



$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow 0 - 15^2 = -2 \times 9/8h \Rightarrow -225 = -19/6h \Rightarrow$$
$$h = 11/5\ m$$

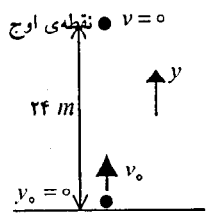
t زمان پرواز توپ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \times 10 t^2 + 15t \Rightarrow -5t^2 + 15t = 0 \Rightarrow 5t(-t + 3) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 5t = 0 \\ -t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3\ s \end{cases}$$

$t = 3\ s$ جواب مساله است.

۲-۵۲) توپی به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. سرعت اولیه‌ی آن چه‌قدر باشد تا به ارتفاع ۲۴ متری محل پرتاب برسد؟ توپ چه مدت زمانی در هوا می‌ماند؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:



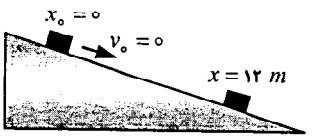
$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow 0 - v_0^2 = -2 \times 9/8 \times 24 \Rightarrow -v_0^2 = -470/4$$
$$v_0 = 21/7\ \frac{m}{s}$$

t زمان پرواز توپ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \times 9/8 t^2 + 21/7t \Rightarrow -4/95 t^2 + 21/7t = 0 \Rightarrow$$
$$t(-4/9t + 21/7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -4/9t + 21/7 = 0 \Rightarrow 4/9t = 21/7 \Rightarrow t = 4/4\ s \end{cases}$$

۲-۵۳) جسمی روی سطح شیب‌داری از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. در پایان ثانیه‌ی چهارم m ۱۲ از مکان اولیه‌اش، فاصله دارد. با فرض این که جسم به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد شتاب، سرعت متوسط و سرعت جسم را در پایان ثانیه‌ی چهارم به دست آورید.

حل: شتاب جسم با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}a \times 4^2 \Rightarrow 2 = 8a \Rightarrow a = 0/25\ \frac{m}{s^2}$$

سرعت متوسط:

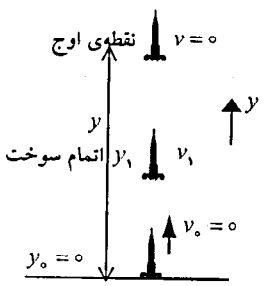
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2}{4} \Rightarrow \bar{v} = 0/5\ \frac{m}{s}$$

v سرعت جسم در پایان ثانیه‌ی چهارم از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 0/25 \times 4 \Rightarrow v = 1\ \frac{m}{s}$$

۲-۵۴) موشکی در مدت s ۳۸ به شتاب $1/45g$ در جهت قائم می‌رسد. در این لحظه، سوختش تمام می‌شود و فقط شتاب گرانش به آن وارد می‌شود. حداکثر ارتفاعی که موشک، بالا می‌رود کل زمان سپری شده از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ی برگشت آن به زمین و سرعت برخوردش با زمین را به دست آورید.(از وابستگی g به ارتفاع، صرف‌نظر کنید.)

حل:



قبل از اتمام سوخت

حرکت موشک تند شونده با شتاب ثابت است شتاب حرکت موشک:

$$a = 1/45\,g \Rightarrow a = 1/45 \times 9/8 \Rightarrow a = 14/2\ \frac{m}{s^2}$$

y_1 با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 + y_0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \times 14/2 \times 38^2 + 0 \Rightarrow y_1 = 10259\ \ m$$

v_1 سرعت موشک با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v_1 = at_1 + v_0 \Rightarrow v_1 = 14/2 \times 38 \Rightarrow v_1 = 540\ \frac{m}{s}$$

پس از اتمام سوخت

حرکت موشک، کُند شونده با شتاب ثابت است.

y نقطه‌ی اوج موشک با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v^2 - v_1^2 = -2g(y - y_1) \Rightarrow 0 - 540^2 = -2 \times 9/8\,(y - 10259) \Rightarrow -291600 = -19/6y + 201076$$
$$-492676 = -19/6y \Rightarrow y = 25137\ \ m$$

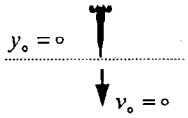
t_2 زمان رسیدن از نقطه‌ی y_1 به نقطه‌ی اوج با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = -gt_2 + v_1 \Rightarrow 0 = -9/8t_2 + 540 \Rightarrow 540 = 9/8t_2 \Rightarrow t_2 = 55/1\ s$$

t زمان کل حرکت موشک تا رسیدن به نقطه‌ی اوج:

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = 38 + 55/1 \Rightarrow t = 93/1\ s$$

برای برگشت



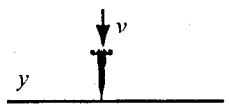
موشک از نقطه‌ی اوج، سقوط آزاد می‌کند.

t زمان سقوط موشک با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{2} g' t'^2 + v_0 t' + y_0 \Rightarrow 25137 = \frac{1}{2} \times 9/8 t'^2 \Rightarrow 25137 = 4/9 t'^2$$

$$t'^2 = 5130 \Rightarrow t' = 71/6 \ s$$

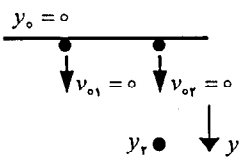
v سرعت برخورد موشک با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:



$$v = g t' + v_0 \Rightarrow v = 9/8 \times 71/6 + 0 \Rightarrow v = 701/7 \ \frac{m}{s}$$

۲-۵۵) دو سنگ به فاصله زمانی s ۲ از لبه‌ی صخره‌ای، رها می‌شوند. رابطه‌ی فاصله‌ی بین دو سنگ را به صورت تابعی از زمان بنویسد. وقتی فاصله‌ی بین دو سنگ m ۴۸ است سنگ اول چه ارتفاعی، سقوط، کرده است؟

حل: معادلات مکان ـ زمان را برای هر دو سنگ می‌نویسیم:



$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \times 9/8 t_1^2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \times 9/8 t_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4/9 t_1^2 \\ y_2 = 4/9 t_2^2 \end{cases}$$

سنگ دوم s ۲ دیرتر، رها شده است پس:

$$t_2 = t_1 - 2 \Rightarrow y_2 = 4/9 (t_1 - 2)^2 \Rightarrow y_2 = 4/9 \left(t_1^2 + 4 - 4t_1\right) \Rightarrow y_2 = 4/9 t_1^2 + 19/6 - 19/6 t_1$$

وقتی، فاصله‌ی دو سنگ m ۴۸ می‌شود

$$y_1 - y_2 = 48 \Rightarrow 4/9 t_1^2 - \left(4/9 t_1^2 + 19/6 - 19/6 t_1\right) = 48 \Rightarrow$$

$$4/9 t_1^2 - 4/9 t_1^2 - 19/6 + 19/6 t_1 = 48 \Rightarrow 19/6 t_1 = 67/6 \Rightarrow t_1 = 3/44 \ s$$

با جاگذاری $t_1 = 3/44 \ s$ در رابطه‌ی y_1 فاصله‌ی سنگ اول از محل سقوط به دست می‌آید:

$$y_1 = 4/9 \times 3/44 \Rightarrow y_1 = 57/9 \ m$$

۲-۵۶) در جاده‌ی مستقیمی، اتومبیلی از حال سکون به طور یکنواخت، شتاب می‌گیرد. در نقطه‌ای، سرعتش $\frac{m}{s}$ ۱۲ و m ۸۰ جلوتر سرعتش $\frac{m}{s}$ ۲۰ است:

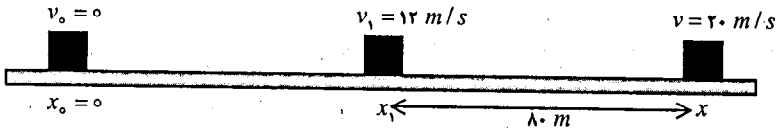
الف) شتاب اتومبیل را به دست آورید.

ب) اتومبیل مسافت m ۸۰ را در چه مدت زمانی، پیموده است؟

ج) در چه مدت زمانی، اتومبیل از حالت سکون به سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۲ می‌رسد؟

د) هنگامی که سرعت اتومبیل به $\frac{m}{s}$ ۲۰ می‌رسد، چه مسافتی را از نقطه‌ی شروع حرکت پیموده است؟

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$v^2 - v_1^2 = 2a(x - x_1) \Rightarrow 20^2 - 12^2 = 2a(x_1 + 80 - x_1) \Rightarrow 256 = 160\,a \Rightarrow a = 1/6\ \frac{m}{s^2}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t + x_1 \Rightarrow x_1 + 80 = \frac{1}{2} \times 1/6 \times t^2 + 12t + x_1 \Rightarrow 0/8t^2 + 12t - 80 = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(0/8)(-80)}}{2 \times 0/8} \Rightarrow t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2 \times 0/8} \Rightarrow t = \frac{-12 \pm \sqrt{400}}{1/6} \Rightarrow t = \frac{-12 \pm 20}{1/6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{-12 + 20}{1/6} \\ t_2 = \dfrac{-12 - 20}{1/6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{8}{1/6} \\ t_2 = \dfrac{-32}{1/6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5\ s \\ t_2 = -2\ s \end{cases}$$

چون زمان منفی وجود ندارد پس: $t_1 = 5\ s$ جواب مساله است.

ج) با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v_1 = at_1 + v_0 \Rightarrow 12 = 1/6\,t_1 \Rightarrow t_1 = 7/5\ s$$

د) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:

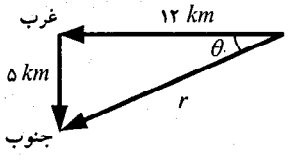
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 20^2 - 0 = 2 \times 1/6 \times x \Rightarrow 400 = 3/2x \Rightarrow x = 125\ m$$

فصل ۳

سینماتیک در دو بُعد

۳-۱) اتومبیلی km ۱۲ به طرف غرب، سپس km ۵ به طرف جنوب می‌رود. جابجایی اتومبیل را به دست آورید.

حل: r جابه‌جایی اتومبیل:



$$r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \Rightarrow r=\sqrt{۱۲^{۲}+۵^{۲}} \Rightarrow r=\sqrt{۱۶۹} \Rightarrow r=۱۳ \ km$$

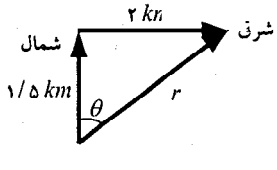
θ جهت حرکت اتومبیل:

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta=\frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \tan\theta=۰/۴۲ \Rightarrow \theta=۲۲/۶^{\circ}$$

جهت حرکت اتومبیل $۲۲/۶^{\circ}$ به طرف جنوب غربی است.

۳-۲) شخصی km ۱/۵ به شمال، سپس km ۲ به طرف شرق، پیاده‌روی می‌کند. تغییر مکان او را از نقطه‌ی آغاز حرکتش به دست آورید.

حل: r جابه‌جایی شخص:



$$r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \Rightarrow r=\sqrt{۱/۵^{۲}+۲^{۲}} \Rightarrow r=\sqrt{۶/۲۵} \Rightarrow r=۲/۵ \ km$$

θ جهت حرکت شخص:

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta=\frac{۱/۵}{۲} \Rightarrow \tan\theta=۰/۷۵ \Rightarrow \theta=۳۷^{\circ}$$

جهت حرکت شخص ۳۷° به طرف شمال شرقی است.

۳-۳) دوچرخه‌سواری یک و نیم دور از مسیر دایره‌ای را می‌پیماید. مسافت یک دور کامل از این مسیر km ۰/۵ است. دوچرخه‌سوار چه مسافتی را پیموده است؟ جابجایی او را به دست آورید.

حل: d مسافت طی شده توسط دوچرخه‌سوار:

$$d = ۱/۵ \times ۰/۵ \Rightarrow d = ۰/۷۵ \ km$$

دوچرخه‌سوار یک و نیم دور، پیموده است در دور اول به جای اول خود، برگشته است پس جابه‌جایی او در دور اول برابر صفر است. تنها جابه‌جایی دوچرخه‌سوار ۰/۵ دور است.

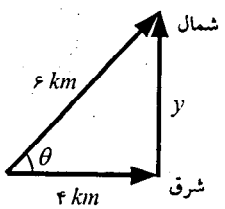
p محیط دایره‌ای به شعاع r:

$$p = ۲\pi r \Rightarrow ۰/۵ = ۲ \times ۳r \Rightarrow ۰/۵ = ۶r \Rightarrow r = \frac{۰/۵}{۶} \Rightarrow r = ۰/۰۸ \ km$$

x جابه‌جایی دوچرخه‌سوار:

$$x = ۲r \Rightarrow x = ۲ \times ۰/۰۸ \Rightarrow r = ۰/۱۶ \ km$$

۳-۴) شخصی km ۴ به طرف شرق و سپس به طرف شمال می‌رود. پس از مدتی، روی خط مستقیم km ۶ از نقطه‌ی آغاز حرکتش، فاصله دارد. شخص چه مسافتی را در جهت شمال طی کرده است؟



حل: r جابه‌جایی شخص:

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۳۶ = ۱۶ + y^۲ \Rightarrow y^۲ = ۲۰ \Rightarrow y = ۴/۴۷ \ km$$

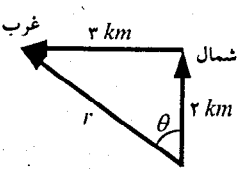
θ جهت حرکت شخص:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۴/۴۷}{۴} \Rightarrow \tan\theta = ۱/۱۱۷۵ \Rightarrow \theta = ۴۸^\circ$$

جهت جابه‌جایی شخص ۴۸° به طرف شمال شرقی است.

۳-۵) قایقی، عرض رودخانه‌ای را به طرف شمال می‌پیماید. پس از پیمودن مسافت km ۲ تغییر جهت می‌دهد و پس از طی مسافت km ۳ به شمال غربی نقطه‌ی آغاز حرکتش می‌رسد. جهت حر کت قایق پس از تغییر جهت و فاصله‌ی نهایی آن را نسبت به نقطه‌ی آغاز حرکتش به دست آورید.

حل: r اندازه‌ی جابه‌جایی قایق:



$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \Rightarrow r = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲} \Rightarrow r = \sqrt{۱۳} \Rightarrow r = ۳/۶ \ km$$

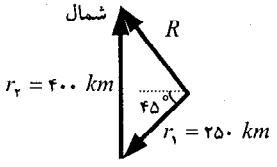
θ جهت حرکت قایق:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۶۷ \Rightarrow \theta = ۳۳/۷^\circ$$

جهت جابه‌جایی قایق $۳۳/۷^\circ$ در جهت شمال غربی است.

۳-۶) هواپیمایی مسافت km ۲۵۰ را در جهت ۴۵° جنوب غربی، پرواز می‌کند. سپس km ۴۰۰ به طرف شمال می‌رود. فاصله‌ی هواپیما و جهت مقصد را نسبت به نقطه‌ی آغاز حرکتش به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

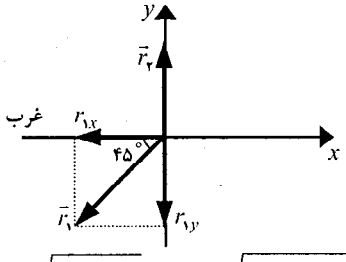


$$\begin{cases} r_{۱x} = -r_۱ \cos ۴۵ \\ r_{۱y} = -r_۱ \sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{۱x} = -۲۵۰ \cos ۴۵ \\ r_{۱y} = -۲۵۰ \sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_{۱x} = -۱۷۶/۸\ km \\ r_{۱y} = -۱۷۶/۸\ km \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_۱ = -۱۷۶/۸\vec{i} - ۱۷۶/۸\vec{j}$$

$$\vec{r}_۲ = ۴۰۰\vec{j}$$

$\vec{R}$ بردار جابه‌جایی هواپیما:



$$\vec{R} = \vec{r}_۱ + \vec{r}_۲ \Rightarrow \vec{R} = -۱۷۶/۸\vec{i} - ۱۷۶/۸\vec{j} + ۴۰۰\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{R} = -۱۷۶/۸\vec{i} + ۲۲۳/۲\vec{j}$$

R اندازه‌ی جابه‌جایی هواپیما (فاصله‌ی مقصد از مبدا):

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \Rightarrow R = \sqrt{(-۱۷۶/۸)^۲ + (۲۲۳/۲)^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۸۱۰۷۶/۵} \Rightarrow R = ۲۸۴/۷\ km$$

θ جهت حرکت هواپیما (جهت مقصد نهایی):

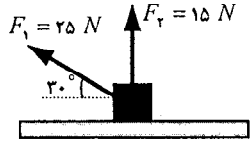
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۲۲۳/۲}{-۱۷۶/۸} \Rightarrow \tan\theta = -۱/۲۶ \Rightarrow \theta = -۵۱/۶^\circ$$

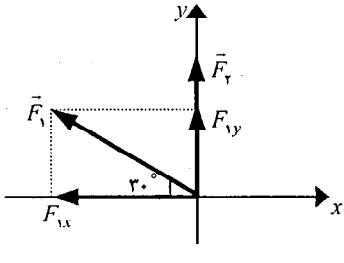
بردار $\vec{R}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{R}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ - \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۵۱/۶ \Rightarrow \alpha = ۱۲۸/۴^\circ$$

۳-۷) جسمی ساکنی روی سطح افقی، قرار دارد و به دو ریسمان متصل است. یکی از ریسمان‌ها با نیروی N ۱۵ در جهت مثبت محور yها و ریسمان دیگر با نیروی N ۲۵ تحت زاویه‌ی ۱۵۰° جهت مثبت محور xها کشیده می‌شود. اندازه و جهت نیروی موثر وارد بر جسم را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:





$$\begin{cases} F_{۱x} = -F_۱ \cos ۳۰ \\ F_{۱y} = F_۱ \sin ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{۱x} = -۲۵ \cos ۳۰ \\ F_{۱y} = ۲۵ \sin ۳۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{۱x} = -۲۱/۷\ N \\ F_{۱y} = ۱۲/۵\ N \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_۱ = -۲۱/۷\vec{i} + ۱۲/۵\vec{j}$$

$$\vec{F}_۲ = ۱۵\vec{j}$$

$\vec{F}$ نیروی موثر وارد بر جسم:

$$\vec{F} = \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ \Rightarrow \vec{F} = -۲۱/۷\vec{i} + ۱۲/۵\vec{j} + ۱۵\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -۲۱/۷\vec{i} + ۲۷/۵\vec{j}$$

F اندازه‌ی نیروی موثر وارد بر جسم:

$$F = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \Rightarrow F = \sqrt{(-۲۱/۷)^۲ + (۲۷/۵)^۲} \Rightarrow F = \sqrt{۱۲۲۷} \Rightarrow F = ۳۵\ N$$

θ جهت نیروی موثر وارد بر جسم:

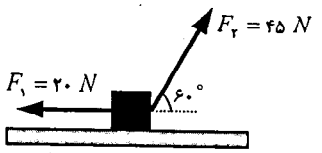
$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۲۷/۵}{-۲۱/۷}\Rightarrow\tan\theta=-۱/۲۷\Rightarrow\theta=-۵۱/۷^\circ$$

بردار $\vec{F}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{F}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha=۱۸۰-\theta\Rightarrow\alpha=۱۸۰-۵۱/۷\Rightarrow\alpha=۱۲۸/۳^\circ$$

۳-۸) دو نیرو به جسم ساکن واقع بر سطح افقی، وارد می‌شوند. یکی از آن‌ها نیروی N ۲۰ در جهت منفی محور xها و دیگری نیروی N ۴۵ در جهت ۶۰° جهت مثبت محور xها است. اندازه و جهت نیروی موثر وارد بر این جسم را به دست آورید.

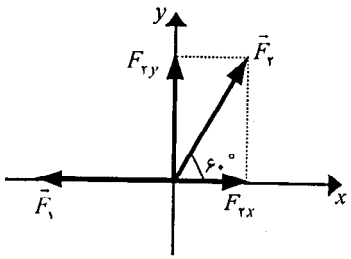
حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{F}_۱=-۲۰\,\vec{i}$$

$$\begin{cases}F_{۲x}=F_۲\cos۶۰\\F_{۲y}=F_۲\sin۶۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_{۲x}=۴۵\cos۶۰\\F_{۲y}=۴۵\sin۶۰\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}F_{۲x}=۲۲/۵\ N\\F_{۲y}=۳۹\ N\end{cases}\Rightarrow\vec{F}_۲=۲۲/۵\vec{i}+۳۹\,\vec{j}$$



$\vec{F}$ نیروی موثر وارد بر جسم:

$$\vec{F}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲\Rightarrow\vec{F}=-۲۰\,\vec{i}+۲۲/۵\vec{i}+۳۹\,\vec{j}\Rightarrow$$

$$\vec{F}=۲/۵\,\vec{i}+۳۹\,\vec{j}$$

F اندازه‌ی نیروی موثر وارد بر جسم:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(۲/۵)^۲+(۳۹)^۲}\Rightarrow F=\sqrt{۱۵۲۷/۲۵}\Rightarrow F=۳۹/۱\ N$$

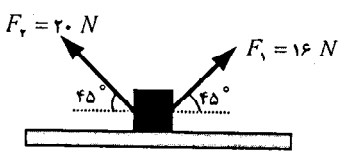
θ جهت نیروی موثر وارد بر جسم:

$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۳۹}{۲/۵}\Rightarrow\tan\theta=۱۵/۶\Rightarrow\theta=۸۶/۳^\circ$$

نیروی $\vec{F}$ در ربع اول است

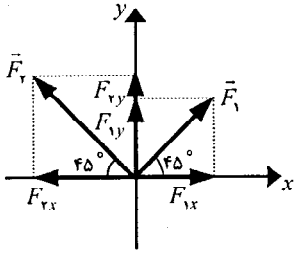
۳-۹) سه نیرو به جسمی، وارد می‌شوند. یکی از نیروها N ۱۶ با محور xها زاویه‌ی ۴۵° و دیگری نیروی N ۲۰ با محور xها زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازد. نیروی موثر وارد بر این جسم N ۱۲ و جهت آن در راستای محور yها است. اندازه و جهت نیروی سوم را به دست آورید.

حل:با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}F_{۱x}=F_۱\cos۴۵\\F_{۱y}=F_۱\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_{۱x}=۱۶\cos۴۵\\F_{۱y}=۱۶\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}F_{۱x}=۱۱/۳\ N\\F_{۱y}=۱۱/۳\ N\end{cases}\Rightarrow\vec{F}_۱=۱۱/۳\vec{i}+۱۱/۳\,\vec{j}$$



$$\begin{cases} F_{۲x} = -F_۲ \cos ۴۵ \\ F_{۲y} = F_۲ \cos ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{۲x} = -۲۰ \cos ۴۵ \\ F_{۲y} = ۲۰ \cos ۴۵ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{۲x} = -۱۴/۱ \ N \\ F_{۲y} = ۱۴/۱ \ N \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_۲ = -۱۴/۱\vec{i} + ۱۴/۱\vec{j}$$

$\vec{F}$ نیروی موثر وارد بر جسم:

$$\vec{F} = \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ \Rightarrow ۱۲\vec{j} = ۱۱/۳\vec{i} + ۱۱/۳\vec{j} - ۱۴/۱\vec{i} + ۱۴/۱\vec{j} + \vec{F}_۳$$

$$۱۲\vec{j} = -۲/۸\vec{i} + ۲۵/۴\vec{j} + \vec{F}_۳ \Rightarrow \vec{F}_۳ = ۲/۸\vec{i} - ۱۳/۴\vec{j}$$

$F_۳$ اندازه‌ی نیروی سوم وارد بر جسم:

$$F_۳ = \sqrt{F_{۳x}^۲ + F_{۳y}^۲} \Rightarrow F_۳ = \sqrt{(۲/۸)^۲ + (-۱۳/۴)^۲} \Rightarrow F_۳ = \sqrt{۱۸۷/۴} \Rightarrow F_۳ = ۱۳/۷ \ N$$

θ جهت نیروی سوم وارد بر جسم:

$$\tan\theta = \frac{F_{۳y}}{F_{۳x}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۱۳/۶}{۲/۸} \Rightarrow \tan\theta = -۴/۸۶ \Rightarrow \theta = -۷۸^\circ$$

بردار $\vec{F}_۳$ در ربع چهارم است.

۳-۱۰) مولفه‌های بردارهای $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ به صورت زیر است. اندازه و زاویه‌ی هر یک از آن‌ها نسبت به جهت مثبت محور xها را به دست آورید.

الف) $A_x = ۱/۲$ و $A_y = ۳/۶$ **ب)** $B_x = -۳/۵$ و $B_y = ۲/۴$ **ج)** $C_x = ۲/۸$ و $C_y = ۴/۲$

حل:

الف) اندازه‌ی بردار $\vec{A}$:

$$A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} \Rightarrow A = \sqrt{(۱/۲)^۲ + (۳/۶)^۲} \Rightarrow A = \sqrt{۱۴/۴} \Rightarrow A = ۳/۸$$

جهت بردار $\vec{A}$:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۳/۶}{۱/۲} \Rightarrow \tan\theta = ۳ \Rightarrow \theta = ۷۱/۶^\circ$$

بردار $\vec{A}$ در ربع اول است.

ب) اندازه‌ی بردار $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} \Rightarrow B = \sqrt{(-۳/۵)^۲ + (۲/۴)^۲} \Rightarrow B = \sqrt{۱۸/۰۱} \Rightarrow B = ۴/۲$$

جهت بردار $\vec{B}$:

$$\tan\theta = \frac{B_y}{B_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۲/۴}{-۳/۵} \Rightarrow \tan\theta = -۰/۶۹ \Rightarrow \theta = -۳۴/۴^\circ$$

بردار $\vec{B}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{B}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ - \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۳۴/۴ \Rightarrow \alpha = ۱۴۵/۶^\circ$$

ج) اندازه‌ی بردار $\vec{C}$:

$$C=\sqrt{C_x^2+C_y^2}\Rightarrow C=\sqrt{(۲/۸)^2+(۴/۲)^2}\Rightarrow C=\sqrt{۲۵/۴۸}\Rightarrow C=۵/۱$$

جهت بردار $\vec{C}$:

$$\tan\theta=\frac{C_y}{C_x}\Rightarrow \tan\theta=\frac{۴/۲}{۲/۸}\Rightarrow \tan\theta=۱/۵\Rightarrow \theta=۵۶/۳^\circ$$

بردار $\vec{C}$ در ربع اول است.

۳-۱۱) زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با استفاده از اطلاعات زیر به‌دست آورید:

الف) $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}|+|\vec{B}|$ **ب)** $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}|$ و $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ **ج)** $|\vec{A}-\vec{B}|=|\vec{A}|-|\vec{B}|$

حل:

الف)

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}\\ R=A+B\end{cases}\Rightarrow R^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow (A+B)^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow$$

$$A^2+B^2+2AB=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow 2AB=2AB\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=1\Rightarrow\theta=0$$

ب)

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}\\ R=A\\ A=B\end{cases}\Rightarrow R^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow A^2=A^2+A^2+2A^2\cos\theta\Rightarrow -A^2=2A^2\cos\theta$$

$$\cos\theta=-۰/۵\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

ج)

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{A}-\vec{B}\\ R=A-B\end{cases}\Rightarrow R^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow (A-B)^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow$$

$$A^2+B^2-2AB=A^2+B^2+2AB\cos\theta\Rightarrow -2AB=2AB\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=-1\Rightarrow\theta=۱۸۰^\circ$$

در مسائل ۳-۱۲ تا ۳-۲۱ سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را به صورت زیر فرض کنید:
$A_x=۶$، $A_y=-۸$، $B_x=-۳$، $B_y=۵$ و $C=۸$ با محور xها زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد.

۳-۱۲) اندازه و جهت بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و مولفه‌های بردار $\vec{C}$ را به دست آورید.

حل:

بردار $\vec{A}$:

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}\Rightarrow\vec{A}=۶\vec{i}-۸\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{A}$:

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\Rightarrow A=\sqrt{۶^2+(-۸)^2}\Rightarrow A=\sqrt{۱۰۰}\Rightarrow A=۱۰$$

جهت بردار $\vec{A}$:

$$\tan\theta_1 = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{-۸}{۶} \Rightarrow \tan\theta_1 = -۱/۳ \Rightarrow \theta_1 = -۵۳^\circ$$

بردار $\vec{A}$ در ربع چهارم است.

بردار $\vec{B}$:

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} \Rightarrow \vec{B} = -۳\vec{i} + ۵\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} \Rightarrow B = \sqrt{(-۳)^۲ + ۵^۲} \Rightarrow B = \sqrt{۳۴} \Rightarrow B = ۵/۸$$

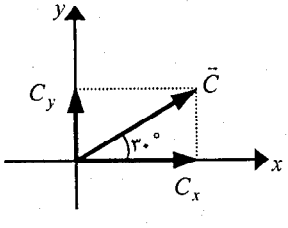
جهت بردار $\vec{B}$:

$$\tan\theta_2 = \frac{B_y}{B_x} \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{۵}{-۳} \Rightarrow \tan\theta_2 = -۱/۶۷ \Rightarrow \theta_2 = -۵۹^\circ$$

بردار $\vec{B}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{B}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ - \theta_2 \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۵۹ \Rightarrow \alpha = ۱۲۱^\circ$$

مولفه‌های بردار $\vec{C}$:



$$\begin{cases} C_x = C\cos۳۰ \\ C_y = C\sin۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = ۸\cos۳۰ \\ C_y = ۸\sin۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ C_y = ۸\times\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_x = ۶/۹ \\ C_y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = ۶/۹\,\vec{i} + ۴\vec{j}$$

۳-۱۳) بردار $\vec{D} = \vec{A} + \vec{C}$ را به دست آورید.

حل: بردار $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{C} \Rightarrow \vec{D} = ۶\vec{i} - ۸\vec{j} + ۶/۹\,\vec{i} + ۴\vec{j} \Rightarrow \vec{D} = ۱۲/۹\,\vec{i} - ۴\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{D}$:

$$D = \sqrt{D_x^۲ + D_y^۲} \Rightarrow D = \sqrt{(۱۲/۹)^۲ + (-۴)^۲} \Rightarrow D = \sqrt{۱۸۲/۴} \Rightarrow D = ۱۳/۵$$

جهت بردار $\vec{D}$:

$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۴}{۱۲/۹} \Rightarrow \tan\theta = -۰/۳۱ \Rightarrow \theta = -۱۷^\circ$$

بردار $\vec{D}$ در ربع چهارم است.

۳-۱۴) بردار $\vec{E} = \vec{A} - \vec{B}$ را به دست آورید.

حل: بردار $\vec{E}$:

$$\vec{E}=\vec{A}-\vec{B}\Rightarrow\vec{E}=(۶\vec{i}-۸\vec{j})-(-۳\vec{i}+۵\vec{j})\Rightarrow\vec{E}=۶\vec{i}-۸\vec{j}+۳\vec{i}-۵\vec{j}\Rightarrow\vec{E}=۹\vec{i}-۱۳\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{E}$:

$$E=\sqrt{E_x^۲+E_y^۲}\Rightarrow E=\sqrt{۹^۲+(-۱۳)^۲}\Rightarrow E=\sqrt{۲۵۰}\Rightarrow E=۱۵/۸$$

جهت بردار $\vec{E}$:

$$\tan\theta=\frac{E_y}{E_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-۱۳}{۹}\Rightarrow\tan\theta=-۱/۴\Rightarrow\theta=-۵۵^\circ$$

بردار $\vec{E}$ در ربع چهارم است.

۳-۱۵) بردار $\vec{F}=\vec{B}-\vec{C}-\vec{A}$ را به دست آورید.

حل: بردار $\vec{F}$:

$$\vec{F}=\vec{B}-\vec{C}-\vec{A}\Rightarrow\vec{F}=(-۳\vec{i}+۵\vec{j})-(۶/۹\vec{i}+۴\vec{j})-(۶\vec{i}-۸\vec{j})\Rightarrow$$
$$\vec{F}=-۳\vec{i}+۵\vec{j}-۶/۹\vec{i}-۴\vec{j}-۶\vec{i}+۸\vec{j}\Rightarrow\vec{F}=-۱۵/۹\vec{i}+۹\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{F}$:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(-۱۵/۹)^۲+۹^۲}\Rightarrow F=\sqrt{۳۳۳/۸۱}\Rightarrow F=۱۸/۳$$

جهت بردار $\vec{F}$:

$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۹}{-۱۵/۹}\Rightarrow\tan\theta=-۰/۵۷\Rightarrow\theta=-۲۹/۵^\circ$$

بردار $\vec{F}$ در ربع دوم قراردارد. α زاویه‌ی بردار $\vec{F}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha=۱۸۰+\theta\Rightarrow\alpha=۱۸۰-۲۹/۵\Rightarrow\alpha=۱۵۰/۵^\circ$$

۳-۱۶) بردار $\vec{G}$ را طوری به دست آورید که رابطه‌ی: $\vec{G}+\vec{C}=\vec{A}$ برقرار باشد.

حل: بردار $\vec{G}$:

$$\vec{G}+\vec{C}=\vec{A}\Rightarrow\vec{G}=\vec{A}-\vec{C}\Rightarrow\vec{G}=(۶\vec{i}-۸\vec{j})-(۶/۹\vec{i}+۴\vec{j})\Rightarrow\vec{G}=۶\vec{i}-۸\vec{j}-۶/۹\vec{i}-۴\vec{j}\Rightarrow$$
$$\vec{G}=-۰/۹\vec{i}-۱۲\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{G}$:

$$G=\sqrt{G_x^۲+G_y^۲}\Rightarrow G=\sqrt{(-۰/۹)^۲+(-۱۲)^۲}\Rightarrow G=\sqrt{۱۴۴/۸۱}\Rightarrow G=۱۲/۰۳$$

جهت بردار $\vec{G}$:

$$\tan\theta=\frac{G_y}{G_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-۱۲}{-۰/۹}\Rightarrow\tan\theta=۱۳/۳\Rightarrow\theta=۸۵/۷^\circ$$

بردار $\vec{G}$ در ربع سوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{G}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ + \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ + ۸۵/۷ \Rightarrow \alpha = ۵۶۵/۷^\circ$$

۳-۱۷) بردار $\vec{H}$ را طوری به دست آورید که رابطه‌ی: $\vec{H} - \vec{B} = \vec{A} - \vec{H}$ برقرار باشد.

حل: بردار $\vec{H}$:

$$\vec{H} - \vec{B} = \vec{A} - \vec{H} \Rightarrow \vec{H} + \vec{H} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow ۲\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{H} = ۰/۵ \times (\vec{A} + \vec{B}) \Rightarrow$$
$$\vec{H} = ۰/۵ \times (۶\,\vec{i} - ۸\,\vec{j} - ۳\,\vec{i} + ۵\vec{j}) \Rightarrow \vec{H} = ۰/۵ \times (۳\,\vec{i} - ۳\,\vec{j}) \Rightarrow \vec{H} = ۱/۵\,\vec{i} - ۱/۵\,\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{H}$:

$$H = \sqrt{H_x^۲ + H_y^۲} \Rightarrow H = \sqrt{(۱/۵)^۲ + (-۱/۵)^۲} \Rightarrow H = \sqrt{۴/۵} \Rightarrow H = ۲/۱۲$$

جهت بردار $\vec{H}$:

$$\tan\theta = \frac{H_y}{H_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۱/۵}{۱/۵} \Rightarrow \tan\theta = -۱ \Rightarrow \theta = -۴۵^\circ$$

بردار $\vec{H}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{H}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ + \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۴۵ \Rightarrow \alpha = ۱۳۵^\circ$$

۳-۱۸) بردار $\vec{J}$ را طوری به دست آورید که اندازه‌ی بردار $\vec{J} + \vec{C} + \vec{B}$ برابر ۴ و در جهت مثبت محور xها باشد.

حل: بردار $\vec{J}$:

$$\vec{J} + \vec{C} + \vec{B} = ۴\,\vec{i} \Rightarrow \vec{J} = ۴\,\vec{i} - \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow \vec{J} = ۴\,\vec{i} - (۶/۹\vec{i} + ۴\vec{j}) - (-۳\vec{i} + ۵\vec{j}) \Rightarrow$$
$$\vec{J} = ۴\,\vec{i} - ۶/۹\vec{i} - ۴\vec{j} + ۳\vec{i} - ۵\vec{j} \Rightarrow \vec{J} = ۰/۱\,\vec{i} - ۹\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{J}$:

$$J = \sqrt{J_x^۲ + J_y^۲} \Rightarrow J = \sqrt{(۰/۱)^۲ + (-۹)^۲} \Rightarrow J = \sqrt{۸۱/۰۱} \Rightarrow J = ۹/۰۰۱$$

جهت بردار $\vec{J}$:

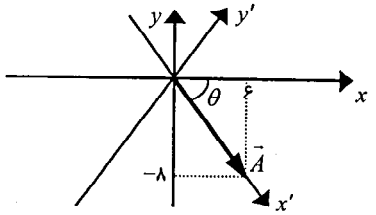
$$\tan\theta = \frac{J_y}{J_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۹}{۰/۱} \Rightarrow \tan\theta = -۹۰ \Rightarrow \theta = -۸۹/۴^\circ$$

بردار $\vec{J}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{J}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ + \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۸۹/۴ \Rightarrow \alpha = ۹۰/۶^\circ$$

۳-۱۹) الزاما محورهای مختصات در جهت افقی و قائم نیستند. محورهای مختصات $x'y'$ را طوری رسم کنید که بردار $\vec{A}$ فقط دارای مولفه‌ی x' مثبت باشد. محور x' با محور x چه زاویه‌ای می‌سازد؟

حل:



$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = ۰/۶ \Rightarrow \theta = ۵۳^\circ$$

۳-۲۰) مولفه‌های بردار $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را در راستای محورهای x' و y' مساله‌ی ۳-۱۹ به دست آورید.

حل: زاویه‌ی بردار $\vec{B}$ با محور xها برابر ۱۲۰° است. $\theta_۱$ زاویه‌ی آن با محور x'ها برابر است با:

$$\theta_۱ = ۱۲۱ + ۵۳ \Rightarrow \theta_۱ = ۱۷۴^\circ$$

اندازه‌ی بردار $\vec{B}$ برابر ۵/۸ است پس مولفه‌های آن روی محورهای دستگاه $x'y'$ برابر است با:

$$\begin{cases} B_{x'} = B\cos ۱۷۴ \\ B_{y'} = B\sin ۱۷۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{x'} = ۵/۸\cos ۱۷۴ \\ B_{y'} = ۵/۸\sin ۱۷۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{x'} = -۵/۷۶ \\ B_{y'} = ۰/۶۱ \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -۵/۷۶\vec{i}' + ۰/۶۱\vec{j}'$$

زاویه‌ی بردار $\vec{C}$ با محور x ها برابر ۳۰° است. $\theta_۲$ پس زاویه‌ی آن با محور x'ها برابر است با:

$$\theta_۲ = ۵۳ + ۳۰ \Rightarrow \theta = ۸۳^\circ$$

اندازه‌ی بردار $\vec{C}$ برابر ۸ است پس مولفه‌های آن روی محورهای دستگاه $x'y'$ برابر است با:

$$\begin{cases} C_{x'} = C\cos ۸۳ \\ C_{y'} = C\sin ۸۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{x'} = ۸\cos ۸۳ \\ C_{y'} = ۸\sin ۸۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{x'} = ۰/۹۷۵ \\ C_{y'} = ۷/۹ \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = ۰/۹۷\vec{i}' + ۷/۹\vec{j}'$$

۳-۲۱) با استفاده از مولفه‌های x' و y' مسائل ۳-۱۹ و ۳-۲۰ بردارهای $\vec{D}' = \vec{A} + \vec{C}$ و $\vec{E}' = \vec{A} - \vec{B}$ را به دست آورید. نشان دهید: $|\vec{E}| = |\vec{E}'|$ و $|\vec{D}| = |\vec{D}'|$

حل: در دستگاه $x'y'$:

$$\vec{A} = ۱۰\vec{i}' \qquad \vec{B} = -۵/۷۶\,\vec{i}' + ۰/۶۱\vec{j}' \qquad \vec{C} = -۷\,\vec{i}' + ۳/۹\vec{j}'$$

بردار $\vec{D}'$:

$$\vec{D}' = \vec{A} + \vec{C} \Rightarrow \vec{D}' = ۱۰\vec{i}' + ۰/۹۷۵\,\vec{i}' + ۷/۹\vec{j}' \Rightarrow \vec{D}' = ۱۰/۹۷۵\,\vec{i}' + ۷/۹\vec{j}'$$

اندازه‌ی بردار $\vec{D}'$:

$$D' = \sqrt{D_{x'}^۲ + D_{y'}^۲} \Rightarrow D' = \sqrt{(۱۰/۹۷۵)^۲ + (۷/۹)^۲} \Rightarrow D' = \sqrt{۱۸۲/۸۶} \Rightarrow D' = ۱۳/۵$$

بردار $\vec{E}'$:

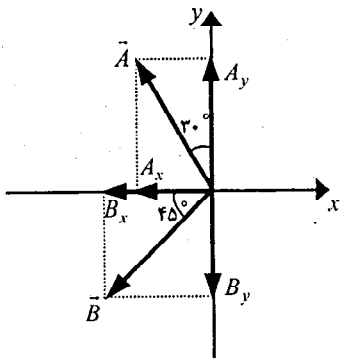
$$\vec{E}' = \vec{A} - \vec{B} \Rightarrow \vec{E}' = ۱۰\vec{i}' - (-۵/۷۶\,\vec{i}' + ۰/۶۱\,\vec{j}') \Rightarrow \vec{E}' = ۱۰\vec{i}' + ۵/۷۶\,\vec{i}' - ۰/۶۱\,\vec{j}' \Rightarrow$$
$$\vec{E}' = ۱۵/۷۶\,\vec{i}' - ۰/۶۱\,\vec{j}'$$

اندازه‌ی بردار $\vec{E}'$:

$$E' = \sqrt{E_{x'}^۲ + E_{y'}^۲} \Rightarrow E' = \sqrt{(۱۵/۷۶)^۲ + (-۰/۶۱)^۲} \Rightarrow E' = \sqrt{۲۴۸/۷۵} \Rightarrow E' = ۱۵/۸$$

با توجه به مساله‌ی ۳-۱۳ دیده می‌شود که: $|\vec{E}| = |\vec{E}'| = ۱۵/۸$ و $|\vec{D}| = |\vec{D}'| = ۱۳/۵$ است.

۳-۲۲) در شکل مقابل، اندازه‌ی هر یک از بردارها ۶ واحد است. مولفه‌ها اندازه و جهت برآیند این دو بردار را به دست آورید.



حل:

بردار $\vec{A}$:

$$\begin{cases} A_x = -A\sin ۳۰ \\ A_y = A\cos ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -۶\sin ۳۰ \\ A_y = ۶\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -۳ \\ A_y = ۵/۲ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{A} = -۳\vec{i} + ۵/۲\vec{j}$$

بردار $\vec{B}$:

$$\begin{cases} B_x = -B\cos ۴۵ \\ B_y = -B\sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -۶\cos ۴۵ \\ B_y = -۶\sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -۴/۲ \\ B_y = -۴/۲ \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -۴/۲\vec{i} - ۴/۲\vec{j}$$

$\vec{R}$ بردار برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{R} = -۳\vec{i} + ۵/۲\vec{j} - ۴/۲\vec{i} - ۴/۲\vec{j} \Rightarrow \vec{R} = -۷/۲\vec{i} + \vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{R}$:

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \Rightarrow R = \sqrt{(-۷/۲)^۲ + (۱)^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۵۲/۸۴} \Rightarrow R = ۷/۳$$

جهت بردار $\vec{R}$:

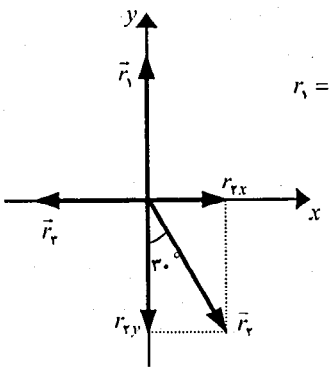
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۰/۸}{-۷/۲} \Rightarrow \tan\theta = -۰/۱ \Rightarrow \theta = -۶/۳^\circ$$

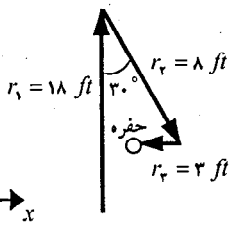
بردار $\vec{R}$ در ربع دوم، قرار دارد. α زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha = ۱۸۰ + \theta \Rightarrow \alpha = ۱۸۰ - ۶/۳ \Rightarrow \alpha = ۱۷۳/۷^\circ$$

۳-۲۳) بازیکن گلف با سه ضربه، توپ را داخل حفره می‌اندازد. توپ با ضربه‌ی اول ft ۱۸ به طرف شمال می‌رود و با ضربه‌ی دوم ft ۸ در جهت ۳۰° شرق جنوب می‌رود. ضربه‌ی سوم، توپ را ft ۳ به طرف غرب حرکت می‌دهد و داخل حفره می‌اندازد. فاصله‌ی اولیه‌ی توپ را از حفره به دست آورید. در چه جهتی باید به توپ ضربه زده می‌شد تا با یک ضربه، داخل حفره بیفتد؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:





$$\vec{r}_۱ = ۱۸\vec{j}$$

$$\begin{cases} r_{۲x} = r_۲\sin ۳۰ \\ r_{۲y} = -r_۲\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{۲x} = ۸\sin ۳۰ \\ r_{۲y} = -۸\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_{۲x} = ۴\ ft \\ r_{۲y} = -۶/۴\ ft \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_۲ = ۴\vec{i} - ۶/۴\vec{j}$$

$$\vec{r}_۳ = -۳\vec{i}$$

$\vec{R}$ بردار جابه‌جایی توپ:

$$\vec{R}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3 \Rightarrow \vec{R}=18\vec{j}+4\vec{i}-6/4\vec{j}-3\vec{i} \Rightarrow \vec{R}=\vec{i}+11/6\vec{j}$$

R فاصله‌ی توپ از حفره:

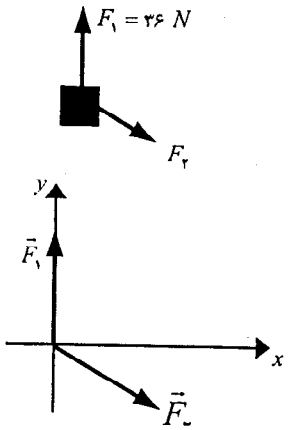
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \Rightarrow R=\sqrt{(1)^2+(11/6)^2} \Rightarrow R=11/64 \quad ft$$

θ جهت ضربه‌ی وارد بر توپ:

$$\tan\theta=\frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \tan\theta=\frac{11/6}{1} \Rightarrow \tan\theta=11/6 \Rightarrow \theta=85^\circ$$

جهت ضربه‌ی وارده 85° به طرف شمال‌شرقی است.

۳-۲۴) دو نیروی $F_1=36\ N$ و F_2 به جسمی، وارد می‌شوند. نیروی F_1 در جهت مثبت محور yها و $F_R=24\ N$ برآیند دو نیرو در جهت مثبت محور x ها است. اندازه و جهت $\vec{F}_2$ را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_1=36\vec{j} \qquad \vec{F}_R=24\vec{i}$$

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}_R \Rightarrow \vec{F}_2=\vec{F}_R-\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_2=24\vec{i}-36\vec{j}$$

اندازه‌ی نیروی $\vec{F}_2$:

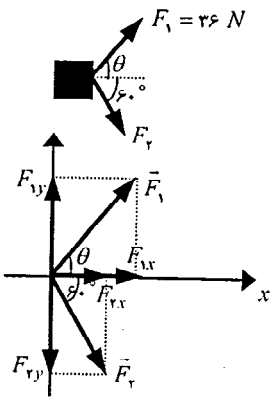
$$F_2=\sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2} \Rightarrow F_2=\sqrt{24^2+(36)^2} \Rightarrow F_2=43/3\ N$$

جهت نیروی $\vec{F}_2$:

$$\tan\theta=\frac{F_{2y}}{F_{2x}} \Rightarrow \tan\theta=\frac{-36}{24} \Rightarrow \tan\theta=-1/5 \Rightarrow \theta=-56^\circ$$

نیروی $\vec{F}_2$ در ربع چهارم است.

۳-۲۵) فرض کنید در مساله‌ی ۳-۲۴ جهت $\vec{F}_2$ معلوم و نسبت به جهت مثبت محور xها -60° است. بردار برآیند $F_R=24\ N$ و در جهت مثبت محور xها است. $F_1=36\ N$ ولی جهت آن، معلوم نیست. اندازه بردار $\vec{F}_2$ و جهت بردار $\vec{F}_1$ را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_{1x}=F_1\cos\theta \\ F_{1y}=F_1\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{1x}=36\cos\theta \\ F_{1y}=36\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1=36\cos\theta\vec{i}+36\sin\theta\vec{j}$$

$$\begin{cases} F_{2x}=F_2\cos 60^\circ \\ F_{2y}=-F_2\sin 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{2x}=0/5F_2 \\ F_{2y}=-0/87F_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_2=0/5F_2\vec{i}-0/87F_2\vec{j}$$

$$\vec{F}_R=24\vec{i}$$

$\vec{F}_R$ نیروی برآیند:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}_R \Rightarrow 36\cos\theta\vec{i}+36\sin\theta\vec{j}+0/5F_2\vec{i}-0/87F_2\vec{j}=24\vec{i}$$

$$(۳۶\cos\theta + ۰/۵F_۲)\vec{i} + (۳۶\sin\theta - ۰/۸۷F_۲)\vec{j} = ۲۴\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} ۳۶\cos\theta + ۰/۵F_۲ = ۲۴ \\ ۳۶\sin\theta - ۰/۸۷F_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۰/۸۷ \times ۳۶\cos\theta + ۰/۸۷ \times ۰/۵F_۲ = ۰/۸۷ \times ۲۴ \\ ۰/۵ \times ۳۶\sin\theta - ۰/۵ \times ۰/۸۷F_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳۱/۳۲\cos\theta + ۰/۴۳۵F_۲ = ۲۰/۸۸ \\ ۱۸\sin\theta - ۰/۴۳۵F_۲ = ۰ \end{cases} \quad (۱)$$

$$۳۱/۳۲\cos\theta + ۱۸\sin\theta = ۲۰/۸۸ \Rightarrow ۳۱/۳۲\cos\theta + ۱۸\sqrt{۱-\cos^۲\theta} = ۲۰/۸۸ \Rightarrow$$

$$۱۸\sqrt{۱-\cos^۲\theta} = ۲۰/۸۸ - ۳۱/۳۲\cos\theta \Rightarrow ۱۸^۲(۱-\cos^۲\theta) = (۲۰/۸۸ - ۳۱/۳۲\cos\theta)^۲ \Rightarrow$$

$$۳۲۴ - ۳۲۴\cos^۲\theta = (۲۰/۸۸)^۲ + (۳۱/۳۲\cos\theta)^۲ - ۲(۲۰/۸۸)(۳۱/۳۲\cos\theta) \Rightarrow$$

$$۳۲۴ - ۳۲۴\cos^۲\theta = ۴۳۵/۹۷ + ۹۸۰/۹۴\cos^۲\theta - ۱۳۰۷/۵\cos\theta \Rightarrow$$

$$۴۳۵/۹۷ + ۹۸۰/۹۴\cos^۲\theta - ۱۳۰۷/۵\cos\theta - ۳۲۴ + ۳۲۴\cos^۲\theta = ۰ \Rightarrow$$

$$۱۳۰۴/۹۴\cos^۲\theta - ۱۳۰۷/۵\cos\theta + ۱۱۱/۹۷ = ۰ \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{۱۳۰۷/۵ \pm \sqrt{(۱۳۰۷/۵)^۲ - ۴ \times ۱۳۰۴/۹۴ \times ۱۱۱/۹۷}}{۲ \times ۱۳۰۴/۹۴} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱۳۰۷/۵ \pm \sqrt{۱۱۲۵۹۹/۷}}{۲۶۰۹/۸۸} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{۱۳۰۷/۵ \pm ۱۰۶۰/۷}{۲۶۰۹/۸۸} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_۱ = \dfrac{۱۳۰۷/۵ + ۱۰۶۰/۷}{۲۶۰۹/۸۸} \\ \cos\theta_۲ = \dfrac{۱۳۰۷/۵ - ۱۰۶۰/۷}{۲۶۰۹/۸۸} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_۱ = ۰/۹ \\ \cos\theta_۲ = ۰/۰۹۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_۱ = ۲۵^\circ \\ \theta_۲ = ۸۵^\circ \end{cases}$$

با جاگذاری مقادیر فوق در یکی از روابط (۱) اندازه‌ی بردار $\vec{F}_۲$ به دست می‌آید:

اگر: $\theta_۱ = ۲۵^\circ$ باشد:

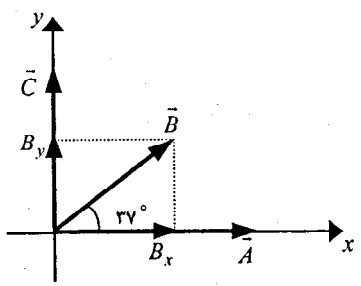
$$۳۶\sin ۲۵ - ۰/۸۷F_۲ = ۰ \Rightarrow ۱۵/۲ - ۰/۸۷F_۲ = ۰ \Rightarrow ۱۵/۲ = ۰/۸۷F_۲ \Rightarrow F_۲ = ۱۷/۵ \ N$$

اگر: $\theta_۲ = ۸۵^\circ$ باشد:

$$۳۶\sin ۸۵ - ۰/۸۷F_۲ = ۰ \Rightarrow ۳۵/۸۶ - ۰/۸۷F_۲ = ۰ \Rightarrow ۳۵/۸۶ = ۰/۸۷F_۲ \Rightarrow F_۲ = ۴۱/۲ \ N$$

۳-۲۶) زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر ۳۷° و اندازه‌ی $\vec{A}$ برابر ۸ واحد است. بردار $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ عمود بر $\vec{A}$ و اندازه‌ی آن ۶ واحد است. اندازه‌ی بردار $\vec{B}$ و $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{A} = A\vec{i} \Rightarrow \vec{A} = ۸\vec{i}$$

$$\vec{C} = C\vec{j} \Rightarrow \vec{C} = ۶\vec{j}$$

بردار $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \vec{A} + \vec{C} \Rightarrow \vec{B} = ۸\vec{i} + ۶\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} \Rightarrow B = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} \Rightarrow B = \sqrt{۱۰۰} \Rightarrow B = ۱۰$$

بردار $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{D} = ۸\vec{i} + ۸\vec{i} + ۶\vec{j} \Rightarrow \vec{D} = ۱۶\vec{i} + ۶\vec{j}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{D}$:

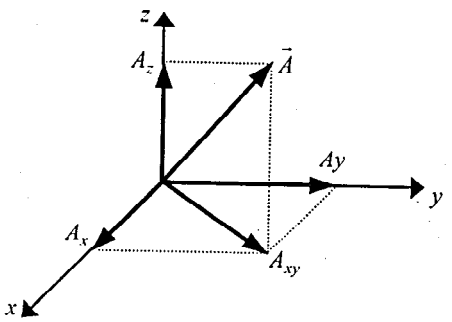
$$D=\sqrt{D_x^2+D_y^2}\Rightarrow D=\sqrt{16^2+6^2}\Rightarrow D=\sqrt{292}\Rightarrow D=17/1$$

جهت بردار $\vec{D}$:

$$\tan\theta=\frac{D_y}{D_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{6}{16}\Rightarrow\tan\theta=0/375\Rightarrow\theta=21^\circ$$

بردار $\vec{D}$ در ربع اول است.

۳-۲۷) بردار در فضای سه بُعدی را می‌توان به سه بردار مولفه‌ای در راستای سه محور دوبه‌دو، عمود برهم، تجزیه کرد که با x و y و z و مولفه‌های متناظر بردار $\vec{A}$ با A_x و A_y و A_z نشان می‌دهند. نشان دهید اندازه‌ی بردار $\vec{A}$ از رابطه‌ی $|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$ به دست می‌آید.



حل: مولفه‌ی بردار $\vec{A}$ در صفحه‌ی xy:

$$\vec{A}_{xy}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}\Rightarrow A_{xy}=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

بردار $\vec{A}$:

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\Rightarrow\vec{A}=\vec{A}_{xy}+A_z\vec{k}$$

اندازه‌ی بردار $\vec{A}$ در سه بعد:

$$A^2=\sqrt{A_{xy}^2+A_z^2}\Rightarrow A^2=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

۳-۲۸) اندازه و جهت بردارهای زیر را به دست آورید که مولفه‌های دکارتی آن‌ها داده شده‌اند.

الف) $\begin{cases}A_x=14\ m\\A_y=-9\ m\end{cases}$ **ب)** $\begin{cases}B_x=-9\ m\\B_y=-12\ m\end{cases}$ **ج)** $\begin{cases}C_x=-10\ m\\C_y=29\ m\end{cases}$

حل:

الف) اندازه‌ی بردار $\vec{A}$:

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\Rightarrow A=\sqrt{14^2+(-9)^2}\Rightarrow A=\sqrt{277}\Rightarrow A=16/6\ m$$

جهت بردار $\vec{A}$:

$$\tan\theta_1=\frac{A_y}{A_x}\Rightarrow\tan\theta_1=\frac{-9}{14}\Rightarrow\tan\theta_1=-0/62\Rightarrow\theta_1=-33^\circ$$

بردار $\vec{A}$ در ربع چهارم است.

ب) اندازه‌ی بردار $\vec{B}$:

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}\Rightarrow B=\sqrt{(-9)^2+(-12)^2}\Rightarrow B=\sqrt{225}\Rightarrow B=25\ m$$

جهت بردار $\vec{B}$:

$$\tan\theta_2=\frac{B_y}{B_x}\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{-12}{-9}\Rightarrow\tan\theta_2=1/3\Rightarrow\theta_2=53^\circ$$

بردار $\vec{B}$ در ربع سوم است.

ج) اندازه‌ی بردار $\vec{C}$:

$$C=\sqrt{C_x^2+C_y^2}\Rightarrow C=\sqrt{(-۱۰)^2+۲۶^2}\Rightarrow C=\sqrt{۷۷۶}\Rightarrow C=۲۷/۹\ m$$

جهت بردار $\vec{C}$:

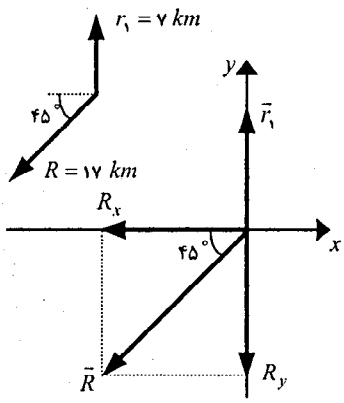
$$\tan\theta_۲=\frac{C_y}{C_x}\Rightarrow\tan\theta_۲=\frac{۲۶}{-۱۰}\Rightarrow\tan\theta_۲=-۲/۶\Rightarrow\theta_۲=-۶۹^\circ$$

بردار $\vec{C}$ در ربع دوم است. α زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha=۱۸۰+\theta_۲\Rightarrow\alpha=۱۸۰-۶۹\Rightarrow\alpha=۱۱۱^\circ$$

۳-۲۹) اتومبیلی km ۷ به شمال می‌رود و سپس تغییر جهت می‌دهد. در ۱۷ کیلومتری جنوب‌غربی نقطه‌ی آغاز حرکت می‌ایستد. اندازه و جهت جابه‌جایی اتومبیل را پس از تغییر جهت به‌دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{r}_۱=۷\vec{j}$$

$$\begin{cases}R_x=-R_۲\cos۴۵\\R_y=-R_۲\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_x=-۱۷\cos۴۵\\R_y=-۱۷\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}R_x=-۱۲\ \ km\\R_y=-۱۲\ \ km\end{cases}\Rightarrow\vec{R}=-۱۲\vec{i}-۱۲\vec{j}$$

$\vec{r}_۲$ بردر جابه‌جایی دوم:

$$\vec{r}_۲=\vec{R}-\vec{r}_۱\Rightarrow\vec{r}_۲=-۱۲\vec{i}-۱۲\vec{j}-۷\vec{j}\Rightarrow\vec{r}_۲=-۱۲\vec{i}-۱۹\vec{j}$$

$r_۲$ اندازه‌ی جابه‌جایی دوم:

$$r_۲=\sqrt{r_{۲x}^2+R_{۲y}^2}\Rightarrow r_۲=\sqrt{(-۱۲)^2+(-۱۹)^2}\Rightarrow r_۲=\sqrt{۵۰۵}\Rightarrow r_۲=۲۲/۵\ \ km$$

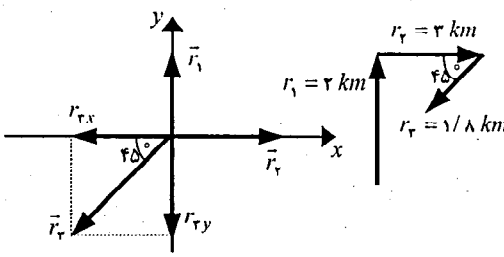
θ جهت جابه‌جایی دوم:

$$\tan\theta=\frac{R_{۲y}}{R_{۲x}}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-۱۹}{-۱۲}\Rightarrow\tan\theta=۱/۵۸\Rightarrow\theta=۵۸^\circ$$

جهت جابه‌جایی دوم ۵۸° به طرف جنوب‌غربی است.

۳-۳۰) کامیونی km ۲ به طرف شمال، سپس km ۳ به طرف شرق و در نهایت km ۱/۸ به طرف جنوب‌غربی (روی نیم‌ساز) می‌رود. جابه‌جایی آن را با رسم نمودار و روش مولفه‌ها به‌دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{r}_۱=۲\vec{j}$$

$$\vec{r}_۲=۳\vec{i}$$

$$\begin{cases}r_{۲x}=-r_۲\cos۴۵\\r_{۲y}=-r_۲\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_{۲x}=-۱/۸\cos۴۵\\r_{۲y}=-۱/۸\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_{۳x} = -۱/۳ \ km \\ r_{۳y} = -۱/۳ \ km \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_۳ = -۱/۳\vec{i} - ۱/۳\vec{j}$$

$\vec{R}$ بردار جابجایی کامیون:

$$\vec{R} = \vec{r}_۱ + \vec{r}_۲ + \vec{r}_۳ \Rightarrow \vec{R} = ۲\vec{j} + ۳\vec{i} - ۱/۳\vec{i} - ۱/۳\vec{j} \Rightarrow \vec{R} = ۱/۷\vec{i} + ۰/۷\vec{j}$$

R اندازه‌ی جابه‌جایی کامیون:

$$R = \sqrt{R_x^۲ + R_y^۲} \Rightarrow R = \sqrt{(۱/۷)^۲ + (۰/۷)^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۳/۴} \Rightarrow R = ۱/۸۴ \ km$$

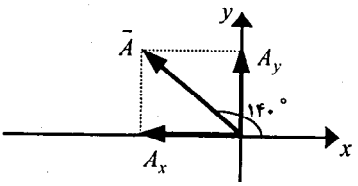
θ جهت حرکت کامیون:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۰/۷}{۱/۷} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۴۱ \Rightarrow \theta = ۲۲/۴^\circ$$

جهت حرکت $۲۲/۴^\circ$ به طرف شمال‌شرقی است.

۳-۳۱) اندازه‌ی برداری ۱۶ واحد و با محور xها زاویه‌ی ۱۴۰° می‌سازد. مولفه‌های آن کدام است؟

حل:



$$\begin{cases} A_x = A\cos۱۴۰ \\ A_y = A\sin۱۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = ۱۶\cos۱۴۰ \\ A_y = ۱۶\sin۱۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -۱۲/۳ \\ A_y = ۱۰/۳ \end{cases}$$

۳-۳۲) اندازه‌ی برآیند دو نیرو، هریک به اندازه‌ی $۳۰ \ N$ را به دست آورید. اگر زاویه‌ی بین آن‌ها:

الف) ۳۷° باشد. ب) ۹۰° باشد. ج) ۱۵۰° باشد.

حل:

الف)

$$F^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\theta \Rightarrow F^۲ = ۳۰^۲ + ۳۰^۲ + ۲\times۳۰\times۳۰\times\cos۳۷ \Rightarrow$$
$$F^۲ = ۹۰۰ + ۹۰۰ + ۱۴۳۷/۵ \Rightarrow F^۲ = ۳۲۳۷/۵ \Rightarrow F = ۵۶/۹ \ N$$

ب)

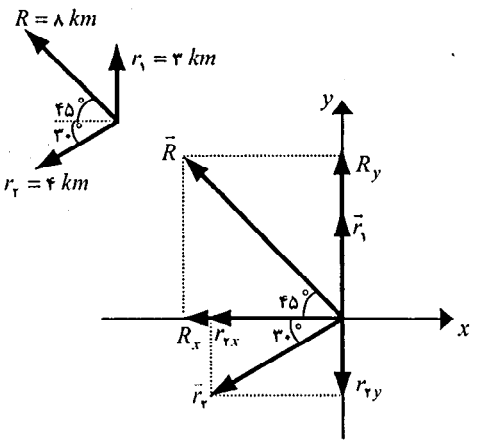
$$F^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\theta \Rightarrow F^۲ = ۳۰^۲ + ۳۰^۲ + ۲\times۳۰\times۳۰\times\cos۹۰ \Rightarrow$$
$$F^۲ = ۹۰۰ + ۹۰۰ + ۰ \Rightarrow F^۲ = ۱۸۰۰ \Rightarrow F = ۴۲/۴ \ N$$

ج)

$$F^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\theta \Rightarrow F^۲ = ۳۰^۲ + ۳۰^۲ + ۲\times۳۰\times۳۰\times\cos۱۵۰ \Rightarrow$$
$$F^۲ = ۹۰۰ + ۹۰۰ - ۱۵۵۸/۸ \Rightarrow F^۲ = ۲۴۱/۲ \Rightarrow F = ۱۵/۵ \ N$$

۳-۳۳) قایقی $۳ \ km$ به طرف شمال و سپس $۴ \ km$ در جهت ۳۰° جنوب غربی، حرکت می‌کند. در چه جهتی باید حرکت کند و چه مسافتی را باید طی کند تا به نقطه‌ی در فاصله‌ی ۸ کیلومتری شمال‌غربی نقطه‌ی آغاز حرکتش برسد؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{r}_1 = r_1\vec{j} \Rightarrow \vec{r}_1 = 3\vec{j}$$

$$\begin{cases} r_{2x} = -r_2\cos 30 \\ r_{2y} = -r_2\sin 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{2x} = -4\cos 30 \\ r_{2y} = -4\sin 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_{2x} = -3/5\ km \\ r_{2y} = -2\ km \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = -3/5\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\begin{cases} R_x = -R\cos 45 \\ R_y = R\sin 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -8\cos 45 \\ R_y = +8\sin 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_x = -5/7\ km \\ R_y = 5/7\ km \end{cases} \Rightarrow R = -5/7\vec{i} + 5/7\vec{j}$$

$\vec{r}_2$ جابه‌جایی سوم قایق:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \Rightarrow \vec{r}_3 = \vec{R} - \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_3 = -5/7\vec{i} + 5/7\vec{j} - 3\vec{j} - \left(-3/5\vec{i} - 2\vec{i}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}_3 = -5/7\vec{i} + 5/7\vec{j} - 3\vec{j} + 3/5\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{r}_3 = -2/2\vec{i} + 4/7\vec{j}$$

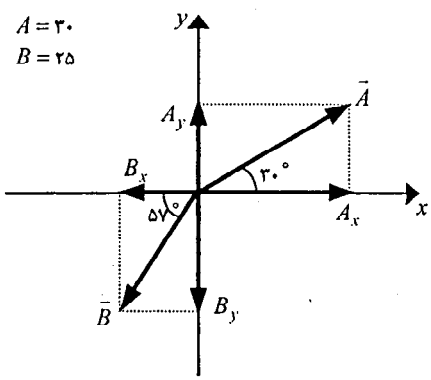
r_2 اندازه‌ی جابه‌جایی سوم قایق:

$$\tan\theta = \frac{r_{3y}}{r_{3x}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{4/7}{-2/2} \Rightarrow \tan\theta = -2/14 \Rightarrow \theta = -65^\circ$$

جهت حرکت سوم قایق 65° به طرف شمال‌غربی است.

۳-۳۴) با توجه به شکل زیر، اندازه و جهت بردارهای $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} A_x = A\cos 30 \\ A_y = A\sin 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = 30\cos 30 \\ A_y = 30\sin 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_x = 26 \\ A_y = 15 \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = 26\vec{i} + 15\vec{j}$$

$$\begin{cases} B_x = -B\cos 53 \\ B_y = -B\sin 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -25\cos 53 \\ B_y = -25\sin 53 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_x = -13/6 \\ B_y = -21 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -13/6\vec{i} - 21\vec{j}$$

بردار $\vec{C}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{C} = 26\vec{i} + 15\vec{j} - 13/6\vec{i} - 21\vec{j} \Rightarrow \vec{C} = 12/4\vec{i} - 6\vec{j}$$

جهت بردار $\vec{C}$:

$$\tan\theta_1 = \frac{C_y}{C_x} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{-6}{12/4} \Rightarrow \tan\theta_1 = -0/48 \Rightarrow \theta_1 = -26^\circ$$

بردار $\vec{C}$ در ربع چهارم است.

بردار $\vec{D}$:

$$\vec{D}=\vec{B}-\vec{A}\Rightarrow\vec{D}=\left(-۱۳/۶\vec{i}-۲۱\vec{j}\right)-\left(۲۶\vec{i}+۱۵\vec{j}\right)\Rightarrow\vec{D}=-۱۳/۶\vec{i}-۲۱\vec{j}-۲۶\vec{i}-۱۵\vec{j}\Rightarrow$$
$$\vec{D}=-۳۹/۶\vec{i}-۳۶\vec{j}$$

جهت بردار $\vec{D}$:

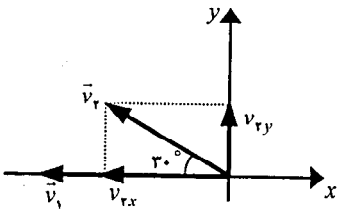
$$\tan\theta_۲=\frac{D_y}{D_x}\Rightarrow\tan\theta_۲=\frac{-۳۶}{-۳۹/۶}\Rightarrow\tan\theta_۲=۰/۹۱\Rightarrow\theta_۲=۴۲/۳^\circ$$

بردار $\vec{D}$ در ربع سوم است. α زاویه‌ی بردار $\vec{D}$ با جهت مثبت محور xها:

$$\alpha=۱۸۰+\theta_۲\Rightarrow\alpha=۱۸۰+۴۲/۳\Rightarrow\alpha=۲۲۲/۳^\circ$$

۳-۳۵) در بزرگراهی اتومبیلی با سرعت $۷۲\ \frac{km}{h}$ از پیچی می‌گذرد و جهت حرکت آن از غرب به ۳۰° شمال غرب، تغییر می‌کند. شعاع انحنای پیچ m ۱۶۰ است. شتاب متوسط اتومبیل را به دست آورید.

حل:



$$v=۷۲\ \frac{km}{h}\Rightarrow v=۷۲\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}\Rightarrow v=۲۰\ \frac{m}{s}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{v}_۱=-v\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_۱=-۲۰\vec{i}$$

$$\begin{cases}v_{۲x}=-v\cos۳۰\\ v_{۲y}=v\sin۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{۲x}=-۲۰\cos۳۰\\ v_{۲y}=۲۰\sin۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{۲x}=-۱۷/۲\\ v_{۲y}=۱۰\end{cases}\Rightarrow\vec{v}_۲=-۱۷/۲\vec{i}+۱۰\vec{j}$$

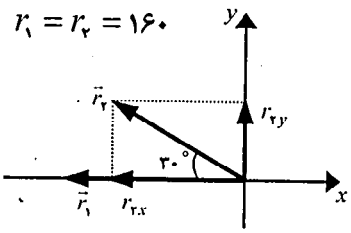
$\Delta\vec{v}$ بردار تغییر سرعت اتومبیل در حین حرکت:

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱\Rightarrow\Delta\vec{v}=-۱۷/۲\vec{i}+۱۰\vec{j}-\left(-۲۰\vec{i}\right)\Rightarrow\Delta\vec{v}=۲/۸\vec{i}+۱۰\vec{j}$$

$\Delta\vec{v}$ اندازه‌ی تغییر سرعت اتومبیل در حین حرکت:

$$\Delta v=\sqrt{\Delta v_x^۲+\Delta v_y^۲}\Rightarrow\Delta v=\sqrt{(۲/۸)^۲+(۱۰)^۲}\Rightarrow\Delta v=\sqrt{۱۰۷/۸}\Rightarrow\Delta v=۱۰/۴\ \frac{m}{s}$$

$r_۱=r_۲=۱۶۰$



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}r_{۲x}=-R\cos۳۰\\ r_{۲y}=R\sin۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r_{۲x}=-۱۶۰\cos۳۰\\ r_{۲y}=۱۶۰\sin۳۰\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}r_{۲x}=-۱۳۷/۶\\ r_{۲y}=۸۰\end{cases}\Rightarrow\vec{r}_۲=-۱۳۷/۶\vec{i}+۸۰\vec{j}$$

$\Delta\vec{r}$ بردار جابه‌جایی اتومبیل در حین حرکت:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_۲-\vec{r}_۱\Rightarrow\Delta\vec{r}=-۱۳۷/۶\vec{i}+۸۰\vec{j}-\left(-۱۶۰\vec{i}\right)\Rightarrow\Delta\vec{r}=۲۲/۴\vec{i}+۸۰\vec{j}$$

Δr اندازه‌ی جابه‌جایی اتومبیل در حین حرکت:

$$\Delta r=\sqrt{\Delta r_x^۲-\Delta r_y^۲}\Rightarrow\Delta r=\sqrt{(۲۲/۴)^۲+۸۰^۲}\Rightarrow\Delta r=\sqrt{۶۹۰۱/۷}\Rightarrow\Delta r=۸۳/۱\ m$$

Δt مدت زمان جابه‌جایی:

$$\Delta r=v\Delta t\Rightarrow۸۳/۱=۲۰\Delta t\Rightarrow\Delta t=۴/۲\ s$$

a شتاب حرکت:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۱۰/۴}{۴/۲}\Rightarrow a=۲/۴۷\ \frac{m}{s^۲}$$

۳-۳۶) دونده‌ای در مسیری با محیط mi ۰/۲۵ مسافت mi ۱ را در min ۴ می‌دود. بردار سرعت متوسط و تندی او را بر حسب متر بر ثانیه به دست آورید.

حل: دونده پس از چهار دور به محل اولیه‌اش برگشته پس، جابه‌جایی او برابر **صفر** است در نتیجه، سرعت متوسط او برابر **صفر** است.

$$d=۱\ mi\Rightarrow d=۱\times ۱۶۰۹\ \Rightarrow d=۱۶۰۹\ m$$
$$t=۴\ \min\Rightarrow t=۴\times ۶۰\Rightarrow t=۲۴۰\ s$$

v تندی دونده:

$$d=vt\Rightarrow ۱۶۰۹=v\times ۲۴۰\ \Rightarrow v=۶/۷\ \frac{m}{s}$$

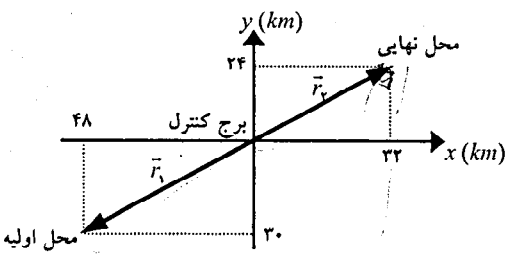
۳-۳۷) مسوول برج کنترل فرودگاهی، متوجه می‌شود هواپیمای جت در ۴۸ کیلومتری غرب و ۳۰ کیلومتری جنوب فرودگاه در حال پرواز است. هواپیما در مسیر مستقیم، حرکت می‌کند و min ۵ بعد به ۳۲ کیلومتری شرق و ۲۴ کیلومتری شمال فرودگاه می‌رسد:

الف) سرعت و جهت حرکت هواپیما را به دست آورید.

ب) اگر هواپیما min ۱۵ با همین سرعت و همین جهت، حرکت کند به چه فاصله‌ای از شرق و شمال فرودگاه خواهد رسید؟

حل:

الف) با توجه به شکل می‌تون نوشت:



$$\vec{r}_۱=-۴۸\vec{i}-۳۰\vec{j}$$
$$\vec{r}_۲=۳۲\vec{i}+۲۴\vec{j}$$

$\Delta\vec{r}$ بردار جابه‌جایی هواپیما:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_۲-\vec{r}_۱\Rightarrow \Delta\vec{r}=۳۲\vec{i}+۲۴\vec{j}-\left(-۴۸\vec{i}-۳۰\vec{j}\right)\Rightarrow \Delta\vec{r}=۸۰\vec{i}+۵۴\vec{j}$$

Δt زمان جابه‌جایی هواپیما بر حسب ساعت:

$$\Delta t=۵\ \min\Rightarrow \Delta t=۵\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow \Delta t=۰/۰۸۳\ h$$

$\vec{v}$ بردار سرعت هواپیما:

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Rightarrow \vec{v}=\frac{۸۰\vec{i}+۵۴\vec{j}}{۰/۰۸۳}\Rightarrow \vec{v}=۹۶۰\vec{i}+۶۴۸\vec{j}$$

v اندازه‌ی سرعت هواپیما:

$$v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}\Rightarrow v=\sqrt{۹۶۰^۲+۶۴۸^۲}\Rightarrow v=\sqrt{۱۳۴۱۵۰۴}\Rightarrow v=۱/۱۶\times ۱۰^۳\ \frac{km}{h}$$

θ جهت حرکت هواپیما:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۶۴۸}{۹۶۰} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۶۷۵ \Rightarrow \theta = ۳۴^\circ$$

جهت حرکت هواپیما ۳۴° شمال‌شرقی است.

ب) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

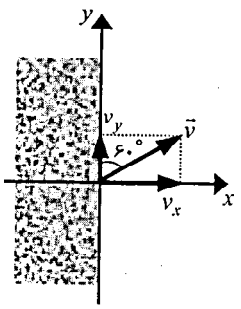
$$\Delta t = ۱۵ \ \ min \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۶۰} \times ۱۵ \Rightarrow \Delta t = ۰/۲۵ \ \ h$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow ۹۶۰\vec{i} + ۶۴۸\vec{j} = \frac{\Delta \vec{r}}{۰/۲۵} \Rightarrow \Delta \vec{r} = ۲۴۰\vec{i} + ۱۶۲\vec{j}$$

۲۴۰ کیلومتری شرق و ۱۶۲ کیلومتری شمال می‌رسد.

۳-۳۸) قایقی از ساحل دریاچه با سرعت $۱۲ \ \frac{km}{h}$ در جهت ۶۰° شرق شمال، دور می‌شود. اگر خط ساحل، مستقیم و شمالی ـ جنوبی باشد قایق پس از $۱۵ \ min$ به چه فاصله‌ای از ساحل می‌رسد؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} v_x = v\sin ۶۰ \\ v_y = v\cos ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = ۱۲\sin ۶۰ \\ v_y = ۱۲\cos ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = ۱۰/۴ \\ v_y = ۶ \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = ۱۰/۴\vec{i} + ۶\vec{j}$$

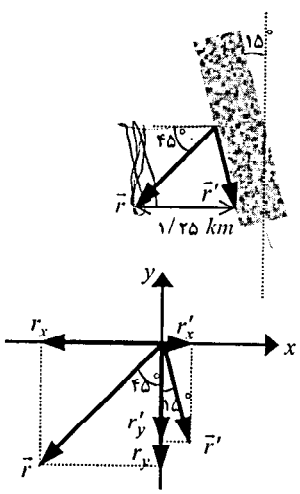
$$\Delta t = ۱۵ \ \ min \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۶۰} \times ۱۵ \Rightarrow \Delta t = ۰/۲۵ \ \ h$$

x فاصله‌ی قایق از ساحل:

$$x = v_x t \Rightarrow x = ۱۰/۴ \times ۰/۲۵ \Rightarrow x = ۲/۶ \ \ km$$

۳-۳۹) از ساحل دریاچه‌ای، قایقی به طرف جنوب غربی، حرکت می‌کند. راستای خط ساحل ۱۵° غرب شمال و پس از ۱۵ دقیقه، قایق به ۱/۲۵ کیلومتری خط ساحلی می‌رسد. سرعت آن را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



در راستای محور y ها:

$$r\cos ۴۵ = r'\cos ۱۵ \Rightarrow r' = \frac{\cos ۴۵}{\cos ۱۵} r \Rightarrow r' = ۰/۷۳r$$

در راستای محور x ها:

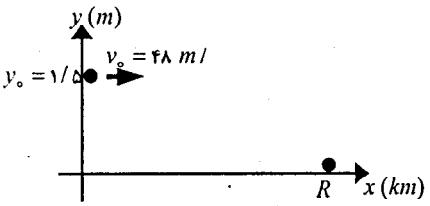
$$r\sin ۴۵ + r'\sin ۱۵ = ۱/۲۵ \Rightarrow r\sin ۴۵ + ۰/۷۳۷\sin ۱۵ = ۱/۲۵ \Rightarrow$$
$$۰/۷۱r + ۰/۱۹r = ۱/۲۵ \Rightarrow ۰/۹r = ۱/۲۵ \Rightarrow r = ۱/۳۹ \ \ km$$

$$t = ۱۵ \ \ min \Rightarrow t = ۱۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t = ۰/۲۵ \ \ h$$

v سرعت حرکت قایق:

$$r = vt \Rightarrow ۱/۳۹ = ۰/۲۵v \Rightarrow v = ۵/۶ \ \ \frac{km}{h}$$

۳-۴۰) تیری به طور افقی با سرعت $\frac{m}{s}$ ۴۸ در ارتفاع ۱/۵ متری بالای سطح زمین از کمان رها می‌شود. تیر در چه فاصله‌ای از تیرانداز به زمین می‌خورد؟



حل: در مدت زمانی که تیر فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان ارتفاع m ۱/۵ را پایین می‌رود. با توجه شکل:

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_0 = 48\vec{i}$$

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به تیر، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط تیر با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}\times 9/8t^2 + 0 + 1/5 \Rightarrow -4/9t^2 + 1/5 = 0 \Rightarrow -4/9t^2 = -1/5 \Rightarrow$$

$$t^2 = 0/3 \Rightarrow t = 0/55\ s$$

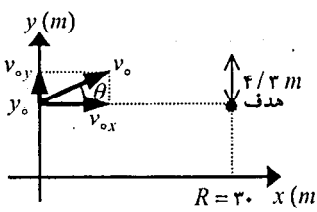
در راستای محور x ها:

هیچ شتابی به تیر، وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای محور x ها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد پرتابه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{0x}t \Rightarrow R = 48 \times 0/55 \Rightarrow R = 26/4\ m$$

۳-۴۱) پسری می‌خواهد با تیرکمان، سنگی را به هدفی در فاصله‌ی ۳۰ متری و هم ارتفاع شانه‌اش، بزند. او پس از چند بار تلاش، متوجه می‌شود برای این که سنگ به هدف بخورد باید m ۴/۳ بالاتراز هدف را نشانه بگیرید. سنگ با چه سرعتی از تیرکمان جدا می‌شود؟



حل: در مدت زمانی که سنگ، فاصله‌ی افقی m ۳۰ را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع m ۴/۳ را بالا رفته و برمی‌گردد. با توجه به شکل:

θ زاویه‌ی هدف‌گیری تیرانداز:

$$\tan\theta = \frac{4/3}{30} \Rightarrow \tan\theta = 0/14 \Rightarrow \theta = 8/2^\circ$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos 8/2 \\ v_{0y} = v_0\sin 8/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 0/99v_0 \\ v_{0y} = 0/14v_0 \end{cases}$$

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به تیر، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط تیر با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}\times 9/8t^2 + 0/14v_0t + y_0 \Rightarrow -4/9t^2 + 0/14v_0t = 0 \Rightarrow$$

$$t(-4/9t + 0/14v_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -4/9t + 0/14v_0 = 0 \Rightarrow -4/9t = -0/14v_0 \Rightarrow t = 0/029v_0 \end{cases}$$

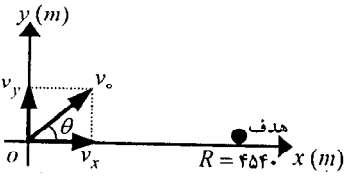
در راستای محور xها

هیچ شتابی به تیر، وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد پرتابه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{\circ x}\, t \Rightarrow ۳۰ = ۰/۹۹\, v_{\circ}\left(۰/۰۲۹\, v_{\circ}\right) \Rightarrow ۳۰ = ۰/۰۲۸۷\, v_{\circ}^{۲} \Rightarrow v_{\circ}^{۲} = ۱۰۴۵/۳ \Rightarrow v_{\circ} = ۳۲/۳\ \frac{m}{s}$$

۳-۴۲) خمپاره‌اندازی به هدفی در فاصله‌ی ۴/۵۴ کیلومتری، شلیک می‌کند که در همان ارتفاع خمپاره‌انداز، قرار دارد. افسر مسوول خمپاره‌انداز، متوجه می‌شود خمپاره s ۲۷/۵ پس از شلیک به هدف می‌خورد. زاویه‌ی لوله‌ی خمپاره‌انداز و بردار سرعت خمپاره را هنگام شلیک، نسبت به سطح افق به دست آورید.



حل: در مدت زمانی که خمپاره، فاصله‌ی افقی km ۴/۵۴ را طی می‌کند در همان مدت زمان، بالا رفته و برمی‌گردد. با توجه به شکل:

$$R = ۴/۵۴\ km \Rightarrow R = ۴/۵۴ \times ۱۰۰۰ \Rightarrow R = ۴۵۴۰\ m$$

$$v_{\circ x} = v_{\circ}\cos\theta \qquad v_{\circ y} = v_{\circ}\sin\theta$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به خمپاره، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{۱}{۲}g t^{۲} + v_{\circ y}\, t + y_{\circ} \Rightarrow y_{\circ} = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times (۲۷/۵)^{۲} + v_{\circ}\sin\theta\,(۲۷/۵) + y_{\circ} \Rightarrow$$

$$-۳۷۰۵/۶ + ۲۷/۵\, v_{\circ}\sin\theta = ۰ \Rightarrow -۳۷۰۵/۶ = -۲۷/۵\, v_{\circ}\sin\theta \Rightarrow v_{\circ}\sin\theta = ۱۳۴/۷ \qquad (۱)$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به خمپاره، وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x = v_{\circ}\cos\theta\, t \Rightarrow ۴۵۴۰ = v_{\circ}\cos\theta\,(۲۷/۵) \Rightarrow v_{\circ}\cos\theta = \frac{۴۵۴۰}{۲۷/۵} \Rightarrow v_{\circ}\cos\theta = ۱۶۵/۱ \qquad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_{\circ}\sin\theta}{v_{\circ}\cos\theta} = \frac{۱۳۴/۷}{۱۶۵/۱} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۸۲ \Rightarrow \theta = ۳۹/۲^{\circ}$$

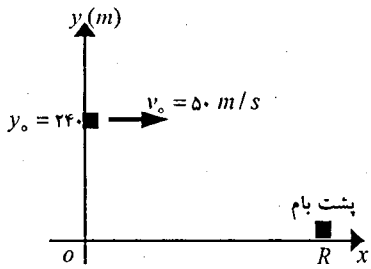
مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$v_{\circ}\sin\theta = ۱۳۴/۷ \Rightarrow v_{\circ}\sin ۳۹/۲ = ۱۳۴/۷ \Rightarrow ۰/۶۳\, v_{\circ} = ۱۳۴/۷ \Rightarrow v_{\circ} = \frac{۱۳۴/۷}{۰/۶۳} \Rightarrow v_{\circ} = ۲۱۳/۱\ \frac{m}{s}$$

$\vec{v}_{\circ}$ بردار سرعت گلوله هنگام پرتاب:

$$\vec{v}_{\circ} = v_{\circ}\cos\theta\,\vec{i} + v_{\circ}\sin\theta\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{\circ} = ۲۱۳/۱\cos ۳۹/۲\,\vec{i} + ۲۱۳/۱\sin ۳۹/۲\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{\circ} = ۱۶۵/۱\,\vec{i} + ۱۳۴/۷\,\vec{j}$$

۳-۴۳) هواپیمای کوچکی با سرعت $\frac{km}{h}$ ۱۸۰ در ارتفاع ۲۴۰ متری، پرواز می‌کند. بسته‌ای را برای سیل‌زدگان، روی سقف مسطح ساختمانی می‌اندازد. خلبان در چه فاصله‌ای از سقف باید بسته را رها کند تا بسته درست روی سقف، فرود بیاید؟



حل: در مدت زمانی که خمپاره، فاصله‌ی افقی x را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع m ۲۴۰ را پایین می‌رود. با توجه به شکل:

$$v_0 = ۱۸۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_0 = ۱۸۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_0 = ۵۰\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_0 = ۵۰\ \vec{i}$$

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به بسته وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط بسته با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^۲ + v_{۰y} t + y_0 \Rightarrow ۰ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^۲ + ۰ + ۲۴۰ \Rightarrow -۴/۹ t^۲ + ۲۴۰ = ۰ \Rightarrow -۴/۹ t^۲ = -۲۴۰$$

$$t^۲ = ۴۹ \Rightarrow t = ۷\ s$$

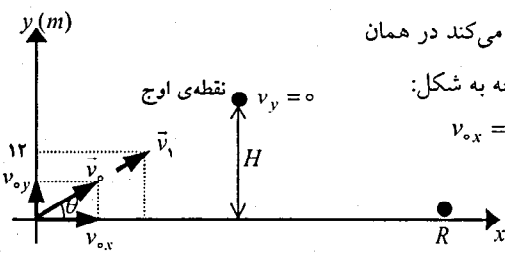
در راستای x ها

هیچ شتابی به بسته وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای محور x ها حرکت با سرعت ثابت است.

x فاصله‌ی اولیه‌ی بسته با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{۰x} t \Rightarrow R = ۵۰ \times ۷ \Rightarrow R = ۳۵۰\ \ m$$

۳-۴۴) توپی به هوا پرتاب می‌شود. وقتی m ۱۲ بالاتر از زمین است مولفه‌های بردار سرعت آن در راستای افق و قائم به ترتیب: $\frac{m}{s}$ ۴/۵ و $\frac{m}{s}$ ۳/۳۶ است: الف) سرعت اولیه‌ی توپ را به دست آورید. ب) حداکثر ارتفاعی که توپ بالا می‌رود. ج) مسافت افقی که توپ قبل از برخورد به زمین می‌پیماید؟



حل: در مدت زمانی که توپ، فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع H را بالا رفته و بر می‌گردد. با توجه به شکل:

$$v_{۰y} = v_0 \sin\theta \qquad v_{۰x} = v_0 \cos\theta$$

الف)

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به توپ، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای y ها حرکت با شتاب ثابت است.

$v_{۰y}$ سرعت اولیه‌ی توپ در راستای محور y ها با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v_{۱y}^۲ - v_{۰y}^۲ = -۲g(y_۱ - y_0) \Rightarrow (۳/۳۶)^۲ - v_{۰y}^۲ = -۲ \times ۹/۸(۱۲ - ۰) \Rightarrow ۱۱/۳ - v_{۰y}^۲ = -۲۳۵/۲ \Rightarrow$$

$$۱۱/۳ + ۲۳۵/۲ = v_{۰y}^۲ \Rightarrow v_{۰y}^۲ = ۲۴۶/۵ \Rightarrow v_{۰y} = ۱۵/۷\ \ ms^{-۱}$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به توپ، وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای xها حرکت با سرعت ثابت است.

$$v_x = v_{\circ x} \Rightarrow v_{\circ x} = ۴/۵ \ \frac{m}{s}$$

$\vec{v}_\circ$ بردار سرعت اولیه:

$$\vec{v}_\circ = v_{\circ x}\vec{i} + v_{\circ y}\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_\circ = ۴/۵\vec{i} + ۱۵/۷\vec{j}$$

ب) در نقطه‌ی اوج توپ: $v_y = \circ$ است.

H ارتفاع اوج توپ با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v_y^۲ - v_{\circ y}^۲ = -۲g(y - y_\circ) \Rightarrow \circ - (۱۵/۷)^۲ = -۲\times ۹/۸(H - \circ) \Rightarrow -۲۴۶/۵ = -۱۹/۶H \Rightarrow$$
$$H = ۱۲/۶ \ m$$

ج) t زمان پرواز توپ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

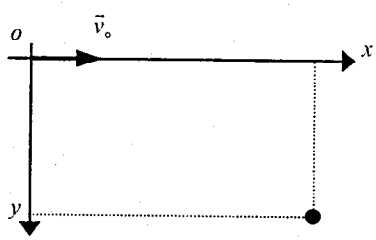
$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow \circ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times t^۲ + ۱۵/۷t \Rightarrow -۴/۹t^۲ + ۱۵/۷t = \circ \Rightarrow$$
$$t(-۴/۹t + ۱۵/۷) = \circ \Rightarrow \begin{cases} t = \circ \\ -۴/۹t + ۱۵/۷ = \circ \Rightarrow -۴/۹t = -۱۵/۷ \Rightarrow t = ۳/۲ \ s \end{cases}$$

R با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{\circ x}t \Rightarrow R = ۴/۵\times ۳/۲ \Rightarrow R = ۱۴/۴ \ m$$

۳-۴۵) لامپ پرتو کاتودی (لامپ تصویر تلویزیون) شامل یک تفنگ الکترونی و صفحات انحراف افقی و قائم است. الکترون‌ها در ناحیه‌ی بین صفحات، با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. در راستای محور xها الکترون‌ها تفنگ الکترونی را با سرعت $۲\times ۱۰^۶ \ \frac{m}{s}$ ترک می‌کنند. شتاب الکترون‌ها در ناحیه‌ی بین صفحات $۴\times ۱۰^{۱۴} \ \frac{m}{s^۲}$ است. طول صفحات $۲/۸ \ cm$ است. سرعت الکترون‌ها را هنگام خروج از ناحیه‌ی میان صفحات به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\vec{v}_\circ = v_\circ\vec{i}$$

در راستای محور yها:

شتاب ثابت بر الکترون‌ها وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

$$y = ۲/۸ \ cm \Rightarrow y = ۲/۸\times ۰/۰۱ \Rightarrow y = ۲/۸\times ۱۰^{-۲} \ m$$

v_y سرعت الکترون‌ها در راستای محور yها با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v_y^۲ - v_{\circ y}^۲ = ۲a(y - y_\circ) \Rightarrow v_y^۲ - \circ = ۲\times ۴\times ۱۰^۴ \times ۲/۸\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow v_y^۲ = ۲/۲۴\times ۱۰^{۱۳} \Rightarrow$$

$$v_y = ۴/۷\times۱۰^۶ \ \frac{m}{s}$$

در راستای محور xها

هیچ شتابی به الکترون‌ها وارد نمی‌شود پس حرکت آن در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

$$v_x = v_{\circ x} \Rightarrow v_x = ۲\times۱۰^۶ \ \frac{m}{s}$$

$\vec{v}$ سرعت الکترون‌ها هنگام خروج از فضای بین صفحات:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = ۲\times۱۰^۶\vec{i} + ۴/۷\times۱۰^۶\vec{j}$$

v اندازه‌ی سرعت الکترون‌ها هنگام خروج از فضای بین صفحات:

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} \Rightarrow v = \sqrt{(۲\times۱۰^۶)^۲ + (۴/۷\times۱۰^۶)^۲} \Rightarrow v = \sqrt{۲/۶۱\times۱۰^{۱۳}} \Rightarrow v = ۵/۲\times۱۰^۶ \ \frac{m}{s}$$

θ جهت حرکت الکترون‌ها هنگام خروج از فضای بین صفحات:

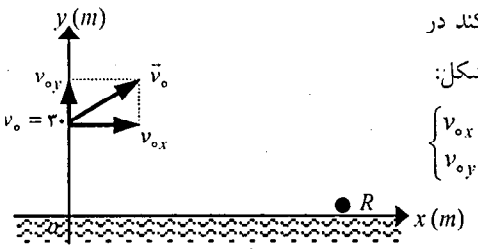
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۴/۷\times۱۰^۶}{۲\times۱۰^۶} \Rightarrow \tan\theta = ۲/۳۵ \Rightarrow \theta = ۶۷^\circ$$

۳-۴۶) سنگی از روی پلی به ارتفاع m ۳۰ بالاتر از سطح آب با سرعت اولیه‌ی $\frac{m}{s}$ ۲۰ پرتاب می‌شود. قبل از ورود سنگ به آب، فاصله‌ی افقی از پل و سرعت آن را به دست آورید:

الف) زاویه‌ی بردار سرعت اولیه نسبت به افق ۴۵° باشد.

ب) زاویه‌ی بردار سرعت اولیه نسبت به افق ۳۷° باشد.

حل: در مدت زمانی که سنگ فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان ارتفاع m ۳۰ را پایین می‌رود. با توجه به شکل:



$$\begin{cases} v_{\circ x} = v_\circ\cos\theta \\ v_{\circ y} = v_\circ\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{\circ x} = ۲۰\cos\theta \\ v_{\circ y} = ۲۰\sin\theta \end{cases}$$

الف) اگر $\theta = ۴۵^\circ$ باشد:

$$\begin{cases} v_{\circ x} = ۲۰\cos۴۵ \\ v_{\circ y} = ۲۰\sin۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{\circ x} = ۱۴/۱ \ \frac{m}{s} \\ v_{\circ y} = ۱۴/۱ \ \frac{m}{s} \end{cases}$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به سنگ، وارد می‌شود پس حرکت سنگ در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow \circ = -\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times t^۲ + ۱۴/۱t + ۳۰ \Rightarrow -۴/۹t^۲ + ۱۴/۱t + ۳۰ = \circ \Rightarrow$$

$$t=\frac{-۱۴/۱\pm\sqrt{(۱۴/۱)^۲-۴(-۴/۹)(۳۰)}}{۲(-۴/۹)}\Rightarrow t=\frac{-۱۴/۱\pm\sqrt{۷۸۶/۸۱}}{-۹/۸}\Rightarrow t=\frac{-۱۴/۱\pm۲۸/۱}{-۹/۸}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}t'=\dfrac{-۱۴/۱+۲۸/۱}{-۹/۸}\\ t=\dfrac{-۱۴/۱-۲۸/۱}{-۹/۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t'=-۱/۴۲\ s\\ t=۴/۳\ s\end{cases}$$

زمان پرواز سنگ $t=۴/۳\ s$ است.

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به سنگ، وارد نمی‌شود پس حرکت سنگ در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد سنگ با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x=v_{۰x}t+x_۰\Rightarrow R=۱۴/۱\times۴/۳\Rightarrow R=۶۰/۶\ m$$

در راستای محور yها با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v_y=-gt+v_{۰y}\Rightarrow v_y=-۹/۸\times۴/۳+۱۴/۱\Rightarrow v_y=-۲۸/۰۴\ \ ms^{-۱}$$

علامت منفی سرعت، نشان دهنده‌ی جهت حرکت سنگ است.

در راستای محور xها با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$v_x=v_{۰x}\Rightarrow v_x=۱۴/۱\ ms^{-۱}$$

$\vec{v}$ سرعت سنگ، هنگام ورود به آب:

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=۱۴/۱\vec{i}-۲۸/۰۴\vec{j}$$

v اندازه‌ی سرعت سنگ، هنگام ورود به آب:

$$v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}\Rightarrow v=\sqrt{(۱۴/۱)^۲+(-۲۸/۰۴)^۲}\Rightarrow v=\sqrt{۹۸۵/۱}\Rightarrow v=۳۱/۳۸\ \frac{m}{s}$$

ب) اگر $\theta=۳۷^\circ$ باشد:

$$\begin{cases}v_{۰x}=۲۰\cos۳۷\\ v_{۰y}=۲۰\sin۳۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{۰x}=۱۶\ \dfrac{m}{s}\\ v_{۰y}=۱۲\ \dfrac{m}{s}\end{cases}$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به سنگ، وارد می‌شود پس حرکت سنگ در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط سنگ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_{۰y}t+y_۰\Rightarrow ۰=-\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times t^۲+۱۲t+۳۰\Rightarrow -۴/۹t^۲+۱۲t+۳۰=۰\Rightarrow$$

$$t=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۲^۲-۴(-۴/۹)(۳۰)}}{۲(-۴/۹)}\Rightarrow t=\frac{-۱۲\pm۲۷/۱}{-۹/۸}\Rightarrow\begin{cases}t'=\dfrac{-۱۲+۲۷/۱}{-۹/۸}\\ t=\dfrac{-۱۲-۲۷/۱}{-۹/۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t'=-۱/۵۴\ s\\ t=۳/۹۹\ s\end{cases}$$

پس زمان پرواز سنگ $t = ۳/۹۹\ s$ است.

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به سنگ، وارد نمی‌شود پس حرکت سنگ در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد سنگ با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{۰x}t + x_۰ \Rightarrow R = ۱۶ \times ۳/۹۹ \Rightarrow R = ۶۳/۸۴\ \ m$$

در راستای محور yها با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v_y = -gt + v_{۰y} \Rightarrow v_y = -۹/۸ \times ۳/۹۹ + ۱۲ \Rightarrow v_y = -۲۷/۱\ \frac{m}{s}$$

علامت منفی سرعت نشان دهنده‌ی جهت حرکت سنگ است.

در راستای محور xها با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$v_x = v_{۰x} \Rightarrow v_x = ۱۶\ \frac{m}{s}$$

$\vec{v}$ سرعت سنگ، هنگام ورود به آب:

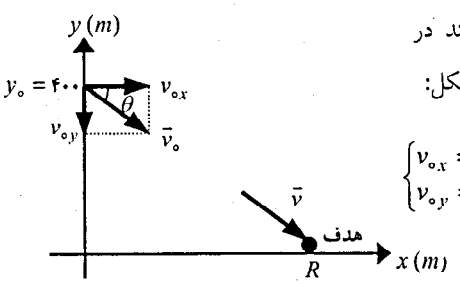
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = ۱۶\vec{i} - ۲۷/۱\vec{j}$$

v اندازه‌ی سرعت سنگ، هنگام ورود به آب:

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} \Rightarrow v = \sqrt{۱۶^۲ + (-۲۷/۱)^۲} \Rightarrow v = \sqrt{۹۹۰/۴۱} \Rightarrow v = ۳۱/۴۷\ \frac{m}{s}$$

۳-۴۷) در جنگ جهانی دوم هواپیماها برای پرتاب بمب، شیرجه می‌رفتند و بمب خود را رها می‌کردند. فرض کنید بمب افکنی با زاویه‌ی ۳۷° زیر افق و با سرعت $۲۸۰\ \frac{m}{s}$ شیرجه می‌رود. این بمب افکن وقتی به ارتفاع ۴۰۰ متری می‌رسد بمبی را رها می‌کند و به هدف تعیین شده می‌خورد. در لحظه‌ی رها شدن بمب، هدف نسبت به آن کجاست؟ زمان بین رها شدن بمب و برخورد آن چه قدر است؟ بردار سرعت بمب را در لحظه‌ی برخورد به هدف به دست آورید.

حل: در مدت زمانی که بمب فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع m ۴۰۰ را پایین می‌رود. با توجه به شکل:



$$\begin{cases} v_{۰x} = v_۰ \cos ۳۷ \\ v_{۰y} = -v_۰ \sin ۳۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{۰x} = ۲۸۰ \cos ۳۷ \\ v_{۰y} = -۲۸۰ \sin ۳۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{۰x} = ۲۲۴\ \frac{m}{s} \\ v_{۰y} = -۱۶۸\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به بمب، وارد می‌شود پس حرکت بمب در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط بمب با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{۰y}t + y_۰ \Rightarrow ۰ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^۲ - ۱۶۸\,t + ۴۰۰ \Rightarrow -۴/۹t^۲ - ۱۶۸\,t + ۴۰۰ = ۰ \Rightarrow$$

$$t=\frac{۱۶۸\pm\sqrt{۱۶۸^{۲}-۴(-۴/۹)(۴۰۰)}}{۲(-۴/۹)}\Rightarrow t=\frac{۱۶۸\pm\sqrt{۳۶۰۶۴}}{-۹/۸}\Rightarrow t=\frac{۱۶۸\pm۱۸۹/۹}{-۹/۸}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}t'=\dfrac{۱۶۸+۱۸۹/۹}{-۹/۸}\\ t=\dfrac{۱۶۸-۱۸۹/۹}{-۹/۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t'=-۳۶/۵\ s\\ t=۲/۲۳\ s\end{cases}$$

پس زمان پرواز بمب $t=۲/۲۳\ s$ است.

در راستای محور xها

هیچ شتابی به بمب وارد نمی‌شود پس حرکت بمب در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد بمب با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x=v_{۰x}t+x_{۰}\Rightarrow R=۲۲۴\times۲/۲۳\Rightarrow R=۴۹۹/۵\ m$$

در راستای محور yها با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v_y=-gt+v_{۰y}\Rightarrow v_y=-۹/۸\times۲/۲۳-۱۶۸\Rightarrow v_y=-۱۸۹/۸\ \frac{m}{s}$$

علامت منفی سرعت نشان دهنده‌ی جهت حرکت بمب است.

در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است:

$$v_x=v_{۰x}\Rightarrow v_x=۲۲۴\ \frac{m}{s}$$

$\vec{v}$ سرعت برخورد بمب به هدف:

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=۲۲۴\vec{i}-۱۸۹/۸\vec{j}$$

v اندازه‌ی سرعت برخورد بمب به هدف:

$$v=\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}\Rightarrow v=\sqrt{۲۲۴^{۲}+(-۱۸۹/۸)^{۲}}\Rightarrow v=\sqrt{۸۶۲۲۰/۵}\Rightarrow v=۲۹۳/۶\ \frac{m}{s}$$

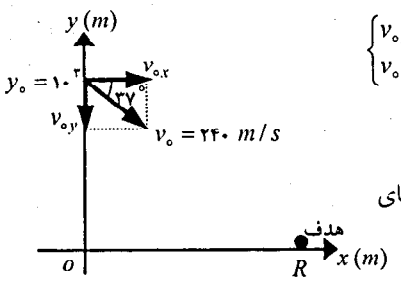
θ جهت برخورد بمب به هدف:

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-۱۸۹/۸}{۲۲۴}\Rightarrow\tan\theta=-۰/۸۵\Rightarrow\theta=-۴۰/۳^{\circ}$$

جهت برخورد بمب به هدف $۴۰/۳^{\circ}$ زیر افق است.

۳-۴۸) بمب افکنی که با سرعت $۲۴۰\ \frac{m}{s}$ با زاویه‌ی ۳۷° زیر افق، شیرجه می‌رود. وقتی بمب افکن در ارتفاع ۱۰۰۰ متری است هدف روی زمین در فاصله‌ی ۱۸۵۰ متری است. آیا بمب افکن می‌تواند هدف را بزند؟ از چه ارتفاعی باید بمب خود را رها کند؟

حل: در مدت زمانی که بمب فاصله‌ی افقی m ۱۸۵۰ را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع m ۱۰۰۰ را پائین می‌رود. با توجه به شکل:



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos ۳۷ \\ v_{0y} = -v_0 \sin ۳۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = ۲۴۰ \cos ۳۷ \\ v_{0y} = -۲۴۰ \sin ۳۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = ۱۹۲ \ \dfrac{m}{s} \\ v_{0y} = -۱۴۴ \ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

در راستای yها:

شتاب گرانش به بمب، وارد می‌شود پس حرکت بمب در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان سقوط بمب با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow ۰ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^{۲} - ۱۴۴ t + ۱۰۰۰ \Rightarrow -۴/۹ t^{۲} - ۱۴۴ t + ۱۰۰۰ = ۰ \Rightarrow$$

$$t = \frac{۱۴۴ \pm \sqrt{۱۴۴^{۲} - ۴(-۴/۹)(۱۰۰۰)}}{۲(-۴/۹)} \Rightarrow t = \frac{۱۴۴ \pm \sqrt{۴۰۳۳۶}}{-۹/۸} \Rightarrow t = \frac{۱۴۴ \pm ۲۰۰/۸}{-۹/۸} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t' = \dfrac{۱۴۴ + ۲۰۰/۸}{-۹/۸} \\ t = \dfrac{۱۴۴ - ۲۰۰/۸}{-۹/۸} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = -۳۴/۲ \ \ s \\ t = ۵/۷۸ \ \ s \end{cases}$$

زمان پرواز بمب: $t = ۵/۷۸ \ \ s$ است.

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به بمب وارد نمی‌شود پس حرکت بمب در راستای xها حرکت با سرعت ثابت است.

R برد بمب با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{0x} t \Rightarrow x = ۱۹۲ \times ۵/۷۸ \Rightarrow x = ۱۱۱۰ \ m$$

برد بمب کمتر از فاصله‌ی هدف از محل پرتاب بمب است پس بمب به هدف برخورد نمی‌کند.

برای این که بمب به هدف برخورد کند:

بمب فاصله‌ی افقی $۱۸۵۰\ m$ را طی می‌کند و به هدف برخورد می‌کند.

t زمان سقوط بمب با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{0x} t \Rightarrow ۱۸۵۰ = ۱۹۲ t \Rightarrow t = ۹/۶ \ \ s$$

زمان پرواز بمب $t = ۹/۶ \ \ s$ است.

y_0 با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow ۰ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times (۹/۶)^{۲} - ۱۴۴ \times ۹/۶ + y_0 \Rightarrow ۱۸۳۴ - y_0 = ۰ \Rightarrow$$

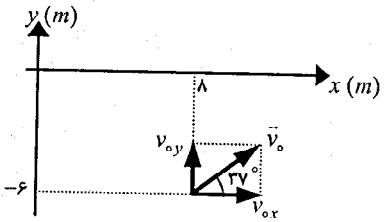
$$y_0 = ۱۸۳۴ \ \ m$$

بمب باید از ارتفاع ۱۸۳۴ متری سطح زمین، رها شود تا به هدف برخورد کند.

۳-۴۹) شتاب ذره‌ای در جهت مثبت محور xها $۴\ \frac{m}{s^{۲}}$ است. مولفه‌های x و y مکان این ذره را به

دست آورید. فرض کنید m ۸ $= x_0$ و m ۶− $= y_0$ است و سرعت اولیه $\frac{m}{s}$ ۱۰ با زاویه‌ی 37° نسبت به جهت مثبت محور xها است. مولفه‌های x و y مکان ذره را در لحظه‌ی: $t = ۲$ s به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos 37 \\ v_{0y} = v_0 \sin 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 10 \cos 37 \\ v_{0y} = 10 \sin 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 8 \ \frac{m}{s} \\ v_{0y} = 6 \ \frac{m}{s} \end{cases}$$

در راستای محور xها:

شتاب $\frac{m}{s^2}$ ۴− به ذره، وارد می‌شود پس حرکت ذره در راستای محور xها حرکت با شتاب ثابت است.

مکان ذره در هر لحظه با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0x} t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times (-4) t^2 + 8t + 8 \Rightarrow x = -2t^2 + 8t + 8$$

در راستای محور yها

هیچ شتابی به ذره وارد نمی‌شود پس حرکت ذره در راستای yها حرکت با سرعت ثابت است.

$$y = v_{0y} t + y_0 \Rightarrow y = 6t - 6$$

اگر $t = ۲$ s باشد با جاگذاری در روابط x و y می‌توان نوشت:

$$t = ۲ \ s \Rightarrow \begin{cases} x = -2(2)^2 + 8 \times 2 + 8 \\ y = 6 \times 2 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \ m \\ y = 6 \ m \end{cases}$$

۳-۵۰) ذره‌ای با شتاب ثابت، حرکت می‌کند. در لحظه‌ی: $t = 0$ دارای مولفه‌های مکان: m ۶ $= x_0$ و m ۴− $= y_0$ و مولفه‌های سرعت: $\frac{m}{s}$ ۲/۵− $= v_{0x}$ و $\frac{m}{s}$ ۴− $= v_{0y}$ است و در لحظه‌ی: $t = ۲$ s دارای مولفه‌های سرعت: $\frac{m}{s}$ ۱/۵ $= v_x$ و $\frac{m}{s}$ ۲ $= v_y$ است. مولفه‌های x و y مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. در لحظه‌ی: $t = ۴$ s ذره در کجا قرار دارد؟

حل:

در راستای محور xها:

سرعت ذره، تغییر کرده است پس حرکت ذره در راستای محور xها حرکت با شتاب ثابت است.

a_x مولفه‌ی شتاب ذره در راستای محور xها با استفاده از رابطه‌ی سرعت- زمان به دست می‌آید:

$$v_x = a_x t + v_{0x} \Rightarrow 1/5 = a_x \times 2 - 2/5 \Rightarrow 1/5 + 2/5 = 2a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a_x = 2 \ \frac{m}{s^2}$$

x مکان ذره با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \times (2) t^2 - 2/5t + 6 \Rightarrow x = t^2 - 2/5t + 6$$

در راستای y ها:

سرعت ذره تغییر کرده است پس حرکت ذره در راستای y ها حرکت با شتاب ثابت است.

a_y مولفه‌ی شتاب ذره در راستای محور y با استفاده از رابطه‌ی سرعت- زمان به دست می‌آید:

$$v_y = a_y t + v_{0y} \Rightarrow ۲ = a_y \times ۲ - ۴ \Rightarrow ۲ + ۴ = ۲a_y \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a_y = ۳ \ ms^{-۲}$$

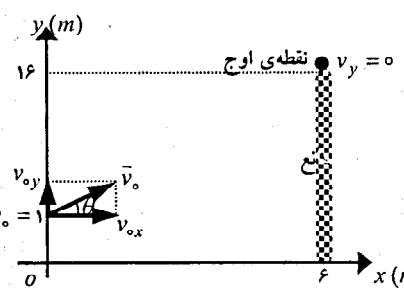
y مکان ذره با با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۲} a_y t^۲ + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} \times (۳) t^۲ - ۴t - ۴ \Rightarrow y = ۱/۵ t^۲ - ۴t - ۴$$

اگر $t = ۴ \ s$ باشد با جاگذاری در روابط x و y می‌توان نوشت:

$$t = ۴ \ s \Rightarrow \begin{cases} x = ۴^۲ - ۲/۴ \times ۴ + ۶ \\ y = ۱/۵ \times ۴^۲ - ۴ \times ۴ - ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲/۴ \ m \\ y = ۴ \ m \end{cases}$$

۳-۵۱) پسری می‌خواهد توپی را از روی مانعی در فاصله‌ی ۶ متری و به ارتفاع ۱۵ عبور دهد. در لحظه‌ی رها شدن توپ از دست پسر، ارتفاع توپ از سطح زمین m ۱ است. سرعت اولیه‌ی توپ چه قدر باشد تا توپ از روی مانع عبور کند؟



حل: در مدت زمانی که توپ فاصله‌ی m ۶را طی می‌کند در همان مدت از ارتفاع ۱۵ متری عبور می‌کند. با توجه به شکل:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به توپ، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

توپ باید طوری، پرتاب شود که مماس بر مانع، عبور کند. به عبارت دیگر، نقطه‌ی اوج توپ برابر ارتفاع مانع باشد. در نقطه‌ی اوج: $v_y = ۰$ است.

t زمان پرواز توپ با استفاده از رابطه‌ی سرعت- زمان به دست می‌آید:

$$v_y = -g t^۲ + v_{0y} \Rightarrow ۰ = -۹/۸ t + v_0 \sin\theta \Rightarrow ۹/۸ t = v_0 \sin\theta \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{۹/۸}$$

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^۲ + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow ۱۶ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \left(\frac{v_0 \sin\theta}{۹/۸}\right)^۲ + v_0 \sin\theta \left(\frac{v_0 \sin\theta}{۹/۸}\right) + ۱ \Rightarrow$$

$$۱۶ - ۱ = -۴/۹ \times \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta}{۹۶/۰۴} + \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta}{۹/۸} \Rightarrow ۱۵ = \frac{-v_0^۲ \sin^۲\theta}{۹۱/۶} + \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta}{۹/۸} \Rightarrow$$

$$۱۵ = \frac{-v_0^۲ \sin^۲\theta + ۲v_0^۲ \sin^۲\theta}{۱۹/۶} \Rightarrow ۱۵ = \frac{v_0^۲ \sin^۲\theta}{۱۹/۶} \Rightarrow v_0^۲ \sin^۲\theta = ۱۹/۶ \times ۱۵ \Rightarrow v_0^۲ \sin^۲\theta = ۲۹۴ \quad (۱)$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به توپ، وارد نمی‌شود پس حرکت توپ در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x = v_{ox}t + x_0 \Rightarrow 6 = v_0\cos\theta\left(\frac{v_0\sin\theta}{9/8}\right) \Rightarrow 6 = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{9/8} \Rightarrow v_0^2\sin\theta\cos\theta = 58/8 \quad (2)$$

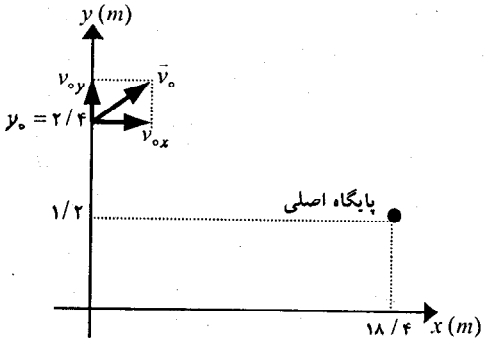
θ زاویه‌ی اولیه‌ی پرتاب با تقسیم روابط (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{v_0^2\sin^2\theta}{v_0^2\sin\theta\cos\theta} = \frac{294}{58/8} \Rightarrow \tan\theta = 5 \Rightarrow \theta = 78/8^\circ$$

v_0 سرعت اولیه‌ی توپ با جاگذاری زاویه‌ی حاصله را در رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید:

$$v_0^2\sin^2 78/8 \Rightarrow 0/96\, v_0^2 = 294 \Rightarrow v_0^2 = 306/25 \Rightarrow v_0 = 17/5 \ \frac{m}{s}$$

۳-۵۲) در یک زمین بیسبالی، محل توپ انداز m ۰/۲ بالاتر از سطح زمین است و m ۱۸/۴ از پایگاه اصلی، فاصله دارد. توپ‌اندازی، توپ را با سرعت اولیه‌ی $\frac{km}{h}$ ۱۲۰ به طرف پایگاه اصلی، پرتاب می‌کند. در لحظه‌ی پرتاب، توپ m ۲/۲ بالاتر از محل توپ‌انداز، قرار دارد. اگر ارتفاع پایگاه اصلی از سطح زمین m ۱/۲ باشد تحت چه زاویه‌ای، توپ از پایگاه اصلی، عبور می‌کند؟



حل: در مدت زمانی که توپ فاصله‌ی افقی m ۱۸/۴ را طی می‌کند در همان مدت زمان از ارتفاع m ۲/۴ به ارتفاع m ۱/۲ می‌رسد. با توجه به شکل:

$$v_0 = 120 \ \frac{km}{h} \Rightarrow v_0 = 120\times\frac{1000}{3600} \Rightarrow v_0 = 33/3 \ \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 33/3\cos\theta \\ v_{0y} = 33/3\sin\theta \end{cases}$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به توپ، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \Rightarrow 1/2 = -\frac{1}{2}\times 9/8t^2 + 33/3t\sin\theta + 2/4 \Rightarrow$$

$$0 = -4/9t^2 + 33/3t\sin\theta - 1/2 + 2/4 \Rightarrow -4/9t^2 + 33/3t\sin\theta + 1/2 = 0 \quad (1)$$

در راستای محور xها

هیچ شتابی به توپ وارد نمی‌شود پس حرکت توپ در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x = v_{ox}t + x_o \Rightarrow ۱۸/۴ = ۳۳/۳\cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{۰/۵۵}{\cos\theta}$$

زمان حاصله را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$-۴/۹\left(\frac{۰/۵۵}{\cos\theta}\right)^۲ + ۳۳/۳\left(\frac{۰/۵۵}{\cos\theta}\right)\sin\theta + ۱/۲ = ۰ \Rightarrow -۴/۹\left(\frac{۰/۳}{\cos^۲\theta}\right) + ۱۸/۴\tan\theta + ۱/۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{-۱/۵}{\cos^۲\theta} + ۱۸/۴\tan\theta + ۱/۲ = ۰ \Rightarrow -۱/۵\left(۱ + \tan^۲\theta\right) + ۱۸/۴\tan\theta + ۱/۲ = ۰ \Rightarrow$$

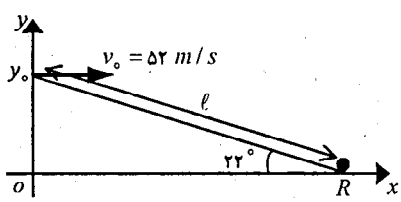
$$-۱/۵ - ۱/۵\tan^۲\theta + ۱۸/۴\tan\theta + ۱/۲ = ۰ \Rightarrow -۱/۵\tan^۲\theta + ۱۸/۴\tan\theta - ۰/۳ = ۰ \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{-۱۸/۴ \pm \sqrt{(۱۸/۴)^۲ - ۴(-۱/۵)(-۰/۳)}}{۲\times(-۱/۵)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-۱۸/۴ \pm \sqrt{۳۳۶/۷۶}}{-۳} \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{-۱۸/۴ \pm ۱۸/۳۵}{-۳} \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_۱ = \dfrac{-۱۸/۴ + ۱۸/۳۵}{-۳} \\ \tan\theta_۲ = \dfrac{-۱۸/۴ - ۱۸/۳۵}{-۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_۱ = ۰/۰۱۷ \\ \tan\theta_۲ = ۱۲/۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_۱ = ۰/۹۵^\circ \\ \theta_۲ = ۸۵/۲^\circ \end{cases}$$

۳-۵۳) جسمی از بالای سطح شیب‌داری با شیب ۲۲° با سرعت افقی $۵۲\ ms^{-۱}$ پرتاب می‌شود. جسم در کجا به زمین برخورد می‌کند؟

حل: در مدت زمانی که جسم، فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان ارتفاع y_o را پایین می‌رود. با توجه به شکل:



$$v_{ox} = v_o = ۵۲\ \frac{m}{s} \qquad v_{oy} = ۰$$

l طول مسافتی که جسم روی سطح شیب‌دار، طی کرده است:

$$y_o = l\sin ۲۲ \Rightarrow y_o = ۰/۳۸\,l$$

$$R = l\cos ۲۲ \Rightarrow R = ۰/۹۳l$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به جسم، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان پرواز جسم با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دس می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{oy}t + y_o \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^۲ + ۰ + ۰/۳۸\,l = ۰ \Rightarrow -۴/۹t^۲ + ۰/۳۸\,l = ۰ \Rightarrow$$

$$-۴/۹t^۲ = -۰/۳۸\,l \Rightarrow t^۲ = ۰/۰۷۶\,l \Rightarrow t = \sqrt{۰/۰۷۷\,l}$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به جسم، وارد نمی‌شود پس حرکت جسم در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

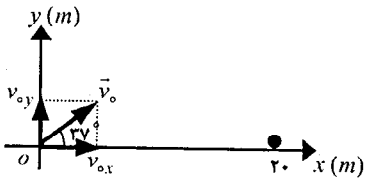
با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x = v_{ox}t + x_o \Rightarrow ۰/۹۳l = ۵۲\sqrt{۰/۰۷۷\,l} \Rightarrow (۰/۹۲\,l)^۲ = \left(۵۲\sqrt{۰/۰۷۷\,l}\right)^۲ \Rightarrow ۰/۸۷l^۲ = ۲۰۸/۲l \Rightarrow$$

$$۰/۸۷\,l^۲ - ۲۰۸/۲l = ۰ \Rightarrow l(۰/۸۷\,l - ۲۰۸/۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} l = ۰ \\ ۰/۸۷\,l - ۲۰۸/۲ = ۰ \Rightarrow ۰/۸۷\,l = ۲۰۸/۲۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = ۲۴۰\ \ m$$

۳-۵۴) زاویه‌ی تفنگی 37° بالای افق و بُرد گلوله‌اش m ۲۰ است. سرعت اولیه‌ی گلوله چه قدر است؟



حل: در مدت زمانی که گلوله، فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند در همان مدت زمان، ارتفاع h را بالا رفته و برمی‌گردد. با توجه به شکل:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos 37 \\ v_{0y} = v_0 \sin 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 0/8 v_0 \\ v_{0y} = 0/6 v_0 \end{cases}$$

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به گلوله، وارد می‌شود پس حرکت تیر در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان پرواز گلوله با استفاده از رابطه‌ی سرعت- زمان به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \times 9/8 t^2 + 0/6 v_0 t + 0 \Rightarrow -4/9 t^2 + 0/6 v_0 t = 0 \Rightarrow$$

$$t(-4/9 t + 0/6 v_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -4/9 t + 0/6 v_0 = 0 \Rightarrow -4/9 t = -0/6 v_0 \Rightarrow t = 0/12 v_0 \end{cases}$$

زمان پرواز گلوله $t = 0/12 v_0$ است.

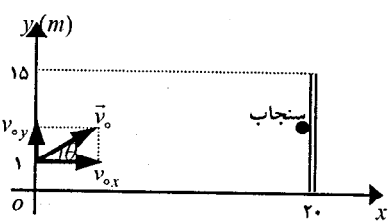
در راستای محور x ها:

هیچ شتابی به گلوله، وارد نمی‌شود پس حرکت گلوله در راستای محور x ها حرکت با سرعت ثابت است.

v_0 سرعت اولیه‌ی گلوله با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_{0x} t \Rightarrow 20 = 0/8 v_0 (0/12 v_0) \Rightarrow 20 = 0/096 v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = 208/3 \Rightarrow v_0 = 14/4 \ \frac{m}{s}$$

۳-۵۵) سنجابی روی یک تیر تلفنی به ارتفاع m ۱۵ نشسته است. درفاصله ۲۰ متری، کمان‌داری، سنجاب را نشانه می‌گیرد. کمان در ارتفاع ۱ متری بالای سطح زمین است. اگر سنجاب، کمان‌دار را ببیند ودر لحظه‌ی رها شدن تیر از کمان به پایین بپرد کمان‌دار در چه جهتی، نشانه‌گیری کند تا سنجاب را بزند؟ اگر سرعت اولیه‌ی تیر $\frac{m}{s}$ ۲۸ باشد آیا تیر قبل از رسیدن سنجاب به زمین به آن برخورد می‌کند؟ در چه فاصله‌ای از سطح زمین، تیر به سنجاب برخورد می‌کند؟



حل: در مدت زمانی که تیر، فاصله‌ی افقی m ۲۰ را طی می‌کند در همان مدت زمان، سنجاب، سقوط آزاد می‌کند. با توجه به شکل:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 28 \cos\theta \\ v_{0y} = 28 \sin\theta \end{cases}$$

برای سنجاب:

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به سنجاب، وارد می‌شود پس حرکت سنجاب در راستای محور y ها حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰y}t+y_{۰}\Rightarrow y_{۱}=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^{۲}+۰+۱۵\Rightarrow y_{۱}=-۴/۹t^{۲}+۱۵$$

برای تیر:

در راستای محور y ها:

شتاب گرانش به تیر، وارد می‌شود پس حرکت تیر در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰y}t+y_{۰}\Rightarrow y_{۲}=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^{۲}+۲۸\sin\theta t+۱\Rightarrow y_{۲}=-۴/۹t^{۲}+۲۸t\sin\theta+۱$$

در راستای محور x ها:

هیچ شتابی به تیر، وارد نمی‌شود پس حرکت تیر در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x=v_{۰x}t+x_{۰}\Rightarrow ۲۰=۲۸t\cos\theta\Rightarrow t=\frac{۱}{۱/۴\cos\theta}$$

مقدار فوق را در روابط $y_۱$ و $y_۲$ جاگذاری می‌کنیم:

$$y_{۱}=-۴/۹\left(\frac{۱}{۱/۴\cos\theta}\right)^{۲}+۱۵\Rightarrow y_{۱}=\frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^{۲}\theta}+۱۵\qquad (۱)$$

$$y_{۲}=-۴/۹\left(\frac{۱}{۱/۴\cos\theta}\right)^{۲}+۲۸\sin\theta\left(\frac{۱}{۱/۴\cos\theta}\right)+۱\Rightarrow y_{۲}=\frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^{۲}\theta}+۲۰\tan\theta+۱$$

وقتی، تیر به سنجاب برخورد می‌کند:

$$y_{۱}=y_{۲}\Rightarrow\frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^{۲}\theta}+۱۵=\frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^{۲}\theta}+۲۰\tan\theta+۱\Rightarrow ۱۵-۱=۲۰\tan\theta\Rightarrow ۱۴=۲۰\tan\theta$$

$$\tan\theta=۰/۷\Rightarrow\theta=۳۵^{\circ}$$

برای محاسبه محل برخورد تیر به سنجاب مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

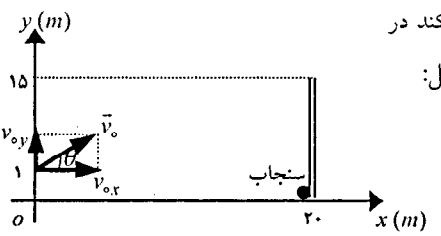
$$y_{۱}=\frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^{۲}۳۵}+۱۵\Rightarrow y_{۱}=-۳/۷+۱۵\Rightarrow y_{۲}=۱۱/۳\ m$$

در ۱۱/۳ متری سطح زمین، تیر به سنجاب برخورد می‌کند.

۳-۵۶) در مساله ۳- ۵۵ حداقل سرعت اولیه‌ی تیر را طوری به دست آورید تا قبل از رسیدن سنجاب به زمین، هدف قرار گیرد.

حل: در مدت زمانی که تیر، فاصله‌ی افقی m ۲۰ را طی می‌کند در همان مدت زمان، سنجاب، سقوط آزاد می‌کند. با توجه به شکل:

$$v_{۰x}=v_{۰}\cos\theta\qquad v_{۰y}=v_{۰}\sin\theta$$



برای سنجاب:

شتاب گرانش به سنجاب، وارد می‌شود پس حرکت سنجاب در راستای محور yها حرکت با شتاب ثابت است.

t زمان پرواز گلوله با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰}t+y_{۰}\Rightarrow ۰=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^{۲}+۰+۱۵\Rightarrow -۴/۹t^{۲}+۱۵=۰\Rightarrow -۴/۹t^{۲}=-۱۵\Rightarrow$$

$$t^{۲}=۳/۰۶\Rightarrow t=\sqrt{۳/۰۶}\Rightarrow t=۱/۷\ s$$

برای تیر:

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به تیر، وارد می‌شود پس حرکت آن در راستای محور yها، حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی مکان- زمان می‌توان نوشت:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰y}t+y_{۰}\Rightarrow ۰=-\frac{۱}{۲}۹/۸(۱/۷)^{۲}+v_{۰}\sin\theta(۱/۷)+۱\Rightarrow ۱/۷۳\,v_{۰}\sin\theta-۱۳/۲=۰\Rightarrow$$

$$۱/۷v_{۰}\sin\theta=۱۳/۲\Rightarrow v_{۰}\sin\theta=\frac{۱۳/۲}{۱/۷}\Rightarrow v_{۰}\sin\theta=۷/۸\qquad (۱)$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به تیر، وارد نمی‌شود پس حرکت تیر در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x=v_{۰x}t+x_{۰}\Rightarrow ۲۰=v_{۰}\cos\theta(۱/۷)\Rightarrow v_{۰}\cos\theta=۱۱/۸\qquad (۲)$$

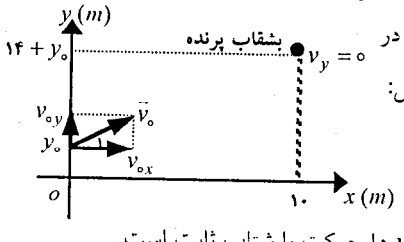
روابط (۱) و (۲) را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_{۰}\sin\theta}{v_{۰}\cos\theta}=\frac{۷/۸}{۱۱/۸}\Rightarrow \tan\theta=۰/۶۶\Rightarrow\theta=۳۳/۵^{\circ}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$v_{۰}\sin ۳۳/۵=۷/۸\Rightarrow ۰/۵۵\,v_{۰}=۷/۸\Rightarrow v_{۰}=۱۴/۲\ \frac{m}{s}$$

۳-۵۷) بشقاب پرنده‌ی اسباب‌بازی (فریزبی) در لابه‌لای شاخه‌های درختی به ارتفاع m ۱۴ بالاتر از شانه‌های شخصی، قرار دارد. او سعی می‌کند با پرتاب سنگ از فاصله‌ی ۱۰ متری آن از لابه‌لای شاخه‌ها خارج کند. وقتی سنگ به بشقاب پرنده، برخورد می‌کند بردار سرعتش در جهت افق است. بردار سرعت اولیه‌ی سنگ و سرعت برخوردش به بشقاب پرنده را به دست آورید.



حل: در مدت زمانی که سنگ فاصله‌ی افقی m ۱۰ را طی می‌کند در همان مدت زمان سنگ ارتفاع m ۱۴ را بالا می‌رود. با توجه به شکل:

$$v_{۰y}=v_{۰}\sin\theta\qquad v_{۰x}=v_{۰}\cos\theta$$

در راستای محور yها:

شتاب گرانش به سنگ، وارد می‌شود پس حرکت سنگ در راستای yها حرکت با شتاب ثابت است.

با استفاده از رابطه‌ی سرعت- زمان می‌توان نوشت:

$$v_y = -gt + v_{\circ y} \Rightarrow \circ = -۹/۸t + v_\circ \sin\theta \Rightarrow ۹/۸t = v_\circ \sin\theta \Rightarrow t = \frac{v_\circ \sin\theta}{۹/۸}$$

زمان فوق را در رابطه‌ی مکان ـ زمان جاگذاری می‌کنیم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow ۱۴ + y_\circ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\left(\frac{v_\circ \sin\theta}{۹/۸}\right)^۲ + v_\circ \sin\theta\left(\frac{v_\circ \sin\theta}{۹/۸}\right) + y_\circ \Rightarrow$$

$$۱۴ = -\frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta}{۱۹/۶} + \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta}{۹/۸} \Rightarrow ۱۴ = \frac{-v_\circ^۲ \sin^۲\theta + ۲v_\circ^۲ \sin^۲\theta}{۱۹/۶} \Rightarrow v_\circ^۲ \sin^۲\theta = ۲۷۴/۴ \qquad (۱)$$

در راستای محور xها:

هیچ شتابی به سنگ، وارد نمی‌شود پس حرکت سنگ در راستای محور xها حرکت با سرعت ثابت است.

با استفاده از حرکت با سرعت ثابت می‌توان نوشت:

$$x = v_{\circ x}t + x_\circ \Rightarrow ۱۰ = v_\circ \cos\theta\left(\frac{v_\circ \sin\theta}{۹/۸}\right) \Rightarrow ۹۸ = v_\circ^۲ \sin^۲\theta\cos\theta \qquad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta}{v_\circ^۲ \sin\theta\cos\theta} = \frac{۲۷۴/۴}{۹۸} \Rightarrow \tan\theta = ۲/۸ \Rightarrow \theta = ۷۰/۳^\circ$$

زاویه‌ی فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

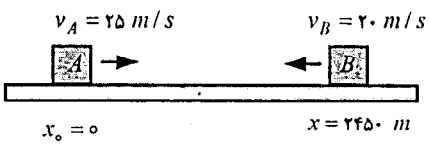
$$v_\circ^۲ \sin^۲ ۷۰/۳ = ۲۸۰ \Rightarrow \circ/۸۸۷\, v_\circ^۲ = ۲۷۴/۴ \Rightarrow v_\circ^۲ = ۳۰۹/۴ \Rightarrow v_\circ = ۱۷/۷ \ \frac{m}{s}$$

حرکت در راستای xها حرکت با سرعت ثابت است:

$$v_x = v_{\circ x} \Rightarrow v = v_{\circ x} \Rightarrow v = v_\circ \cos\theta \Rightarrow v = ۱۷/۶\cos ۷۰/۳ \Rightarrow v = ۵/۹ \ \frac{m}{s}$$

۳-۵۸) در بزرگراهی، اتومبیل A با سرعت ثابت $۹۰\ \frac{km}{h}$ به طرف شرق و اتومبیل B با سرعت ثابت $۷۲\ \frac{km}{h}$ به طرف غرب، حرکت می‌کنند. در یک لحظه، فاصله‌ی دو اتومبیل $۲/۴۵\ km$ است پس از چه مدت دو اتومبیل از کنار هم می‌گذرند؟

حل:



$$v_A = ۹۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_A = ۹۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_A = ۲۵\ \frac{m}{s}$$

$$v_B = ۷۲\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_B = ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_B = ۲۰\ \frac{m}{s}$$

$$x = ۲/۴۵\ km \Rightarrow x = ۲/۴۵ \times ۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۲۴۵۰\ m$$

با توجه به تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

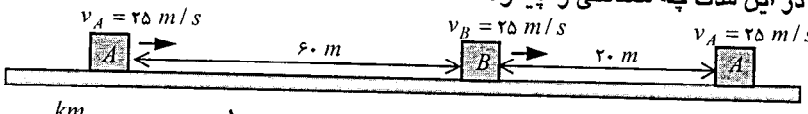
$$v_r = v_A - v_B \Rightarrow v_r = ۲۵ - (-۲۰) \Rightarrow v_r = ۴۵\ \frac{m}{s}$$

چون حرکت با سرعت ثابت است:

$$x = v_r t \Rightarrow ۲۴۵۰ = ۴۵ t \Rightarrow t = ۵۴/۴ \ s$$

۳-۵۹) اتومبیل A با سرعت ثابت $۹۰ \ \frac{km}{h}$ و اتومبیل B با سرعت ثابت $۷۲ \ \frac{km}{h}$ در یک جهت، حرکت می‌کنند. در لحظه‌ی: $t = ۰$ اتومبیل A، $۶۰ \ m$ عقب‌تر از اتومبیل B وارد خط سبقت می‌شود. اتومبیل A وقتی $۲۰ \ m$ از اتومبیل B جلو می‌افتد دوباره به خط خود برمی‌گردد. اتومبیل A چه مدت در خط سبقت بوده و در این مدت چه مسافتی را پیموده است؟

حل:



$$v_A = ۹۰ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v_A = ۹۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_A = ۲۵ \ \frac{m}{s}$$

$$v_B = ۷۲ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v_B = ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_B = ۲۰ \ \frac{m}{s}$$

با توجه به تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$v_r = v_A - v_B \Rightarrow v_r = ۲۵ - ۲۰ \Rightarrow v_r = ۵ \ \frac{m}{s}$$

با توجه به شکل، اتومبیل A با سرعت نسبی $۵ \ \frac{m}{s}$ باید مسافت $۸۰ \ m$ را طی کند تا از اتومبیل B سبقت بگیرد. حرکت با سرعت ثابت است:

$$x = v_r t \Rightarrow ۸۰ = ۵t \Rightarrow t = ۱۶ \ s$$

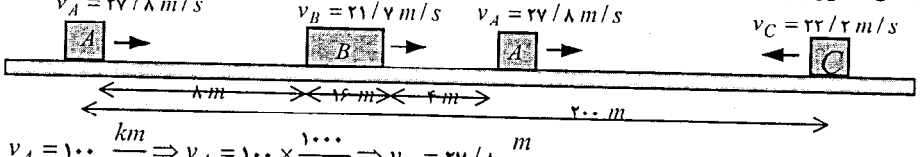
t زمان کل سبقت‌گیری $۱۶ \ s$ است.

حرکت اتومبیل A حرکت با سرعت ثابت است پس مسافتی که در مدت $۱۶ \ s$ طی کرده است:

$$x = v_A t \Rightarrow x = ۲۵ \times ۱۶ \Rightarrow x = ۴۰۰ \ m$$

۳-۶۰) اتومبیل A با سرعت $۱۰۰ \ \frac{km}{h}$ و کامیونی به طول $۱۶ \ m$ با سرعت $۷۸ \ \frac{km}{h}$ در جلو آن حرکت می‌کند. راننده‌ی اتومبیل A وقتی $۸ \ m$ عقب‌تر از کامیون است وارد خط دیگر می‌شود. راننده می‌داند برای برگشتن به خط خود، باید $۴ \ m$ از کامیون جلوتر باشد. راننده‌ی اتومبیل A وقتی، وارد خط دوم می‌شود در $۰/۲$ کیلومتری، اتومبیل C را می‌بیند که با سرعت $۸۰ \ \frac{km}{h}$ به طرف او می‌آید. اگر اتومبیل‌ها و کامیون با سرعت ثابت حرکت کنند اتومبیل A به موقع از کامیون سبقت می‌گیرد؟

حل:



$$v_A = ۱۰۰ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v_A = ۱۰۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_A = ۲۷/۸ \ \frac{m}{s}$$

$$v_B = ۷۸\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_B = ۷۸ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_B = ۲۱/۷\ \frac{m}{s}$$

$$v_C = ۸۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v_C = ۸۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v_C = ۲۲/۲\ \frac{m}{s}$$

با توجه به تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$v_r = v_A - v_B \Rightarrow v_r = ۲۷/۸ - ۲۱/۷ \Rightarrow v_r = ۶/۱\ \frac{m}{s}$$

با توجه به شکل اتومبیل A با سرعت نسبی $۶/۱\ \frac{m}{s}$ باید مسافت m ۲۸ را طی کند تا از کامیون B سبقت بگیرد. حرکت با سرعت ثابت است.

$$x = v_r t \Rightarrow ۲۸ = ۶/۱\, t \Rightarrow t = ۴/۶\ s$$

زمان کل سبقت‌گیری s ۴/۶ است.

با توجه به تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$v'_r = v_A + v_C \Rightarrow v'_r = ۲۷/۸ + ۲۲/۲ \Rightarrow v'_r = ۵۰\ \frac{m}{s}$$

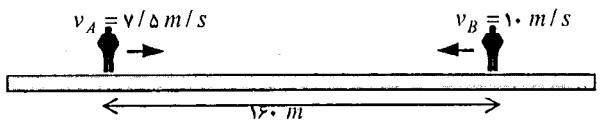
x' مسافت طی شده توسط اتومبیل‌ها در مدت s ۴/۶:

$$x' = v'_r t \Rightarrow x' = ۵۰ \times ۴/۶ \Rightarrow x' = ۲۳۰\ m$$

مسافت طی شده توسط این دو اتومبیل بیش‌تر از m ۲۰۰ است پس دو اتومبیل، تصادف می‌کنند.

۳-۶۱) دو دوست m ۱۶۰ از هم فاصله دارند که یک‌دیگر را می‌بینند و به طرف هم می‌دوند. یکی با سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۰ و دیگری با سرعت $\frac{m}{s}$ ۷/۵ می‌دوند. هر یک از آن‌ها چه مسافتی را می‌دوند؟

حل:



با توجه به تعریف نسبی می‌توان نوشت:

$$v_r = v_A - v_B \Rightarrow v_r = ۷/۵ - (-۱۰) \Rightarrow v_r = ۱۷/۵\ \frac{m}{s}$$

حرکت نسبی اشخاص، حرکت با سرعت ثابت است:

$$x = v_r t \Rightarrow ۱۶۰ = ۱۷/۵ t \Rightarrow t = \frac{۱۶۰}{۱۷/۵} \Rightarrow t = ۹/۱۴\ s$$

x_A مسافتی که شخص A با سرعت ثابت می‌دود:

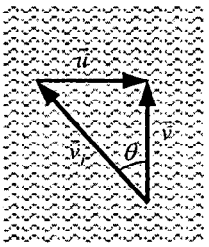
$$x_A = v_A t \Rightarrow x_A = ۷/۵ \times ۹/۱۴ \Rightarrow x_A = ۶۸/۶\ m$$

x_B مسافتی که شخص B با سرعت ثابت می‌دود:

$$x_B = v_B t \Rightarrow x_B = ۱۰ \times ۹/۱۴ \Rightarrow x_B = ۹۱/۴\ m$$

۳-۶۲) سرعت قایق موتوری در آب ساکن $\frac{km}{h}$ ۲۴ و سرعت جریان آب رودخانه $\frac{km}{h}$ ۶ است. قایق در

چه جهتی نسبت به خط ساحلی، حرکت کند تا به روبه‌روی نقطه‌ی آغاز حرکتش در طرف دیگر رودخانه برسد؟ اگر عرض رودخانه m ۸۰ باشد قایق در چه مدتی به ساحل روبه‌رو می‌رسد؟



حل: v_r سرعت قایق نسبت به آب با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث به‌دست می‌آید:

$$v_r = \sqrt{v^2 + u^2} \Rightarrow v_r = \sqrt{۲۴^2 + ۶^2} \Rightarrow v_r = \sqrt{۶۱۲} \Rightarrow v_r = ۲۴/۷ \ \frac{km}{h}$$

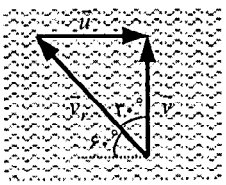
θ جهت قایق نسبت به خط ساحلی:

$$\tan\theta = \frac{u}{v} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۶}{۲۴} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۲۵ \Rightarrow \theta = ۱۴^\circ$$

حرکت قایق نسبت به آب، حرکت با سرعت ثابت است:

$$x = v_r t \Rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰۰} = ۲۴/۷t \Rightarrow t = \frac{۸۰}{۲۴/۷ \times ۱۰۰۰} \Rightarrow t = ۰/۰۰۳۲ \ \ h \Rightarrow t = ۱۱/۷ \ \ s$$

۳-۶۳) سرعت جریان آب در رودخانه‌ای $۵/۶ \ \frac{km}{h}$ است قایق موتوری در عرض رودخانه، طوری حرکت می‌کند که به نقطه‌ی روبه‌روی نقطه‌ی آغاز حرکتش در طرف دیگر ساحل رودخانه می‌رسد. قایق با زاویه‌ی ۶۰° نسبت به خط ساحلی، حرکت می‌کند. سرعت قایق نسبت به ساحل چه قدر است؟



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

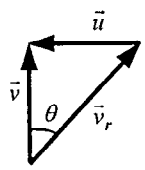
$$\tan\theta = \frac{u}{v} \Rightarrow \tan ۳۰ = \frac{۵/۶}{v} \Rightarrow v = \frac{۵/۶}{\tan ۳۰} \Rightarrow v = ۹/۶ \ \frac{km}{h}$$

v_r سرعت قایق نسبت به آب:

$$v_r = \sqrt{v^2 + u^2} \Rightarrow v_r = \sqrt{(۹/۶)^2 + (۵/۶)^2} \Rightarrow v_r = \sqrt{۱۳۳/۵۲} \Rightarrow v_r = ۱۱/۲ \ \frac{km}{h}$$

۳-۶۴) هواپیمای کوچکی با سرعت $۲۸۰ \ \frac{km}{h}$ نسبت به هوا به طور افقی در حال پرواز است. اگر مقصد هواپیما شمال باشد و بادی با سرعت $۶۰ \ \frac{km}{h}$ از شمال‌شرقی بوزد. هواپیما باید در چه جهتی حرکت کند؟ سرعت آن نسبت به زمین چه قدر است؟

حل: v سرعت هواپیما نسبت به زمین:



$$v_r = \sqrt{v^2 + u^2} \Rightarrow ۲۸۰ = \sqrt{v^2 + ۶۰^2} \Rightarrow ۲۸۰^2 = v^2 + ۳۶۰۰ \Rightarrow$$

$$۷۸۴۰۰ - ۳۶۰۰ = v^2 \Rightarrow v^2 = ۷۴۸۰۰ \Rightarrow v = ۲۷۳/۵ \ \frac{km}{h}$$

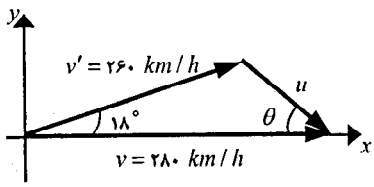
θ جهت حرکت هواپیما:

$$\tan\theta = \frac{u}{v} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۶۰}{۲۷۳/۵} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۲۲ \Rightarrow \theta = ۱۲/۴^\circ$$

۳-۶۵) خلبان هواپیمایی، متوجه می‌شود باید در جهت ۱۸° شمال شرقی، حرکت کند تا هواپیما نسبت

به زمین به طرف شرق برود. سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۶۰ $\frac{km}{h}$ و سرعتش نسبت به زمین ۲۸۰ $\frac{km}{h}$ است. سرعت باد چه قدر است؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} u_x = u\cos\theta \\ u_y = -u\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = u\cos\theta\,\vec{i} - u\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = ۲۸۰\,\vec{i}$$

$$\begin{cases} v'_x = ۲۶۰\cos ۱۸ \\ v'_y = ۲۶۰\sin ۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = ۲۴۷/۳ \\ v'_y = ۸۰/۳ \end{cases} \Rightarrow \vec{v}' = ۲۴۷/۳\,\vec{i} + ۸۰/۳\,\vec{j}$$

با استفاده از تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v'_x + u_x \\ v_y = v'_y + u_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۸۰ = ۲۴۷/۳ + u\cos\theta \\ ۰ = ۸۰/۳ - u\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\cos\theta = ۳۲/۷ \\ u\sin\theta = ۸۰/۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

θ جهت وزش باد با تقسیم روابط (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} = \frac{۸۰/۳}{۳۲/۷} \Rightarrow \tan\theta = ۲/۵ \Rightarrow \theta = ۶۷/۸^\circ$$

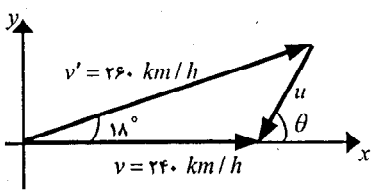
جهت وزش باد $۶۷/۸^\circ$ جنوب شرقی است.

برای محاسبه‌ی سرعت وزش باد زاویه‌ی حاصله را در یکی از روابط (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$u\sin\theta = ۸۰/۳ \Rightarrow u\sin ۶۷/۸ = ۸۰/۳ \Rightarrow ۰/۹۳u = ۸۰/۳ \Rightarrow u = ۸۶/۷\ \frac{km}{h}$$

۳-۶۶) مساله‌ی ۳-۶۵ را برای حالتی تکرار کنید که سرعت هواپیما نسبت به زمین ۲۴۰ $\frac{km}{h}$ است.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} u_x = -u\cos\theta \\ u_y = -u\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = -u\cos\theta\,\vec{i} - u\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = ۲۴۰\,\vec{i}$$

$$\begin{cases} v'_x = ۲۶۰\cos ۱۸ \\ v'_y = ۲۶۰\sin ۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = ۲۴۷/۳ \\ v'_y = ۸۰/۳ \end{cases} \Rightarrow \vec{v}' = ۲۴۷/۳\,\vec{i} + ۸۰/۳\,\vec{j}$$

با استفاده از تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v'_x + u_x \\ v_y = v'_y + u_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۴۰ = ۲۴۷/۳ - u\cos\theta \\ ۰ = ۸۰/۳ - u\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\cos\theta = ۷/۳ \\ u\sin\theta = ۸۰/۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

θ جهت وزش باد با تقسیم روابط (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} = \frac{۸۰/۳}{۷/۳} \Rightarrow \tan\theta = ۱۱ \Rightarrow \theta = ۸۵^\circ$$

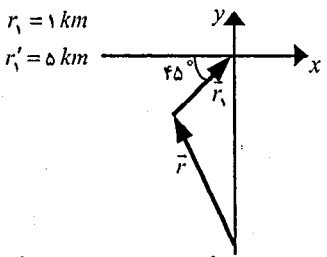
جهت وزش باد ۸۵° جنوب غربی است.

برای محاسبه‌ی سرعت وزش باد زاویه‌ی حاصله را در یکی از روابط (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$u\sin\theta = ۸۰/۳ \Rightarrow u\sin ۸۵ = ۸۰/۳ \Rightarrow ۰/۹۹u = ۸۰/۳ \Rightarrow u = ۸۰/۶ \ \frac{km}{h}$$

۳-۶۷) قایق بادبانی در ۵ کیلومتری جنوب بندری در مه غلیظی، گرفتار می‌شود و به طرف شمال می‌رود. قبل از برطرف شدن مه، مسافت $۵/۳\ km$ را نسبت به آب می‌پیماید. پس از برطرف شدن مه، ملوان، متوجه می‌شود بندر در ۱ کیلومتری شمال شرقی او است. در مدت مه، جابه‌جایی قایق را در اثر جریان آب به دست آورید.

حل:



$\vec{r}$ جابه‌جایی قایق نسبت به زمین

$\vec{r}'$ جابه‌جایی قایق نسبت به آب

$\vec{R}$ جابه‌جایی قایق در اثر جریان آب

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} r_{۱x} = r_۱\cos ۴۵ \\ r_{۱y} = r_۱\sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{۱x} = ۱\times\cos ۴۵ \\ r_{۱y} = ۱\times\sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{۱x} = ۰/۷\ \ km \\ r_{۱y} = ۰/۷\ \ km \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_۱ = ۰/۷\vec{i} + ۰/۷\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_۱' + \vec{R} \Rightarrow \vec{r} = ۵/۲\vec{j} + R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j} \Rightarrow \vec{r} = R\cos\theta\,\vec{i} + (R\sin\theta + ۵/۲)\vec{j}$$

$$\vec{r} + \vec{r}_۱ = ۵\vec{j} \Rightarrow R\cos\theta\,\vec{i} + (R\sin\theta + ۵/۲)\vec{j} + ۰/۷\vec{i} + ۰/۷\vec{j} = ۵\vec{j} \Rightarrow$$

$$(R\cos\theta + ۰/۷)\vec{i} + (R\sin\theta + ۵/۲ + ۰/۷)\vec{j} = ۵\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} R\cos\theta + ۰/۷ = ۰ \\ R\sin\theta + ۶ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\cos\theta = -۰/۷ \\ R\sin\theta = -۱ \end{cases}$$

θ جهت جریان آب:

$$\tan\theta = \frac{-۱}{-۰/۷} \Rightarrow \tan\theta = ۱/۴۳ \Rightarrow \theta = ۵۵^\circ$$

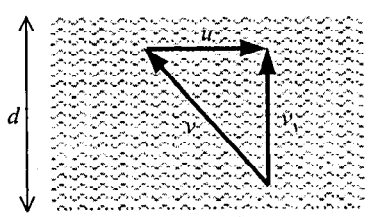
جهت جریان آب ۵۵° به طرف جنوب‌غربی است.

$$R\sin ۵۵ = -۱ \Rightarrow R = -۱/۲۲\ \ km$$

علامت منفی نشانه‌ی جهت جریان آب است. جابه‌جایی قایق در اثر جریان آب $۱/۲۲\ km$ است.

۳-۶۸) دو پسر، تصمیم می‌گیرند در رودخانه‌ای، مسابقه دهند. سرعت جریان آب رودخانه u است. یکی از پسرها در عرض رودخانه به نقطه‌ی روبه‌روی نقطه‌ی آغاز حرکتش، شنا می‌کند و برمی‌گردد. دیگری، به نقطه‌ای در پایین رودخانه به اندازه‌ی عرض رودخانه، شنا می‌کند و برمی‌گردد. اگر هر دو پسر با سرعت $v \succ u$ نسبت به آب حرکت کنند کدام یک برنده می‌شود؟

حل:



برای پسر اولی:

هنگام رفت

v_1 سرعت شنای پسر نسبت به زمین:

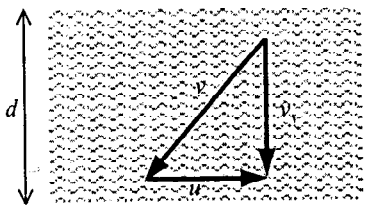
$$v^2 = v_1^2 + u^2 \Rightarrow v_1^2 = v^2 - u^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 - u^2}$$

t_1 زمان رفت عرض رودخانه:

$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow d = \sqrt{v^2 - u^2}\, t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

هنگام برگشت

v' سرعت شنای پسر نسبت به زمین:



$$v^2 = v_1'^2 + u^2 \Rightarrow v_1'^2 = v^2 - u^2 \Rightarrow v_1' = \sqrt{v^2 - u^2}$$

t_1' زمان برگشت عرض رودخانه:

$$x_2 = v_1' t_1' \Rightarrow d = \sqrt{v^2 - u^2}\, t_1' \Rightarrow t_1' = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

T_1 زمان کل شنا:

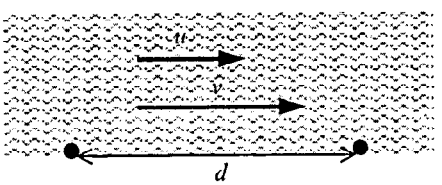
$$T_1 = t_1 + t_1' \Rightarrow T_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} + \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} \Rightarrow T_1 = \frac{2d}{\sqrt{v^2 - u^2}} \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{2d}{\sqrt{v^2 - u^2}} \times \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{\sqrt{v^2 - u^2}} \Rightarrow T_1 = \frac{2d\sqrt{v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$$

برای پسر دومی:

هنگام رفت

v_2 سرعت شنای پسر نسبت به زمین:



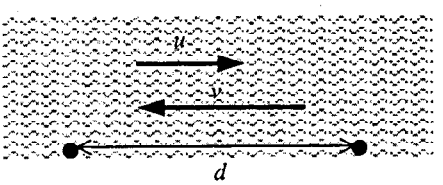
$$v_2 = v + u$$

t_2 زمان رفت در جهت آب رودخانه:

$$x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow d = (v+u)t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{v+u}$$

هنگام برگشت

v_2' سرعت شنای پسر نسبت به زمین:



$$v_2' = v - u$$

t_2' زمان برگشت در خلاف جهت آب رودخانه:

$$x_2 = v_2' t_2' \Rightarrow d = (v-u)t_2' \Rightarrow t'_2 = \frac{d}{v-u}$$

T_2 زمان کل شنا:

$$T_2 = t_2 + t_2' \Rightarrow T_2 = \frac{d}{v+u} + \frac{d}{v-u} \Rightarrow T_2 = d\left(\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}\right) \Rightarrow T_2 = d\left[\frac{v-u+v+u}{(v+u)(v-u)}\right] \Rightarrow$$

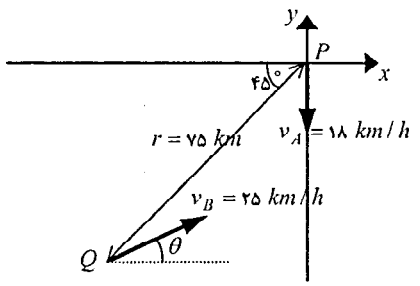
$$T_۲ = d\left(\frac{۲v}{v^۲ - u^۲}\right) \Rightarrow T_۲ = \frac{۲vd}{v^۲ - u^۲}$$

$$\frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\frac{۲d\sqrt{v^۲ - u^۲}}{v^۲ - u^۲}}{\frac{۲vd}{v^۲ - u^۲}} \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\sqrt{v^۲ - u^۲}}{v} \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} \prec ۱ \Rightarrow T_۱ \prec T_۲$$

اولی زودتر از دومی می‌رسد.

۳-۶۹) قایق A در ساعت ۸ صبح از بندر P با سرعت $۱۸\ \frac{km}{h}$ به طرف جنوب، حرکت می‌کند. هم زمان، قایق B از بندر Q در ۷۵ کیلومتری جنوب غربی بندر P با سرعت $۲۵\ \frac{km}{h}$ به راه می‌افتد. قایق B در چه جهتی، حرکت کند تا به قایق A برسد؟ این دو قایق در چه زمانی به هم می‌رسند؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} r_{۰x} = -۷۵\cos ۴۵ \\ r_{۰y} = -۷۵\sin ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{۰x} = -۵۳ \\ r_{۰y} = -۵۳ \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_{۰} = -۵۳\vec{i} - ۵۳\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = -۱۸\vec{j}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = ۲۵\cos\theta \\ v_{By} = ۲۵\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_B = ۲۵\cos\theta\vec{i} + ۲۵\sin\theta\vec{j}$$

$\vec{r}_A$ معادله‌ی مکان ـ زمان قایق A:

$$\vec{r}_A = \vec{v}_A t \Rightarrow \vec{r}_A = -۱۸\vec{j}t \Rightarrow \vec{r}_A = -۱۸t\vec{j}$$

$\vec{r}_B$ معادله‌ی مکان ـ زمان قایق B:

$$\vec{r}_B = \vec{v}_B t + \vec{r}_{۰B} \Rightarrow \vec{r}_B = \left(۲۵\cos\theta\vec{i} + ۲۵\sin\theta\vec{j}\right)t - ۵۳\vec{i} - ۵۳\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_B = \left(۲۵t\cos\theta - ۵۳\right)\vec{i} + \left(۲۵t\sin\theta - ۵۳\right)\vec{j}$$

وقتی قایق‌های A و B به هم می‌رسند

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow -۱۸t\vec{j} = \left(۲۵t\cos\theta - ۵۳\right)\vec{i} + \left(۲۵t\sin\theta - ۵۳\right)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵t\cos\theta - ۵۳ = ۰ \\ ۲۵t\sin\theta - ۵۳ = -۱۸t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۲۵t\cos\theta = ۵۳ \\ ۲۵t\sin\theta + ۱۸t = ۵۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵t\cos\theta = ۵۳ \\ \left(۲۵\sin\theta + ۱۸\right)t = ۵۳ \end{cases} \quad (۱)$$

برای محاسبه‌ی θ جهت حرکت قایق B روابط (۱) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\left(۲۵\sin\theta + ۱۸\right)t}{۲۵t\cos\theta} = \frac{۵۳}{۵۳} \Rightarrow \frac{۲۵\sin\theta + ۱۸}{۲۵\cos\theta} = ۱ \Rightarrow ۲۵\sin\theta + ۱۸ = ۲۵\cos\theta \Rightarrow ۲۵\sin\theta = ۲۵\cos\theta - ۱۸$$

$$۲۵\sqrt{۱ - \cos^۲\theta} = ۲۵\cos\theta - ۱۸ \Rightarrow ۶۲۵\left(۱ - \cos^۲\theta\right) = \left(۲۵\cos\theta - ۱۸\right)^۲ \Rightarrow$$

$$۶۲۵ - ۶۲۵\cos^۲\theta = ۶۲۵\cos^۲\theta + ۳۲۴ - ۹۰۰\cos\theta \Rightarrow$$

$$۰ = ۶۲۵\cos^۲\theta - ۹۰۰\cos\theta + ۳۲۴ + ۶۲۵\cos^۲\theta - ۶۲۵ \Rightarrow ۱۲۵۰\cos^۲\theta - ۹۰۰\cos^۲\theta - ۳۰۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{۹۰۰\pm\sqrt{۹۰۰^{۲}-۴(۱۲۵۰)(-۳۰۱)}}{۲\times۱۲۵۰}\Rightarrow\cos^{۲}\theta=\frac{۹۰۰\pm\sqrt{۲۳۱۵۰۰۰}}{۲۵۰۰}\Rightarrow\cos\theta=\frac{۹۰۰\pm۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{۹۰۰+۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰}\\ \cos\theta'=\dfrac{۹۰۰-۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{۲۴۲۱/۵}{۲۵۰۰}\\ \cos\theta'=\dfrac{-۶۲۱/۵}{۲۵۰۰}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=۰/۹۷\\ \cos\theta'=-۰/۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=۱۴/۴^{\circ}\\ \theta'=۱۰۴/۵^{\circ}\end{cases}$$

با توجه به شکل $\theta=۱۴/۴^{\circ}$ جواب مساله است.

برای محاسبه‌ی t زمان کل حرکت، زاویه‌ی $\theta=۱۴/۴^{\circ}$ را در یکی از روابط (۱) جاگذاری می‌کنیم:

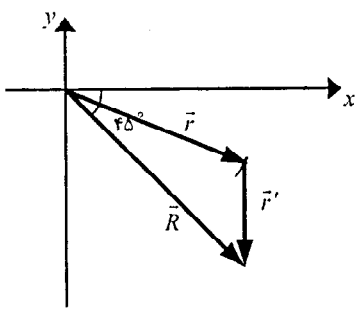
$$۲۵t\cos\theta=۵۳\Rightarrow۲۵t\cos۱۴/۴=۵۳\Rightarrow t=۲/۲\ h$$

$$t_{۱}=۰/۲\ h\Rightarrow t_{۱}=۰/۲\times۶۰\Rightarrow t_{۱}=۱۲\ \min$$

زمان کل حرکت قایق ۲ ساعت و ۱۲ دقیقه است. پس دو قایق در ساعت $۱۱:۱۰'$ صبح به هم می‌رسند.

۳-۷۰) ملوانی به طرف بندری حرکت می‌کند که در فاصله‌ی ۲۴ کیلومتری جنوب‌شرقی او واقع است. قایق در مه غلیظی گرفتار می‌شود. ملوان با استفاده از قطب‌نما به جنوب‌شرقی می‌رود و به مدت h ۳ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۸ نسبت به آب، حرکت می‌کند. ملوان پس از برطرف شدن مه، متوجه می‌شود در فاصله‌ی ۳/۶۵ کیلومتری شمال بندر است. سرعت متوسط جریان آب در این مدت به دست آورید. قایق در چه جهتی، حرکت می‌کرد تا به بندر می‌رسید؟ در چه مدتی به مقصد می‌رسید؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$R=۲۴\ km$ فاصله‌ی اولیه‌ی قایق تا بندر

$r'=۳/۶۵\ km$ فاصله‌ی نهایی قایق تا بندر

$$\begin{cases}R_{x}=-۲۴\cos۴۵\\ R_{y}=-۲۴\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_{x}=-۱۶/۹۷\ km\\ R_{y}=-۱۶/۹۷\ km\end{cases}\Rightarrow$$

$$\vec{R}=-۱۶/۹۷\vec{i}-۱۶/۹۷\vec{j}$$

$\vec{r}$ بردار جابه‌جایی قایق در مه:

$$\vec{R}=\vec{r}+\vec{r}'\Rightarrow\vec{r}=\vec{R}-\vec{r}'\Rightarrow\vec{r}=-۱۶/۹۷\vec{i}-۱۶/۹۷\vec{j}+۳/۶۵\vec{j}\Rightarrow\vec{r}=-۱۶/۹۷\vec{i}-۱۳/۳۲\vec{j}$$

r اندازه‌ی جابجایی قایق در مه:

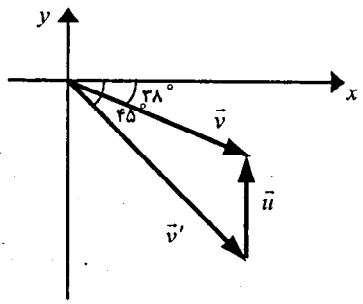
$$r=\sqrt{r_{x}^{۲}+r_{y}^{۲}}\Rightarrow r=\sqrt{(-۱۶/۹۷)^{۲}+(-۱۳/۳۲)^{۲}}\Rightarrow r=\sqrt{۴۶۵/۴}\Rightarrow r=۲۱/۶\ km$$

v سرعت قایق نسبت به آب ساکن:

$$r=vt\Rightarrow۲۱/۶=v\times۳\Rightarrow v=\frac{۲۱/۶}{۳}\Rightarrow v=۷/۲\ \frac{km}{h}$$

θ جهت حرکت قایق:

$$\tan\theta=\frac{r_y}{r_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-۱۳/۳۲}{-۱۶/۹۷}\Rightarrow\tan\theta=۰/۷۸۵\Rightarrow\theta=۳۸^\circ$$



جهت حرکت قایق ۳۸° جنوب‌شرقی است.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}v_x=۷\cos۳۸\\v_y=-۷\sin۳۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=۷/۲\cos۳۸\\v_y=-۷/۲\sin۳۸\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}v_x=۵/۷\ \dfrac{km}{h}\\v_y=-۴/۴\ \dfrac{km}{h}\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=۵/۷\vec{i}-۴/۴\vec{j}$$

$$\begin{cases}v'_x=v'\cos۴۵\\v'_y=-v'\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'_x=۸\cos۴۵\\v'_y=-۸\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'_x=۵/۷\ \dfrac{km}{h}\\v'_y=-۵/۷\ \dfrac{km}{h}\end{cases}\Rightarrow v'=۵/۷\vec{i}-۵/۷\vec{j}$$

با استفاده از تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

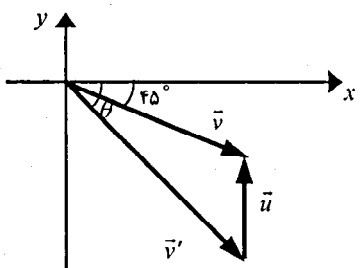
$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}\Rightarrow\vec{u}=\vec{v}-\vec{v}'\Rightarrow\vec{u}=۵/۷\vec{i}-۴/۴\vec{j}-\left(۵/۷\vec{i}-۵/۷\vec{j}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{u}=۵/۷\vec{i}-۴/۴\vec{j}-۵/۷\vec{i}+۵/۷\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=۱/۳\vec{j}$$

u اندازه‌ی سرعت آب:

$$u=\sqrt{u_x^۲+u_y^۲}\Rightarrow u=\sqrt{۰+(۱/۳)^۲}\Rightarrow u=\sqrt{۱/۶۹}\Rightarrow u=۱/۳\ \frac{km}{h}$$

برای این‌که قایق درست به مقصد برسد



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$v_x=v\cos۴۵\qquad v_y=-v\sin۴۵$$

$$u_x=۰\qquad u_y=۱/۳$$

$$\begin{cases}v'_x=v'\cos\theta\\v'_y=-v\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'_x=۸\cos\theta\\v'_y=-۸\sin\theta\end{cases}$$

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}\Rightarrow\begin{cases}v_x=v'_x+u_x\\v_y=v'_y+u_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v\cos۴۵=۸\cos\theta\\-v\sin۴۵=-۸\sin\theta+۱/۳\end{cases}\qquad(۱)$$

برای به‌دست آوردن جهت‌گیری درست قایق روابط (۱) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-v\sin۴۵}{v\cos۴۵}=\frac{-۸\sin\theta+۱/۳}{۸\cos\theta}\Rightarrow-\tan۴۵=-\frac{۸\sin\theta+۱/۳}{۸\cos\theta}\Rightarrow-۱=-\frac{۸\sin\theta+۱/۳}{۸\cos\theta}$$

$$-۸\cos\theta=-۸\sin\theta+۱/۳\Rightarrow-۸\sqrt{۱-\sin\theta}=-۸\sin\theta+۱/۳\Rightarrow$$

$$\left(-۸\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\right)=(-۸\sin\theta+۱/۳)^۲\Rightarrow۶۴\left(۱-\sin^۲\theta\right)=۶۴\sin^۲\theta+۱/۶۹-۲۰/۸\sin\theta\Rightarrow$$

$$۶۴\sin^۲\theta+۱/۶۹-۲۰/۸\sin\theta+۶۴\sin^۲\theta-۶۴=۰\Rightarrow$$

$$۱۲۸\sin^۲\theta-۲۰/۸\sin\theta-۶۲/۳۱=۰\Rightarrow\sin\theta=\frac{۲۰/۸\pm\sqrt{(۲۰/۸)^۲-۴(۱۲۸)(-۶۲/۳۱)}}{۲\times۱۲۸}\Rightarrow$$

$$\sin\theta=\frac{۲۰/۸\pm\sqrt{۳۲۳۳۵/۳۶}}{۲۵۶}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۲۰/۸\pm۱۷۹/۸}{۲۵۶}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{۲۰/۸+۱۷۹/۸}{۲۵۶}\\ \sin\theta'=\dfrac{۲۰/۸-۱۷۹/۸}{۲۵۶}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{۲۰۰/۶}{۲۵۶}\\ \sin\theta'=-\dfrac{۱۵۹}{۲۵۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=۰/۷۸\\ \sin\theta'=-۰/۶۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=۵۱/۶^\circ\\ \theta'=-۳۸/۴^\circ\end{cases}$$

جهت حرکت قایق ۵۲° جنوب‌شرقی است.

برای محاسبه‌ی v سرعت قایق نسبت به آب ساکن، زاویه‌ی حاصله را در یکی از روابط (۱) جاگذاری می‌کنیم:

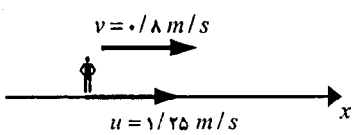
$$v\cos۴۵=۸\cos\theta\Rightarrow v\cos۴۵=۸\cos۵۱/۶\Rightarrow v=\frac{۸\cos۵۱/۶}{\cos۴۵}\Rightarrow v=۷\ \frac{km}{h}$$

t زمان رسیدن به بندر:

$$R=vt\Rightarrow ۲۴=۷t\Rightarrow t=\frac{۲۴}{۷}\Rightarrow t=۳/۴۳\ \ h$$

۳-۷۱) پیاده‌روهای متحرک در بسیاری از فرودگاه‌های بزرگ، نصب، شده است. تسمه‌ی متحرک با سرعت $۱/۲۵\ \frac{m}{s}$ حرکت کند و مسافت m ۷۵ را می‌پیماید. شخصی، روی تسمه‌ی متحرک با سرعت $۰/۸\ \frac{m}{s}$ نسبت به تسمه در جهت حرکت آن راه می‌رود. شخص چه‌مدت، روی تسمه می‌ماند؟

حل: با استفاده از تعریف سرعت نسبی به‌دست می‌آید:



v_r سرعت نسبی شخص نسبت به زمین:

$$v_r=u+v\Rightarrow v_r=۰/۸+۱/۲\Rightarrow v_r=۲/۰۵\ \frac{m}{s}$$

حرکت شخص با سرعت ثابت است

t زمان ماندن شخص روی تسمه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x=v_rt\Rightarrow ۷۵=۲/۰۵t\Rightarrow t=۳۶/۶\ \ s$$

۳-۷۲) موشکی با شتاب $۱/۲g$ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌شود. s ۸ پس از جدا شدن از سطح زمین، پیچ کوچک شلی از سقف موشک، رها می‌شود و به کف موشک می‌افتد. فاصله‌ی سقف موشک از کف آن m ۳/۸ است. مدت زمان سقوط پیچ را به دست آورید. پیچ نسبت به نقطه‌ی ثابتی روی زمین چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: a شتاب حرکت موشک:

$$a=۱/۲g\Rightarrow a=۱/۲\times۹/۸\Rightarrow a=۱۱/۸\ \frac{m}{s^۲}$$

در لحظه‌ی افتادن پیچ

v سرعت موشک با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به دست می‌آید:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = ۱۱/۸ \times ۸ + ۰ \Rightarrow v = ۹۴/۴ \ \frac{m}{s}$$

سرعت حاصله هنگام افتادن پیچ هم برای موشک و هم برای پیچ سرعت اولیه است.

معادله‌ی مکان پیچ با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به دست می‌آید:

$$y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_0 t + y_0 \Rightarrow y_۱ = -\frac{۱}{۲}۹/۸t^۲ + ۹۴/۴t + ۳/۸ \Rightarrow y_۱ = -۴/۹t^۲ + ۹۴/۴t + ۳/۸$$

معادله‌ی مکان کف موشک با استفاده از رابطه‌ی مکان- زمان به دست می‌آید:

$$y_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_0 t \Rightarrow y_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۱/۸t^۲ + ۹۴/۴t \Rightarrow y_۲ = ۵/۹t^۲ + ۹۴/۴t$$

وقتی، پیچ به کف موشک می‌رسد

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -۴/۹t^۲ + ۹۴/۴t + ۳/۸ = ۵/۹t^۲ + ۹۴/۴t \Rightarrow ۳/۸ = ۵/۹t^۲ + ۹۴/۴t + ۴/۹t^۲ + ۹۴/۴t$$

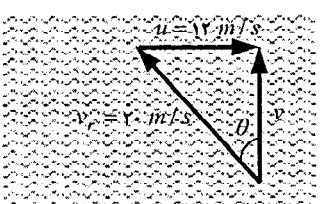
$$۳/۸ = ۱۰/۸t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۰/۳۵ \Rightarrow t = \sqrt{۰/۳۵} \Rightarrow t = ۰/۶ \ s$$

$t = ۰/۶ \ s$ زمان افتادن پیچ است.

$y_۱$ مسافت طی شده توسط پیچ، نسبت به نقطه‌ی ثابت:

$$y_۱ = -۴/۹ \times (۰/۶)^۲ + ۹۴/۴ \times ۰/۶ + ۳/۸ \Rightarrow y_۱ = -۱/۸ + ۵۶/۶ + ۳/۸ \Rightarrow y_۱ = ۵۸/۶ \ m$$

۳-۷۳) سرعت قایقی در آب ساکن $۲۰ \ \frac{km}{h}$ است و قایق در عرض رودخانه‌ای به پهنای $۳ \ km$ حرکت می‌کند. سرعت جریان آب $۱۲ \ \frac{km}{h}$ است. قایق‌ران، جهت قایق را طوری تصحیح می‌کند که به نقطه‌ی روبه‌روی نقطه‌ی آغاز حرکت در ساحل دیگر رودخانه می‌رسد. چه مدت طول می‌کشد تا قایق به ساحل دیگر رودخانه برسد؟



حل: v سرعت قایق نسبت به ساحل:

$$v_r = \sqrt{v^۲ + u^۲} \Rightarrow ۲۰ = \sqrt{v^۲ + ۱۲^۲} \Rightarrow ۴۰۰ = v^۲ + ۱۴۴ \Rightarrow$$

$$v^۲ = ۴۰۰ - ۱۴۴ \Rightarrow v^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow v = \sqrt{۲۵۶} \Rightarrow v = ۱۶ \ \frac{km}{h}$$

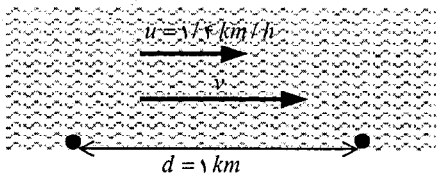
حرکت قایق با سرعت ثابت است:

$$x = vt \Rightarrow ۳ = ۱۶t \Rightarrow t = ۰/۱۹ \ h \Rightarrow t = ۰/۱۹ \times ۶۰ \Rightarrow t = ۱۱/۳ \ \text{min}$$

۳-۷۴) دو بارانداز به فاصله‌ی $۱ \ km$ در امتداد ساحل رودخانه‌ای قرار دارند. سرعت جریان آب در رودخانه $۱/۴ \ \frac{km}{h}$ است. در مدت $۳۰ \ \text{min}$ قایق موتوری با سرعت ثابت نسبت به آب این فاصله را می‌رود و برمی‌گردد. سرعت قایق موتوری را نسبت به زمین به دست آورید.

حل:

هنگام رفت:



v_r سرعت قایق نسبت به آب:

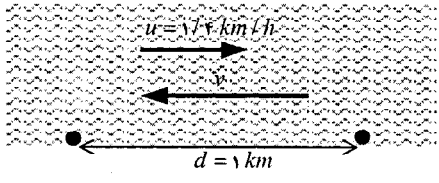
$$v_r = v + u \Rightarrow v_r = v + ۱/۴$$

حرکت قایق با سرعت ثابت است.

$t_۱$ زمان رفت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v_r t \Rightarrow ۱ = (v + ۱/۴) t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{v + ۱/۴}$$

هنگام برگشت



v'_r سرعت قایق نسبت به آب:

$$v'_r = v - u \Rightarrow v'_r = v - ۱/۴$$

حرکت قایق با سرعت ثابت است.

$t_۲$ زمان برگشت با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = v'_r t \Rightarrow ۱ = (v - ۱/۴) t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{۱}{v - ۱/۴}$$

t زمان کل حرکت:

$$t = ۳۰ \ \text{min} \Rightarrow t = ۳۰ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t = ۰/۵ \ h$$

$$t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow ۰/۵ = \frac{۱}{v + ۱/۴} + \frac{۱}{v - ۱/۴} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{v - ۱/۴ + v + ۱/۴}{(v + ۱/۴)(v - ۱/۴)} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{۲v}{v^۲ - ۱/۹۶} \Rightarrow$$

$$۰/۵v^۲ - ۰/۹۸ = ۲v \Rightarrow ۰/۵v^۲ - ۲v - ۰/۹۸ = ۰ \Rightarrow v = \frac{۲ \pm \sqrt{۲^۲ - ۴(۰/۵)(-۰/۹۸)}}{۲(۰/۵)} \Rightarrow$$

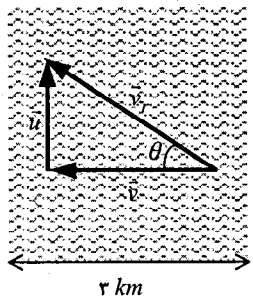
$$v = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۱/۹۶}}{۱} \Rightarrow v = ۲ \pm \sqrt{۵/۹۶} \Rightarrow v = ۲ \pm ۲/۴ \Rightarrow \begin{cases} v = ۲ + ۲/۴ \\ v' = ۲ - ۲/۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = ۴/۴ \ \frac{km}{h} \\ v' = -۰/۴ \ \frac{km}{h} \end{cases}$$

سرعت قایق نسبت به زمین $۴/۴ \ \frac{km}{h}$ است.

۳-۷۵) آب در رودخانه‌ای با سرعت $۵ \ \frac{km}{h}$ به طرف جنوب، جریان دارد. سرعت قایقی نسبت به آب $۱۵ \ \frac{km}{h}$ است. قایق در عرض رودخانه در چه جهتی، حرکت کند تا به نقطه‌ای درغرب نقطه‌ی عزیمتش برسد؟ اگر عرض رودخانه $۳ \ km$ باشد قایق، عرض رودخانه را در چه مدتی می‌پیماید؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\cos\theta = \frac{u}{v_r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۵}{۱۵} \Rightarrow \cos\theta = ۰/۳ \Rightarrow \theta = ۷۰/۵^\circ$$



α جهت قایق از راستای شمال:

$$\alpha = ۹۰ - ۷۰/۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۹/۵^\circ$$

v سرعت قایق نسبت به زمین:

$$v_r = \sqrt{v^۲ + u^۲} \Rightarrow ۱۵ = \sqrt{v^۲ + ۵^۲} \Rightarrow ۲۲۵ = v^۲ + ۲۵ \Rightarrow$$

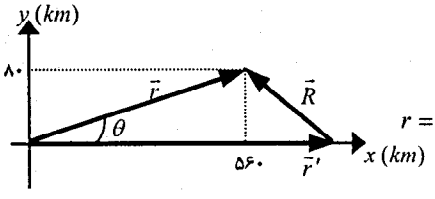
$$v^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow v = ۱۴/۱۴ \frac{km}{h}$$

قایق با سرعت ثابت حرکت می‌کند:

$$x = vt \Rightarrow ۳ = ۱۴/۱۴\, t \Rightarrow t = ۰/۲۱۲\ h \Rightarrow t = ۰/۲۱۲ \times ۶۰ \Rightarrow t = ۱۲/۷ \text{ min}$$

۳-۷۶) خلبانی می‌خواهد به طرف شرق پرواز کند. به مدت h ۱/۵ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۴۰۰ نسبت به هوا پرواز می‌کند. در این موقع، او در km ۵۶۰ شرق و km ۸۰ شمال نقطه‌ی غزیمتش، قرار دارد. سرعت باد را در این مدت به دست آورید. خلبان در چه جهت قطب‌نما پرواز می‌کرد تا درست به شرق برود؟

حل:



r اندازه‌ی جابه‌جایی هواپیما:

$$r = \sqrt{r_x^۲ + r_y^۲} \Rightarrow r = \sqrt{۵۶۰^۲ + ۸۰^۲} \Rightarrow r = ۵۶۵/۷\ km$$

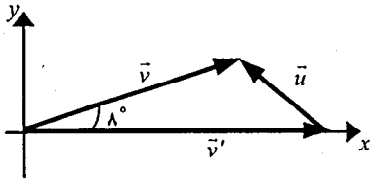
θ جهت حرکت هواپیما:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{۸۰}{۵۶۰} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۱۴ \Rightarrow \theta = ۸^\circ$$

v سرعت هواپیما نسبت به زمین:

$$r = vt \Rightarrow ۵۶۵/۷ = v \times ۱/۵ \Rightarrow v = ۳۷۷/۱ \frac{m}{s}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} v_x = ۳۷۷/۱ \cos ۸ \\ v_y = ۳۷۷/۱ \sin ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = ۳۷۳/۱ \frac{km}{h} \\ v_y = ۵۳/۱ \frac{km}{h} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = ۳۷۳/۳\vec{i} + ۵۳/۱\vec{j}$$

$$\begin{cases} v'_x = ۴۰۰\vec{i} \\ \vec{v}_y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \vec{v}' = ۴۰۰\vec{i}$$

با استفاده از تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} - \vec{v}' \Rightarrow \vec{u} = ۳۷۳/۳\vec{i} + ۵۳/۱\vec{j} - ۴۰۰ \Rightarrow u = -۲۶/۷\vec{i} + ۵۳/۱\vec{j}$$

u اندازه‌ی وزش باد:

$$u = \sqrt{u_x^۲ + u_y^۲} \Rightarrow u = \sqrt{(-۲۶/۷)^۲ + (۵۳/۱)^۲} \Rightarrow u = \sqrt{۳۵۳۲/۵} \Rightarrow u = ۵۹/۴\ km$$

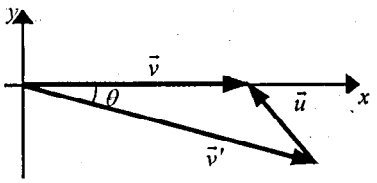
α جهت وزش باد:

$$\tan\alpha=\frac{u_y}{u_x}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۵۳/۱}{-۲۶/۷}\Rightarrow\tan\alpha=-۱/۹۹\Rightarrow\alpha=-۶۳/۳^\circ$$

جهت وزش باد $۶۳/۳^\circ$ شمال‌غربی است.

برای این‌که هواپیما درست به مقصد برسد

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}v_x=v_\circ\\ v_y=\circ\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=v\vec{i}$$

$$\begin{cases}v'_x=v'\cos\theta\\ v'_y=-v'\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v'_x=۴۰۰\cos\theta\\ v'_y=-۴۰۰\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\vec{v}'=۴۰۰\cos\theta\,\vec{i}-۴۰۰\sin\theta\,\vec{j}$$

θ جهت حرکت هواپیما:

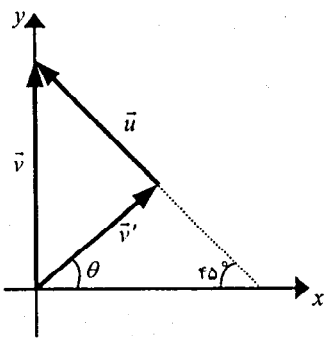
$$\vec{v}=\vec{v}'+u\Rightarrow\begin{cases}v_x=v'_x+u_x\\ v_y=v'_y+u_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=۴۰۰\cos\theta-۲۶/۷\\ \circ=-۴۰۰\sin\theta+۵۳/۱\end{cases}\Rightarrow-۴۰۰\sin\theta+۵۳/۱=\circ\Rightarrow$$

$$۵۳/۱=۴۰۰\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۵۳/۱}{۴۰۰}\Rightarrow\sin\theta=۰/۱۳\Rightarrow\theta=۸^\circ$$

جهت حرکت هواپیما ۸° در جهت جنوب شرقی است.

۳-۷۷) هواپیمایی از فرودگاه A بلند می‌شود و می‌خواهد به فرودگاه B در فاصله‌ی ۲۵۰ کیلومتری شمال A برود. سرعت هواپیما نسبت به هوا ۱۸۰ $\frac{km}{h}$ است. در آن روز بادی با سرعت ۶۰ $\frac{km}{h}$ از طرف جنوب شرقی می‌وزد. هواپیما در چه جهت قطب‌نما پرواز کند؟ پرواز چه مدت طول می‌کشد؟

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}v_x=\circ\\ v_y=v\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=v\vec{j}$$

$$\begin{cases}v'_x=۱۸۰\cos\theta\\ v'_y=۱۸۰\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\vec{v}'=۱۸۰\cos\theta\,\vec{i}+۱۸۰\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\begin{cases}u_x=-۶۰\cos۴۵\\ u_y=۶۰\sin۴۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_x=-۴۲/۴\ \frac{km}{h}\\ u_y=۴۲/۴\ \frac{km}{h}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=-۴۲/۴\vec{i}+۴۲/۴\vec{j}$$

با استفاده از تعریف سرعت نسبی می‌توان نوشت:

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}\Rightarrow\begin{cases}v_x=v'_x+u_x\\ v_y=v'_y+u_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\circ=۱۸۰\cos\theta-۴۲/۴\\ v=۱۸۰\sin\theta+۴۲/۴\end{cases}\ (۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی اول می‌توان نوشت:

$$\circ=۱۸۰\cos\theta-۴۲/۴\Rightarrow۴۲/۴=۱۸۰\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=۰/۲۴\Rightarrow\theta=۷۶/۴^\circ$$

جهت حرکت هواپیما $۷۶/۴^\circ$ شمال شرقی است.

v سرعت هواپیما نسبت به زمین، با جاگذاری زاویه‌ی حاصله در رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید:

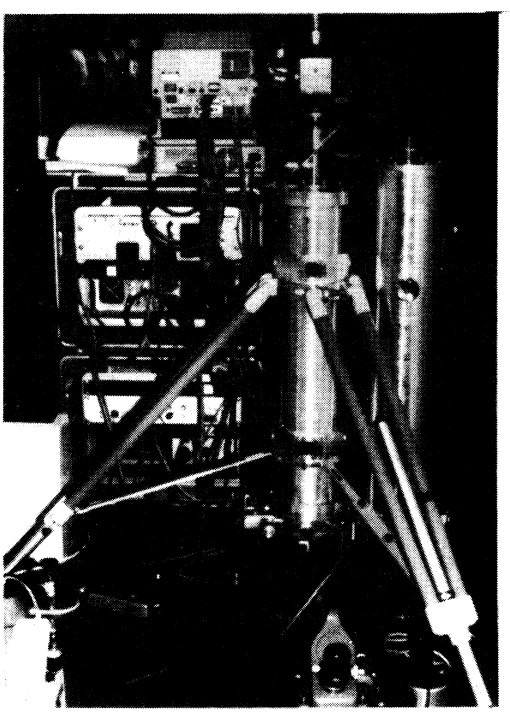
$$v = ۱۸۰ \sin\theta + ۴۲/۴ \Rightarrow v = ۱۸۰ \sin ۷۶/۴ + ۴۲/۴ \Rightarrow v = ۱۷۵ + ۴۲/۴ \Rightarrow v = ۲۱۷/۴ \ \frac{km}{h}$$

t زمان پرواز:

$$x = vt \Rightarrow ۲۵۰ = ۲۱۷/۴t \Rightarrow t = ۱/۱۵ \ h$$

دکتر جیمز فالر و همکارانش آن‌را در "مؤسسهٔ مشترک اختر فیزیک آزمایشگاهی" در بولدر، کلرادو، طراحی کرده‌اند. جسم افتان، یک کنج بازتابنده است، در واقع کنجی است از یک مکعب شیشه‌ای که سه وجه آن با لایهٔ بازتابنده اندود شده است. ویژگی مفید این وسیله آن است که نور از هر جهتی که به داخل کنج بتابد، درست در جهت مخالف بازتابیده می‌شود. (فضانوردان آپولو آرایه‌ای از چنین بازتابنده‌هایی را در ماه نصب کرده‌اند؛ با تاباندن باریکهٔ لیزر از زمین به ماه و دریافت بازتاب این باریکه، می‌توان فاصلهٔ زمین تا ماه را به دقت سنجید.) یک باریکهٔ لیزر را از جسم افتان بازمی‌تابد و باریکه‌های فرودی و بازتابیده با هم تداخل می‌کنند و در حین سقوط جسم مرتباً یکدیگر را تقویت و تضعیف می‌کنند. مسافتی که جسم افتان می‌پیماید تا از یک تداخل ویرانگر به تداخل ویرانگر بعدی برسیم نصف طول‌موج نور است. بنابراین، کل مسافت سقوط آزاد را می‌توان، تنها با شمردن عدهٔ تداخلهای ویرانگر، با دقت کسری از طول‌موج نور به‌دست آورد. همزمان با فاصلهٔ زمانی بین دو تداخل ویرانگر با ساعت اتمی اندازه‌گیری می‌شود.به این ترتیب، مسافت و زمان هر دو با هم به‌دست می‌آیند، مثل همان روشهایی که خودتان ممکن است در آزمایشگاه فیزیک پایه به‌کار بگیرید. شکل ۲۱، تصویر این ابزار عالی را نشان می‌دهد.

ساختن گرانی‌سنجهای دقیقتر، نتایج عملی مهمی دارد. نگاشت میدان گرانشی زمین، به‌یافتن منابع نفت یا کانیهای دیگر کمک می‌کند (نگاه کنید به شکل ۵ در فصل ۱۶). تغییرات پوستهٔ زمین در طی زمان را می‌توان با اثری که این تغییرات بر g می‌گذارند مشاهده کرد. به این ترتیب، می‌توان حرکت صفحات پوستهٔ زمین و فعالیتهای لرزه‌ای زمین را دنبال کرد. تغییرات کوچک در میدان گرانشی زمین می‌تواند بر مدار ماهواره‌ها و مسیر موشکهای قاره‌پیما تأثیر بگذارد، و در علم پایه، با اندازه‌گیریهای دقیق g امکان آزمون جزئیات درکی که از نظریهٔ گرانشی داریم فراهم می‌شود؛ نظریه‌ای که بیش از سه قرن پیش، آیزاک نیوتون آن‌را پایه‌گذاری کرد.



شکل۲۱. عکسی از دستگاه سقوط آزاد (که نمودار آن در شکل ۲۰ آمده است). این تجهیزات را می‌توان به‌راحتی حمل کرد و g را در هر محلی که لازم است اندازه گرفت.

پرسشها

۱. آیا اندازهٔ سرعت یک جسم می‌تواند منفی باشد؟ اگر می‌گویید بله، مثالی بیاورید؛ اگر می‌گویید نه، توضیح بدهید که چرا.

۲. خرگوشی در هر ثانیه نصف فاصلهٔ باقی‌مانده بین بینی‌خود و سر یک کاهو را می‌پیماید. آیا این خرگوش اصولاً می‌تواند به کاهو برسد؟ مقدار حدی سرعت متوسط خرگوش چقدر است؟ نمودارهای سرعت و مکان خرگوش را برحسب زمان رسم کنید.

۳. متوسط اندازهٔ سرعت، برابر است با طول مسیر پیموده شده تقسیم بر مدت حرکت. آیا این کمیت با اندازهٔ سرعت متوسط فرق دارد؟ مثالی بیاورید که نظرتان را تأیید کند.

۴. در یک میدان بخصوص مسابقات اتومبیلرانی، اتومبیلی دور اول از یک مسیر ۲ دوری را با سرعت متوسط ۹۰mi/h می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان‌زیاد کند که‌سرعت متوسطش در کل مسابقه ۱۸۰mi/h باشد. نشان بدهید که این کار ممکن نیست.

۵. باب یک مسابقهٔ دو ۱۰۰m را با اختلاف ۱۰m از جودی می‌برد، و دفعهٔ بعد برای اینکه به جودی شانس بردن داده باشد، موقع شروع مسابقه ۱۰m از جودی عقبتر می‌ایستد. آیا این بار شانس باب و جودی برای برنده شدن واقعاً مساوی است؟

۶. اگر سرعت ثابت باشد، آیا ممکن است که سرعت متوسط در بازه‌ای با سرعت در یکی از لحظات آن بازه متفاوت باشد؟ اگر پاسختان مثبت است مثالی بزنید، اگر منفی است بگویید چرا.

۷. اگر شتاب حرکت یکنواخت نباشد، آیا هیچ وقت ممکن است که میانگین سرعت ذره‌ای که در راستای محورx حرکت می‌کند $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ باشد؟ جواب خودتان را با استفاده از نمودار ثابت کنید.

۸. آیا سرعت‌سنج ماشین همان اندازهٔ سرعتی را که تعریف کردیم می‌سنجد؟

۹. (الف) آیا ممکن است سرعت جسمی صفر باشد ولی شتاب آن غیرصفر باشد؟ (ب) آیا ممکن است سرعت جسمی ثابت باشد ولی اندازهٔ سرعت متغیر باشد؟ در هر مورد، اگر جواب مثبت است مثالی بیاورید؛ اگر منفی است بگویید چرا.

۱۰. آیا ممکن است جهت سرعت جسمی که شتاب ثابت دارد، معکوس شود؟ اگر می‌گویید بله، مثال بیاورید؛ اگر می‌گویید نه بگویید که چرا.

iopm.ir

۱۱. شکل ۳۰، سرهنگ جان استپ را در سورتمهٔ موشکی خود که در حال ترمز است، نشان می‌دهد (نگاه کنید به مسئلهٔ ۳۴). (الف) بدن این فضانورد یک شتاب‌سنج است نه یک سرعت‌سنج. این موضوع را توضیح بدهید. (ب) آیا می‌توانید از روی شکل، جهت شتاب را تعیین کنید؟

۱۲. آیا ممکن است شتاب جسمی در حال کاهش و سرعت آن در حال افزایش باشد؟ اگر جوابتان بله است مثالی بیاورید؛ اگر نه، بگویید چرا؟

۱۳. کدام یک از اینها غیرممکن است؟ (الف) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن هم به طرف شرق است؛ (ب) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن به طرف غرب است؛ (ج) سرعت جسمی صفر و شتاب آن غیرصفر است؛ (د) شتاب جسمی ثابت، اما سرعت آن متغیر است؛ (ه) سرعت جسمی ثابت و شتاب آن متغیر است.

۱۴. چند مورد مثال بیاورید که در آنها نمی‌توان از مقاومت هوا در برابر سقوط اجسام چشم پوشید.

۱۵. شکل ۲۲ یک برجی را در بالتیمور، مریلند، نشان می‌دهد. این برج در سال ۱۸۲۹ بنا شد و از آن برای ساختن گلوله‌های سربی تفنگ استفاده می‌شد. برای این کار، سرب مذاب را در اندازه‌های لازم برای یک گلوله، از بالای برج به پایین می‌ریختند. گلوله‌های سربی در پایین برج به درون یک مخزن آب می‌افتادند و منجمد می‌شدند. ارتفاع برج، $۲۳۰\,\mathrm{ft}$ است. این روش ساختن گلوله چه مزیتهایی می‌تواند داشته باشد؟

شکل ۲۲. پرسش ۱۵

۱۶. شخصی که بر لبهٔ صخره‌ای مرتفع ایستاده است، توپی را با سرعت اولیهٔ $v_۰$ به‌طرف بالا و توپی دیگر را با سرعت اولیهٔ $v_۰$ رو به پایین پرتاب می‌کند. کدام توپ در پای صخره با سرعت بیشتری به زمین برخورد می‌کند؟ مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۱۷. جسمی از موشکی که با شتاب $۹٫۸\mathrm{m/s^۲}$ رو به بالا حرکت می‌کند رها می‌شود. شتاب رو به پایین این جسم چقدر است؟

۱۸. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از حالت سکون ($v_۰ = ۰$) از نقطهٔ $x_۰ = ۰$ و در زمان $t = ۰$ با شتاب a شروع به حرکت کند. از معادلهٔ ۱۹ برای حرکت با شتاب ثابت نتیجه‌می‌شود که ذره در دو زمان متفاوت $+\sqrt{۲x/a}$ و $-\sqrt{۲x/a}$، در نقطهٔ x است. معنی ریشهٔ منفی این معادلهٔ درجه دو چیست؟

۱۹. مقدار g در سیاره‌ای نصف مقدار آن در زمین است. زمان لازم برای سقوط اجسام از حالت سکون در این سیاره، چه ربطی با زمان مشابه در زمین دارد؟ مسافتهای سقوط را یکی بگیرید.

۲۰. (الف) سنگی با سرعت معینی در سیاره‌ای که شتاب سقوط آزاد در سطح آن دو برابر همین شتاب در سطح زمین است، به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع اوج این سنگ را با ارتفاع مشابه در زمین مقایسه کنید. (ب) اگر سرعت اولیه را دو برابر کنیم، ارتفاع اوج چه تغییری می‌کند؟

۲۱. توپی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فکر می‌کنید زمان صعود توپ بیشتر باشد یا زمان سقوط آن؟ چرا؟

۲۲. نمودار کیفی سرعت برحسب زمان را برای جسم افتانی که (الف) مقاومت هوا در برابر حرکت آن ناچیز است و (ب) مقاومت هوا در برابر حرکت آن قابل‌ملاحظه است، رسم کنید.

۲۳. دو توپ را به فاصلهٔ $۱\mathrm{s}$ از هم رها می‌کنیم. (الف) فاصلهٔ بین دو توپ با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ (ب) نسبت سرعت توپ اول به سرعت توپ دوم، $v_۱/v_۲$، با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید، و پاسخهای کیفی بدهید.

۲۴. پرسش ۲۳ را، با در نظرگرفتن مقاومت هوا، دوباره پاسخ بدهید؛ باز هم پاسخهای کیفی.

۲۵. اگر m یک سنگ سبک و M یک سنگ سنگین باشد، بنا به ادعای ارسطو، M باید سریعتر از m سقوط کند. گالیله سعی کرد نشان بدهد که این ادعای ارسطو با منطق سازگار نیست. استدلال گالیله چنین بود: m و M را به هم ببندید و سنگ بزرگتری بسازید. در این حالت، m باید مزاحم سقوط M شود زیرا کندتر از M حرکت می‌کند. پس سنگ مرکب باید تندتر از m و کندتر از M سقوط کند؛ اما طبق ادعای ارسطو، سنگ جدید $(M + m)$ سنگینتر از M است و باید تندتر از M حرکت کند. آیا اگر استدلال گالیله را بپذیریم، می‌توان گفت که M و m باید با یک سرعت سقوط کنند؟ دراین صورت چه نیازی به آزمایش است؟ اگر فکر می‌کنید که استدلال گالیله نادرست است، بگویید چرا؟

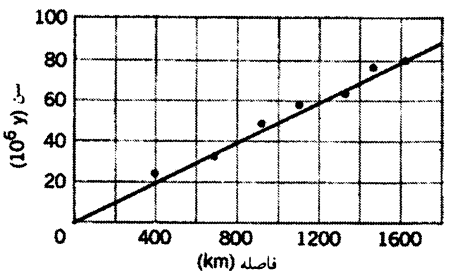
iopm.ir

۲۶. معادلات سینماتیکی حرکت (جدول ۲) تحت اثر وارونگی زمان، یعنی گذاشتن $-t$ به جای t، چه می‌شوند؟ توضیح بدهید.
۲۷. انتظار داریم روابطی که واقعاً کلی هستند، مثل روابط جدول ۲، مستقل از دستگاه مختصات، معتبر باشند. اگر معادلات کلی از نظر ابعادی هم سازگار باشند، آن‌وقت، مستقل از یکاهایی که به‌کار می‌بریم، معتبر خواهند بود. در این صورت، آیا اصولاً نیازی به یکاها و دستگاههای مختصات داریم؟

مسئله‌ها

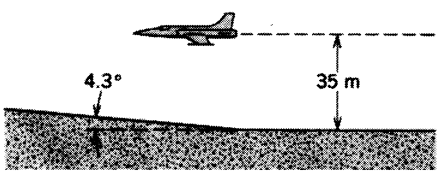
بخش ۲ـ۳ سرعت متوسط

۱. اتومبیل شما با سرعت ۸۸km/h (یعنی ۵۵mi/h) در حرکت است. شما به مدت ۱s به تصادفی که کنار جاده اتفاق افتاده است نگاه می‌کنید. در این مدت، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟
۲. یک بازیکن بیسبال، توپی را با سرعت افقی ۱۶۰km/h پرتاب می‌کند. بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، ۱۸٫۴m از محل پرتاب توپ فاصله دارد. چقدر طول می‌کشد تا توپ به چوب بیسبال برسد؟
۳. شکل ۲۳، رابطهٔ بین سن قدیمی‌ترین رسوبها در اقیانوس، و فاصلهٔ این رسوبها از یک پشتهٔ خاص را نشان می‌دهد. سن رسوبها برحسب میلیون سال و فاصله برحسب کیلومتر است. ماده، تقریباً با سرعت یکنواخت، از این پشته بیرون می‌زند و به اطراف حرکت می‌کند. سرعت حرکت رسوبها از این پشته را برحسب سانتی‌متر بر سال، پیدا کنید.



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۳

۴. کارل لویس، دو ۱۰۰m را در زمانی در حدود ۱۰s می‌دود؛ بیل راجرز، ماراتون (۲۶mi، ۳۸۵yd) را در زمانی در حدود ۲h و ۱۰min می‌دود. (الف) سرعت متوسط هر یک چقدر است؟ (ب) اگر کارل لویس می‌توانست سرعت دو ۱۰۰m خود را در ماراتون حفظ کند، چه مدتی طول می‌کشید تا مسیر ماراتون را طی کند؟
۵. فیزیکدان مشهوری به مدت چند ماه، هر هفته یک بار از بوستون در ماساچوست به ژنو در سویس می‌رفت و برمی‌گشت؛ فاصلهٔ بین این دو شهر ۴۰۰۰mi است. متوسط اندازهٔ سرعت فیزیکدان در این مدت چقدر بوده است؟ آیا عجیب است که برای حل مسئله به سرعت هواپیما نیاز نداریم؟
۶. سرعت مجاز اتومبیلها در بزرگراهی از ۵۵mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) به ۶۵mi/h (یعنی ۱۰۴٫۶km/h) افزایش داده شده است. فاصلهٔ بین بوفالو و نیویورک ۴۳۵mi (یعنی ۷۰۰km) است. اگر این مسافت را با بیشترین سرعت مجاز بپیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتمان صرفه‌جویی می‌شود؟
۷. شخصی از سن‌آنتونیو به هوستون می‌رود؛ نصف مدت سفر را با سرعت ۳۵mi/h (یعنی ۵۶٫۳km/h) و نصف دیگر را با سرعت ۵۵mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) می‌پیماید. در بازگشت، نصف مسافت را با سرعت ۳۵mi/h و نصف دیگر را با سرعت ۵۵mi/h طی می‌کند. سرعت متوسط در (الف) مسیر سن‌آنتونیو به هوستون، (ب) مسیر هوستون به سن‌آنتونیو، و (ج) در کل مسیر چقدر است؟
۸. یک هواپیمای جت پیشرفته در یک مانور مخفی شدن از دید رادار، در ارتفاع ۳۵m از سطح زمین پرواز می‌کند. ناگهان هواپیما به یک شیب رو به بالای ۴٫۳° می‌رسد (که البته تشخیص این شیب کوچک چندان ساده نیست)؛ نگاه کنید به شکل ۲۴. خلبان چه مدت فرصت دارد که، قبل از برخورد با زمین، خط پرواز را تصحیح کند؟ سرعت پرواز ۱۳۰۰km/h است.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۸

۹. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = 3t - 4t^2 + t^3$ به‌دست می‌آید؛ x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) مکان ذره در $t = 0$، $t = 1s$، $t = 2s$، $t = 3s$، و $t = 4s$ کجاست؟ (ب) جابه‌جایی ذره بین لحظات $t = 0$ تا $t = 2s$ چقدر است؟ از $t = 0$ تا $t = 4s$ چقدر؟ (ج) سرعت متوسط ذره در بازهٔ $t = 2s$ تا $t = 4s$ چقدر است؟ در بازهٔ $t = 0$ تا $t = 3s$ چقدر؟
۱۰. اتومبیلی با سرعت ثابت ۴۰km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با سرعت ثابت ۶۰km/h از همان تپه پایین می‌آید. متوسط اندازهٔ سرعت اتومبیل در کل مسیر چقدر است؟
۱۱. سرعت متوسط خودتان را در هر یک از این دو حالت حساب کنید. (الف) مسافت ۲۴۰ft را با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس ۲۴۰ft دیگر را با سرعت ۱۰ft/s می‌دوید. (ب) به مدت ۱٫۰min با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس به مدت ۱٫۰min دیگر با سرعت ۱۰ft/s می‌دوید.
۱۲. دو قطار با سرعت ۳۴km/h، روی یک ریل به طرف هم حرکت می‌کنند. هنگامی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۱۰۲km است، پرنده‌ای از سر یک قطار پرواز می‌کند تا به قطار دیگر برسد، و سپس دوباره به

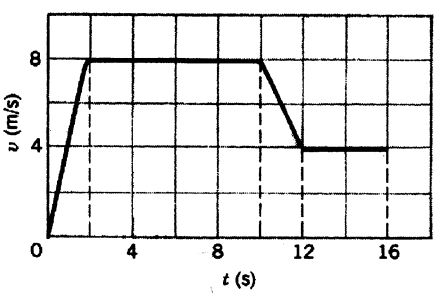
iopm.ir

طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را تا زمان برخورد دو قطار تکرار می‌کند. سرعت پرواز پرنده، ۵۸km/h است. (الف) پیش از برخورد، پرنده چند بار بین دو قطار رفت‌و آمد می‌کند؟ (ب) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

بخش ۲ـ۴ سرعت لحظه‌ای

۱۳. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = ۹٫۷۵ + ۱٫۵۰t^۳$ به‌دست می‌آید که در آن x برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است. بازهٔ زمانی بین $t = ۲\text{s}$ و $t = ۳\text{s}$ را در نظربگیرید: (الف) سرعت متوسط در این بازه چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟ (ج) سرعت لحظه‌ای در $t = ۳\text{s}$ چقدر است؟ (د) سرعت لحظه‌ای در $t = ۲٫۵\text{s}$ چقدر است؟ (ه) سرعت لحظه‌ای در زمانی که ذره در وسط فاصلهٔ مکانهای متناظر با $t = ۲\text{s}$ و $t = ۳\text{s}$ است چقدر است؟

۱۴. شکل ۲۵ نمودار سرعت زمان دونده‌ای را نشان می‌دهد. این دونده در مدت ۱۶s چه مسافتی را می‌پیماید؟



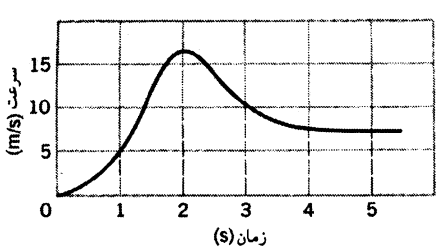
شکل ۲۵. مسئله‌های ۱۴ و ۱۵

بخش ۲ـ۵ حرکت شتابدار

۱۵. شتاب دوندهٔ مسئلهٔ ۱۴ در $t = ۱۱\text{s}$ چقدر است؟

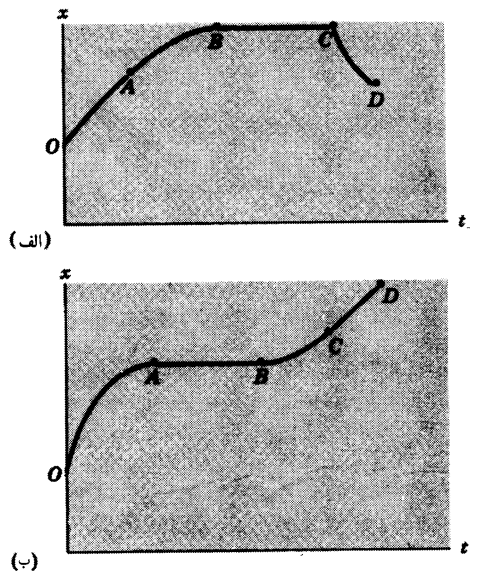
۱۶. سرعت ذره‌ای ۱۸m/s در جهت $+x$ است. ۲٫۴s بعد، سرعت آن ۳۰m/s در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازهٔ ۲٫۴ ثانیه‌ای چقدر است؟

۱۷. شکل ۲۶ نمودار سرعت‌ـزمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. نمودار شتاب‌ـزمان این جسم را رسم کنید.



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۷

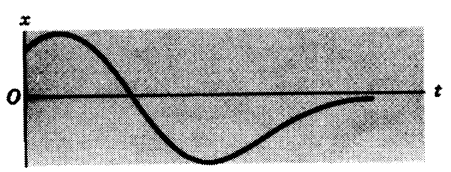
۱۸. شکل ۲۷الف نمودار x برحسب t ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. (الف) در هر یک از بازه‌های OA، AB، BC، و CD، سرعت آیا مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ همچنین تعیین کنید که در هر بازه شتاب $+$، $-$ یا ۰ است. (ب) در این نمودار آیا بازه‌ای وجود دارد که شتاب در آن به وضوح متغیر باشد؟ (از رفتار منحنی در نقاط مرزی بازه‌ها چشم بپوشید.)



شکل ۲۷. (الف) مسئلهٔ ۱۸ و (ب) مسئلهٔ ۱۹

۱۹. پرسشهای مسئلهٔ قبل را در مورد حرکت طبق نمودار شکل ۲۷ب، پاسخ بدهید.

۲۰. شکل ۲۸ نمودار مکان‌ـزمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. به‌طور کیفی، منحنیهای سرعت‌ـزمان و شتاب‌ـزمان حرکت این ذره را رسم کنید.



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۰

۲۱. در هر یک از حالتهای زیر، نموداری رسم کنید که نمایش ممکنی از مکان‌ـزمان ذره‌ای باشد که در راستای محور x حرکت می‌کند: در $t = ۱\text{s}$، (الف) سرعت ذره صفر و شتاب آن مثبت است؛ (ب) سرعت ذره صفر و شتاب آن منفی است. (ج) سرعت ذره منفی و شتاب آن مثبت است؛ (د) سرعت ذرهٔ منفی و شتاب آن منفی است. (ه) درکدام یک از موارد بالا، اندازهٔ سرعت ذره، در $t = ۱\text{s}$ در حال افزایش است؟

۲۲. مکان ذره‌ای با رابطهٔ $x = ۲t^۳$ بیان می‌شود، که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط و شتاب متوسط ذره

iopm.ir

بین $t = ۱\text{s}$ و $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای ذره در $t = ۱\text{s}$ و $t = ۲\text{s}$ چقدر است؟ (ج) مقادیر لحظه‌ای و متوسط را با هم مقایسه کنید. در هر حالت کمیت بزرگتر را تعیین کنید و بگویید که چرا بزرگتر است؟

۲۳. ذره‌ای طبق رابطهٔ $x = ۵۰t + ۱۰t^۲$ در راستای محور x حرکت می‌کند؛ x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط ذره را در ۳s اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در $t = ۳\text{s}$، و (ج) شتاب لحظه‌ای ذره را در $t = ۳\text{s}$ پیدا کنید.

۲۴. شخصی از $t = ۰$ تا $t = ۵\text{min}$ ایستاده است، از $t = ۵\text{min}$ تا $t = ۱۰\text{min}$، به عجله با سرعت ۲٫۲m/s راه می‌رود. سرعت متوسط و شتاب متوسط او در بازه‌های زمانی (الف) از ۲min تا ۸min و (ب) از ۳min تا ۹min چقدر است؟

۲۵. در جدول زیر مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، در زمانهای مختلف فهرست شده است:

x(m)	۰٫۰۸۰	۰٫۰۵۰	۰٫۰۴۰	۰٫۰۵۰	۰٫۰۸۰	۰٫۱۳	۰٫۲۰
t(s)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(الف) نمودار جابه‌جایی (نه مکان) برحسب زمان را رسم کنید. (ب) سرعت متوسط ذره را در بازه‌های ۰ تا ۱s، ۰ تا ۲s، ۰ تا ۳s، و ۰ تا ۴s به‌دست بیاورید. (ج) شیب منحنی‌ای را که در قسمت (الف) رسم کردید، در $t = ۰$، $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، $t = ۴\text{s}$، و $t = ۵\text{s}$ به‌دست بیاورید. (د) نمودار شیب برحسب زمان را رسم کنید. (یکای شیب چیست؟) (ه) از روی منحنی قسمت (د) شتاب ذره را در زمانهای $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ به‌دست بیاورید.

۲۶. مکان ذره‌ای بر محور x، برحسب زمان، از رابطهٔ

$$x = At^۲ - Bt^۳$$

به‌دست می‌آید، که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) یکاهای SI برای A و B چه هستند؟ در بقیهٔ مسئله، فرض کنید مقادیر عددی A و B، به‌ترتیب برابر با ۳ و ۱ یکای SI باشند. (ب) در چه زمانی ذره به بیشترین مقدار مثبت x می‌رسد؟ (ج) کل طول مسیری که ذره در ۴s اول حرکت می‌پیماید چقدر است؟ (د) جابه‌جایی ذره در ۴s اول چقدر است و (ه) سرعت ذره در $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟ (و) شتاب ذره در $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟ (ز) سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $t = ۲\text{s}$ تا $t = ۴\text{s}$ چقدر است؟

۲۷. الکترونی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. شتاب این الکترون، به طور خطی با زمان زیاد می‌شود: $a = kt$، که در آن $k = (۱٫۵\text{m/s}^۲)/\text{s}$ یا $k = ۱٫۵\text{m/s}^۳$ است. (الف) نمودار a برحسب t را برای ۱۰s اول حرکت رسم کنید. (ب) با استفاده از نمودار قسمت (الف)، نمودار v برحسب t را رسم کنید و سرعت الکترون را در ۵s بعد از شروع حرکت تخمین بزنید. (ج) از روی منحنی v برحسب t قسمت (ب)، منحنی x برحسب t را رسم کنید و تخمین بزنید که الکترون در ۵s اول حرکت چه مسافتی را می‌پیماید.

۲۸. در یک بازی کامپیوتری، لکه‌ای طبق رابطهٔ $x = ۹٫۰۰t - ۰٫۷۵۰t^۳$ روی صفحهٔ نمایش [مانیتور] حرکت می‌کند. در این رابطه، x فاصلهٔ لکه از لبهٔ چپ صفحه، برحسب سانتی‌متر، و t زمان برحسب ثانیه است. اگر لکه به یکی از دو لبهٔ صفحه، $x = ۰$ یا $x = ۱۵\text{cm}$، برسد، دوباره از لبهٔ چپ شروع به حرکت می‌کند. (الف) چه مدت پس از شروع حرکت، لکه به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد؟ (ب) در این لحظه لکه کجاست؟ (ج) در این لحظه شتاب لکه چقدر است؟ (د) پس از سکون لحظه‌ای، لکه در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ه) لکه در چه زمانی از صفحه خارج می‌شود؟

بخش ۲ـ۶ حرکت با شتاب ثابت

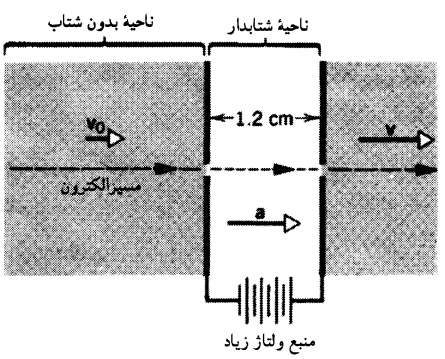
۲۹. جامبوجتی باید روی باند به سرعت ۳۶۰km/h (یعنی ۲۲۴mi/h) برسد تا بتواند از زمین کنده شود. اگر طول باند (یعنی ۱٫۱mi) ۱٫۸km باشد، حداقل شتاب (ثابت) لازم برای اینکه هواپیما در این باند از سکون به سرعت لازم برسد چقدر است؟

۳۰. فضاپیمایی در فضای تهی با شتاب ثابت $۹٫۸\text{m/s}^۲$ حرکت می‌کند. (الف) اگر فضاپیما از حالت سکون شروع به حرکت کند، چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن به یک دهم سرعت نور برسد؟ (ب) در این مدت، فضاپیما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (سرعت نور $۳٫۰ \times ۱۰^۸\text{m/s}$ است.)

۳۱. مار زنگی می‌تواند سرش را با شتاب $۵۰\text{m/s}^۲$ به طرف قربانی‌اش حرکت بدهد. اگر اتومبیلی می‌توانست با این شتاب حرکت کند، چقدر طول می‌کشید تا سرعت آن از صفر به ۱۰۰km/h برسد؟

۳۲. یک میون (که نوعی ذرهٔ بنیادی است) با سرعت $۵٫۲۰ \times ۱۰^۶\text{m/s}$ به یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی به این ذره شتاب $۱٫۳۰ \times ۱۰^{۱۴}\text{m/s}^۲$ در خلاف جهت سرعت اولیه‌اش می‌دهد. میون چه مسافتی را قبل از متوقف شدن می‌پیماید؟

۳۳. الکترونی با سرعت اولیهٔ $v_۰ = ۱٫۵ \times ۱۰^۵\text{m/s}$ وارد ناحیه‌ای به طول ۱٫۲cm می‌شود. در این ناحیه، الکترون در اثر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲۹) و با سرعت $۵٫۸ \times ۱۰^۶\text{m/s}$ از آن خارج می‌شود. شتاب الکترون، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (این همان چیزی است که در بخش تفنگ الکترونی لامپ پرتو کاتد اتفاق



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

iopm.ir

می‌افتد. لامپ پرتو کاتد در گیرندهٔ تلویزیون هم به کار می‌رود.)

۳۴. در ۱۹ مارس ۱۹۵۴، سرهنگ جان پی استاپ یک رکورد جهانی برای حرکت روی سطح زمین به‌جا گذاشت. او یک سورتمهٔ موشکی را با سرعت ۱۰۲۰km/h در مسیری رانده و سورتمه را طی زمان ۱٫۴s از این سرعت به حالت سکون رساند؛ شکل ۳۰. شتاب سرهنگ در این "ترمز" چقدر بوده است؟ پاسخ خود را برحسب g (شتاب گرانشی) بیان کنید. (دقت کنید که بدن این شخص مثل شتاب‌سنج عمل می‌کند نه سرعت‌سنج.)

شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۴

۳۵. ترمزهای اتومبیل شما می‌توانند شتاب کندکنندهٔ $17ft/s^2$ تولید کنند. اگر در بزرگراهی با سرعت 85mi/h در حرکت باشید و ناگهان با علامت بیشترین سرعت مجاز برابر با 55mi/h مواجه شوید، حداقل چقدر طول می‌کشد که اتومبیل را به سرعت مجاز برسانید؟

۳۶. یک اتومبیل با لاستیکهای خوب، در یک جادهٔ خشک می‌تواند با شتاب کند کنندهٔ $11٫0 mi/h.s$ (یعنی $4٫92m/s^2$) ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت 55mi/h (یعنی $24٫6m/s$) در حرکت است متوقف شود؟ (ب) در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳۷. تیری را از کمان مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تیر در بازگشت با سرعت $260ft/s$ به زمین برخورد و به اندازهٔ $9٫0in$ در آن فرو می‌رود. (الف) شتاب (ثابت) توقف این تیر، و (ب) زمان‌لازم برای متوقف شدن آن در زمین چقدر است؟

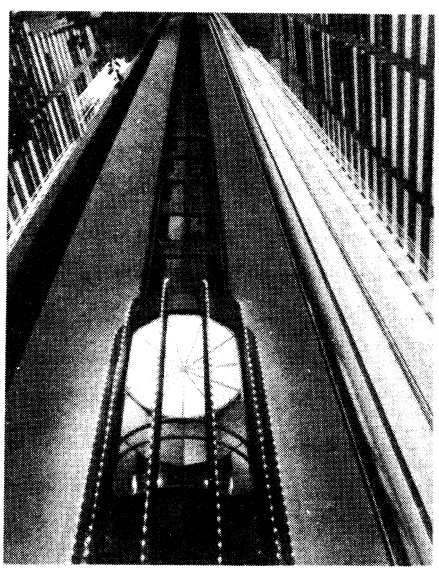
۳۸. وکیلی در مورد مسائل فیزیکی یکی از پرونده‌هایش با شما مشورت می‌کند: اتومبیلی در حال حرکت بوده است و راننده مجبور به توقف اضطراری می‌شود. ترمزها قفل می‌شوند، چرخهای اتومبیل روی جاده می‌لغزند و ردی به طول $19٫2ft$ روی جاده می‌ماند. مسئله این است که آیا سرعت اتومبیل، پیش از توقف، از حد مجاز $30 mi/h$ بیشتر بوده است یا نه. افسر پلیس، با فرض اینکه شتاب کند کنندهٔ ترمز از شتاب سقوط آزاد (یعنی $32ft/s^2$) بیشتر نبوده است، راننده را جریمه نمی‌کند. به نظر شما آیا سرعت راننده کمتر از حد مجاز بوده است؟ توضیح بدهید.

۳۹. قطاری از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. سرعت قطار که در یک لحظه $33٫0m/s$ است، $160m$ بعد به $54٫0m/s$ می‌رسد. (الف) شتاب قطار، (ب) زمان لازم برای طی این مسافت $160m$، (ج) زمان لازم برای اینکه قطار از سکون به سرعت $33٫0m/s$ برسد. و (د) مسافتی که قطار تا رسیدن به سرعت $33٫0m/s$ می‌پیماید چقدر است؟

۴۰. اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت $58٫0m$ بین دو نقطه را در $6٫20s$ می‌پیماید. سرعت اتومبیل در لحظهٔ عبور از نقطهٔ دوم $15٫0m/s$ است. (الف) سرعت اتومبیل در نقطهٔ اول چقدر است؟ (ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟ (ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطهٔ اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

۴۱. یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمهٔ اول مسافت بین دو ایستگاه را با شتاب $+1٫20m/s^2$ طی می‌کند. نیمهٔ دوم را با شتاب $-1٫20m/s^2$ می‌پیماید تا در ایستگاه بعدی متوقف شود. فاصلهٔ دو ایستگاه از هم $1٫10km$ است. (الف) زمان طی فاصلهٔ دو ایستگاه، (ب) بیشترین مقدار سرعت قطار در این فاصله چقدر است؟

۴۲. طول مسیر یک آسانسور $624ft$ است. بیشترین سرعت آسانسور $1000ft/min$ و شتاب (ثابت) آن $4٫00ft/s^2$ است. (الف) آسانسور از حالت سکون تا رسیدن به بیشترین سرعتش چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا آسانسور تمام مسیر را بپیماید؟ توجه کنید که آسانسور در انتهای مسیر باید متوقف شود.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. راننده‌ای برای متوقف کردن اتومبیلش به‌شدت ترمز می‌کند. مسافت توقف را می‌توان حاصل‌جمع "مسافت واکنش" و "مسافت ترمز" در نظر گرفت. مسافت واکنش برابر است با حاصل‌ضرب سرعت اولیه در زمان واکنش، و مسافت ترمز فاصله‌ای است که اتومبیل پس از

iopm.ir

ترمز کردن و قبل از توقف کامل می‌پیماید. جدول زیر، مقادیر نوعی این کمیتها را به‌دست می‌دهد.

سرعت اولیه (m/s)	مسافت واکنش (m)	مسافت ترمز (m)	مسافت توقف (m)
۱۰	۷٫۵	۵٫۰	۱۲٫۵
۲۰	۱۵	۲۰	۳۵
۳۰	۲۲٫۵	۴۵	۶۷٫۵

(الف) زمان واکنش این راننده چقدر است؟ (ب) مسافت توقف اتومبیل، با سرعت اولیهٔ ۲۵m/s چقدر است؟

۴۴. "تلهٔ سرعت" که در بزرگراهها نصب می‌شود، متشکل از دو نوار به فاصلهٔ ۱۱۰m از یکدیگر است که در اثر فشار فعال می‌شوند. راننده‌ای در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن ۹۰km/h است با سرعت ۱۲۰km/h می‌راند. درست زمانی که از نوار اول می‌گذرد متوجه پلیس می‌شود و سرعت خود را کم می‌کند. چه شتاب کندکننده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل، بین دو نوار، کمتر از حد مجاز سرعت شود؟

۴۵. اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب ۲٫۲m/s^2 شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی که با سرعت ثابت ۹٫۵m/s در حرکت است، از اتومبیل سبقت می‌گیرد. (الف) در چه فاصله‌ای پس از این نقطه، اتومبیل از کامیون جلو می‌زند؟ (ب) در این لحظه سرعت اتومبیل چقدر است؟ (خوب است که نمودار کیفی x برحسب t را برای هر یک از دو وسیله رسم کنید.)

۴۶. قطاری با سرعت v_1 حرکت می‌کند. لوکوموتیوران یک قطار باری را می‌بیند که به فاصلهٔ d جلوتر از قطار خودش، با سرعت v_2 در همان جهت حرکت می‌کند. v_2 کوچکتر از v_1 است؛ بنابراین، لوکوموتیوران ترمز می‌کند تا به قطار جلویی نخورد. سرعت قطار با شتاب ثابت a کم می‌شود. نشان بدهید که

اگر $d > (v_1 - v_2)^2/2a$ باشد، برخورد صورت نمی‌گیرد؛

اگر $d < (v_1 - v_2)^2/2a$ باشد، برخورد صورت می‌گیرد.

(خوب است که نمودار کیفی x برحسب t را برای هر قطار رسم کنید.)

۴۷. اتومبیلی با سرعت ۳۵mi/h (یعنی ۵۶km/h) حرکت می‌کند. راننده متوجه می‌شود که ۱۱۰ft (یعنی ۳۴m) جلوتر از او مانعی وجود دارد و ترمز می‌کند. چهار ثانیه بعد، اتومبیل به مانع برمی‌خورد. (الف) شتاب ثابت اتومبیل، پیش از برخورد چقدر بوده است؟ (ب) در لحظهٔ برخورد، سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

۴۸. دونده‌ای در مسابقهٔ دو ۱۰۰m، با شتاب ۲٫۸۰m/s^2 به سرعت بیشینهٔ خود می‌رسد و این سرعت را تا آخر مسیر حفظ می‌کند. اگر کل مسیر مسابقه در ۱۲٫۲s طی شده باشد، (الف) زمان سپری شده و (ب) مسافت طی شده در بخش شتابدار حرکت را حساب کنید.

۴۹. در یک کتابچهٔ راهنمای اتومبیل آمده است که اتومبیلی (با ترمزهای خوب) که با سرعت ۵۰mi/h در حرکت باشد می‌تواند در طی مسافت ۱۸۶ft متوقف شود، و در سرعت ۳۰mi/h در طی ۸۰ft. فرض کنید زمان واکنش راننده (که طی آن شتاب صفر است) و همچنین شتاب حاصل از ترمز، برای هر دو سرعت یکی است. (الف) زمان واکنش راننده و (ب) شتاب ترمز را حساب کنید.

بخش ۲ـ۷ سقوط آزاد اجسام

۵۰. قطره‌های باران از ابری در ارتفاع ۱۷۰۰m از سطح زمین، به زمین سقوط می‌کنند. اگر مقاومت هوا سرعت را کم نمی‌کرد، این قطره‌ها با چه سرعتی به زمین می‌رسیدند؟ در این صورت، آیا قدم زدن در زیر باران بی‌خطر بود؟

۵۱. تنها کابل نگهدارندهٔ یک آسانسور (خالی) مخصوص عملیات ساختمانی، که در بالاترین نقطهٔ ساختمان نیمه‌کاره‌ای به ارتفاع ۱۲۰m توقف کرده است، ناگهان پاره می‌شود. (الف) آسانسور با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (ج) سرعت آن در نیمهٔ راه چقدر است؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نیمهٔ راه برسد؟

۵۲. آچاری از دست کارگری رها می‌شود و با سرعت ۲۴٫۰m/s به زمین می‌خورد. (الف) این آچار از چه ارتفاعی رها شده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟

۵۳. توپی را به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت اولیهٔ آن باید چقدر باشد تا ارتفاع اوج آن ۵۳٫۷m شود؟ (ب) در این شرایط توپ چه مدت در هوا می‌ماند؟

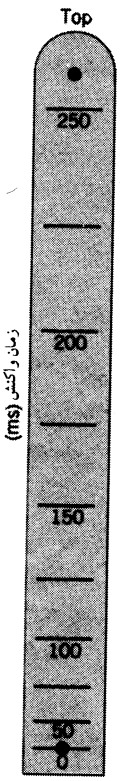
۵۴. سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۰۰m پایین می‌افتد. چقدر طول می‌کشد تا (الف) ۵۰٫۰m اول و (ب) ۵۰٫۰m بعدی را طی کند؟

۵۵. فضانوردی که در یکی از سیاره‌های منظومهٔ شمسی فرود آمده است متوجه می‌شود که اگر سنگ کوچکی با سرعت ۱۴٫۶m/s به‌طرف بالا پرتاب شود، ۷٫۷۲s بعد به سطح سیاره بازمی‌گردد. این فضانورد روی کدام سیاره فرود آمده است؟ (راهنمایی: از اطلاعات مندرج در پیوست ج استفاده کنید.)

۵۶. توپی را با سرعت اولیهٔ ۲۰٫۵m/s، از ارتفاع ۵۸٫۸m به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت توپ در لحظهٔ برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) اگر توپ را از همان ارتفاع و با همان سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌کردیم، جواب قسمتهای (الف) و (ب) چه می‌شد؟

۵۷. شکل ۳۲ وسیلهٔ ساده‌ای برای اندازه‌گیری زمان و واکنش را نشان می‌دهد. این وسیله، نواری مقوایی است که مقیاس‌بندی شده و ده نقطهٔ بزرگ هم روی آن مشخص شده است. دوست شما نوار را، با شست و انگشت اشاره‌اش، از نقطهٔ بالایی می‌گیرد. شست و انگشت اشارهٔ شما روی نقطهٔ پایینی است، اما مواظبید که نوار را لمس نکند. دوستتان نوار را رها می‌کند و شما سعی می‌کنید که، پس از دیدن این رویداد، هر چه سریعتر نوار را بگیرید. عدد مربوط به نقطه‌ای که شما نوار را در آن می‌گیرید، زمان واکنش شماست. فاصلهٔ نقطهٔ زیرین از شاخصهای ۵۰ms، ۱۰۰ms، ۲۰۰ms، و ۲۵۰ms باید چقدر باشد؟

iopm.ir



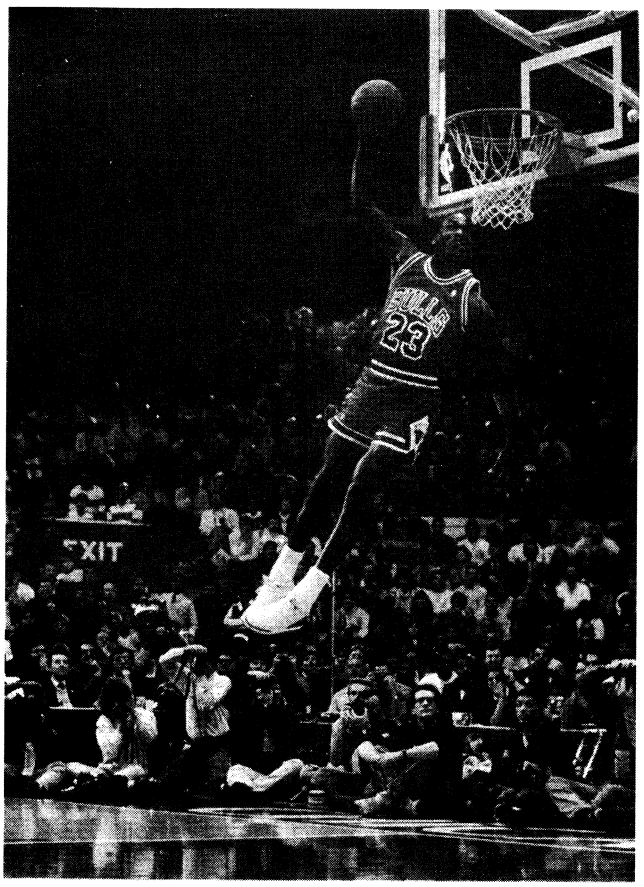
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۷

۵۸. توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم. ۲٫۲۵s طول می‌کشد تا توپ به ارتفاع ۳۶٫۸m برسد. (الف) سرعت اولیهٔ آن چقدر بوده است؟ (ب) سرعت آن در این ارتفاع چقدر است؟ (ج) توپ تا چه ارتفاعی بالاتر می‌رود؟

۵۹. شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و، در حالی که به آیزاک نیوتون فکر می‌کند، ناخودآگاه سیبی را از دستش رها می‌کند. سیب از لبهٔ پل می‌افتد و در همان لحظه لبهٔ جلویی کامیونی که از زیر پل می‌گذرد درست زیر لبهٔ پل است. سرعت کامیون ۵۵km/h(یعنی ۳۴mi/h) و طول آن ۱۲m(یعنی ۳۹ft) است. سیب درست مماس بر لبهٔ عقب کامیون به زمین می‌رسد. در این صورت، ارتفاع لبهٔ پل از زمین چقدر بوده است؟

۶۰. موشکی در راستای قائم از سطح زمین پرتاب می‌شود و به مدت ۱٫۰min با شتاب ثابت $20\,m/s^2$ به بالا حرکت می‌کند. در این لحظه سوخت موشک به کلی تمام می‌شود و حرکت آن به شکل سقوط آزاد ادامه می‌یابد. (الف) بیشترین ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) از زمان برخاستن موشک، چقدر طول می‌کشد تا موشک دوباره به زمین برگردد؟ (از تغییرات g در اثر تغییر ارتفاع چشم بپوشید.)

۶۱. یک بازیکن بسکتبال ۷۶cm به طرف بالا می‌پرد تا توپ را توی سبد "بکوبد". (الف) صعود ۱۵cm بالایی مسیر چقدر طول می‌کشد؟ (ب) صعود ۱۵cm پایینی مسیر چقدر؟ آیا به کمک این اعداد می‌توانید



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۶۱

توضیح بدهید که چرا تعلیق بازیکنان در اوج پرش خیلی مشهورتر است؟ (شکل ۳۳).

۶۲. سنگی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با سرعت v از نقطهٔ A، و با سرعت $v/2$ از نقطهٔ B می‌گذرد. نقطهٔ B ۳٫۰۰m بالاتر از A است. (الف) مقدار v، و (ب) ارتفاع اوج سنگ نسبت به نقطهٔ B چقدر است؟

۶۳. آب از سوراخهای دوش به پایین چکه می‌کند. کف حمام، ۲۰۰cm زیر دوش است. قطره‌ها به فاصله‌های زمانی منظم به پایین می‌چکند، چنانکه وقتی قطرهٔ اول به زمین می‌رسد، قطرهٔ چهارم از دوش جدا می‌شود. در این لحظه هر یک از قطره‌های دیگر در چه مکانی است؟

۶۴. در "آزمایشگاه تحقیقات گرانشِ صفر" در مرکز تحقیقات لوئیس ناسا، یک برج سقوط، به ارتفاع ۱۴۵m، وجود دارد. این برج قائم و خلأ شده است. از جملهٔ تجهیزات این برج، کره‌ای به قطر ۱m است که می‌توان در آن وسایل آزمایشگاهی گذاشت و مجموعه را از برج رها کرد تا به صورت آزاد سقوط کند. (الف) این وسایل به چه مدت در حال سقوط آزادند؟ (ب) سرعت آنها در پایین برج چقدر بوده است؟ (ج) در پایین برج، شتاب $25g$ به کره تحمیل می‌شود تا سرعت آن به صفر برسد.

iopm.ir

در مدتی که این شتاب اعمال می‌شود، کره چه مسافتی را می‌پیماید؟

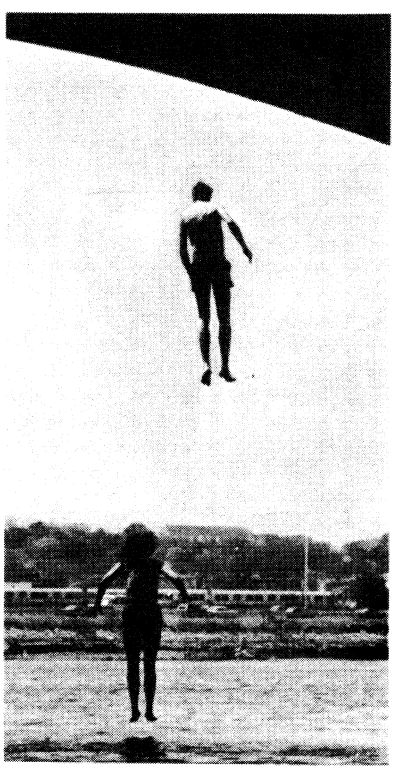
۶۵. توپی از ارتفاع ۲٫۲m رها می‌شود و پس از برخورد به زمین تا ارتفاع ۱٫۹m به بالا برمی‌گردد. اگر این توپ به مدت ۹۶ms با سطح زمین در تماس بوده باشد، در این مدت چه شتاب متوسطی (اندازه و جهت) داشته است؟

۶۶. چند سال پیش، زنی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۴۴ft سقوط کرد و روی یک جعبهٔ هواکش افتاد. جعبه را ۱۸in در هم فرو برد و، بی‌هیچ جراحت شدیدی، زنده ماند. شتابی که این زن طی برخورد با جعبه متحمل شده (با فرض ثابت بودن این شتاب) چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب g بیان کنید.

۶۷. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و نیمی از کل مسیر خود را در آخرین ثانیهٔ سقوط آزادش می‌پیماید. (الف) زمان و (ب) ارتفاع این سقوط چقدر بوده است؟ دربارهٔ جواب غیرقابل قبول معادلهٔ درجهٔ دومی که به‌دست می‌آورید توضیح بدهید.

۶۸. دو جسم، از یک ارتفاع و از حالت سکون، به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی شروع می‌شود که اولی ۱٫۰۰s از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصلهٔ دو جسم از یکدیگر به ۱۰٫۰m می‌رسد؟

۶۹. کلارا، و کمی پس از او جیم، از یک پل به پایین پریده‌اند؛ شکل ۳۴. جیم چه مدت بعد از کلارا پریده است؟ فرض کنید که قد جیم ۱۷۰cm است و سطح پرش را لبهٔ بالایی شکل بگیرید. فاصله‌ها را از روی شکل بسنجید.



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۶۹

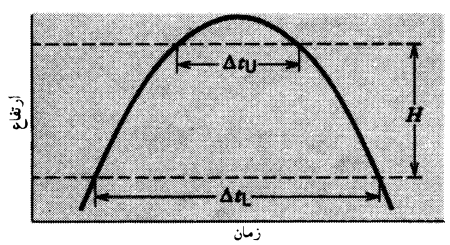
۷۰. بالونی با سرعت ۱۲٫۴m/s در ارتفاع ۸۱٫۳m از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کند. در این لحظه، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) این بسته با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ و (ب) چقدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

۷۱. چتربازی پس از پرش از هلی‌کوپتر، ۵۲٫۰m بدون اصطکاک سقوط می‌کند. سپس چترش را باز می‌کند و با شتاب کند کنندهٔ ۲٫۱۰m/s^2 به حرکتش ادامه می‌دهد، تا اینکه با سرعت ۲٫۹۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) این چترباز چه مدت در هوا بوده و (ب) سقوط او از چه ارتفاعی شروع شده است؟

۷۲. یک توپ سربی از تختهٔ پرشی که ۲٫۶m بالاتر از سطح آب استخر قرار دارد به آب می‌افتد. توپ با سرعت معینی بر سطح آب می‌خورد و تمام مسافت زیر آب را با همین سرعت می‌پیماید. وقتی توپ به کف استخر می‌رسد ۹۷٫۰s از شروع سقوط گذشته است. (الف) عمق استخر چقدر است؟ (ب) فرض کنید استخر را از آب خالی کنیم و توپ را از همان تختهٔ پرش چنان پرتاب کنیم که باز هم ۹۷٫۰s بعد به کف استخر برسد. توپ با چه سرعت اولیه‌ای پرتاب شده است؟

۷۳. اندازه‌گیری شتاب g در "آزمایشگاه ملی فیزیک" در انگلستان (که کارش تحقیق دربارهٔ استانداردهاست) به این ترتیب انجام شده است که یک گلولهٔ شیشه‌ای را در یک لولهٔ خلأ مستقیماً به بالا پرتاب می‌کنند. گلوله بالا می‌رود و برمی‌گردد؛ نگاه کنید به شکل ۳۵. فرض کنید Δt_L زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در پایین لوله، و Δt_U زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در بالای لوله باشد. فاصلهٔ بین این دو نقطه، H است. نشان بدهید که

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$



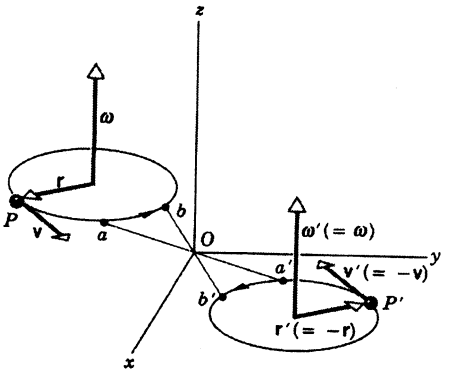
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۷۳

۷۴. یک بولبرینگ فولادی از شیروانی ساختمانی (با سرعت اولیهٔ صفر) به پایین می‌افتد. ناظری که کنار پنجره‌ای به ارتفاع ۱۲۰cm ایستاده است، متوجه می‌شود که ۱۲۵s٫۰ طول می‌کشد تا بولبرینگ از بالا تا پایین پنجره را طی کند. بولبرینگ به زمین می‌خورد، یک برخورد کاملاً کشسان با سطح پیاده‌رو انجام می‌دهد، و ۲٫۰s پس‌از اینکه از لبهٔ پایینی پنجره گذشته بود، دوباره به آنجا برمی‌گردد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟ (اندازهٔ سرعت توپ، پس از برخورد کاملاً کشسان، همان اندازهٔ سرعت پیش از برخورد است.)

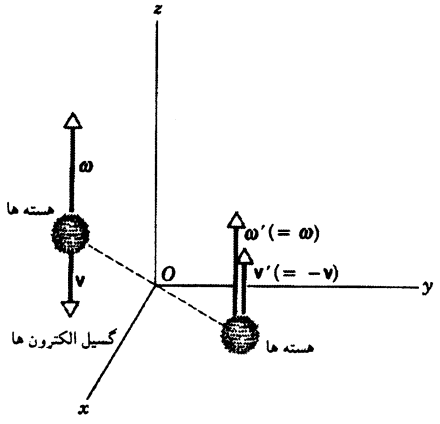
iopm.ir

۷۵. شخصی که در انتهای اتاقی روبروی پنجره‌ای به ارتفاع ۱٫۱m ایستاده است مشاهده می‌کند که لنگه کفشی در نزدیکی سطح خارجی پنجره در راستای قائم صعود می‌کند و در مرز بالای پنجره از دید خارج می‌شود؛ سپس برمی‌گردد و در مرز پایین پنجره از دید خارج می‌شود. اگر کل زمانی که لنگه کفش در معرض دید است ۰٫۷۴s باشد، لنگه کفش تا چه ارتفاعی از لبهٔ بالایی پنجره بالاتر رفته است؟

iopm.ir



شکل۱۹. ذرهٔ P که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شود. اگر همهٔ مختصات را نسبت به مبدأ O وارون کنیم، ذرهٔ "وارونه" P' هم روی دایره می‌گردد و با بردار سرعت زاویه‌ای ω' مشخص می‌شود.



شکل۲۰. مجموعه‌ای از هسته‌های چرخان، که با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شوند، عمدتاً در جهت مخالف ω الکترون گسیل می‌کنند. در آزمایش وارونه، الکترونها در جهت ω' گسیل می‌شوند. آزمایش اصلی و آزمایش وارونه کاملاً با هم متفاوت‌اند. این نشان می‌دهد که تقارن وارونی در این واپاشیها نقض می‌شود.

بردار $\mathbf{r}$، محل ذرهٔ P نسبت به مرکز دایره، به $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ تبدیل می‌شود. سرعت هم به $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ذرهٔ اولیه از a به b می‌رود، ذرهٔ وارون شده از a' به b' می‌رود و جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) عوض نمی‌شود، پس $\omega' = \omega$ است. بنابراین سرعت زاویه‌ای، بر خلاف بردارهای قطبی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، تحت وارونی مختصات تغییر جهت نمی‌دهد. چنین برداری را بردار محوری یا شبه بردار می‌نامند: گشتاور و میدان مغناطیسی هم از این نوع بردارها هستند.

در فصل ۱۱، مبحث حرکت دورانی، خواهیم دید که بین بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، و ω یک رابطهٔ حاصلضرب برداری وجود دارد، $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. اگر قرار بود که هر سه بردار تحت وارونی تغییر جهت بدهند، رابطهٔ بین سه بردار وارونه به شکل $-\mathbf{v} = (-\omega) \times (-\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$ در می‌آمد. اما این تناقض است: $\omega \times \mathbf{r}$ نمی‌تواند هم با $-\mathbf{v}$ و هم با $\mathbf{v}$ برابر باشد (مگر اینکه $\mathbf{v}$ صفر باشد که اینجا چنین نیست). بنابراین، لازم‌است که رابطهٔ‌تبدیل ω، حتماً به شکل $\omega' = \omega$ باشد تا رابطهٔ فیزیکی $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ در دستگاه وارونه هم شکل خود را حفظ کند، یعنی $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$. این همان چیزی است که از ناوردایی قوانین فیزیک تحت یک تبدیل خاص مختصات می‌فهمیم. یعنی، اگر یک قانون فیزیکی را به شکل معادله در یک دستگاه مختصات بنویسیم، بردارها را مطابق با تبدیل مختصات مورد نظر تبدیل کنیم، و بردارهای تبدیل‌یافته را در معادلهٔ مورد نظر بگذاریم، باید معادله‌ای به‌دست بیاید که با معادلهٔ اول هم‌ارز است.

تا حدود سال ۱۹۵۶ تصور بر این بود که قوانین فیزیک تحت وارونی از نوع شکل ۱۹، (و البته تحت انتقال و تحت دوران) تغییر نمی‌کنند. اما در سال ۱۹۵۶ کشف شد که تقارن وارونی، درنوع خاصی از واپاشیهای پرتوزا، واپاشی بتا، نقض می‌شود. در این نوع واپاشی، هستهٔ اتم الکترون گسیل می‌کند. هستهٔ اتم، مثل یک فرفرهٔ کوچک، حول محور خود می‌چرخد، و می‌شود به هرهسته برداری مانند ω نسبت داد که دوران آن‌را مشخص می‌کند. در آزمایش واپاشی بتا، جهت گسیل الکترون نسبت به جهت ω را بررسی می‌کردند (شکل ۲۰). اگر تعداد الکترونهایی که در جهت ω گسیل می‌شدند برابر با آنهایی بود که در خلاف جهت گسیل می‌شدند، آزمایش وارونه هم درست مثل آزمایش اصلی می‌بود و تقارن وارونی صدق می‌کرد. اما معلوم شد که بیشتر الکترونها در خلاف جهت ω گسیل می‌شوند. بنابراین، در آزمایش وارونه بیشتر الکترونها در جهت ω گسیل می‌شوند (زیرا در اثر وارونی علامت $\mathbf{v}$ عوض می‌شود اما علامت ω عوض نمی‌شود). آزمایش اصلی با تصویر آینه‌ای‌اش متفاوت است؛ بنابراین، تقارن وارونی و قانون پایستگی مربوط به آن، پایستگی پاریته، در این مورد معتبر نیست.[۱]

این آزمایش نحوهٔ تفکر فیزیکدانها را در بارهٔ فرایندهای بنیادی دگرگون کرد، و یک سر نخ اساسی درمورد ماهیت قانون فیزیکی‌ای که در پس واپاشی بتا وجود دارد، به‌دست داد. این قانون، یکی از چهار نیروی بنیادیی است که می‌شناسیم. این آزمایش پیشگام سلسله آزمایشهایی بود که روابط دیگری میان خواص تبدیل، اصول ناوردایی، و تقارن آشکار کرد.

پرسشها

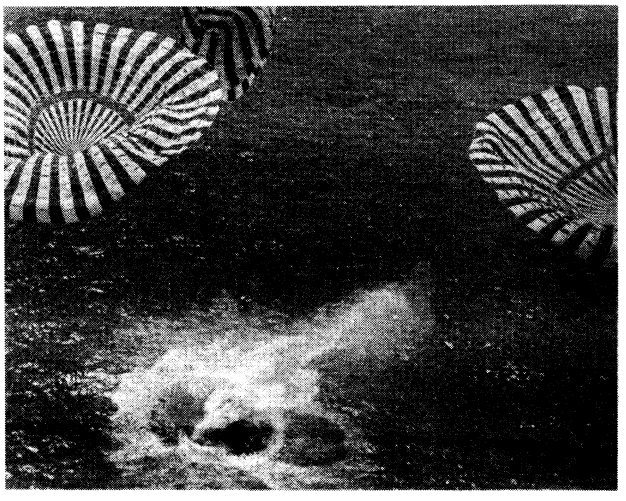
۱. در سال ۱۹۶۹، سه فضانورد آپولو از پایگاه کیپ کاناورال پرواز کردند، به ماه رفتند، برگشتند، و در نقطهٔ معینی در اقیانوس آرام فرود آمدند

---

۱. نگاه کنید به
The New Ambidextrous Universe, Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

iopm.ir

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداحافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیمابر به اقیانوس آرام رفت تا فضانوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضانوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



شکل ۲۱. پرسش ۱

۲. سگی ۱۰۰m به‌طرف جنوب، سپس ۱۰۰m به طرف شرق، بعد ۱۰۰m به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطهٔ شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطهٔ شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برایندشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازهٔ برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازهٔ مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازهٔ تفاضل دو بردار بزرگتر از اندازهٔ هریک از دو بردار باشد؟ آیا اندازهٔ تفاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازهٔ مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. آیا این به معنی آن است که باید $d \geq d_1$ یا $d \geq d_2$ باشد؟ اگر نه، توضیح بدهید که چرا؟

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدهید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالرهاست؟

۱۱. چند کمیت اسکالر نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالر به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً، ممکن است که رویداد b پیش از c و پس از a رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا a، b، c است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل‌ضرب اسکالر می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند؟ (ب) آیا از $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ است؟

۱۶. آیا اگر $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ باشد، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار $\mathbf{a}$ موازی محور دوران زمین، و در جهتِ جنوب به شمال است. بردار $\mathbf{b}$ در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماست. جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازهٔ بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالرِ دو بردار، (ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدهید که اگر همهٔ مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدهید که اگر مؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل‌ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود. (ج) پس آیا حاصل‌ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعدهٔ دست راست است، که ماهم آن‌را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانع کنید که حاصل‌ضرب برداری دو بردارِ قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل‌ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

مسئله‌ها

بخش ۳ـ۲ جمع برداری؛ روش نموداری

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های ۳m و ۴m، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازهٔ جابه‌جایی برایند (الف) ۷m، (ب) ۱m، و (ج) ۵m شود.

۲. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چه خاصیتی داشته باشند تا (الف) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ و $a + b = c$ باشد؛ (ب $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ باشد؛ (ج) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ و $a^2 + b^2 = c^2$ باشد؟

۳. شخصی ۲۵۰m در جهت ۳۵° شرقِ شمال، و سپس ۱۷۰m مستقیماً به‌طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

iopm.ir

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی ۳٫۱km به‌طرف شمال، سپس ۲٫۴km به‌طرف غرب، و سرانجام ۵٫۲km به‌طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

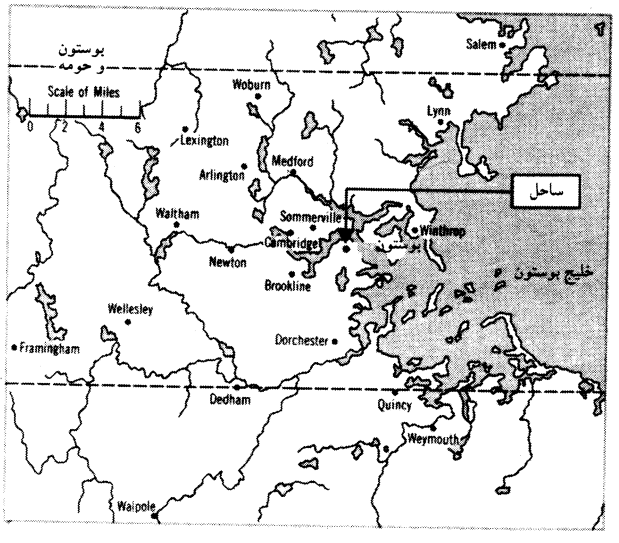
۵. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدهید که اندازهٔ بردار برایند نمی‌تواند بزرگتر از $a+b$ یا کوچکتر از $|a-b|$ باشد. (خطهای قائم علامت قدرمطلق است.)

۶. اتومبیلی ۵۴km در جهت شرق، سپس ۳۲km در جهت شمال، و سرانجام ۲۷km در جهت ۲۸° شرقِ شمال حرکت می‌کند. نمودار برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار $\mathbf{a}$ به اندازهٔ ۵٫۲ واحد، و در جهت شرق است. بردار $\mathbf{b}$ به اندازهٔ ۴٫۳ واحد، و درجهت ۳۵° غربِ شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، و (ب) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۸. گلف‌بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربهٔ اول، توپ ۱۲ft به طرف شمال می‌رود، در ضربهٔ دوم ۶٫۰ft به جنوب شرقی، و در ضربهٔ سوم ۳٫۰ft به جنوب غربی، چه جابه‌جایی‌ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشهٔ محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول ۲۰mi در جهت ۴۵° جنوبِ شرق، سپس ۳۳mi در جهت ۲۶° شمالِ غرب، و سرانجام ۱۶mi در جهت ۱۸° شرقِ جنوب. اینجاست که پلیس دزدها را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید.)

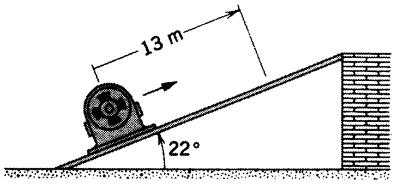


شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

بخش ۳ـ۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار $\mathbf{a}$ در صفحهٔ xy و در جهت ۲۵۲° پادساعتگرد از جهت مثبت محور x است. اندازهٔ $\mathbf{a}$، ۷٫۳۴ واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) مؤلفهٔ x برداری ۲۵− واحد و مؤلفهٔ y آن ۴۳+ واحد است. اندازهٔ این بردار و زاویهٔ آن‌را با جهت مثبت محور x به‌دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۲۲° می‌سازد، به‌اندازهٔ ۱۳m به طرف بالای سطح هل می‌دهیم. (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه‌اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۱

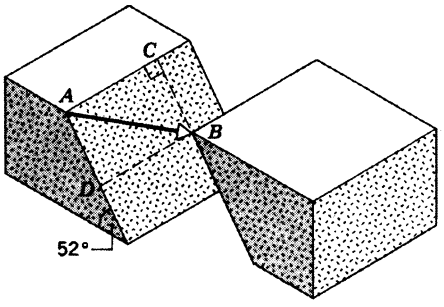
۱۲. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک، ۱۱٫۳cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصلهٔ ۳٫۴۲km و در جهت ۳۵٫۰° شمالِ شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راهِ خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی-جنوبی‌اند یا شرقی-غربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای درفاصلهٔ ۱۲۴km در جهت شمال است. توفانِ غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در۷۲٫۶km شمال و ۳۱٫۴km شرقِ مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

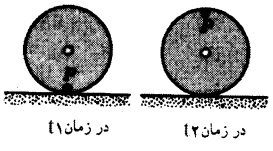
۱۵. گُسَل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط A و B پیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفهٔ جابه‌جایی کل AB در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند (AC). مؤلفهٔ جابه‌جایی کل در راستای محور با تندترین شیب گسل را لغزش عمقی می‌نامند (AD). (الف) اگر لغزش افقی ۲۲m و لغزش عمقی ۱۷m باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحهٔ گسل با افق زاویهٔ ۵۲° داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص B در اثر گسیختگی (الف) چقدر است؟

iopm.ir



شکل ۲۴ مسئلهٔ ۱۵

۱۶. چرخی به شعاع 45cm، روی سطحی افقی، بی‌لغزش، می‌غلتد(شکل ۲۵). P نقطه‌ای است که روی چرخ علامتگذاری شده است. در زمان t_1، P نقطهٔ تماس بین چرخ و سطح است. درزمان t_2، پس از t_1، چرخ نیم دور چرخیده است. جابه‌جایی P در طی این حرکت چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. ابعاد اتاقی $14\text{ft} \times 12\text{ft} \times 10\text{ft}$ است. مگسی از یک گوشهٔ اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطری که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جابه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با یالهای اتاق موازی‌اند پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاهتر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه برود، کوتاهترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

بخش ۳ـ۴ جمع بردازی؛ روش مؤلفه‌ای

۱۸. (الف) جمع دو بردار $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را به‌دست بیاورید.

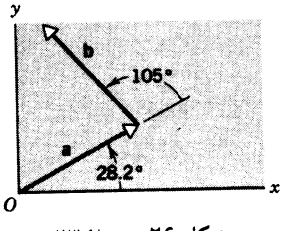
۱۹. دو بردار $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{K}$ و $\mathbf{b} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، و (ب) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را پیدا کنید. (ب) بردار $\mathbf{c}$ را چنان تعیین کنید که $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$ باشد.

۲۰. دو بردار $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور x) پیدا کنید. (الف) $\mathbf{a}$، (ب) $\mathbf{b}$، (ج) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، (د) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$، و (ه) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش 1400m به طرف شرق و 2100m به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیبش در می‌آورد و آن‌را از تخته سنگی به ارتفاع 48m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای x و y، و z آن‌را به‌ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جابه‌جایی سکه را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برایند جابه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟

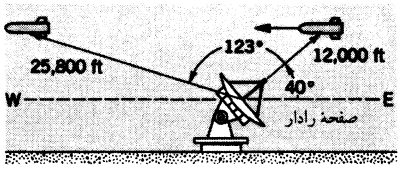
۲۲. ذره‌ای در سه مرحلهٔ متوالی در صفحه‌ای جابه‌جا می‌شود: 4٫13m به طرف جنوب غربی 5٫26m به طرف شرق، و 5٫94m در جهت 64٫0° شمالِ شرق. محور x را درجهت شرق و محور y را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جابه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برایند جابه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جابه‌جایی برایند، و (د) جابه‌جایی‌ای که ذره را به مبدأ باز می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هرکدام به اندازهٔ 12٫7 واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری‌شان $\mathbf{r}$ است. (الف) مؤلفه‌های x و y بردار $\mathbf{r}$، (ب) اندازهٔ $\mathbf{r}$، و (ج) زاویهٔ $\mathbf{r}$ نسبت به جهت مثبت محور x را پیدا کنید.



شکل ۲۶. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصلهٔ 12000ft از ایستگاه و تحت زاویهٔ 40٫0° بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازهٔ 123° in دیگر در صفحهٔ شرق‌ـغرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصلهٔ موشک از ایستگاه به 25800ft می‌رسد. جابه‌جایی موشک دراین مدت چیست؟



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. دو بردار به اندازه‌های a و b داریم که اگر دمشان را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویهٔ θ می‌سازند. با محاسبهٔ مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازهٔ مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

iopm.ir

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه بردار یکه در راستای یالهای مکعبی به ضلع a بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می‌گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کنند) برحسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویهٔ قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی‌سی به مانیل پرواز می‌کند. (الف) بردار جابه‌جایی او را به‌دست بیاورید. (ب) اندازهٔ این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب ۳۹° شمال ـ ۷۷° غرب و ۱۵° شمال ـ ۱۲۱° شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور z را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، "عرض جغرافیایی $\theta = 90° -$" و "طول جغرافیایی $\phi =$" خواهد بود. شعاع زمین ۶۳۷۰km است.)

۲۹. فرض کنید که N عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos(N-1)\frac{2\pi}{N} = 0$$

یعنی

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos\frac{2\pi n}{N} = 0$$

همچنین

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin\frac{2\pi n}{N} = 0$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع N بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویهٔ $2\pi/N$ می‌سازد.

بخش ۳ـ۵ ضرب بردارها

۳۰. بردار $\mathbf{d}$ به اندازهٔ ۲٫۶m و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف) $-\mathbf{d}$، (ب) $\mathbf{d}/2{,}0$، (ج) $-2{,}5\mathbf{d}$، و (د) $5{,}0\mathbf{d}$ را به‌دست بیاورید.

۳۱. نشان بدهید که بردار $\mathbf{a}$ هر چه باشد، (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$ و (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$ است.

۳۲. اندازهٔ بردار $\mathbf{a}$، ۱۲ واحد و اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$، ۵٫۸ واحد است. زاویهٔ میان این دو بردار ۵۵° است. (الف) حاصلضرب اسکالر و (ب) حاصلضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ در صفحهٔ xyاند. اندازهٔ این دو بردار، به ترتیب، ۴٫۵ و ۷٫۳ واحد است. جهت این دو بردار، به ترتیب، ۳۲۰° و ۸۵° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x است. (الف) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ و (ب) $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ را پیدا کنید.

۳۴. حاصلضربهای (الف) "شمال" ضربدر "غرب"، (ب) "پایین" نقطه "جنوب" (ج) "شرق" ضربدر "بالا"، (د) "غرب" نقطه "غرب"، و (ه) "جنوب" ضربدر "جنوب" را به‌دست بیاورید. همهٔ بردارها را یکه بگیرید.

۳۵. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۵ به‌دست می‌آید.

۳۶. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۷ به‌دست می‌آید.

۳۷. نشان بدهید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را می‌شود با این دترمینان 3×3 نشان داد:

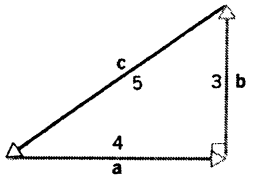
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویهٔ میان دو بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$، (ب) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$، و (ج) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ را حساب کنید.

۴۰. بردارهای $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به‌دست بیاورید. (ب) زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و محور $z+$ و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند (شکل ۲۸) (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ را حساب کنید.



شکل ۲۸. مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. شکل ۲۸. (الف) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ را حساب کنید.

۴۳. بردار $\mathbf{a}$ در صفحهٔ yz است و با محور $y+$ زاویهٔ ۶۳٫۰° می‌سازد. مؤلفهٔ z این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۳٫۲۰ واحد است. بردار $\mathbf{b}$ در صفحهٔ xz است و با محور $x+$ زاویهٔ ۴۸٫۰° می‌سازد. مؤلفهٔ z این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۱٫۴۰ واحد است. (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه‌جایی در مورد حاصلضرب برداری درست نیست، یعنی، $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ با $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ برابر نیست. نشان بدهید که

iopm.ir

قانون جابه‌جایی در مورد حاصل‌ضرب اسکالر درست است؛ یعنی، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. (ب) نشان بدهید که قانون پخشی، هم در مورد حاصل‌ضرب اسکالر و هم در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است یعنی

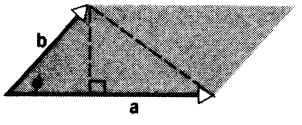
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

و

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است؟ یعنی، آیا $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ با $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ برابر است؟ (د) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب اسکالر معنی دارد؟

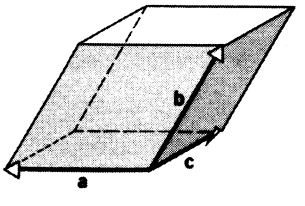
۴۵. نشان بدهید که مساحت مثلثی که با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می‌شود (شکل ۲۹) برابر با $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ است. (خطوط قائم به معنی اندازهٔ بردار است.)



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدهید که اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن به اندازهٔ عوامل ضرب باشند (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای نمایش عنصرسطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده کنیم؟

۴۷. نشان بدهید که قدرمطلق $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ ساخته می‌شود (شکل ۳۰).

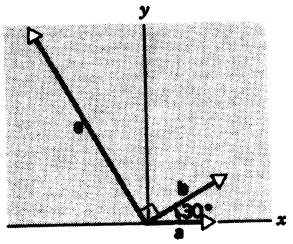


شکل ۳۰. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. مؤلفه‌های دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، برحسب یکای دلبخواه، $a_x=3{,}2$، $a_y=1{,}6$؛ $b_x=0{,}50$، $b_y=4{,}5$ است. (الف) زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار $\mathbf{c}$ را که عمود بر $\mathbf{a}$، در صفحهٔ xy، و به اندازهٔ $5{,}0$ واحد است، پیدا کنید.

۴۹. زاویهٔ میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئلهٔ ۲۷).

۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های $a=3$، $b=4$، و $c=10$اند. (الف) مؤلفه‌های x و y این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد p و q را چنان تعیین کنید که $\mathbf{c}=p\mathbf{a}+q\mathbf{b}$ باشد.

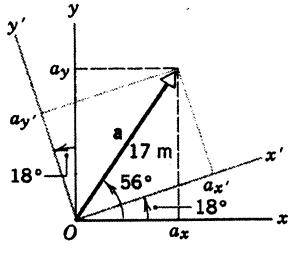


شکل ۳۱. مسئلهٔ ۵۰

بخش ۳ـ۶ قوانین برداری در فیزیک

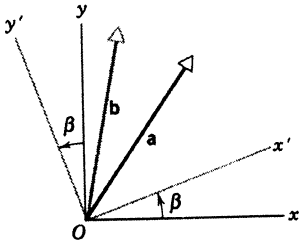
۵۱. با استفاده از شکل ۱۰ب، معادلات ۱۸ را به‌دست بیاورید.

۵۲. بردار $\mathbf{a}$ به اندازهٔ 17m در جهت $56°$ پادساعتگرد از محور $x+$ است (شکل ۳۲). (الف) مؤلفه‌های a_x و a_y این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) دستگاه مختصات دیگری را در نظر بگیرید که $18°$ نسبت به دستگاه اول چرخیده باشد. مؤلفه‌های $a_{z'}$، $a_{y'}$ را در این دستگاه "پریم‌دار" پیدا کنید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۲

۵۳. شکل ۳۳ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که زاویهٔ بین محورهای "نظیر" آنها β است. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ مستقل از دستگاه مختصاتی است که برای محاسبهٔ این بردار به‌کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به‌کار بگیرید.)



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۵۳

iopm.ir

و دینامیکی، استفاده کرد. این فیزیک جدید، اساس نظریهٔ نسبیت خاص است، که آن‌را به تفصیل بیشتر در فصل ۲۱ مطالعه خواهیم کرد.

پرسشها

۱. آیا ممکن است جهت شتاب جسمی تغییر کند، بی‌آنکه جهت سرعت آن تغییر کند؟

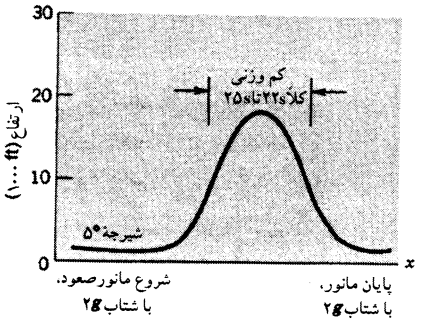
۲. اگر **v** و **a** به‌ترتیب نمایندهٔ سرعت و شتاب اتومبیلی باشد، وضعیت حرکت درهر یک از این حالتها چگونه است؟ (الف) **v** و **a** موازی و هم‌جهت‌اند؛ (ب) **v** و **a** موازی و در جهتهای مخالف‌اند؛ (ج) **v** و **a** برهم عمودند؛ (د) **v** صفر و **a** مخالف صفر است؛ (ه) **a** صفر و **v** مخالف صفر است.

۳. آیا در پرش طول، ارتفاعی هم که ورزشکار به آن می‌رسد اهمیت دارد؟ چه عواملی برد پرش را تعیین می‌کنند؟

۴. الکترونهای باریکه‌ای را که از تفنگ الکترونی خارج می‌شود، و نیز مولکولهای جریان آبی را که از لوله بیرون می‌زند در نظر بگیرید. چرا، در اثر گرانش، الکترون به‌اندازهٔ مولکول آب سقوط نمی‌کند؟ فرض کنید که حرکت اولیه ذرات، در هر دو مورد، افقی است.

۵. سرعت پرتابه در کدام نقطه یا نقاطِ مسیر کمینه است؟ در کجا بیشینه است؟

۶. شکل ۱۸ مسیر پرواز یکی از هواپیماهای جت ناسا را نشان می‌دهد. هدف از این پرواز، شبیه‌سازی شرایط کم‌وزنی برای مدتی کوتاه است. استدلال کنید که اگر مسیر هواپیما، سهمی خاصی باشد، مسافران آن احساس بی‌وزنی خواهند کرد.

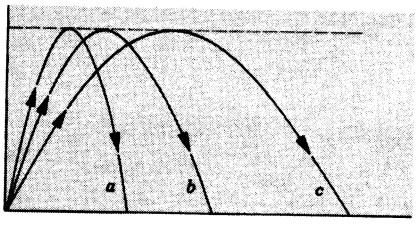


شکل ۱۸. پرسش ۶

۷. پرتابه‌ای از نقطه‌ای بالاتر از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویهٔ پرتاب متناظر با بیشترین برد کمتر از ۴۵° است. آیا می‌توانید این مشاهده را توضیح بدهید؟

۸. پرتابه‌ای را در اوج مسیرش در نظر بگیرید. در این نقطه (الف) سرعت پرتابه، برحسب v_0 و ϕ_0، چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر و در کدام جهت است؟ (ج) جهت شتاب پرتابه چه ارتباطی با جهت سرعت آن دارد؟

۹. شکل ۱۹، مسیر سه توپ فوتبال را نشان می‌دهد. (الف) کوتاهترین مدت پرواز، (ب) بزرگترین مؤلفهٔ قائم سرعت در زمان شروع حرکت، (ج) بزرگترین مؤلفهٔ افقی سرعت در زمان شروع حرکت، و (د) کمترین سرعت در زمان شروع حرکت، مربوط به کدام‌یک از این‌مسیرهاست؛ (مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.)



شکل ۱۹. پرسش ۹

۱۰. تفنگی، وقتی به‌طرف هدفی هم تراز با خودش نشانه برود، به هدف می‌زند. نشان بدهید که اگر این تفنگ به طرف هدفهای بالاتر یا پایین‌تر از خودش نشانه‌روی شود، به شرط آنکه فاصلهٔ هدف عوض نشود، همیشه "بالا می‌زند".[۱]

۱۱. پیتر برانکازیو درکتاب "دانشِ ورزش" در مورد پرتابه‌هایی مثل گوی بیسبال یا گوی گلف می‌نویسد: "با فرض اینکه بقیهٔ شرایط یکسان باشد، برد پرتابه‌ها در روزهای گرم بیشتر است تا در روزهای سرد، در سطوح مرتفع بیشتر است تا در سطح دریا، و در هوای مرطوب بیشتر است تا در هوای خشک". آیا می‌توانید درستی این گفته‌ها را توضیح بدهید؟

۱۲. نمودار ارتفاع-زمان پرتابه‌ای که در راستای قائم به بالا پرتاب شود، سهمی است. مسیر پرتابه‌ای هم که به‌طور مایل به بالا پرتاب شود سهمی است. آیا این شباهت تصادفی است؟ جواب خودتان را توجیه کنید.

۱۳. توپهای بلندبرد را در زاویهٔ " برد بیشینهٔ" ۴۵° تنظیم نمی‌کنند، بلکه در زاویه‌های بزرگتر، درگسترهٔ ۵۵° تا ۶۵°، تنظیم می‌کنند. زاویهٔ ۴۵° چه اشکالی دارد؟

۱۴. آیا در حرکت پرتابه، اگر مقاومت هوا قابل چشمپوشی باشد، هیچ وقت لازم می‌شود که حرکت را، به‌جای دوبعدی، سه‌بعدی درنظر بگیریم؟

۱۵. آیا ممکن است که اندازهٔ سرعت ثابت باشد ولی حرکت شتابدار باشد؟ آیا می‌شود با شتاب صفر روی یک مسیر منحنی حرکت کرد؟ با شتابِ ثابت چطور؟

۱۶. مهره‌ای را در نظر بگیرید که در امتدادِ سیم بدون اصطکاکی به شکل مارپیچ با سرعت ثابت می‌لغزد و حلقه‌هایی راکه به تدریج کوچکتر می‌شوند طی می‌کند. شتاب این مهره را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۱۷. نشان بدهید که اگر هم چرخش و هم گردش زمین را به‌حساب

---

۱. در این باره می‌توانید رجوع کنید به
"A Puzzle in Elementary Ballistics," Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, p. 246.

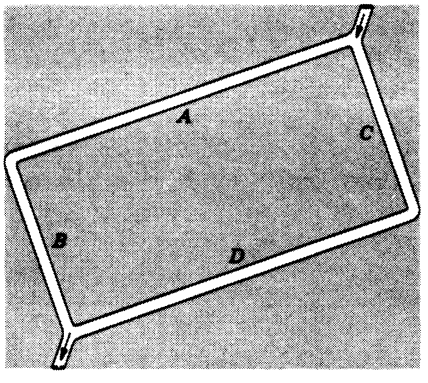
iopm.ir

بیاوریم، کتابی که روی میزتان است، شبها تندتر از روزها حرکت می‌کند. این گفته در کدام چارچوب مرجع درست است؟

۱۸. هوانوردی در پایان یک شیرجه، روی قوسی از دایره حرکت می‌کند. گفته می‌شود که هوانورد، با شتاب $3g$ از حالت شیرجه خارج شده است. معنی این عبارت را توضیح دهید.

۱۹. آیا می‌شود شتاب یک پرتابه را برحسب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی آن در هر نقطه از مسیر حرکت نشان داد؟ اگر چنین است، آیا این نمایش مزیتی هم دارد؟

۲۰. لوله‌ای به شکل مستطیلی با گوشه‌های گرد در صفحهٔ قائم قرار دارد (شکل ۲۰). دو بلبرینگ را درگوشهٔ بالای سمت راست، یکی را در مسیر AB و دیگری را در مسیر CD رها می‌کنیم. کدام‌یک زودتر به گوشهٔ پایینِ سمت چپ می‌رسد؟



شکل ۲۰. پرسش ۲۰

۲۱. آیا اگر شتاب جسمی در یک چارچوب مرجع خاص ثابت باشد، در چارچوبهای مرجع دیگر هم الزاماً ثابت است؟

۲۲. کودکی در قطاری که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. این کودک توپی را مستقیماً به بالا پرتاب می‌کند. آیا توپ پشت سرش می‌افتد، جلویش می‌افتد، یا توی دستهایش؟ اگر در مدتی که توپ در هواست، قطار به طرف جلو شتاب بگیرد، یا روی ریل منحنی حرکت کند، توپ در برگشت چه وضعیتی خواهد داشت؟

۲۳. شخصی روی سکوی عقبی قطاری که سرعت ثابت دارد ایستاده است. این شخص در حالی‌که روی ریل خم شده است، سکه‌ای را رها می‌کند. مسیر حرکت سکه را از دید این ناظرها بررسی کنید: (الف) خودِ شخص، (ب) شخصی که نزدیک ریل ایستاده است، و (ج) شخصی که در قطار دیگری است که روی ریلی موازی با ریل قطار اول، و در جهت مخالف این قطار حرکت می‌کند.

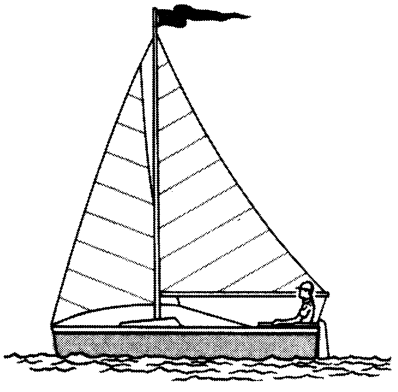
۲۴. آسانسوری با سرعت ثابت پایین می‌آید. شخصی در این آسانسور، سکه‌ای را رها می‌کند. شتاب سکهٔ افتان (الف) از دید این شخص و (ب) از دید شخصی که نسبت به چاه آسانسور ساکن است چقدر است؟

۲۵. سطلی زیر باران است. باران به‌طور یکنواخت می‌بارد و در سطل جمع می‌شود. آیا اگر باد افقی ثابتی بوزد، آهنگ جمع شدن آب در سطل تغییر می‌کند؟

۲۶. شیشهٔ جلوی اتوبوسی در صفحهٔ قائم است. این اتوبوس زیر باران شدید با سرعت v_b حرکت می‌کند قطرات باران با سرعت حد v_r در راستای قائم سقوط می‌کنند. این قطره‌ها با چه زاویه‌ای به شیشهٔ جلو می‌خورند؟

۲۷. فرض کنید بارانی با قطره‌های منظم و عمود بر زمین می‌بارد و شما می‌خواهید در زیر این باران مسافت معینی را طوری طی کنید که حتی‌الامکان کمتر خیس بشوید (یعنی قطره‌های کمتری به شما اصابت کند). آیا باید خیلی تند بدوید؟ خیلی آهسته راه بروید؟ یا یک سرعت میانی مناسب انتخاب کنید؟[1]

۲۸. شکل ۲۱ چه ایرادی دارد؟ قایق دارد با نیروی باد حرکت می‌کند.



شکل ۲۱. پرسش ۲۸

۲۹. تبدیل گالیله‌ای سرعت (معادلهٔ ۴۳) از تجربیات روزمره چنان به ذهن ما آشناست که گاهی ادعا می‌شود که "صحت آن بدیهی است و نیاز به اثبات ندارد." بسیاری از (به‌اصطلاح) ابطالهای نظریهٔ نسبیت هم در واقع مبتنی بر همین ادعاست. چگونه می‌شود این ادعا را رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۴ـ۱ مکان، سرعت، و شتاب

۱. هواپیمایی از شهر A، ۴۱۰ mi به‌طرف شرق پرواز می‌کند و در مدت ۴۵min به شهر B می‌رسد. سپس ۸۲۰ mi به طرف جنوب پرواز می‌کند و در مدت ۱h۳۰ min به شهر C می‌رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی مربوط به کل مسیر را به‌دست بیاورید.

---

۱. نگاه کنید به

"An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", S. A. Stern, *American Journal of Physics*, September 1983, p. 815.

iopm.ir

(ب) بردار سرعت متوسط و (ج) متوسط اندازهٔ سرعت را پیدا کنید.

۲. مکان ذره‌ای در صفحهٔ xy با رابطهٔ $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^4)\mathbf{j}$ بیان می‌شود، که در آن r برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) $\mathbf{r}$، (ب) $\mathbf{v}$، و (ج) $\mathbf{a}$ را در $t = 2\text{s}$ حساب کنید.

۳. بالونی در مدت $3\text{h}24\text{min}$، از نقطهٔ رهاشدنش در سطح زمین، $8{,}7\text{km}$ به شمال، $9{,}7\text{km}$ به‌شرق، و $2{,}9\text{km}$ به طرف بالا می‌رود. (الف) اندازهٔ سرعت متوسط بالون و (ب) زاویهٔ بردار سرعت متوسط با سطح افقی را پیدا کنید.

۴. سرعت ذره‌ای درصفحهٔ xy از رابطهٔ $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ به‌دست می‌آید، که در آن v برحسب متر بر ثانیه و $t (> 0)$ برحسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره را در $t = 3\text{s}$ پیدا کنید. (ب) شتاب در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (ج) سرعت در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (د) سرعت در چه زمانی 10m/s می‌شود (اگر اصولاً چنین زمانی در کار باشد)؟

بخش ۴ـ۲ حرکت با شتاب ثابت

۵. در یک لامپ پرتو کاتدی، باریکه‌ای از الکترونها با سرعت $9{,}6 \times 10^8\text{cm/s}$ به‌طور افقی وارد ناحیه‌ای به‌طول $2{,}3\text{cm}$ میان دو صفحهٔ افقی می‌شود. بین این دو صفحه یک میدان الکتریکی وجود دارد که به الکترونها شتاب رو به پایین $9{,}4 \times 10^{16}\text{cm/s}^2$ می‌دهد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا الکترونها از ناحیهٔ میان صفحات بگذرند؟ (ب) جابه‌جایی عمودی باریکه طی این مدت چقدر است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت باریکه، هنگام خروج از این ناحیه چقدر است؟

۶. یک قایق بادبانی یخ‌نوردی، با شتاب ثابت حاصل از باد، روی سطح دریاچهٔ یخزده‌ای حرکت می‌کند. سرعت آن در زمان معینی $6{,}30\mathbf{i} - 8{,}42\mathbf{j}$ (برحسب m/s) است. سه ثانیه بعد، قایق به‌حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. شتاب قایق در این مدت چه بوده است؟

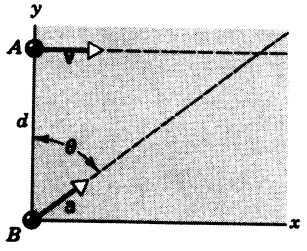
۷. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که مکان آن برحسب زمان به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

(الف) سرعت و (ب) شتاب آن‌را برحسب زمان بنویسید. (ج) مسیر ذره به چه شکلی است؟

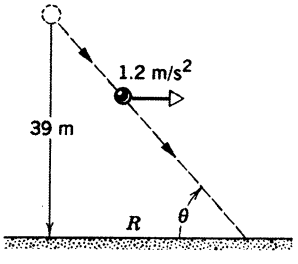
۸. ذره‌ای در $t = 0$، با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0 = 3{,}6\mathbf{i}$، برحسب m/s، از مبدأ حرکت می‌کند. شتاب این ذره ثابت و برابر با $\mathbf{a} = -1{,}2\mathbf{i} - 1{,}4\mathbf{j}$، برحسب m/s^2 است. (الف) ذره در چه زمانی به بیشترین مختصهٔ x خود می‌رسد؟ (ب) سرعت ذره در این زمان چقدر است؟ (ج) در این زمان، ذره کجاست؟

۹. ذرهٔ A در راستای خط $y = d(30\text{m})$، با سرعت ثابت $\mathbf{v}(v = 3{,}0\text{m/s})$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند (شکل ۲۲). ذرهٔ B، هنگامی که A از محور y می‌گذرد، با سرعت صفر و شتاب ثابت $\mathbf{a}(a = 0{,}40\text{m/s}^2)$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. زاویهٔ θ بین $\mathbf{a}$ و جهتِ مثبت محور y چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

۱۰. توپی از ارتفاع $39{,}0\text{m}$ رها می‌شود. باد، افقی می‌وزد و به توپ شتاب $1{,}20\text{m/s}^2$ می‌دهد. (الف) نشان بدهید که توپ روی یک خط راست حرکت می‌کند و مقادیر R و θ در شکل ۲۳ را پیدا کنید. (ب) چه مدتی طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) توپ با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۰

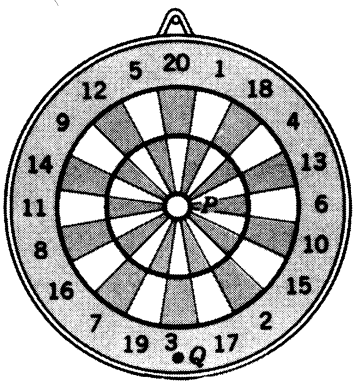
بخش ۴ـ۳ حرکت پرتابی

۱۱. توپی روی میزی افقی به ارتفاع $4{,}23\text{ft}$ می‌غلتد و از آن به زمین می‌افتد. نقطهٔ برخورد توپ به زمین در فاصلهٔ افقی $5{,}11\text{ft}$ از لبهٔ میز است. (الف) توپ چه مدتی در هوا بوده است؟ (ب) سرعت آن هنگام افتادن از میز چقدر بوده است؟

۱۲. الکترون هم، مثل همهٔ انواع دیگر ماده، تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند. الکترونی با سرعت $3{,}0 \times 10^7\text{m/s}$ (یک دهم سرعت نور) به‌طور افقی پرتاب می‌شود. این الکترون، طی مسافت افقی 1m، چقدر سقوط می‌کند؟

۱۳. پیکانی با سرعت اولیهٔ 10m/s به طرف مرکز تختهٔ هدف، نقطهٔ P پرتاب می‌شود و $0{,}19\text{s}$ بعد در نقطهٔ Q که در امتداد قائم زیر P است فرو می‌رود؛ شکل ۲۴. (الف) فاصلهٔ PQ چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ پرتاب‌کننده از هدف چقدر بوده است؟

iopm.ir



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. تفنگی به‌طور افقی به طرف هدفی به فاصلهٔ ۱۳۰ft نشانه رفته است. گلوله ۷۵ر۰in زیر هدف می‌خورد. (الف) زمان پرواز گلوله چقدر بوده است؟ (ب) سرعت خروج گلوله چقدر بوده است؟

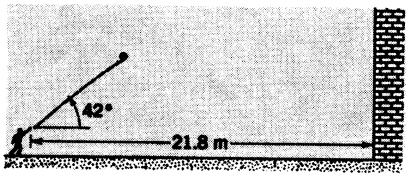
۱۵. گلوله‌ای با سرعت ۲۵۰m/s در راستای افق از تفنگی در ارتفاع ۴۵ر۰m از سطح زمین شلیک می‌شود. (الف) گلوله چه مدتی در هوا می‌ماند؟ (ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد گلوله به زمین از نقطهٔ شلیک چقدر است؟ (ج) مؤلفهٔ قائم سرعت گلوله، هنگام برخورد با زمین، چقدر است؟

۱۶. یک بازیکن بیسبال، توپ را با سرعت ۹۲ر۰mi/h به‌طور افقی پرتاب می‌کند. فاصلهٔ پرتاب‌کننده تا بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، ۶۰ر۰ft است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ ۳۰ر۰ft افقی اول مسیر را بپیماید؟ چقدر طول می‌کشد تا ۳۰ر۰ft دوم را بپیماید؟ (ب) در طی ۳۰ر۰ft افقی اول، توپ تحت تأثیر گرانش چقدر سقوط می‌کند؟ (ج) در ۳۰ر۰ft دوم چقدر؟ (د) چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟ مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.

۱۷. در یک داستان پلیسی، جسدی به فاصلهٔ ۱۵ft از دیوار ساختمانی، و زیر پنجره‌ای باز به ارتفاع ۸۰ft پیدا می‌شود. حدس می‌زنید که مرگ تصادفی بوده است یا خیر؟ چرا؟

۱۸. گلوله‌ای را با سرعت اولیهٔ ۱۵m/s و با زاویهٔ ۲۰° زیر سطح افق، از بالای صخره‌ای پرتاب می‌کنیم. (الف) جابه‌جایی افقی و (ب) جابه‌جایی عمودی گلوله ۲ر۳s بعد از پرتاب چقدر است؟

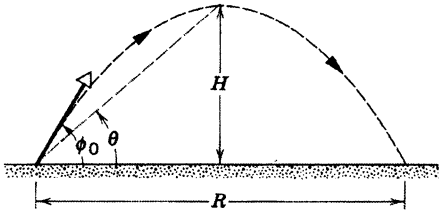
۱۹. توپ کوچکی را با سرعت ۲۵ر۳m/s با زاویهٔ ۴۲ر۰° بالاتر از سطح افق، مستقیماً به‌طرف دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۲۵). دیوار ۲۱ر۸m از نقطهٔ پرتاب توپ فاصله دارد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟ (ب) توپ چقدر بالاتر از نقطهٔ پرتاب به دیوار می‌خورد؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظهٔ برخورد به دیوار چقدر است؟ (د) آیا توپ، پس از گذشتن از نقطهٔ اوج مسیرش به دیوار می‌خورد؟



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. نشان بدهید که ارتفاع نقطهٔ اوج پرتابه، $y_{max} = (v_0 \sin \phi_0)^2/2g$ است.

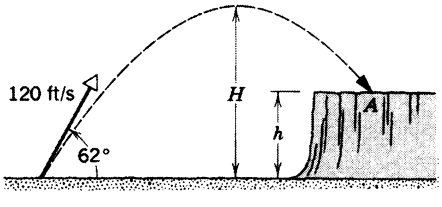
۲۱. (الف) پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. نشان بدهید که نسبت ارتفاع نقطهٔ اوج H به برد R برابر است با $H/R = 1/4 \tan\phi_0$. (ب) زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟ (شکل ۲۶).



شکل ۲۶. مسئله‌های ۲۱ و ۲۲

۲۲. پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. (الف) نشان بدهید که رابطهٔ زاویهٔ فرازِ نقطهٔ اوج نسبت به نقطهٔ پرتاب (θ در شکل ۲۶)، با ϕ_0 چنین به صورت $\tan\theta = 1/2 \tan\phi_0$ است. (ب) θ را به‌ازای $\phi_0 = 45°$ حساب کنید.

۲۳. سنگی را از سطح زمین با سرعت اولیهٔ ۱۲۰ft/s در جهت ۶۲° بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌کنند (شکل ۲۷). این سنگ ۵ر۵s پس از پرتاب در نقطهٔ A به‌زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخرهٔ (h)، (ب) سرعت سنگ درست پیش از برخورد در نقطهٔ A، و (ج) ارتفاع اوج سنگ نسبت به زمین (H) را پیدا کنید.



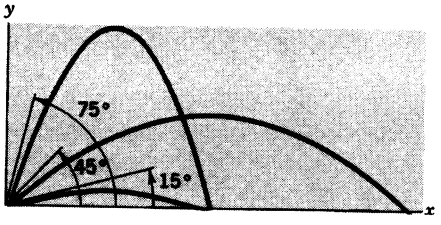
شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۳

iopm.ir

۲۴. در المپیک ۱۹۶۸ مکزیکوسیتی، باب بیمون رکورد ۸٫۹۰m را برای پرش طول به‌جا گذاشت. فرض کنید سرعت اولیهٔ او درلحظهٔ آغاز پرش ۹٫۵۰m/s (تقریباً برابر با سرعت دونده‌های سرعت) بوده باشد، اختلاف این رکورد با رکوردی که در همین شرایط و در غیاب مقاومت هوا به‌دست می‌آمد چقدر است؟ مقدار g در مکزیکوسیتی $9{,}78\text{m/s}^2$ است.

۲۵. در مثال ۳، (الف) اندازهٔ سرعت بسته در موقع برخورد با هدف و (ب) زاویهٔ برخورد نسبت به راستای قائم چقدر است؟ (ج) چرا زاویهٔ برخورد با زاویهٔ دیدِ هدف از نقطهٔ پرتاب برابر نیست؟

۲۶. (الف) گالیله درکتاب دو علم جدید می‌نویسد که "برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از $45°$ بیشتر یا کمتر باشند، برد یکسان است" این گفته را اثبات کنید (شکل ۲۸). (ب) دو زاویهٔ پرتابی را پیدا کنید که بردشان به‌ازای سرعت اولیهٔ $30{,}0\text{m/s}$ برابر با $20{,}0\text{m}$ باشد.



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. تردستی می‌تواند پنج توپ را در حرکت نگه دارد. او توپها را پشت سر هم تا ارتفاع $3{,}0\text{m}$ به هوا پرتاب می‌کند. (الف) مدت بین دو پرتاب متوالی چقدر است؟ (ب) وقتی که یکی از توپها به‌دست تردست می‌رسد، بقیهٔ توپها کجاها هستند؟ (از زمان لازم برای اینکه تردست توپ را از یک دستش به‌دست دیگر بدهد صرفنظر کنید.)

۲۸. گلوله‌های تفنگی با سرعت 1500ft/s از لوله خارج می‌شوند. هدف در فاصلهٔ 150ft از تفنگ است. چقدر بالاتر از هدف را باید نشانه گرفت تا گلوله به هدف بخورد؟

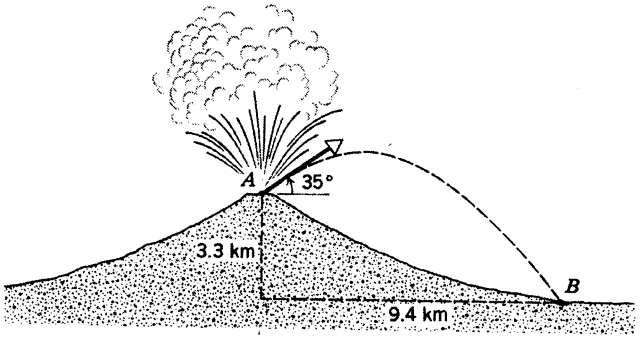
۲۹. توپی از بالاترین پلهٔ پلکانی قل می‌خورد و با سرعت افقی $5{,}0\text{ft/s}$ از لبهٔ آن رها می‌شود. ارتفاع هر پله $8{,}0\text{in}$، و عرض هر پله هم $8{,}0\text{in}$ است. اولین پله‌ای که توپ روی آن می‌افتد پلهٔ چندم است؟

۳۰. توپی را از زمین به هوا پرتاب می‌کنیم. سرعت توپ در ارتفاع $9{,}1\text{m}$ به‌صورت $\mathbf{v} = 7{,}6\mathbf{i} + 6{,}1\mathbf{j}$، برحسب m/s، است ($x$ محور افقی است و y محور قائم به طرف بالا). (الف) ارتفاع اوج توپ چقدر است؟ (ب) کل مسافت افقی‌ای که توپ می‌پیماید چقدر است؟ (ج) (اندازه و جهت) سرعت توپ را در لحظهٔ پیش از برخورد به زمین به‌دست بیاورید.

۳۱. منطقهٔ پرتاب توپ در زمین بیسبال، $1{,}25\text{ft}$ بالاتر از زمین بازی است. آیا پرتاب‌کننده می‌تواند توپی سریع را به‌طور افقی با سرعت $92{,}0\text{mi/h}$ پرتاب کند. چنانکه توپ در منطقهٔ ضربه قابل زدن باشد؟ منطقهٔ ضربه $6{,}5\text{ft}$ با منطقهٔ پرتاب فاصله دارد، فرض کنید که توپ، برای اینکه قابل زدن باشد، باید حداقل $1{,}30\text{ft}$ و حداکثر $3{,}60\text{ft}$ از نقطهٔ پرتاب پایین‌تر باشد.

۳۲. طبق معادلهٔ ۲۴، برد پرتابه‌ها نه تنها به v_0 و ϕ_0، بلکه به مقدار شتاب گرانشی g هم بستگی دارد. این شتاب، در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. در سال ۱۹۳۶، جسی اونس در بازیهای المپیک برلن ($g = 9{,}8128\text{m/s}^2$) رکورد جهانی $8{,}09\text{m}$ را برای پرش طول به‌جا گذاشت. اگر او، با همان مقدار v_0 و ϕ_0، در المپیک ۱۹۵۶ ملبورن ($g = 9{,}7999\text{m/s}^2$) شرکت می‌کرد، رکوردش چقدر تغییرمی‌کرد؟[1]

۳۳. هنگام فوران آتشفشان، ممکن است قطعات سنگ جامد هم از دهانهٔ آتشفشان به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را پاره‌های آتشفشانی می‌نامند. شکل ۲۹ مقطع کوه فوجی (در ژاپن) را نشان می‌دهد. (الف) پاره‌ای که با زاویهٔ $35°$ نسبت به سطح افقی از دهانهٔ A خارج می‌شود سرعتش چقدر باشد تا در نقطه B در پای کوه آتشفشان به زمین برسد؟ (ب) زمان حرکت این پاره در هوا چقدر است؟



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. یک بازیکن بیسبال می‌خواهد توپ را به نقطه‌ای در فاصلهٔ 127ft پرتاب کند. بیشترین سرعتی که او می‌تواند به توپ بدهد 85mi/h است. (الف) اگر توپ را به‌طور افقی و از فاصلهٔ $3{,}0\text{ft}$ بالاتر از سطح زمین پرتاب کند، چه بر سر توپ می‌آید؟ (ب) توپ را باید با چه زاویه‌ای به طرف بالا پرتاب کند تا بازیکن دیگری که در نقطهٔ فرود توپ ایستاده است بتواند آن‌را بگیرد؟ فرض کنید گیرندهٔ توپ هم آن‌را $3{,}0\text{ft}$ بالاتر از سطح زمین می‌گیرد. (ج) مدت پرواز توپ در این مورد چقدر است؟

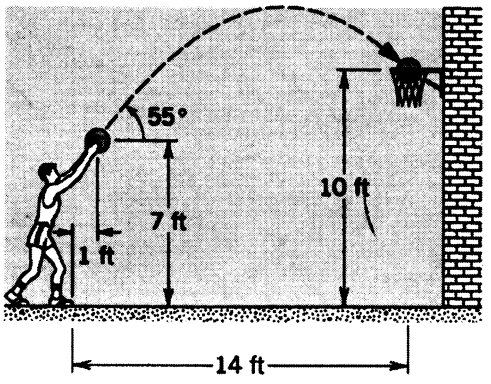
۳۵. بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویهٔ $55°$ بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می‌کند؛ شکل ۳۰. سرعت اولیهٔ توپ چقدر باشد تا توپ مستقیماً وارد حلقه شود؟ قطر حلقه 18in است. اطلاعات دیگر را از شکل ۳۰ بخوانید.

---

۱. رجوع کنید به

"The Earth's Gravity", Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, September 1955, p. 164.

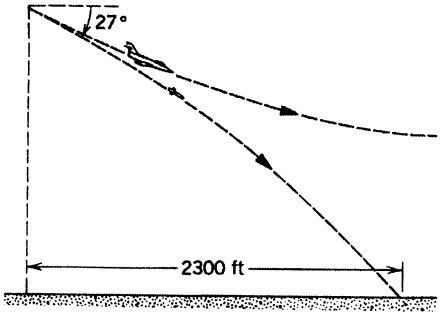
iopm.ir



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۵

۳۶. فوتبالیستی توپ را چنان شوت می‌کند که زمان پرواز آن یعنی ۴٫۵۰s و برد آن ۵۰yd(یعنی ۴۵٫۸m) است. توپ در ارتفاع ۵٫۰ft(یعنی ۱٫۵۲m) از سطح زمین، از پای بازیکن جدا می‌شود. (اندازه و جهت) سرعت اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟

۳۷. هواپیمایی با سرعت ۱۸۰mi/h و با زاویهٔ ۲۷° پایین‌تر از افق در حال شیرجه است که یک "گول‌زنک" رادار از آن رها می‌شود. فاصلهٔ افقی میان نقطهٔ رها شدن گول‌زنک و نقطهٔ برخورد آن با زمین ۲۳۰۰ft است. گول‌زنک (الف) چه مدتی در هوا بوده؟ و (ب) در چه ارتفاعی از هواپیما رها شده است؟ (شکل ۳۱)



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۳۷

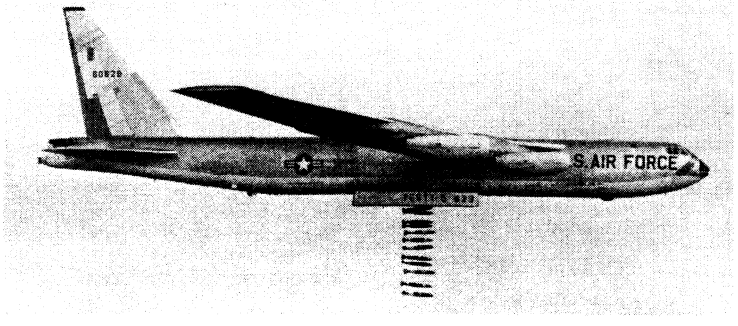
۳۸. بمب‌افکنی با زاویهٔ ۵۶٫۰° نسبت به راستای قائم شیرجه می‌رود و بمبی را در ارتفاع ۷۳۰m رها می‌کند. بمب ۵٫۱۰s بعد به زمین می‌رسد، اما به هدف برنمی‌خورد. (الف) سرعت بمب‌افکن، موقع رها کردن بمب، چقدر بوده است؟ (ب) بمب، در طی پروازش، چه مسافت افقی‌ای پیموده است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت بمب، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر بوده‌اند؟ (د) اندازهٔ سرعت، و زاویهٔ برخورد بمب نسبت به محور قائم، در زمان برخورد بمب با زمین چقدر بوده است؟

۳۹. طول هواپیمای B_۵۲ (شکل ۳۲) ۴۹m است. این هواپیما دارد با سرعت ۸۲۰km/h(یعنی ۵۱۰mi/h) بر فراز منطقه‌ای که قرار است بمباران شود پرواز می‌کند. فاصلهٔ حفره‌هایی که بمبها روی زمین ایجاد می‌کنند از یکدیگر چقدر خواهد بود؟ هر کمیت دیگری را که لازم دارید مستقیماً روی شکل اندازه‌گیری کنید، فرض کنید باد نمی‌وزد و مقاومت هوا را هم ناچیز بگیرید. مقاومت هوا چه تأثیری بر جواب شما خواهد داشت؟

۴۰. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیهٔ 64ft/s با زاویهٔ ۴۲° بالاتر از سطح افقی شوت می‌کند. در همان لحظه بازیکن دیگری که به فاصلهٔ 65yd از قبلی در جهت حرکت افقی توپ ایستاده است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. سرعت متوسط این بازیکن چقدر باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟ از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.

۴۱. (الف) تنیس‌بازی در یک مسابقه، چنان "سِرو می‌زند" که به توپ سرعت ۲۳٫۶m/s می‌دهد (این مقدار توسط رادار ثبت می‌شود). اگر توپ ۲٫۳۷m بالاتر از سطح زمین و در راستای افق از راکت جدا شده باشد، در چه فاصله‌ای از بالای تور عبور می‌کند؟ تور در فاصلهٔ ۱۲m از محل سرویس است و ۰٫۹۰m ارتفاع دارد. (ب) فرض کنید تنیس‌باز به همان ترتیب سرو بزند، اما توپ با زاویهٔ ۵٫۰° پایین‌تر از سطح افقی از راکت جدا شود. آیا این بار هم توپ از تور می‌گذرد؟

۴۲. یک بازیکن بیسبال، توپ را با چوب بیسبال در ارتفاع ۴٫۰ft از سطح زمین چنان می‌زند که زاویهٔ پرتاب توپ ۴۵° و برد افقی آن



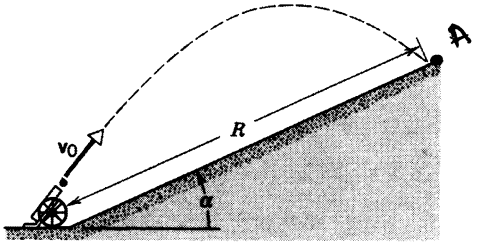
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۹

iopm.ir

۳۵۰ft می‌شود. توپ از زمین خارج می‌شود و به نرده‌ای به ارتفاع ۲۴ft می‌رسد که ۳۲۰ ft از نقطهٔ پرتاب فاصله دارد. آیا توپ از بالای نرده می‌گذرد؟ اگر می‌گذرد، در چه فاصله‌ای؟

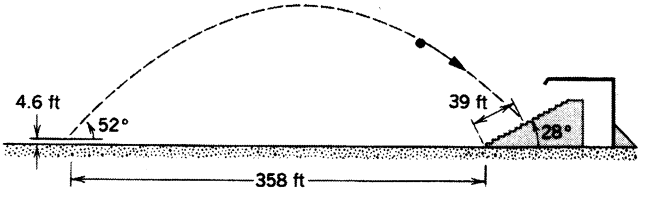
۴۳. بازیکنی می‌تواند توپ فوتبال را با سرعت ۲۵m/s شوت کند. زاویهٔ شوت نسبت به سطح زمین در چه گستره‌ای باشد تا توپ درست از زیر تیر افقی وارد دروازه شود؟ دروازه ۵۰ m دورتر است و ارتفاع تیر افقی آن از سطح زمین ۳٫۴۴m است.

۴۴. توپی گلوله‌هایش را با سرعت v_0 پرتاب می‌کند. این توپ در پای تپه‌ای به زاویهٔ شیب α قرار دارد؛ شکل ۳۳. زاویهٔ پرتاب گلوله نسبت به سطح افقی چقدر باشد تا برد گلوله‌ها روی تپه بیشینه شود؟



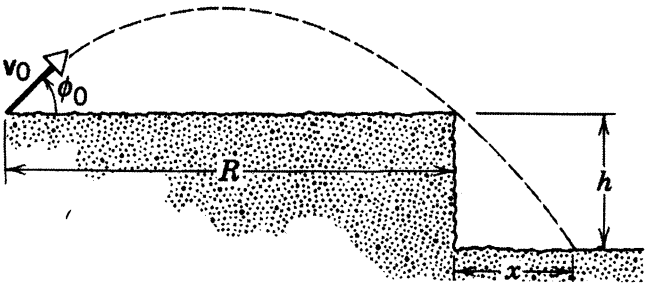
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. در یک بازی بیسبال، بازیکنی توپ را با چوب خود در ارتفاع ۴٫۶۰ft از سطح زمین می‌زند. زاویهٔ پرتاب توپ نسبت به سطح افقی ۵۲٫۰° است. توپ در جایگاه تماشاگران، و به فاصلهٔ ۳۹٫۰ft از پایین آن، فرود می‌آید؛ شکل ۳۴. شیب جایگاه ۲۸٫۰° است و پایین‌ترین نیمکتهای آن ۳۵۸ft از محل ضربه فاصله دارند. توپ با چه سرعتی از چوب بازیکن جدا شده است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۵

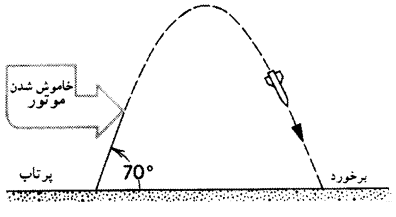
۴۶. پرتابه‌هایی را از فاصلهٔ R از لبهٔ صخره‌ای به ارتفاع h چنان پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ای به فاصلهٔ افقی x از پای صخره فرود بیایند؛ شکل ۳۵. ϕ_0 و v_0 را چنان تعیین کنید که x کمینه شود. فرض کنید می‌توانیم v_0 را از صفر تا مقدار بیشینهٔ متناهی v_{max} تغییر بدهیم و ϕ_0 را هم به دلخواه تنظیم کنیم. شرط مسئله این است که پرتابه باید تنها یک بار به زمین بخورد.



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۶

۴۷. متصدی رادار، از زمین پرتابه‌ای را "مشاهده می‌کند" که دارد نزدیک می‌شود. در یک لحظهٔ معین، اطلاعات دریافتی از حرکت پرتابه این است: پرتابه در نقطهٔ اوج است و با سرعت v به‌طور افقی حرکت می‌کند؛ فاصلهٔ مستقیم پرتابه از محل L است؛ پرتابه تحت زاویهٔ θ، بالاتر از سطح افقی، دیده می‌شود. (الف) فاصلهٔ D بین ناظر و نقطهٔ برخورد پرتابه به زمین چقدر است؟ D را برحسب مقادیر مشاهده شدهٔ v، L، θ، و مقدار معلوم g به‌دست بیاورید. فرض کنید زمین مسطح است و ناظر در صفحهٔ مسیر پرتابه است. (ب) آیا پرتابه از ناظر می‌گذرد یا جلوی او به زمین می‌خورد؟

۴۸. موشکی از حالت سکون، با شتاب ۴۶٫۰m/s² و روی خط راستی با زاویهٔ ۷۰٫۰° نسبت به سطح افقی، شروع به حرکت می‌کند. مدت پرواز تحت تأثیر نیروی پیشران، ۳۰٫۰s است. پس از این مدت، موتور خاموش می‌شود و موشک در مسیری سهموی به زمین برمی‌گردد؛ شکل ۳۶. (الف) زمان پرواز، از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ برخورد، چقدر است؟ (ب) ارتفاع اوج موشک چقدر است؟ (ج) فاصلهٔ نقطهٔ پرتاب از نقطهٔ برخورد چقدر است؟ از تغییر g با ارتفاع صرفنظر کنید.

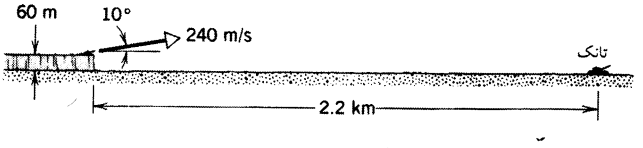


شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۸

۴۹. سلاح ضد تانکی روی لبهٔ سطحی است که ۶۰٫۰ m بالاتر از دشتِ اطراف است؛ شکل ۳۷. خدمهٔ سلاح، یکی از تانکهای دشمن را در دشت در فاصلهٔ افقی ۲٫۲۰km از سلاح می‌بیند که ساکن است. در همین لحظه، خدمهٔ تانک متوجه سلاح ضد تانک می‌شوند و با شتاب ۰٫۹۰۰m/s² شروع به حرکت در جهت مخالف می‌کنند و از سلاح دور می‌شوند. سلاح ضد تانک می‌تواند گلوله‌ای با سرعت ۲۴۰m/s و با زاویهٔ ۱۰٫۰° بالاتر از سطح افقی شلیک کند. خدمهٔ سلاح باید چه

iopm.ir

مدتی بعد از شروع حرکت تانک شلیک کنند تا گلوله به تانک بخورد؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۹

۵۰. بازیکنی می‌تواندتوپ بیسبال را حداکثر تا فاصله ۶۰٫۰m پرتاب کند. همین بازیکن توپ را حداکثر تا چه ارتفاعی می‌تواند پرتاب کند؟ فرض کنید که توپ، در هر دو حالت، از ارتفاع ۱٫۶۰m و با سرعت اولیهٔ یکسان رها می‌شود.

بخش ۴ـ۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

۵۱. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون روی مداری دایره‌ای به شعاع $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}$m و با سرعت $۲٫۱۸ \times ۱۰^{۶}$m/s به‌دور پروتون می‌گردد. شتاب الکترون در این مدل چقدر است؟

۵۲. فضانوردی در یک دستگاه گریز از مرکز (سانتریفوژ) به شعاع ۵٫۲m چرخانده می‌شود. (الف) به‌ازای چه سرعتی، شتاب فضانورد $۶٫۸g$ می‌شود؟ (ب) این سرعت متناظر با چند دور بردقیقه است؟

۵۳. ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به ارتفاع ۶۴۰km از سطح زمین حرکت می‌کند. زمان یک دور چرخش ماهواره ۹۸٫۰min است. (الف) سرعت ماهواره چقدر است؟ (ب) شتاب سقوط آزاد در مدار ماهواره چقدر است؟

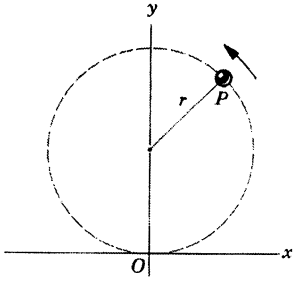
۵۴. شعاع چرخ وفلکی ۱۵m است. این چرخ و فلک، هر دقیقه پنج بار به دور محور افقی‌اش می‌گردد. (الف) (اندازه و جهت) شتاب مسافران را در بالاترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید. (ب) شتاب مسافران را در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید.

۵۵. پنکه‌ای در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور می‌زند. نقطه‌ای در بالای پره را در نظر بگیرید که ۰٫۱۵m از محور فاصله دارد. (الف) در هر دور، این نقطه چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) سرعت این نقطه چقدر است؟ (ج) شتاب این نقطه چقدر است؟

۵۶. قطار سریع‌السیر TGV آتلانتیک، در مسیر بین پاریس و لمان در فرانسه کار می‌کند. بیشترین سرعت این قطار ۳۱۰km/h است. (الف) اگر قرار باشد این قطار با همین سرعت از پیچی بگذرد، و اگر شتاب مجاز مسافران $۰٫۰۵g$ باشد، شعاع پیچ حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع پیچی ۰٫۹۴km باشد، سرعت قطار در آن پیچ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

۵۷. فرض بر این است که بعضی از ستاره‌های نوترونی (ستاره‌هایی فوق‌العاده چگال) با آهنگِ حدود ۱rev/s به‌دور خود می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰km باشد (که نوعاً چنین است)، (الف) سرعت نقاط واقع بر استوای این ستاره چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای این نقاط چقدر است؟

۵۸. ذرهٔ P با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع ۳٫۰m حرکت می‌کند و هر ۲۰s یک دور می‌زند؛ شکل ۳۸. ذره در $t = ۰$ از O می‌گذرد. (الف) اندازه و جهت بردار مکان ذره در زمانهای ۵٫۰s، ۷٫۵s، و ۱۰s (نسبت به O)؛ (ب) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی در بازهٔ ۵٫۰ ثانیه‌ای از پایان ثانیهٔ پنجم تا پایان ثانیهٔ دهم؛ (ج) بردار سرعت متوسط در این بازه؛ (د) بردار سرعت لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه؛ و (هـ) بردار شتاب لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه را پیدا کنید. زاویه‌ها را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x بسنجید.

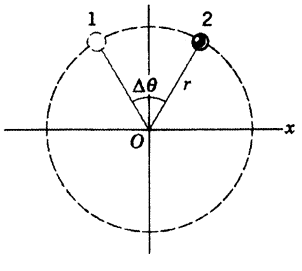


شکل ۳۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. ذره‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات O، با سرعت v به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند. (الف) نشان بدهید که زمان Δt لازم برای جابه‌جایی زاویه‌ای ذره به اندازهٔ $\Delta\theta$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{۲\pi r}{v}\,\frac{\Delta\theta}{۳۶۰^\circ}$$

که در آن $\Delta\theta$ برحسب درجه و r شعاع دایره است. (ب) در شکل ۳۹، مؤلفه‌های x و y سرعت در نقاط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. نشان بدهید که برای دو نقطهٔ متقارن نسبت به محور y، و به‌ازای $\Delta\theta = ۹۰^\circ$ خواهیم داشت $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹v^۲/r$. (ج) نشان بدهید که اگر $\Delta\theta = ۳۰^\circ$ باشد، $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹۹v^۲/r$ است. (د) نشان بدهید که در حد $\Delta\theta \to ۰$، $\overline{a}_y \to -v^۲/r$، و اینکه تقارن دورانی ایجاب می‌کند که این نتیجه برای همهٔ نقاط روی دایره درست باشد.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. کودکی سنگی را که به نخی بسته است روی دایره‌ای افقی به شعاع ۱٫۴m و در ارتفاع ۱٫۹m از سطح زمین می‌گرداند. نخ پاره می‌شود و سنگ به‌طور افقی پرتاب می‌شود و ۱۱m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

iopm.ir

۶۱. (الف) با استفاده از داده‌های پیوست ج، نسبت شتابهای مرکزگرای زمین و زحل را، در گردش به دور خورشید، به‌دست بیاورید. فرض کنید که هر دو سیاره با سرعت ثابت در مدار دایره‌ای به دور خورشید می‌گردند. (ب) نسبت فاصلهٔ این دو سیاره از خورشید چقدر است؟ (ج) جوابهای دو قسمت (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و رابطهٔ ساده‌ای بین شتاب مرکزگرا و فاصله از خورشید پیشنهاد کنید. فرضیهٔ خودتان را با محاسبهٔ همین نسبت برای دو سیارهٔ دیگر بیازمایید.

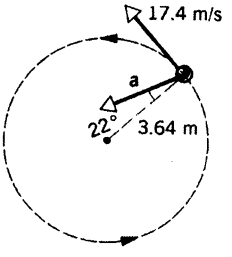
۶۲. (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (به علت چرخش زمین به دور خودش) چقدر است؟ (ب) دورهٔ تناوب چرخش زمین باید چقدر می‌بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا $9{,}8\,m/s^2$ باشد؟

۶۳. شتاب ناشی از چرخش زمینِ شخصی که در عرض جغرافیایی 40° است، چقدر است؟

۶۴. فرض کنید شخصی با $1{,}6\,m$ قد به مدت $24\,h$ در عرض جغرافیایی 50°، صاف ایستاده باشد. (الف) در این مدت، مسافتی که "نوک" سر او می‌پیماید چقدر بیشتر از مسافتی است که نوک پایش می‌پیماید؟ (ب) شتاب نوک سر او چقدر بزرگتر از شتاب نوک پاهایش است؟ فقط آثار ناشی از چرخش زمین را در نظر بگیرید.

بخش ۴ـ۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای

۶۵. ذره‌ای در مسیری دایره‌ای به شعاع $3{,}64\,m$ حرکت می‌کند. در یک لحظهٔ معین، سرعت ذره $17{,}4\,m/s$، و شتاب آن در جهت $22{,}0^\circ$ نسبت به جهت مرکز دایره است؛ شکل ۴۰. (الف) آهنگ افزایش اندازهٔ سرعت ذره چقدر است؟ (ب) اندازهٔ شتاب ذره چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۶۵

۶۶. ذره‌ای طبق معادلات

$$x = R\,\sin\,\omega t + \omega R t$$
$$y = R\,\cos\,\omega t + R$$

در صفحه حرکت می‌کند؟ ω و R ثابت‌اند. مسیر حرکت این ذره را چرخزاد می‌نامند. این منحنی، مسیر نقطه‌ای است بر محیط چرخی که بدون لغزش در راستای محور x می‌غلتد. (الف) مسیر را رسم کنید. (ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را، در حالتی که در بیشترین و کمترین مقدار y است، به‌دست بیاورید.

بخش ۴ـ۶ حرکت نسبی

۶۷. شخصی پلهٔ برقی ساکنی به طول $15\,m$ را در $90\,s$ می‌پیماید. اگر شخصی روی همین پلهٔ برقی بایستد و پلهٔ برقی حرکت کند، همان مسیر در $60\,s$ طی می‌شود. اگر شخصی از پله برقی بالا برود و پله هم در حرکت باشد، پیمودن این مسیر چقدر طول می‌کشد؟ آیا جواب به طول پله برقی بستگی دارد؟

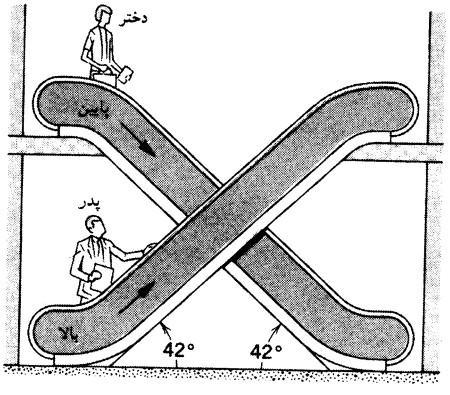
۶۸. پایانهٔ فرودگاه ژنو در سویس، یک "پیاده‌روی متحرک" دارد که حرکت مسافر را در یک راهرو طویل سریع می‌کند. پیتر از این پیاده‌رو استفاده نمی‌کند و راهرو را در $150\,s$ می‌پیماید. پل فقط روی پیاده‌رو می‌ایستد و راهرو را در $70\,s$ می‌پیماید. مری ضمن استفاده از پیاده‌رو، روی آن راه هم می‌رود. با فرض اینکه سرعت راه رفتن مری و پیتر یکسان باشد، چقدر طول می‌کشد تا مری راهرو را بپیماید؟

۶۹. زمان برنامه‌ریزی شدهٔ یک پرواز بین قاره‌ای به مسافت $2700\,mi$، در جهت غرب $50\,min$ بیشتر است تا در جهت شرق. سرعت هواپیما نسبت به هوا $600\,mi/h$ است. در تعیین این برنامه، چه فرضی دربارهٔ سرعت وزش باد شده است؟ باد را شرقی غربی در نظر بگیرید.

۷۰. برف در راستای قائم با سرعت ثابت $7{,}8\,m/s$ می‌بارد. راننده‌ای اتومبیل‌اش را روی جاده‌ای مسطح با سرعت $55\,km/h$ می‌راند. از دید راننده، دانه‌های برف (الف) با چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، و (ب) با چه سرعتی سقوط می‌کنند؟

۷۱. قطاری با سرعت $28\,m/s$ (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می‌بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می‌کند. مسیر قطره‌های باران، از دید ناظرِ ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویهٔ 64° می‌سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش باران را دقیقاً عمود به سطح زمین می‌بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

۷۲. در یک فروشگاه بزرگ، شخصی روی پله برقی‌ای با زاویهٔ شیب 42° که با سرعت $0{,}75\,m/s$ به بالا می‌رود ایستاده است. این شخص از کنار دخترش می‌گذرد که روی پله برقی مشابهی ایستاده است و دارد از طبقهٔ بالا به پایین می‌آید؛ شکل ۴۱. بردار سرعت شخص را نسبت به دخترش پیدا کنید.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۷۲

iopm.ir

۷۳. خلبانی باید در جهت شرق از A به B برود. بعد در جهت غرب به A برگردد. سرعت هواپیما نسبت به هوا $\mathbf{v}$، و سرعت هوا نسبت به زمین $\mathbf{u}$ است. فاصلهٔ A تا B برابر با l است، و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت می‌ماند. (الف) نشان بدهید که اگر $u = 0$ باشد (هوای ساکن)، زمان رفت و برگشت $t_0 = 2l/v$ است. (ب) فرض کنید که سرعت باد در جهت شرق (یا غرب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

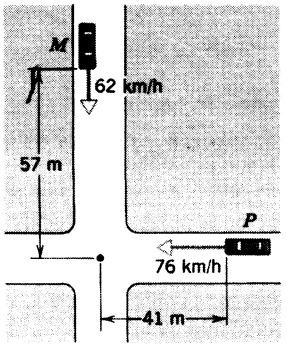
$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

(ج) فرض کنید که سرعت باد در جهت شمال (یا جنوب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

(د) در قسمتهای (ب) و (ج) باید فرض کرد که $u < v$ است. چرا؟

۷۴. دو بزرگراه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ شکل ۴۲. در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده است، اتومبیل پلیس (P) در فاصلهٔ 41m از تقاطع است و با سرعت 76km/h حرکت می‌کند. اتومبیل سواری (M) 57m از تقاطع فاصله دارد و با سرعت 62km/h در حرکت است. سرعت (اندازه و زاویهٔ بردار سرعت نسبت به خط دید) اتومبیل M را نسبت به اتومبیل پلیس پیدا کنید.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۷۴

۷۵. هلی‌کوپتری بر فراز یک دشت مسطح، روی خط راست پرواز می‌کند. سرعت هلی‌کوپتر ثابت، و برابر با 62m/s است. ارتفاع پرواز هم ثابت، و برابر با 95m است، بسته‌ای با سرعت افقی 12m/s نسبت به هلی‌کوپتر، و در خلاف جهت حرکت هلی‌کوپتر، از آن رها می‌شود. (الف) سرعت اولیهٔ بسته نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ افقی بین هلی‌کوپتر و بسته، در لحظهٔ برخورد بسته به زمین چقدر است؟ (ج) زاویهٔ بردار سرعت بسته با زمین، درست پیش از برخورد، از دید ناظر زمین چقدر است؟ (د) این زاویه از دید خلبان هلی‌کوپتر چقدر است؟

۷۶. آسانسوری با شتاب $4.0\,ft/s^2$ بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت آن $8.0\,ft/s$ به طرف بالاست، پیچ لقی از سقف آسانسور رها می‌شود. بلندی اتاقک آسانسور $9.0\,ft$ است. (الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور، و (ب) مسافت سقوط پیچ از دید ناظر زمین چقدر است؟

۷۷. هواپیمای سبکی با سرعت 480km/h نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصلهٔ 810km به طرف شمال است. خلبان متوجه می‌شود که هواپیما را باید به اندازهٔ 21° از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت 1.9h به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را پیدا کنید.

۷۸. پلیس ایالت نیوهمپشایر، برای پاییدن سرعت اتومبیلها در بزرگراهها، از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید سرعت یکی از این هواپیماها، در هوای ساکن، 135mi/h باشد. هواپیما مستقیماً به طرف شمال پرواز می‌کند تا همواره بر فراز یک بزرگراه شمالی-جنوبی باشد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان خبر می‌دهد که بادی با سرعت 70mi/h جریان دارد، اما فراموش می‌کند جهت باد را بگوید. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود باد، باز هم هواپیمایش می‌تواند 135mi بر فراز بزرگراه را طی 1h بپیماید. یعنی اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به زمین، همان است که در هوای آرام بود. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) سر هواپیما در چه جهتی است، یعنی زاویهٔ بین محور هواپیما و بزرگراه چقدر است؟

۷۹. شخصی می‌تواند قایقی را با سرعت 4.0mi/h در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد که سرعت جریان آن 2.0mi/h است، قایقش را باید در چه جهتی هدایت کند تا درست به نقطهٔ مقابل برسد؟ (ب) اگر عرض رودخانه 4.0mi باشد، چقدر طول می‌کشد تا از رودخانه بگذرد؟ (ج) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای 2.0mi پایین‌تر برود و برگردد؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای 2.0mi بالاتر برود و برگردد؟ (ه) قایق را در چه جهتی براند تا در کوتاهترین زمان ممکن از رودخانه بگذرد؟ این زمان چقدر است؟

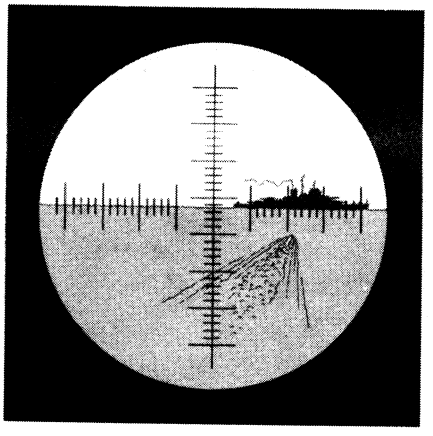
۸۰. واگنی چوبی روی ریل مستقیمی با سرعت v_1 حرکت می‌کند. راهزنی با تفنگ پرقدرتی به آن شلیک می‌کند سرعت اولیهٔ گلوله v_2 است. گلوله از هر دو دیوارهٔ جانبی واگن می‌گذرد و دو سوراخ ایجاد می‌کند. این سوراخها، از دید ناظر واگن، درست روبه روی هم‌اند. گلوله در چه جهتی، نسبت به واگن شلیک شده است؟ فرض کنید که گلوله هنگام ورود به واگن منحرف نشده، اما سرعتش به اندازهٔ 20٪ کم شده است. فرض کنید $v_1 = 85\,km/h$ و $v_2 = 650\,m/s$ است. (تعجب می‌کنید که برای حل مسئله لازم نیست که عرض واگن معلوم باشد؟)

۸۱. مردی می‌خواهد با قایق از رودی به عرض 500m بگذرد. سرعت حاصل از پاروزنی او (نسبت به آب) 3.0km/h، سرعت جریان آب 2.0km/h، و سرعت پیاده‌روی مرد در ساحل 5.0km/h است. (الف) مسیری را پیدا کنید که این شخص بتواند از طریق آن در

iopm.ir

کوتاهترین زمانِ ممکن درست به نقطهٔ مقابل در آن طرف رودخانه برسد. (حرکت می‌تواند ترکیبی از قایق‌رانی و پیاده‌روی باشد.) (ب) این زمان چقدر است؟

۸۲. رزم‌ناوی با سرعت ۲۴km/h به طرف شرق می‌رود. از یک زیردریایی درفاصلهٔ ۴٫۰km اژدری با سرعت ۵۰km/h به طرف آن شلیک می‌شود؛ شکل ۴۳. ناو از زیردریایی، در جهت ۲۰° شرقِ شمال مشاهده می‌شود. (الف) اژدر در چه جهتی شلیک شود تا به ناو اصابت کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا اژدر به ناو برسد؟



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۸۲

۸۳. الکترونی با سرعت $0.42c$ نسبت به ناظر B حرکت می‌کند. ناظر B با سرعت $0.63c$، در همان جهت حرکت الکترون، نسبت به ناظر A در حرکت است. سرعت الکترون از دید ناظر A چقدر است؟

۸۴. رصد نشان می‌دهد که کهکشان آلفا با سرعت $0.350c$ از ما دور می‌شود. کهکشان بتا هم، که درست در نقطهٔ مقابل کهکشان آلفاست، با همین سرعت از ما دور می‌شود. از دید ناظر آلفا (الف) کهکشان ما و (ب) کهکشان بتا با چه سرعتی از کهکشان خودش دور می‌شوند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۸۵. کامپیوتر می‌تواند جدولی از مختصات، مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب یک جسم در زمانهای معین را تهیه کند. به کمک این جدول می‌توانیم کمیتهای مورد نظر، مثلاً اوج مسیر، زمان برگشت به زمین، و غیره را جستجو کنیم. برنامه‌ای بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات و مؤلفه‌های سرعت یک پرتابه را در پایان بازه‌های زمانی Δt از زمان t_1 تا زمان t_2 محاسبه کند. فرض کنید پرتابه در $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. کامپیوتر باید $x = v_0 t\cos\ \theta_0$، $y = v_0 t\sin\ \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$، $v_x = v_0\cos\ \theta_0$، و $v_y = v_0\sin\ \theta_0 - gt$ را به ازای $t = t_1$، $t = t_1 + \Delta t$، $t = t_1 + 2\Delta t$، ... $t = t_1 + N\Delta t$ حساب کند. ابتدا مقادیر v_0، θ_0، t_1، Δt، و N را به کامپیوتر بدهید. برنامه را چنان تنظیم کنید که در هر اجرا به راحتی بشود t_1، Δt، و N را تغییر داد بی‌آنکه نیاز به تغییر بقیهٔ مقادیر باشد. برنامه را با مسئلهٔ زیر آزمایش کنید. نتایج کامپیوتری را با نتایج حاصل از عبارتهای جبری مناسب مقایسه کنید.

پرتابه‌ای با سرعت $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ ۲۵° بالاتر از افق، از زمین شلیک می‌شود. (الف) $x(t)$، $y(t)$، $v_x(t)$، و $v_y(t)$ را در هر ۰٫۱s، از $t = 0$ تا $t = 4.5\,\mathrm{s}$، به‌دست بیاورید. (ب) دو زمان متوالی را که لحظهٔ رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج بین آن دو است پیدا کنید. حالا برنامه را دوباره اجرا کنید. این بار t_1 را زمان کوچکتر دو زمان بالا، و Δt را 0.005s بگیرید. با استفاده از جدول، مختصات نقطهٔ اوج را تا ۲ رقم با معنی به‌دست بیاورید. (ج) با استفاده از همین روش، زمان، مختصات، و مؤلفه‌های سرعت پرتابه را در موقعی که به ارتفاع نقطهٔ شلیک برگشته است پیدا کنید.

۸۶. ذره‌ای با شتاب $a_x = -1.7$ و $a_y = -0.45$ در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. (در این مسئله، همهٔ طولها برحسب سانتی‌متر و همهٔ زمانها برحسب ثانیه‌اند.) در $t = 0$، ذره با سرعت $v_x = 10$ و $v_y = 2$ از نقطهٔ $x = 1$، $y = 10$ می‌گذرد. برنامه‌ای بنویسید که متغیرهای زیر را، که حرکت ذره را توصیف می‌کنند، تنها برای مواقعی که ذره در ربع اول (طرف راستِ بالا) دستگاه مختصات است جدول‌بندی کند. t، x، y، r، ϕ(یعنی $\tan^{-1}y/x$)، v، v_y، v_x، θ(یعنی $\tan^{-1}v_y/v_x$). با استفاده از جدولی که حاصل می‌شود، به این پرسشها پاسخ بدهید. (الف) ذره در چه زمانی و درکدام نقطه از ربع اول خارج می‌شود؟ (ب) بیشترین فاصلهٔ ذره از مبدأ چقدر است، و در این نقطه چه سرعتی دارد؟ (ج) ذره، در لحظه‌ای که سرعت آن ۲٫۰۰ است، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (د) ذره در چه نقطه‌ای خط ۴۵° (نیمساز ربع اول) را قطع می‌کند؟

۸۷. مختصات جسمی که روی دایره به شعاع R به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند، $x = R\cos\ \omega t$ و $y = R\sin\ \omega t$ است؛ ω ثابت و زاویهٔ ωt برحسب رادیان است. برنامه‌ای بنویسید یا الگوریتمی طرح کنید، که بردار سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی t_0 تا $t_0 + \Delta t$ محاسبه کند. به ازای $R = 1.5\,\mathrm{m}$ و $\omega = 0.5\,\mathrm{rad/s}$، حساب کنید که $\overline{v}_x = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$ و $\overline{v}_y = [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$ چقدر است. برنامه را چنان تنظیم کنید که بشود در هر اجرا مقادیر t_0 و Δt را به‌راحتی تغییر داد. اگر همهٔ متغیرها را با دقت مضاعف بگیرید، افت دقت در محاسبات کم می‌شود. (الف) به‌ازای $t_0 = 1\,\mathrm{s}$، x، y، $\overline{v}_x$، $\overline{v}_y$، و $x\overline{v}_x + y\overline{v}_y$ را حساب کنید. عبارت اخیر برابر است با حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای مکان و سرعت متوسط که صفر است اگر این دو بردار بر هم عمود باشند. حالا این محاسبه را به‌ازای $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$، و $\Delta t = 0.0001\,\mathrm{s}$ تکرار کنید. دقت کنید که مؤلفه‌های $\overline{v}$ ، مرتباً به مقادیر حدی خودشان، که مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای v‌اند، نزدیکتر می‌شوند، و خود $\overline{\mathbf{v}}$ هم مرتباً به جهت بردار مکان (یعنی مماس بر دایره) نزدیکتر می‌شود.

iopm.ir

چنانکه مستقیماً با مشتق‌گیری می‌شود نشان داد، مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ عبارت‌اند از $v_x = -\omega R \sin\ \omega t$ و $v_y = \omega R \cos\ \omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و به کمک آن ببینید که برنامهٔ شما با چه دقتی $\mathbf{v}$ را تخمین زده است. (ب) حالا برنامه را تغییر بدهید و مؤلفه‌های شتاب متوسط، $\overline{a}_x = [v_x(t_\circ + \Delta t) - v_x(t_\circ)]/\Delta t$ و $\overline{a}_y = [v_y(t_\circ + \Delta t) - v_y(t_\circ)]/\Delta t$ را حساب کنید. برای این کار، عبارت $v_x(t) = -\omega R \sin\ \omega t$ و $v_y(t) = \omega R \cos\ \omega t$ را به‌کار ببرید. $x\overline{a}_y - y\overline{a}_x$ را هم حساب کنید. قدرمطلق این مقدار، اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری بردارهای مکان و شتاب است، که اگر این دو بردار با هم موازی باشند، صفر است. محاسبه را به‌ازای $t_\circ = 1\text{s}$ و $\Delta t = 1\text{s}$، $\Delta t = 0.1\text{s}$، $\Delta t = 0.01\text{s}$، $\Delta t = 0.001\text{s}$، و $\Delta t = 0.0001\text{s}$ انجام بدهید. توجه کنید که $\overline{\mathbf{a}}$ مدام به مقدار حدی‌اش، که شتاب لحظه‌ای $\mathbf{a}$ است، نزدیکتر می‌شود، و خود $\mathbf{a}$ هم به جهت بردار مکان نزدیکتر می‌شود. مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ عبارت‌اند از $a_x = -\omega^2 R \cos\ \omega t$ و $a_y = -\omega^2 R \sin\ \omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و با نتایج حاصل از برنامهٔ خودتان مقایسه کنید. همچنین تحقیق کنید که نتایج حاصل از برنامهٔ شما هم مقدار $a = v^2/R$ را برای اندازهٔ شتاب به‌دست می‌دهد.

iopm.ir

سینماتیک

۱ـ یک قایق موتوری که در جهت جریان رودخانه حرکت می کند، در نقطهٔ A از یک تخته شناور بر روی آب سبقت می گیرد. بعد از زمان $\tau = ۶۰$ دقیقه، قایق تغییر جهت می دهد و پس از مدت زمانی دوباره به تخته در فاصلهٔ $l = ۶km$ از نقطهٔ A می رسد. سرعت جریان آب را بیابید. فرض کنید توان موتور قایق در طول حرکت ثابت است.

۲ـ ذره ای نصف مسیری را با سرعت $v_۰$ طی می کند. باقیماندهٔ مسیر را در نصف زمان با سرعت $v_۱$ و در نصف زمان باقیمانده با سرعت $v_۲$ طی می کند. متوسط سرعت ذره را در کل مسیر به دست آورید.

۳ـ متحرکی از حالت سکون روی خط راست شروع به حرکت می کند. ابتدا با شتاب ثابت $a = ۵m/s^۲$ حرکت می کند، سپس با سرعت ثابت ادامه مسیر می دهد و بعد با همان شتاب اولیه از سرعتش می کاهد. کل زمان حرکت $t = ۲۵s$ به طول می انجامید. اگر سرعت متوسط در طول حرکت $۷۲\frac{km}{h}$ باشد، مدت زمانی که متحرک با سرعت ثابت حرکت کرده است را بیابید.

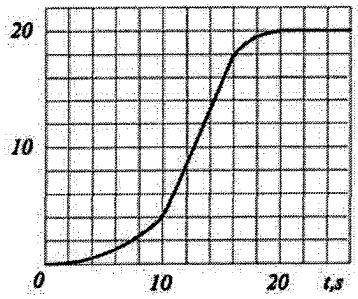
۴ـ متحرکی در خط مستقیم در یک جهت حرکت می کند. شکل ۱ مسافت طی شده توسط متحرک را بر حسب تابعی از زمان نمایش می دهد. به کمک شکل مطلوب است

محاسبه :

الف) سرعت متوسط متحرک در طول حرکت ؛

ب) حداکثر سرعت متحرک در طول حرکت ؛

ج) لحظهٔ $t.$ که در آن سرعت لحظه ای با سرعت متوسط متحرک تا آن لحظه برابر باشد؛



شکل ۱

د) شتاب متوسط متحرک در ۱۰ و ۱۶ ثانیه اول حرکت

۵ـ دو ذرهٔ ۱ و ۲ با بردار سرعتهای ثابت $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ حرکت می کنند. اگر بردارهای مکان دو ذره $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ باشد، چه رابطه ای بین این چهار بردار باید باشد تا این دو ذره با یکدیگر برخورد کنند؟

۶ـ یک کشتی در طول خط استوا با سرعت $30 km/h$ به طرف شرق حرکت می کند. باد با سرعت $15 km/h$ در جهت جنوب شرقی با زاویه ۶۰ درجه نسبت به خط استوا می وزد سرعت نسبی باد نسبت به کشتی v' و زاویه ϕ' بین خط استوا و جهت وزش باد را از دید ناظری که روی کشتی است به دست آورید.

۷ـ دو شناگر از نقطهٔ A از یک طرف رودخانه همزمان شروع به شنا کردن می کنند تا به نقطهٔ مقابل A (یعنی نقطه B)در طرف دیگر رودخانه برسند .شناگر اول در مسیر مستقیم

AB شنا می کند، در حالیکه شناگر دوم در جهت عمود بر جریان رودخانه شنا می کند و سپس در ساحل مقابل به طرف نقطهٔ B راه می رود تا مسافتی را که توسط جریان رودخانه به پایین دست کشیده شده است جبران کند. سرعت گام او در ساحل u می باشد در صورتی که هر دو شناگر با هم به نقطهٔ B برسند، سرعت u را بیابید. سرعت جریان آب $v_0 = ۲\frac{km}{h}$ و سرعت هر دو شناگر نسبت به آب $v' = ۲/۵\frac{km}{h}$ می باشد.

۸ـ دو قایق A و B از یک شناور ثابت در وسط رودخانه روی دو مسیر مستقیم عمود بر هم شروع به پارو زدن می کنند؛ قایق A در طول رود و قایق B در عرض رودخانه. هر دو هنگامی که در مسافت برابری از شناور دور شده اند، تغییر جهت داده و باز می گردند. نسبت زمانهای حرکت قایق A به قایق B ، یعنی $\frac{T_A}{T_B}$ را بیابید در صورتی که سرعت قایقها نسبت به آب ساکن به اندازه ضریب $\eta = ۱/۲$ بزرگتر از سرعت آب باشد.

۹ـ یک قایق نسبت به آب با سرعتی که $\eta = ۲$ برابر سرعت آب است حرکت می کند. قایق در چه زاویه ای نسبت به جهت آب باید حرکت کند که کمترین رانش و حرکت را در راستای آب داشته باشد.

۱۰ـ دو ذره هم زمان از یک نقطه پرتاب می شوند با این تفاوت که اولی تحت زاویه ۶۰° نسبت به افق و دومی به طور قائم و به سمت بالا. سرعت اولیه آنها با هم برابر و مساوی $۲۵m/s$ می باشد. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا فاصله دو ذره را بعد از گذشت ۱/۷ ثانیه از لحظه پرتاب به دست آورید.

۱۱ـ دو ذره در یک میدان گرانشی یکنواخت با شتاب جاذبه ژ قرار دارند. در یک زمان دو ذره از یک نقطه با سرعتهای $۴\ m/s$ و $۳\ m/s$ در جهت مخالف هم در راستای افق

پرتاب می شوند. فاصله بین ذرات را هنگامیکه بردارهای سرعت آنها بر هم عمود هستند بیابید.

۱۲ـ سه ذره در سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دارند؛ هر سه ذره با سرعت ثابت v شروع به حرکت می کنند. به طوریکه ذرهٔ اول به طرف ذرهٔ دوم، ذرهٔ دوم به طرف ذرهٔ سوم و ذرهٔ سوم به طرف ذرهٔ اول. بعد ا زچه مدتی این سه ذره به هم خواهند رسید.

۱۳ـ نقطهٔ A پیوسته باسرعتی که اندازهٔ آن ثابت و برابر v است به سمت نقطهٔ B و نقطهٔ B هم با سرعت ثابت u که $u < v$ در امتداد یک خط مستقیم حرکت می کند. در لحظهٔ اول $\vec{u} \perp \vec{v}$ می باشد و نقاط به فاصلهٔ l از یکدیگر قرار دارند. زمانی را بیابید که نقاط A و B به هم می رسند.

۱۴ـ یک قطار به طول $l = ۳۵۰\ m$ در راستای مستقیم با شتاب ثابت $w = ۳\times۱۰^{-۲}\ \frac{m}{s^۲}$ آغازبه حرکت می کند. بعد از گذشت $t = ۳۰\ s$ از شروع حرکت چراغ جلوی لوکوموتیو روشن می شود (رویداد ۱) و $\tau = ۶۰\ s$ بعد از این رویداد، چراغ انتهایی روشن می شود (رویداد ۲). فاصله این دو رویداد از یکدیگر از دید ناظر روی زمین چقدر است. ناظر سوم با چه سرعت و در چه جهتی باید حرکت کند تا از دید او دو رویداد در یک نقطه اتفاق بیافتند..

۱۵ـ یک آسانسور که طول فاصله کف تا سقف آن $۲/۷\ m$ است، شروع به بالا رفتن با شتاب $۱/۲\frac{m}{s^۲}$ می کند. $۲\ s$ بعد از آغاز حرکت، یک پیچ از سقف آسانسور رها می شود

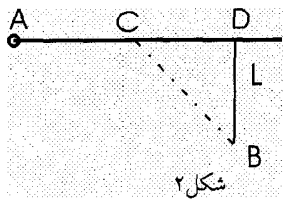
مطلوب است :

الف) مدت زمان سقوط آزاد پیچ تا اینکه با کف آسانسور برخورد کند.

ب) جابجایی و مسافت طی شده توسط پیچ در سقوط آزاد نسبت به چارچوب مرجع متصل به زمین.

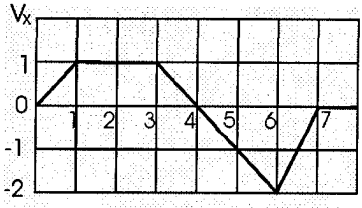
۱۶ــ دو ذرهٔ ۱ و ۲ با سرعتهای ثابت v_1 و v_2 در طول دو خط عمود بر هم که در نقطهٔ O با یکدیگر متقاطعند حرکت می کنند. در لحظهٔ $t=0$ دو ذره به ترتیب در فاصلهٔ l_1 و l_2 از نقطه O قرار دارند. بعد از چه مدت زمانی فاصله دو ذره به کمترین مقدار خود می رسد؟ این فاصله را محاسبه کنید.

۱۷ـ متحرکی مطابق شکل ۲ قصد دارد از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. سرعت متحرک در راستای خط AD ، η برابر بیشتر از سرعت در خارج خط مورد نظر است. همچنین فاصله عمودی نقطهٔ B از خط AD برابر l می باشد. فاصله نقطهٔ C از D را طوری به دست آورید که زمان لازم برای رسیدن متحرک از A به B مینیمم شود.



شکل۲

۱۸ـ ذره ای در طول محور x ها با سرعت V_x حرکت می کند. V_x مطابق شکل۳ بر حسب زمان تغییر می کند. با فرض اینکه متحرک در لحظه $t=0$ در $x=0$ قرار داشته است نمودار شتاب و مکان متحرک و مسافت طی شده توسط متحرک برحسب زمان را رسم کنید.



شکل۳

۱۹ـ متحرکی نصف محیط یک دایره به شعاع $160\ cm$ را در ۱۰ ثانیه طی می کند. مطلوبست :

الف) میانگین اندازهٔ سرعت $< v >$ ؛

ب) اندازهٔ میانگین بردار سرعت $|< \vec{v} >|$ ؛

ج) اندازهٔ میانگین بردار شتاب $|< \vec{w} >|$؛ در صورتی که متحرک با شتاب مماسی ثابت حرکت کند.

۲۰ـ بردار مکان یک ذره به صورت $\vec{r} = \vec{a}t(1-\alpha t)$ نسبت به زمان تغییر می کند که $\vec{a}$ برداری ثابت و α عددی مثبت است.

الف) بردارهای سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{w}$ را بر حسب زمان به دست آورید.

ب) فاصله زمانی Δt که در طول آن ذره به مکان اولیه خود بر می گردد و همچنین مسافت طی شده s در طول این زمان را به دست آورید.

۲۱ـ در لحظهٔ $t = 0$ ذره ای از مبدأ در جهت مثبت محور x ها شروع به حرکت می کند. سرعت ذره از رابطه $\vec{v} = \vec{v}_0(1-t/\tau)$ که $\vec{v}_0$ بردار سرعت اولیه است تبعیت می کند. اندازه $\vec{v}_0$، $10\ cm/s$ و مقدار $\tau = 5\ s$، می باشد. مطلوبست محاسبه :

الف) مکان x ذره در زمانهای ۶، ۱۰ و ۲۰ ثانیه ؛

ب) زمانهایی که فاصله ذره از مبدأ $10\ cm$ باشد ؛

ج) مسافت طی شده s توسط متحرک در ۴ و ۸ ثانیه اول.
د) نمودار تقریبی مسافت بر حسب زمان را بکشید.

۲۲ـ سرعت یک ذره که در طول محور x ها حرکت می کند طبق رابطهٔ $v=\alpha\sqrt{x}$ تغییر می کند(α ثابت مثبت). با این فرض که ذره در $t=0$ در $x=0$ باشد. مطلوبست
الف) سرعت و شتاب ذره بر حسب زمان ؛
ب) سرعت متوسط ذره بعد از طی کردن مسافت s از ابتدای حرکت.

۲۳ـ متحرکی در طول خط راست با شتاب کند شونده ای که رابطه اش با سرعت به صورت $\omega=a\sqrt{v}$ است و a ثابت مثبتی می باشد، حرکت می کند. سرعت اولیه متحرک v_0 می باشد. مسافت طی شده توسط متحرک را قبل از سکون به دست آورید. چه مدت زمانی طول می کشد تا متحرک به سکون برسد؟

۲۴ـ بردار مکان نقطهٔ A نسبت به مبدأ طبق رابطهٔ $\vec{r}=at\hat{i}-bt^2\hat{j}$ تغییر می کند که a و b ثابت های مثبت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه در جهت x و y هستند.
الف) معادله مسیر $y(x)$ نقطه A را به دست بیاورید و نمودار آن را رسم کنید.
ب) بردارهای سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{w}$ و اندازه های آنها را بر حسب زمان به دست آورید.
ج) زاویه α بین بردار $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را بر حسب زمان به دست آورید.
د) میانگین بردار سرعت و اندازه این بردار در t ثانیه اول حرکت را به دست آورید.

۲۵ـ ذره ای در صفحهٔ xy به نحوی حرکت می کند که $x=at$ و $y=at(1-\alpha t)$ که a و α ثابت های مثبتی هستند و t زمان است. مطلوبست :
الف) معادله مسیر ذره $y(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.
ب) سرعت v و شتاب w را به صورت توابعی از زمان به دست آورید.

ج) زمان t_0 را که د رآن زاویه بین بردار سرعت و بردار شتاب $\frac{\pi}{۴}$ است بیابید.

۲۶ــ ذره ای در صفحه xy حرکت می کند به طوری که $x = a\sin(\omega t)$ و $y = a(۱ - \cos(\omega t))$ و a و ω ثابتهای مثبت اند. مطلوبست :

الف) مسافت طی شده توسط ذره در t ثانیه اول

ب) زاویهٔ بین بردارهای شتاب و سرعت

۲۷ـ ذره ای در صفحهٔ xy با شتاب ثابت w که در جهت منفی محور y ها است حرکت می کند. معادله مسیر متحرک به صورت $y = ax - bx^۲$ می باشد که a و b ثابت های مثبتی اند. سرعت ذره را در لحظه ای که در مبدأ قرار دارد به دست آورید.

۲۸ـ یک جسم کوچک با زاویه α نسبت به افق با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ پرتاب می شود. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا :

الف) جابجایی جسم را به صورت تابعی از زمان $\vec{r}(t)$ بیابید.

ب) بردار سرعت متوسط $< \vec{v} >$ با متوسط گیری در t ثانیهٔ اول و در کل حرکت را بیابید.

۲۹ـ ذره ای از سطح زمین تحت زاویه α نسبت به خط افق و با سرعت اولیه $v_.$ پرتاب می شود . با صرفنظر از مقاومت هوا مطلوبست :

الف) زمان کل حرکت؛

ب) بیشترین ارتفاع صعود و برد ذره. تحت چه زاویه ای برد و ارتفاع ماکزیمم ذره برابر می شود؟

ج) معادله مسیر ذره $y(x)$ که y و x مقدار انحراف های عمودی و افقی ذره نسبت به

مبدأ می باشند؛
د) شعاع انحنای مسیر حرکت ذره در ابتدا و در نقطهٔ اوج حرکت.

۳۰ـ با توجه به شرایط مسئله قبل نمودار وابستگی زمانی شتاب های مماسی w_t و عمود بر مسیر w_n را بر حسب زمان رسم کنید. همچنین نمودار w_v شتاب در راستای سرعت را بر حسب زمان رسم کنید.

۳۱ـ توپی از حالت سکون از ارتفاع h ، بالای سطح شیبداری که با سطح افق زاویه α می سازد ، سقوط کرده و با سطح به صورت کشسان برخورد می کند. در چه فاصله ای از نقطه اول برخورد، توپ دوباره با سطح شیبدار برخورد می کند؟

۳۲ـ تفنگ و هدفی در فاصله km ۵/۱ از هم در یک سطح قرار دارند اگر تفنگ گلوله را با سرعت اولیه m/s ۲۴۰ شلیک کند، چه قدر طول می کشد تا گلوله به هدف برخورد کند؟ از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

۳۳ـ توپی دو گلوله را در یک سمت با زاویه های 60° و 45° نسبت به افق و با سرعت اولیه m/s ۲۵۰ به طور پی در پی شلیک می کند. با صرفنظر از مقاومت هوا، دو گلوله در چه فاصله های زمانی باید شلیک شوند تا به یکدیگر برخورد کنند؟

۳۴ـ بالنی از سطح زمین شروع به بالا رفتن می کند. سرعت افزایش ارتفاع ثابت و برابر v_0 است. بالن تحت اثر باد سرعت افقی $v_x = ay$ را به دست می آورد که a یک ثابت مثبت و y ارتفاع از سطح زمین می باشد. رابطه کمیتهای زیر را بر حسب ارتفاع بدست آورید :
الف) تغییر مکان افقی بالن $x(y)$ ؛

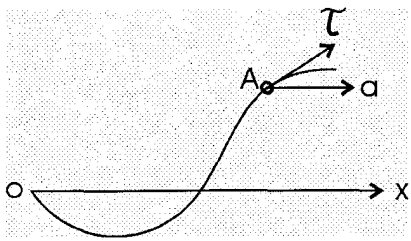
ب) شتاب کل، شتاب مماسی و شتاب عمود بر مسیر حرکت بالن.

۳۵ـ ذره ای در صفحهٔ xy با سرعت $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j}$ که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهایی که در جهت x و y هستند حرکت می کند. a و b ثابتند. در لحظه $t = ۰$ ذره در مکان $x = y = ۰$ قرار دارد. مطلوبست :

الف) معادله مسیر ذره $y(x)$ ؛

ب) شعاع انحنای مسیر ذره به صورت تابعی از x .

۳۶ـ ذره A در طول مسیر داده شده در شکل زیر با شتاب مماسی $a_t = \vec{a}.\hat{\tau}$ در حال حرکت است که $\vec{a}$ برداری ثابت در جهت مثبت محور x و $\hat{\tau}$ برداری است که در جهت بردار سرعت لحظه ای می باشد. اگر از سرعت ذره در نقطه $x = ۰$ صرف نظرشود سرعت ذره را بر حسب x بدست آورید.



شکل ۴

۳۷ـ ذره ای روی محیط یک دایره با سرعت $v = at$ شروع به حرکت می کند به طوری که $a = ۰/۵ m/s^۲$. شتاب کل ذره را وقتی $n = ۰/۱$ از محیط دایره از ابتدای حرکت طی شده باشد، محاسبه کنید.

۳۸ـ ذره ای با شتاب کند شونده ، روی محیط دایره ای به شعاع R به نحوی حرکت می کند که در هر لحظه شتاب مماسی و شتاب عمود بر سرعت ذره (شتاب عمودی) از

نظر اندازه برابرند. در $t = ۰$ سرعت ذره $v_۰$ می باشد. مطلوبست :
الف) سرعت ذره به صورت توابعی جداگانه از زمان و مسافت طی شده s ؛
ب) شتاب کل ذره به صورت توابعی جداگانه از سرعت و مسافت طی شده.

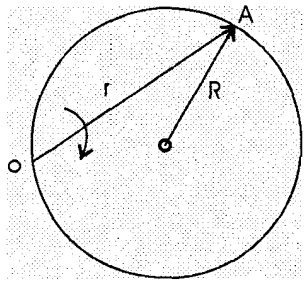
۳۹ـ ذره ای روی محیط دایره ای به شعاع R حرکت می کند. سرعت ذره به صورت $V = a\sqrt{s}$ به مسافت طی شده بستگی دارد که a ثابت و s مسافت طی شده توسط ذره است. مطلوبست زاویه α بین بردار سرعت و بردار شتاب به صورت تابعی از مسافت.

۴۰ـ ذره ای روی کمان دایره ای به شعاع R طبق رابطه $l = a\sin(\omega t)$ حرکت می کند که l مسافت طی شده در طول کمان از مکان اولیه می باشد. a و ω ثابتند. با فرض اینکه $R = ۱m$ ، $a = ۰.۸m$ و $\omega = ۲\ rad/s$ مطلوبست :
الف) اندازه شتاب کل ذره در نقاط $l = ۰$ و $l = \pm a$ ؛
ب) مینیمم مقدار شتاب و مکان l متناظر با آن.

۴۱ـ ذره ای در صفحه طوری حرکت می کند که شتاب مماسی $w_\tau = a$ و شتاب عمود بر سرعت آن(شتاب عمودی) $w_n = bt^۴$ می باشد و a و b ثابتهای مثبت و t زمان است. در زمان $t = ۰$ ذره در حال سکون می باشد. شعاع انحناء مسیر حرکت R و شتاب کل w را بر حسب مسافت طی شده s به دست آورید.

۴۲ـ ذره ای در صفحه xy روی مسیر $y(x)$ با سرعت ثابت v حرکت می کند. شتاب و شعاع انحنای مسیر را در $x = ۰$ به دست آورید. در صورتی که :
الف) مسیر به صورت سهمی $y = ax^۲$ باشد ؛
ب) مسیر به صورت بیضی $(\frac{x}{a})^۲ + (\frac{y}{b})^۲ = ۱$ باشد(a و b ثابتند).

۴۳ـ ذره A مطابق شکل ۵ روی محیط دایره ای به شعاع $R = ۵۰\ cm$ طوری حرکت می کند که بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به نقطه O با سرعت زاویه ای $\omega = ۰/۴\ rad/s$ حرکت می کند. اندازه سرعت ذره و همچنین اندازه و جهت شتاب کل ذره را به دست آورید.



شکل ۵

۴۴ـ چرخی حول محور ثابتی طوری می چرخد که زاویهٔ چرخش ϕ ، با زمان به صورت $\phi = at^{۲}$ تغییر می کند که t زمان و $a = ۰/۲\ rad/s^{۲}$ است. شتاب کل نقطهٔ A روی محیط چرخ، ω را در $t = ۲/۵\ s$ به دست آورید. در صورتی که سرعت خطی نقطه A در آن لحظه $v = ۰/۶۵\ m/s$ باشد.

۴۵ـ یک گلوله سرعت اولیهٔ $v = ۳۲۰\ m/s$ را بدست می آورد و پس از عبور از لولهٔ تفنگ به طول $l = ۲$، n دور می چرخد. فرض کنید گلوله داخل لوله با سرعت خطی یکنواخت حرکت کند. سرعت زاویه ای آن را هنگامی که از لوله خارج می شود پیدا کنید.

۴۶ـ جسم صلبی حول محور ثابتی طبق رابطهٔ $\phi = at - bt^{۳}$ که ϕ زاویه چرخش، $a = ۶\ rad/s$ و $b = ۲\ rad/s^{۳}$ است می چرخد. مطلوبست :

الف) مقدار متوسط سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای در فاصله زمانی $t = ۰$ تا لحظه ای که ذره به حالت سکون در می آید؛

ب) شتاب زاویه ای ذره، زمانی که ذره به حالت سکون می رسد.

۴۷ـ جسم صلبی حول محور ثابتی با شتاب زاویه ای $\beta = at$ که $a = ۲\times ۱۰^{-۲}\ \frac{rad}{s^{۳}}$ است، شروع به حرکت می کند. بعد از چه زمانی بردار شتاب کل ذره زاویهٔ $\alpha = ۶۰^{\circ}$ با بردار سرعت می سازد؟

۴۸ـ جسم صلبی با شتاب زاویه ای کند شونده حول محور ثابتی دوران می کند، به طوری که $\beta\alpha\sqrt{\omega}$ که β شتاب زاویهٔ کند شونده و ω سرعت زاویه ای می باشد. سرعت متوسط زاویه ای در فاصله زمانی حرکت تا سکون ذره را بیابید. در صورتی که در $t = ۰$ سرعت زاویه ای اولیه $\omega_{۰}$ باشد.

۴۹ـ ذره ای حول محور ثابتی می چرخد. رابطه سرعت زاویه ای آن با زاویهٔ چرخش ϕ به صورت $\omega = \omega_{۰} - a\phi$ است که $\omega_{۰}$ و a ثابتهای مثبتی هستند. در لحظهٔ $t = ۰$، $\phi = ۰$ است. مطلوب است محاسبهٔ کمیت های زیر بر حسب زمان :

الف) مقدار زاویه چرخش ؛

ب) سرعت زاویه ای.

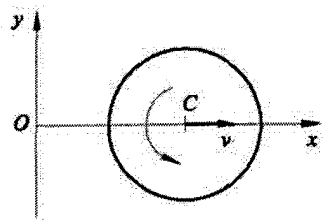
۵۰ـ جسم صلبی با شتاب زاویه ای $\vec{\beta} = \vec{\beta}_{۰}.\cos\phi$ که $\vec{\beta}_{۰}$ برداری ثابت و ϕ مقدار زاویه چرخش از محل اولیه است، شروع به دوران می کند. سرعت زاویه ای را به صورت

تابعی از ϕ به دست آورید. نمودار سرعت زاویه ای بر حسب زاویه چرخش ϕرا رسم کنید.

۵۱ـ چرخی چرخان مطابق شکل زیر در جهت مثبت محور xحرکت می کند . مکان هندسی محور دوران لحظه ای چرخ $y(x)$ را در صورتی که در لحظهٔ اولیه مرکز C دایره در مبدأ قرار گرفته باشد به دست آورید. در صورتی که :

الف) چرخ با سرعت ثابت v و شتاب زاویه ای ساعت گرد β حرکت کند. سرعت زاویه ای اولیه صفر است ؛

ب) با شتاب ثابت β و سرعت اولیه ی صفر و سرعت زاویه ای ثابت ωحرکت کند.



شکل ۶

۵۲ـ نقطه A روی محیط چرخی قرار گرفته که بدون لغزش روی سطح افقی با سرعت $v = ۱\ m/s$ حرکت می کند. مطلوبست :

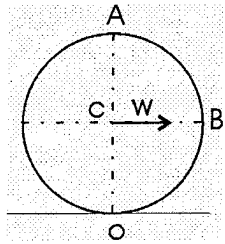
الف) جهت و اندازه بردار شتاب نقطه A ؛

ب) کل مسافت طی شده توسط نقطه A بعد از دوبار تماس با سطح افق.

۵۳ـ توپی با شعاع $R = ۱۰\ cm$ مطابق شکل۷ بدون لغزش روی سطح افقی طوری حرکت می کند که مرکزش دارای شتاب ثابت $a = ۲/۵\ cm/s^۲$ می باشد. $۲\ s$ بعد از شروع حرکت موقعیت مکان های مربوط مانند زیر است. مطلوبست :

الف) سرعت نقاط A ، B و O ؛

ب) شتاب نقاط فوق.



شکل ۷

۵۴ـ استوانه ای بدون لغزش بر روی سطح افق حرکت می کند. شعاع استوانه r می باشد. شعاع انحنا مسیر حرکت نقاط A و B در شکل فوق را به دست آورید.

۵۵ـ دو جسم صلب حول دو محور عمود بر هم به ترتیب با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_1 = ۳\ rad/s$ و $\omega_2 = ۴\ rad/s$ حرکت می کنند. سرعت و شتاب زاویه ای یک جسم را نسبت به جسم دیگر به دست آورید.

۵۶ـ جسم صلبی با سرعت زاویه ای $\vec{\omega} = at\hat{i} + bt^2\hat{j}$ که $a = ۰/۵\ rad/s^2$ و $b = ۰/۰۶\ rad/s^3$ حرکت می کند. $\hat{i}$ و $\hat{j}$ به ترتیب بردارهای یکه محورهای ه و و هستند. مطلوبست :

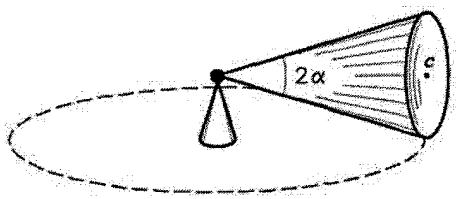
الف) اندازه سرعت و شتاب زاویه ای در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$؛

ب) زاویهٔ بین بردارهای سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای در لحظهٔ فوق.

۵۷ـ مخروط استوانه ای با نیم زاویهٔ $\alpha = ۳۰^\circ$ و شعاع قاعده $R = ۵\,cm$ با سرعت ثابت و بدون لغزش روی سطح افق مطابق شکل۸ حرکت می کند. رأس مخروط در نقطهٔ O که هم سطح نقطهٔ C ، مرکز قاعده مخروط می باشد، قرار گرفته است. سرعت نقطهٔ C $v = ۱۰\ cm/s$ است. مطلوبست :

الف) بردار سرعت زاویهٔ مخروط و زاویه ای که با راستای قائم می سازد ؛

ب) بردار شتاب زاویه ای مخروط.



شکل۸

۵۸ـ جسم صلبی با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_۰ = ۰/۵\ rad/s$ حول محور AB دوران می کند. در لحظه $t = 0$ محور AB نیز حول محور عمود بر خودش با سرعت زاویه ای ثابت $\beta_۰ = ۰/۱\ rad/s^۲$ شروع به دوران می کند.. سرعت و شتاب زاویه ای جسم را بعد از $t = ۲s$ به دست آورید.

مسائل

۱. سینماتیک

۱. قایقی دریك رودخانه، درجهت عمود برجریان آب با سرعت $۲\,m/s$ نسبت به آن‌حرکت می‌کند. سرعت جریان‌آب $۱\,m/s$ است. مقدارسرعت‌کل قایق، v، وجهت‌آن را نسبت به **کناره‌های رودخانه پیدا کنید.**

۲. دواسکله درکناره‌های رودخانه‌ای درمقابل یکدیگرقراردارند. سرعت‌جریان‌آب رودخانه $۰٫۵\,m/s$ است. یك قایق حمل‌ونقل چگونه باید حرکت کند تا فاصلهٔ یك اسکله به‌اسکلهٔ دیگر را به‌طورمستقیم بپیماید؟ درصورتی‌که سرعت قایق نسبت‌به‌آب $۰٫۸\,m/s$ باشد، در این شرایط سرعت عبور قایق از رودخانه چقدر است؟

۳. روی یك ارابهٔ مسطح‌که درسطحی‌افقی به‌طور یکنواخت حرکت‌می‌کند، لوله‌ای نصب شده است. لوله را روی ارابه درچه جهتی باید قرارداد تا قطرات باران‌که به‌طور قائم می‌بارند، بدون برخورد با دیوارهٔ لولـه به‌داخل‌آن بریزنـد؟ حرکت قطرات باران یکنواخت فرض می‌شود.

۴. یك‌کشتی با سرعت $۶٫۵\,m/s$ به‌طرف مغرب درحرکت است. باد با سرعت $۳٫۵\,m/s$ ازجنوب‌غربی می‌وزد. سرعت باد، v، ازدید دستگاههای مستقر درکشتی چقدر است؟ دستگاههای روی‌کشتی نسبت به‌مسیرکشتی چه جهتی را برای باد نشان می‌دهند؟

۵. دوهواپیما، به‌طور همزمان ودردوجهت عمودبرهم، ازیك‌نقطه به‌پرواز درمی‌آیند. سرعت هواپیمای اول $v_۱=۳۰۰\,km/h$ و سرعت هواپیمای دوم $v_۲=۴۰۰\,km/h$ است. فاصلهٔ بین دو هواپیما، S، چگونه با زمان افزایش می‌یابد؟ این فاصله درلحظه‌ای‌که هواپیمای اول‌مسافت $S_۱=۹۰۰\,km$ را طی‌کرده، چقدر است؟

۶. دوکشتی (جنگی) به طور موازی ودرخلاف جهت یکدیگر با سرعتهای $v_۱$ و $v_۲$ حرکت می‌کنند. یك‌کشتی به‌طرف‌کشتی دیگرشلیك می‌کند. اگرشلیك درلحظه‌ای صورت بگیردکه خط واصل دوکشتی عمودبرمسیرشان باشد، لولهٔ توپ تحت چه‌زاویهٔ φ (نسبت به

iopm.ir

جهت حرکت کشتی) باید هدف‌گیری شود تا گلوله به کشتی هدف برخورد کند؟ سرعت گلوله، v_0، ثابت فرض می‌شود.

۷. یک کرجی در رودخانه‌ای بین دو نقطه، که از هم $L = 100\,km$ فاصله دارند، حرکت می‌کند. زمان لازم برای حرکت در جهت جریان $t_1 = 4\,h$ و در خلاف جهت جریان $t_2 = 10\,h$ است. سرعت جریان، v_1، و سرعت کرجی نسبت به آب، v_2، چقدر است؟

۸. ماهیگیری در خلاف جهت جریان آب قایق می‌راند. هنگام عبور از زیر یک پل چوب‌دست قایق به آب می‌افتد. وی پس از ۰٫۵ ساعت به این امر پی می‌برد و بلافاصله برمی‌گردد و $5\,km$ پایینتر از پل آن را پیدا می‌کند. اگر ماهیگیر در جهت بالا و پایین رودخانه با سرعت یکسان حرکت کرده باشد، سرعت جریان آب چقدر است؟

۹. دوقطار با سرعتهای v_1 و v_2 در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. شخصی که در قطار اول ایستاده است شیئی را با سرعت v_0 (که می‌توان آن را ثابت فرض کرد) به‌طور افقی و عمود بر جهت حرکت قطار به‌روی سکوی قطار دوم پرتاب می‌کند. پیدا کنید (۱) زاویهٔ φ_1 را که تصویر مسیر پرتاب شئ بر سطح جاده با جهت ریلها می‌سازد؛ (۲) زاویهٔ φ_2 را که تصویر مسیر پرتاب بر سطح سکو با لبهٔ سکوی موازی با حرکت قطار دوم می‌سازد؛ (۳) سرعت جسم نسبت به بستر جاده (v') و نسبت به سکو (v'') چقدر است؟

۱۰. زاویهٔ قائمه‌ای روی یک صفحهٔ کاغذ رسم شده است. خط کشی که همواره عمود بر نیمساز این زاویه است با سرعت $10\,cm/s$ روی کاغذ حرکت داده می‌شود. دو انتهای خط کش اضلاع زاویه را قطع می‌کنند. نقاط تقاطع خط کش با اضلاع، با چه سرعتی روی اضلاع حرکت می‌کنند؟

۱۱. قطاری با سرعت v درحال حرکت است عکاسی که در فاصلهٔ l از خط آهن ایستاده است، می‌خواهد در لحظه‌ای که خط دیدش از قطار باریلها زاویهٔ α می‌سازد، از آن عکسبرداری کند. اگر لازم باشد که حد مجاز حاشیهٔ مات تصویر روی صفحهٔ عکاسی از d تجاوز نکند، زمان بیشینهٔ نورگیری، t_{max}، چقدر باید باشد؟ فاصلهٔ کانونی عدسی دوربین برابر f است.

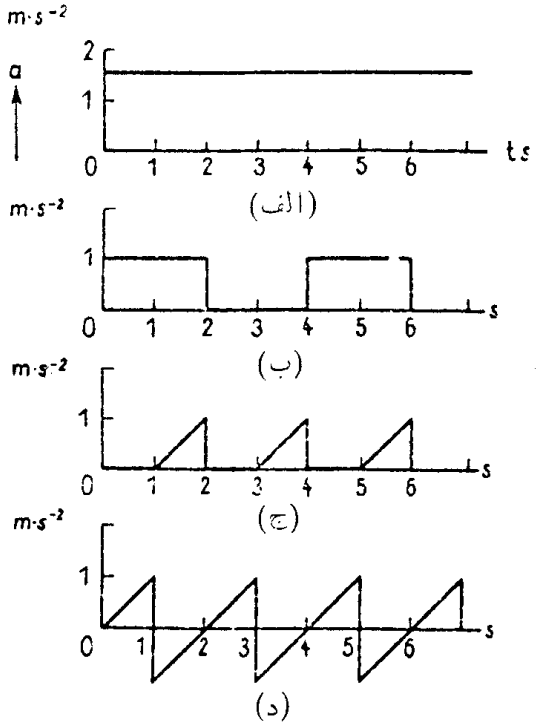
۱۲. جسمی دوقطعهٔ مساوی ده‌متری متوالی از مسیرش؛ S، را با شتاب ثابت می‌پیماید. اگر اولین قطعه درمدت $t_1 = 1٫06\,s$ و دومین قطعه درمدت $t_2 = 2٫2\,s$ پیموده شود، شتاب جسم، a، و سرعت آن، v_0، را در لحظهٔ آغاز حرکت پیدا کنید.

۱۳. اگر منحنی تغییرات شتاب نسبت به زمان برای چند جسم معین به‌صورت نشان‌داده شده در شکل ۱ باشد، منحنیهای سرعت و مسیر آنها را به‌صورت تابعی از زمان رسم کنید (سرعت اولیهٔ این اجسام صفر فرض شود).

---

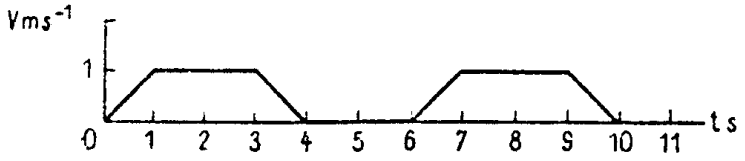
۱. در شکل شتابها به‌صورت تابعی اززمان نشان داده شده‌اند و شکل نشان می‌دهد که فرض شده است شتابها در بعضی از لحظات به‌طور جهشی تغییر می‌کنند. این کار برای ساده کردن مسائل انجام شده‌است. درواقع شتاب می‌تواند خیلی سریع تغییر کند اما نه به‌صورت جهشی. این بدان معنی است که شتاب باید تابعی پیوسته از زمان باشد. فرض جهشی بودن شتاب با منحنیهای سرعتی که شکستگی دارند هم‌ارز است. این ملاحظات در مسئلهٔ ۱۴ نیز صادق‌اند.

iopm.ir



شکل ۱

۰۱۴ اگرسرعت جسمی (برحسب تابعی اززمان) به‌صورت نشان داده شده درشکل ۲ باشد، منحنی تغییرات شتاب ومسیر آن را نسبت‌به زمان رسم کنید. (رجوع کنید به پانوشت مسئلهٔ ۱۳.)



شکل ۲

۰۱۵ فرض‌می‌کنیم که شخصی بتواند بدون اینکه صدمه‌ای ببیند از ارتفاع $h = ۲\,\mathrm{m}$ سقوط آزادکند. دراین صورت حد سرعت مجاز برای فرود سالم یك چترباز، v، را پیدا کنید.

۰۱۶ دو جسم ازبالای برجی به‌طورهمزمان و باسرعت اولیهٔ یکسان v_0، در راستای قائم یکی به‌سمت بالا و دیگری به‌سمت پایین پرتاب می‌شوند. تغییرات فاصلهٔ بین دوجسم برحسب زمان چگونه است؟ (ازمقاومت هوا صرفنظرکنید.)

iopm.ir

۱۷. یك موشك اخطار را تحت زاویهٔ 45° نسبت به‌افق شلیك می‌کنیم. بافرض اینکه مدت زمان‌لازم برای اشتعال‌موشك 6s باشد وموشك در بالاترین نقطهٔ مسیرش شعله‌ورشود، سرعت اولیهٔ آن را حساب کنید (ازمقاومت هوا در برابر حرکت موشك صرفنظرشود).

۱۸. یك جسم تحت زاویه‌ای نسبت به‌افق پرتاب شده است. درچه نقطه‌ای از مسیر جسم، مؤلفهٔ شتاب عمودبرمسیر بیشینه خواهدشد؟ (ازمقاومت هوا صرفنظر کنید.)

۱۹. گلولهٔ توپی تحت‌زاویهٔ φ نسبت به‌افق شلیك می‌شود. درصورتی‌که سرعت‌اولیهٔ گلوله v_0 باشد، حرکت آن را به‌طور تحلیلی بررسی کنید. از مقاومت هوا وانحنای سطح زمین صرفنظرکنید. روابط حاصل را بااستفاده ازشکل به‌صورت تابع و متغیر نشان دهید.

۱. مؤلفه‌های قائم وافقی بردارسرعت v ومقدارمطلق آن را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

۲. مدت حرکت‌گلوله را ازوقتی‌که شلیك می‌شود تا وقتی که به‌زمین می‌رسد پیدا کنید.

۳. زاویهٔ بین بردارسرعت وافق، α، را به‌صورت تابعی اززمان به‌دست‌آورید.

۴. مختصات قائم (دکارتی) گلوله را به‌صورت تابعی‌اززمان پیداکنید (محور x را افقی و محور y را قائم درنظر بگیرید).

۵. معادلهٔ مسیرگلوله، $y=f(x)$، راپیدا وبااستفاده ازآن شکل مسیررا رسم‌کنید.

۶. بیشینهٔ ارتفاع‌گلوله، H_{max}، را نسبت‌به سطح زمین به‌دست‌آورید.

۷. برد افقی‌گلوله، L، را به‌صورت تابعی از سرعت‌اولیه و زاویهٔ پرتاب به‌دست آورید. به ازای یك سرعت اولیهٔ معین، برد گلوله تحت چه زاویهٔ پرتاب φ^* بیشینه خواهد شد؟

۲۰. گلوله‌ای تحت زاویهٔ φ نسبت‌به افق، شلیك شده است. منحنی حاصل از نقاط انتهایی بردارهای سرعت این‌گلوله را رسم‌کنید. فرض‌کنید تمام این بردارها، که مربوط به‌سرعت گلوله در لحظات مختلف‌اند ازیك نقطه رسم شده باشند. این منحنی‌به هودوگراف بردار سرعت موسوم است. (از مقاومت هوا صرفنظر کنید.)

۲۱. آب ازسه‌لوله‌که درسطح زمین قراردارند، تحت زوایای 60°، 45°، و 30° فوران‌می‌کند. نسبت بیشینه ارتفاع هرفواره، h، ونیز نسبت‌بردآن، L، را برای هرلوله در مقایسه با لوله‌های دیگر به‌دست‌آورید (ازمقاومت هوا صرفنظر کنید).

۲۲. دریك ورزشگاه‌که ارتفاع سقف‌آن 8m است بیشینهٔ برد یك‌چکش، L، که‌با سرعت اولیهٔ 20m/s پرتاب شده، چقدر است؟ دراین حالت زاویهٔ φ بین سطح زمین و بردار سرعت اولیهٔ چکش چقدرباید باشد؟ فرض‌کنید ارتفاع نقطهٔ‌آغاز حرکت چکش‌در مقایسه باارتفاع ورزشگاه کوچك است وچکش هرگز به‌سقف ورزشگاه برخورد نمی‌کند. (ازمقاومت هوا صرفنظرکنید.)

۲۳. گلوله‌ای از عرشهٔ یك کشتی‌که با سرعت v_1 درحرکت است، با سرعت اولیهٔ v_0 وبه‌طور قائم به‌سمت بالاشلیك می‌شود. باچشمپوشی ازمقاومت هوا، مقدار وجهت‌بردار سرعت گلوله، $\mathbf{v}$، را به‌صورت تابعی اززمان، و معادلهٔ مسیرآن را دریك دستگاه مختصات

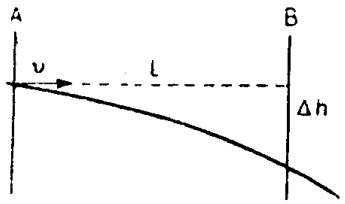
iopm.ir

ثابت پیدا کنید. (برای ساده‌شدن حل می‌توان از نتایج مسئلهٔ ۱۹ استفاده کرد.)

۲۴. با استفاده از روش تحلیلی بررسی حرکت که درمسائل ۱۹ و ۲۳ بکار برده‌شد، معادلهٔ مسیر، سرعت v، وشتاب a جسمی‌را که مختصاتش برحسب‌زمان به‌صورت $x = ct^2$ و $y = bt^2$ است، پیدا کنید.

۲۵. هواپیمایی به‌طورافقی درامتداد خطی مستقیم باسرعت v پرواز می‌کند. خلبان باید بمبی را روی هدفی‌که جلوتر ازهواپیما درسطح زمین قرار دارد، بیندازد. خلبان در لحظهٔ پرتاب بمب، تحت‌چه زاویه‌ای نسبت‌به امتداد قائم‌باید هدف را ببیند؟ دراین لحظه، فاصلهٔ هدف تا پای عمودی‌که ازهواپیما برزمین وارد می‌شود چقدراست؟ (از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود.)

۲۶. درشلیك افقی‌گلوله‌ها، سرعت‌گلوله را می‌توان با استفاده ازفاصلهٔ انحراف به پایین آن نسبت‌به افق، Δh، در برد معین L پیدا کرد. درمسیر حرکت گلوله دو پردهٔ قائم (AوB درشکل ۳) به‌طور متوالی قرار دارند. انحراف Δh را می‌توان از سوراخهایی‌که گلوله دراین دوپرده ایجاد می‌کند به‌دست آورد. درصورتی‌که Δh و L معلوم باشند و از مقاومت هوا صرفنظر شود، سرعت‌گلوله را پیدا کنید.



شکل ۳

۲۷. هدفی‌که روی تپه‌ای قراردارد ازموضع یك‌تفنگ، تحت‌زاویهٔ α بالاتر از خط افق دیده می‌شود. برد یا فاصلهٔ افقی بین‌تفنگ وهدف برابر L است. اگر گلوله تحت‌زاویهٔ β شلیك شود، سرعت‌اولیهٔ لازم برای آنکه گلوله به‌هدف برخوردکند چقدر باید باشد؟ (از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود.)

۲۸. ازانتهای بالایی‌قطرقائم یك دایره شیارهایی درامتداد وترهای مختلف‌آن‌ایجاد می‌کنیم. دراین شیارهای بدون اصطکاك چند وزنه به‌طور همزمان شروع به‌لغزیدن می‌کنند. نشان دهیدکه تمام وزنه‌ها دریك‌زمان به‌محیط دایره می‌رسند.

۲۹. جسم بدون اصطکاکی روی یك منحنی با شیب دلخواه به‌طرف پایین می‌لغزد. نشان دهیدکه سرعت جسم پس‌از کاهش ارتفاع آن به اندازهٔ h، برابر با سرعت آن در لحظه‌ای است‌که جسم به‌همین اندازه به‌طورآزاد سقوط کند.

۳۰. چند توپ‌را باسرعت یکسان ازبالای یك‌برج درجهات مختلف پرتاب‌می‌کنیم. نشان دهیدکه، با چشمپوشی‌ازمقاومت هوا، مرکز تمام توپها روی‌کره‌ای قرار می‌گیرندکه مرکز آن با شتاب سقوط آزاد فرو می‌افتد. شعاع این‌کره برابر $v_0 t$ است، که در آن v_0

iopm.ir

سرعت اولیهٔ توپها و t زمان اندازه‌گیری شده از لحظه‌ای است که توپها پرتاب شده‌اند.

۳۱. کامیونی باید باری را در کوتاهترین زمان از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر به‌فاصلهٔ L منتقل کند. شتاب حرکت تندشونده و کندشوندهٔ کامیون ثابت و برابر a است. در پایان مرحلهٔ شتاب‌گرفتن کامیون می‌تواند پس‌از مدتی حرکت یکنواخت، یا بدون اینکه حرکت یکنواختی داشته باشد، با حرکت کندشونده به‌حال توقف برسد. بیشینهٔ سرعتی که کامیون باید اختیار کند تا شرط فوق برآورده شود چقدر است؟

۳۲. قایقی که سرعتش v_0 است، بادبانش را در لحظهٔ t_0 پایین می‌کشد ولی به‌حرکتش ادامه می‌دهد. اندازه‌گیریهای سرعت قایق طی این حرکت، نشان می‌دهد که منحنی سرعت برحسب زمان به‌صورت هذلولوی است. نشان دهید که شتاب قایق، a، با مجذور سرعت آن متناسب است.

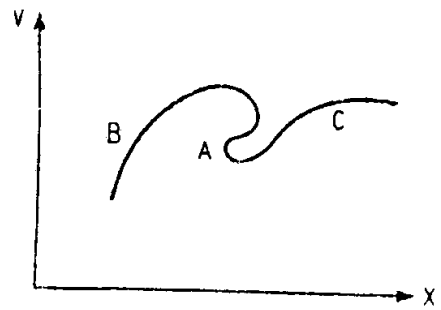
۳۳. ازشرایط مسئلهٔ قبل برای پیداکردن توابع زیر استفاده کنید: (۱) مسافت طی شده توسط قایق، S، به‌صورت تابعی‌اززمان t؛ و (۲) سرعت قایق، v، به‌صورت تابعی از مسافت طی‌شده بعدازپایین کشیدن بادبان.

۳۴. یك گلوله ازتفنگی که روی هواپیمایی نصب شده‌است باسرعت v_0 به‌طور افقی به‌سمت جلو شلیك می‌شود. هواپیما باسرعت v_a به‌طور افقی در پرواز است. باچشمپوشی از مقاومت هوا معادلات زیر را پیداکنید: (۱) معادلهٔ مسیر گلوله نسبت به‌زمین؛ (۲) معادلهٔ مسیر گلوله نسبت به هواپیما؛ (۳) معادلهٔ مسیر هواپیما نسبت به‌گلوله.

۳۵. یك قایق دررودخانه‌ای درامتداد عمودبرجریان آب وبا سرعت ثابت v نسبت به‌آب حرکت می‌کند. عرض‌رودخانه d وسرعت جریان درکناره‌های آن صفراست. وقتی ازکناره به‌مرکز رودخانه می‌رویم، سرعت جریان‌آب به‌طورخطی افزایش می‌یابد و در مرکزرودخانه مقدارش برابر u می‌شود. مسیرقایق ومسافت x_0 را، که‌قایق درطول‌حرکتش ازکناره‌ای به‌کنارهٔ دیگر به‌اندازهٔ آن درجهت جریان جابه‌جا می‌شود، پیداکنید.

۳۶. مسئلهٔ قبل‌را با این‌فرض که‌سرعت جریان‌آب دررفتن‌ازکناره به‌مرکزرودخانه طبق قانون سهموی $v_x = ky^2$ افزایش می‌یابد، حل‌کنید.

۳۷. ذره‌ای درامتداد مسیرمسطح نشان‌داده شده درشکل ۴، به‌طورناگهانی حرکت می‌کند. درکدام نقطه شتاب ذره بیشینه است؟



شکل ۴

iopm.ir

۳۸. ماه با دورهٔ تناوب ۲۷ روز به دور زمین می‌گردد. شعاع میانگین مدار ماه $R = ۴ \times ۱۰^۵ \text{km}$ است. سرعت خطی ماه به‌دور زمین، v، وشتاب عمود برمسیر آن، a، را پیداکنید.

۳۹. در مورد ذره‌ای که به‌طور یکنواخت به دور دایره‌ای می‌چرخد، منحنی مقادیر مطلق سرعت وشتاب آن برحسب زمان چگونه است؟

۴۰. اگردورهٔ تناوب‌گردش سومین ماهوارهٔ اسپوتنیك شوروی (که روز ششم‌ژوئیهٔ ۱۹۵۸ به‌فضا پرتاب‌شد)درگردش به‌دورزمین برابر ۱۰۵min بوده باشد، میانگین‌سرعت زاویه‌ای‌آن چقدر بوده است؟

۴۱. اگر دورهٔ تناوب‌گردش ماهوارهٔ اسپوتنیك درمدار برابر ۱۰۵min وارتفاع میانگین آن ۱۲۰۰km باشد، میانگین سرعت مداری خطی‌آن را پیداکنید.

۴۲. بااستفاده ازداده‌های مسئلهٔ‌قبل درمورد ماهوارهٔ فضایی اسپوتنیك، مقدارمیانگین شتاب عمودی‌آن را درمدار پیداکنید.

۴۳. سرعت خطی، v، نقطه‌ای ازسطح زمین راکه درنتیجهٔ حرکت وضعی‌زمین‌حول محورش ایجاد می‌شود، پیدا کنید. عرض جغرافیایی نقطه را φ بگیرید. شعاع کرهٔ زمین $R \approx ۶۴۰۰\text{km}$ است.

۴۴. سرعت خطی‌زمین راکه ازحرکت انتقالی آن حاصل می‌شود، پیداکنید. شعاع میانگین مدارزمین تقریباً $۱٫۵ \times ۱۰^۸\text{km}$ است.

۴۵. شتاب‌عمودی نقطه‌ای از سطح زمین را که ناشی از حرکت وضعی زمین است، پیدا کنید. تصویر این شتاب را در راستای شعاع زمین در آن نقطه بیابید، و مقادیر این کمیتها را برای عرض‌تهران(۳۵°عرض‌شمالی) تخمین‌بزنید. شعاع زمین $R \approx ۶۴۰۰\text{km}$ است.

۴۶. آرمیچریك موتورالکتریکی باسرعت N دور درثانیه‌می‌چرخد. با قطع‌جریان، حرکت‌آرمیچر با آهنگ ثابتی‌کند می‌شود وپس‌از n دور به‌حال سکون درمی‌آید. شتاب زاویه‌ای‌آرمیچر را پس‌ازقطع جریان پیدا کنید.

۴۷. اتومبیلی باسرعت ۶۰km/h حرکت می‌کند. گردش چرخها روی‌جاده‌بدون لغزش وقطر خارجی لاستیکها ۶۰cm فرض می‌شود. چرخها چند دور درثانیه می‌گردند؟

۴۸. باتوجه به‌شرایط مسئلهٔ قبل، شتاب عمودی لبهٔ خارجی لاستیك اتومبیل را پیدا کنید.

۴۹. ریسمانی‌که ازدور یك میلهٔ چرخان بدون لغزش بازمی‌شود، سطلی را با شتاب $۱\text{m/s}^۲$ به‌داخل یك چاه می‌برد. شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ بستگی زاویهٔ چرخش میله با زمان چگونه‌است؟ شعاع میله ۲۵cm است.

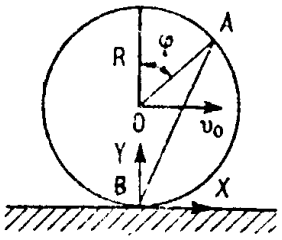
۵۰. اتومبیلی‌که با سرعت ۴۰km/h حرکت می‌کند، به‌پیچی با شعاع انحنای ۲۰۰m می‌رسد. راننده ترمز می‌کند و به‌اتومبیل شتاب منفی $۰٫۳\text{m/s}^۲$ می‌دهد. شتاب عمودی و شتاب‌کل اتومبیل را در پیچ پیدا کنید. زاویه‌ای که بردار شتاب کل، کل $\mathbf{a}$، با شعاع انحنای پیچ، R، می‌سازد چقدراست؟

iopm.ir

۵۱. چرخی که شعاع آن R است روی جاده‌ای افقی با سرعت v_0 بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۵). مؤلفهٔ افقی سرعت خطی هر نقطه از محیط چرخ، v_x، و مؤلفهٔ قائم این سرعت، v_y، وقدرمطلق سرعت کل دراین نقطه را پیداکنید. زاویهٔ بین بردارسرعت کل یك نقطه از محیط چرخ و جهت حرکت پیشروندهٔ محور آن، α، را پیدا کنید. نشان دهید که جهت بردارسرعت کل یك‌نقطهٔ A ازمحیط چرخ همیشه برخط مستقیم AB عمود است واز بالاترین نقطهٔ چرخ غلتنده می‌گذرد. (B نقطهٔ تماس چرخ باسطح زمین است.) نشان دهید که برای نقطهٔ A داریم $v_{کل} = BA\omega$. منحنی توزیع سرعت تمام نقاطی راکه روی قطر قائم چرخ (دریك لحظهٔ معین) قراردارند رسم کنید.

تمام‌کمیتهای لازم را برحسب v_0، R، وزاویهٔ φ پیداکنید. φ، زاویهٔ بین شعاع قائم و روبه‌بالای چرخ وشعاع OA است(O مرکز چرخ است).

راهنمایی: حرکت یك نقطه از محیط دایره را می‌توان به‌صورت جمع دو حرکت درنظر گرفت: یکی‌حرکت پیشروندهٔ محور چرخ باسرعت v_0، و دیگری چرخش حول‌این محور. برای این نقطه در صورتی که لغزش وجود نداشته باشد، قدرمطلق بردار سرعت حرکت پیشرونده با قدرمطلق سرعت خطی حاصل‌از چرخش برابراست.



شکل ۵

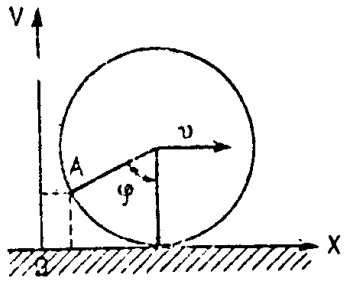
۵۲. بااستفاده ازنتایج‌کلی مسئلهٔ ۵۱، مقدار و جهت بردارهای سرعت $\mathbf{v}_1$ را برای دونقطه ازمحیط چرخ که دریك‌لحظهٔ معین در دوانتهای مخالف قطرافقی چرخ قراردارند، پیداکنید. جهت شتابهای این‌دونقطه چگونه‌است؟

۵۳. چرخی به‌شعاع R در امتداد مسیری افقی به‌طور یکنواخت وبدون لغزش با سرعت v می‌غلتد. مختصات x و y هرنقطهٔ A روی محیط چرخ را به‌صورت تابعی‌اززمان، t، یا زاویهٔ دوران چرخ، φ، پیداکنید. فرض‌کنیدکه درزمان $t = 0$ داریم $\varphi = 0$، $x = 0$، و $y = 0$ (شکل ۶). بااستفاده ازتوابع x و y منحنی مسیر نقطه‌ای راکه روی محیط قرار گرفته است رسم کنید.

۵۴. بااستفاده از رابطهٔ سرعت‌کل یك‌نقطه روی محیط چرخ درحال غلتش (مسائل ۵۱ و ۵۳ را ببینید)، کل مسافت طی شده توسط این نقطه را بین دو تماس متوالی آن با جاده پیداکنید.

۵۵. اتومبیلی که شعاع چرخهای آن R است با سرعت v در امتداد یك جادهٔ افقی حرکت می‌کند. سرعت حرکت‌اتومبیل طوری است‌که داریم $v^2 > Rg$ (g شتاب گرانش

iopm.ir



شکل ۶

است). تا چه‌ارتفاع بیشینهٔ h، گل‌ولای چسبیده به‌چرخها به‌بالا پرتاب می‌شود؟ نقطه‌ای از لاستیک راکه از آن درسرعتی معین گل‌ولای به‌بالاترین ارتفاع پرتاب می‌شود پیدا کنید. ازمقاومت هوا صرفنظر کنید.

۵۶. ازشرایط غلتیدن چرخ که درمسئلهٔ ۵۱ بیان‌شد ونتایج حاصل‌ازآن، برای پیدا کردن مؤلفه‌های افقی و قائم بردار شتاب نقطه‌ای دلخواه روی محیط چرخ استفاده کنید. مقدار وجهت بردارشتاب کل را برای نقطه‌ای روی محیط چرخ به‌دست‌آورید.

۵۷. باتوجه به‌مسئلهٔ زیرمی‌توان تصوری ازکمیت وجهت بردار شتاب کل درمورد دوران‌شتابدار (مثلا برای نقطه‌ای روی آرمیچرموتور الکتریکی) به‌دست‌آورد.

روی محیط‌دایره‌ای به‌شعاع R، یك‌نقطه باشتاب مماسی ثابت a_t ولی بدون سرعت اولیه به‌حرکت درمی‌آید. شتاب‌کل وشتاب عمودی‌این نقطه را به‌صورتهای زیر پیداکنید: (۱) به‌صورت توابعی‌از زمان t وشتاب a_t؛ (۲) به‌صورت‌توابعی از شتاب زاویه‌ای α و زاویهٔ دوران φ که بردارشعاعی نقطه باوضع اولیه‌اش می‌سازد. زاویهٔ β بین بردارشتاب کل وبردار شعاعی این‌نقطه را پیداکنید.

۵۸. یك اپراتور سینماتوگراف به‌وسیلهٔ عدسی‌مخصوص عکسبرداری ازفواصل‌دور، ازهواپیمایی‌که درحال فرودآمدن است عکس می‌گیرد. اپراتور دریك لحظهٔ معین دوربین را حول محورهای قائم‌وافقی به‌ترتیب باسرعتهای زاویه‌ای ω_1 و $\omega_2 = \omega_1/5$ می‌چرخاند. محور دورانی‌که چرخش به‌دورآن هم‌ارزمجموع این دو دوران باشدکدام است؟ سرعت زاویه‌ای حول این محور هم‌ارز چقدر باید باشد تا جایگزین دو دوران اولیه شود؟

۵۹. جسمی‌صلب به‌طورهمزمان باسرعتهای زاویه‌ای ω_1، $\omega_2 = 2\omega_1$، و $\omega_3 = 3\omega_1$ حول سه‌محور متعامدکه ازیك نقطه می‌گذرند دوران می‌کند. سمتگیری محوری را نسبت‌به این سه‌محور پیداکنیدکه دوران حول‌آن بتواند جایگزین‌این سه‌دوران مستقل‌شود. سرعت زاویه‌ای جسم را حول این‌محور جدید پیداکنید.

۶۰. قرصی افقی با سرعت زاویه‌ای ω_1 حول یك محور قائم دوران می‌کند. قرص دیگری، که‌آن‌هم محورقائم دارد، روی قرص‌اول وبه‌فاصلهٔ R ازمحور دوران‌آن نصب‌شده است. قرص دوم، در جهت دوران قرص اول ولی با سرعت زاویه‌ای ω_2 حول محورش می‌چرخد. محل‌استقرار محورلحظه‌ای دوران راطوری پیداکنیدکه دوران قرص دوم حول

iopm.ir

آن هم‌ارز دوران این قرص با سرعتهای زاویه‌ای ω_1 و ω_2 باشد. سرعت زاویه‌ای قرص دوم حول این محور لحظه‌ای، ω، چقدر است؟

۶۱. **دوران موتور** اتومبیل به‌وسیلهٔ دیفرانسیل به چرخها منتقل می‌شود. دیفرانسیل دستگاهی است که دو چرخ را قادر می‌سازد تا با سرعتهای متفاوت بچرخند. چرا وجود دیفرانسیل ضروری است؟ چرا نمی‌توان چرخهای محرك اتومبیل را به‌طور ثابت به‌محوری واحد که دوران موتور به آن منتقل می‌شود وصل کرد؟

۶۲. براساس ملاحظات کلی حاصل از بررسی حرکت اتومبیل درمسیر منحنی که در مسئلهٔ قبل مطرح شد، سرعت چرخهای اتومبیل را درپیچ جاده حساب کنید. اتومبیلی به‌عرض ۱٫۲m باچرخهایی به‌شعاع $r = 30\,\text{cm}$ در پیچ جاده‌ای که شعاع انحنای آن $R = 50\,\text{m}$ است حرکت می‌کند. سرعتهای خطی v_i و v_o چرخهای داخلی و خارجی اتومبیل را پیدا کنید (نسبت به مرکز انحنای جاده). سرعت مرکز اتومبیل $36\,\text{km/h}$ است.

۶۳. قرص افقی به‌طوریکنواخت وبا سرعت‌زاویه‌ای ω دوران می‌کند. چوب‌دستی به‌طور قائم به‌فاصلهٔ R ازمرکز قرص روی آن نصب شده‌است. اگرکل این‌دستگاه به‌وسیلهٔ یك باریکهٔ موازی و افقی نور روشن شده باشد، قانون حرکت سایهٔ چوب‌دستی را روی پرده‌ای قائم پیداکنید. بااستفاده ازاین قانون منحنی مسیر، سرعت، وشتاب سایهٔ روی پرده را به‌صورت توابعی از زمان رسم کنید.

iopm.ir

۱ـ۱ سینماتیک حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت

۱ـ یک قایق موتوری که در خلاف جهت جریان رودخانه‌ای حرکت می‌کند از کنار الوارهایی که در جهت جریان شناورند می‌گذرد. یک ساعت پس از این، موتور قایق از کار می‌افتد و تعمیر آن ۳۰ دقیقه طول می‌کشد. در این مدت، قایق آزادانه همراه جریان آب شناور است. پس از تعمیر موتور، قایق با همان سرعت پیشین نسبت به جریان آب در جهت جریان حرکت می‌کند و در نقطه‌ای به فاصلهٔ $s = ۷/۵km$ از محل برخورد اول از الوارها جلو می‌افتد. سرعت جریان آب رودخانه را، با فرض ثابت بودن، پیدا کنید.

۲ـ شخصی که با سرعت v، ثابت از نظر مقدار و جهت، در حال راه رفتن است از زیر فانوسی که در ارتفاع H از سطح زمین آویخته شده است، می‌گذرد. سرعت حرکت لبهٔ سایهٔ سر شخص روی زمین را پیدا کنید در صورتی‌که بلندی قدش h باشد.

۳ـ فاصلهٔ بین شهر و کارخانه $۳۰km$ است. شخصی در ساعت ۶ و ۳۰ دقیقهٔ صبح پیاده از کارخانه به سمت شهر راه می‌افتد و دوچرخه‌سواری در ساعت ۶ و ۴۰ دقیقهٔ صبح با سرعت $۱۸km/h$ شهر را به قصد کارخانه ترک می‌کند. شخص پس از $۶km$ پیاده‌روی به دوچرخه‌سوار می‌رسد. زمان به هم رسیدن این دو نفر و سرعت حرکت شخص را پیدا کنید.

همچنین اگر حرکت اتوبوسها از ساعت ۶ صبح از شهر آغاز شود و هر ۱۵ دقیقه یک اتوبوس ایستگاه را ترک کند، شخص پیاده در کجا به دوازدهمین اتوبوسی که از شهر می‌آید، می‌رسد و چند اتوبوس از دوچرخه‌سوار جلو می‌زنند؟ سرعت اتوبوسها $۴۵km/h$ است.

۴ـ دو قطار به فاصلهٔ زمانی ۱۰ دقیقه و با سرعت $v = ۳۰km/h$ مسکو را به مقصد

iopm.ir

پوشکینو ترک می‌کنند. سرعت قطار دیگری که عازم مسکوست (u) و به فاصلهٔ زمانی $\tau = ۴$ دقیقه به این دو قطار می‌رسد چه‌قدر است؟

۵ـ مهندسی در یک کارخانهٔ خارج از شهر کار می‌کند. اتومبیلی هر روز از کارخانه به دنبال او به ایستگاه راه‌آهن فرستاده می‌شود. این اتومبیل همزمان با پیاده شدن او از قطار به ایستگاه راه‌آهن می‌رسد. یک روز مهندس یک ساعت قبل از زمان همیشگی به ایستگاه رسید، و بدون آنکه منتظر اتومبیل شود پیاده به سمت محل کارش به راه افتاد. در راه به اتومبیل رسید و سوار آن شد و در نتیجه ۱۰ دقیقه زودتر از معمول به کارخانه رسید. چه مدت زمانی را پیش از رسیدن به اتومبیل پیاده طی کرده است؟ یک راه حل ترسیمی ارائه دهید.

۶ـ دو اسکلهٔ M و K در خدمت کشتیهایی هستند که اندازهٔ سرعت همهٔ آنها نسبت به آب یکی است. فاصلهٔ بین اسکله‌ها ۲۰km است. هر کشتی فاصلهٔ M تا K را مدت یک ساعت و K تا M را در مدت دو ساعت می‌پیماید. کشتیها دو اسکله را در یک زمان و هر ۲۰ دقیقه یک بار ترک می‌کنند و هر کدام ۲۰ دقیقه در هر اسکله توقف می‌کنند. معین کنید: ۱ ـ تعداد کشتیها را. ۲ ـ کشتی‌ای که از M به طرف K در حرکت است در طول راه به چند کشتی می‌رسد. ۳ ـ کشتی‌ای که از K به طرف M در حرکت است در طول راه به چند کشتی می‌رسد.

۷ـ دو جهانگرد که به فاصلهٔ ۴۰km از اقامتگاه خود قرار دارند باید در کوتاهترین زمان ممکن با هم به آنجا برسند. آنها یک دوچرخه در اختیار دارند و تصمیم می‌گیرند که به نوبت از آن استفاده کنند. یکی از آنها پیاده و با سرعت $v_۱ = ۵km/h$ و دیگری سوار بر دوچرخه و با سرعت $v_۲ = ۱۵km/h$ به راه می‌افتند. در ضمن قرار می‌گذارند که دوچرخه‌سوار در میانهٔ راه از دوچرخه پیاده و دیگری پس از رسیدن به این نقطه سوار آن شود. سرعت میانگین جهانگردها چه‌اندازه خواهد بود؟ چه مدت زمانی دوچرخه بدون استفاده می‌ماند؟

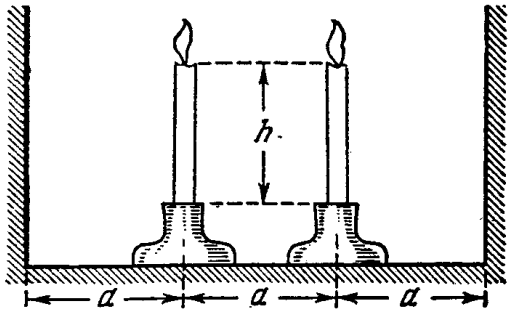
۸ـ دو شمع به بلندی h در لحظهٔ اولیه به فاصلهٔ a از یکدیگر قرار دارند. فاصلهٔ هر شمع از دیوار مجاورش نیز برابر با a است (شکل ۱). سایهٔ شمعها روی دیوارها با چه سرعتی حرکت خواهد کرد در صورتی که یکی از شمعها در مدت زمان $t_۱$ و دیگری در مدت زمان $t_۲$ به طور کامل بسوزد؟

۹ـ اتوبوسی با سرعت $v_۱ = ۱۶m/s$ در طول یک بزرگراه در حرکت است. مردی به‌فاصلهٔ $a = ۶۰m$ از بزرگراه و $b = ۴۰۰m$ از اتوبوس قرار دارد. این مرد در چه جهتی باید بدود تا همزمان با اتوبوس یا پیش از رسیدن آن به نقطه‌ای از بزرگراه برسد؟ مرد قادر است با سرعت $v_۲ = ۴m/s$ بدود.

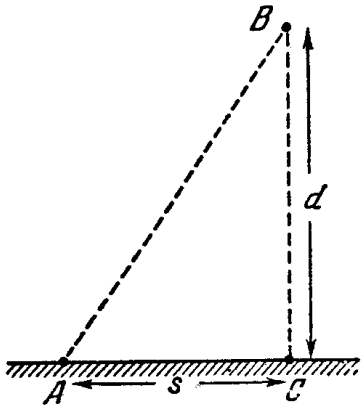
۱۰ـ کمترین سرعت شخص چه اندازه باید باشد، و در چه جهتی بدود، تا قادر به رسیدن به اتوبوس شود؟ (رجوع کنید به مسئلهٔ ۹)

۱۱ـ شخصی در نقطهٔ A واقع در ساحل دریاچه‌ای ایستاده است و می‌خواهد در کوتاهترین زمان ممکن به نقطهٔ B روی دریاچه برسد (شکل ۲). فاصلهٔ نقطهٔ B از ساحل $BC = d$

iopm.ir



شکل۱



شکل۲

و فاصلهٔ $AC = s$ است. این شخص می‌تواند با سرعت v_1 در آب شنا کند و با سرعت v_2 که از v_1 بیشتر است در طول ساحل بدود. کدام راه را باید انتخاب کند، از نقطهٔ A مستقیماً به سمت B شنا کند یا فاصلهٔ معینی را در طول ساحل بدود و سپس به طرف نقطهٔ B شنا کند؟

۱۲ـ یک کشتی موتوری که در خلاف جهت جریان رودخانه‌ای در حرکت است از کنار الوارهایی که در جهت جریان شناورند می‌گذرد. چهل و پنج دقیقه بعد (t_1) کشتی به مدت $t_2 = 1h$ در یک اسکله توقف می‌کند و سپس در جهت جریان رودخانه راه می‌افتد و پس از $t_3 = 1h$ از الوارها جلو می‌زند. سرعت کشتی نسبت به جریان آب ثابت و برابر $v_1 = 10 km/h$ است. سرعت جریان آب رودخانه (v_2) را با فرض ثابت بودن پیدا کنید. روشهای ترسیمی و تحلیلی را در حل این مسئله به کار برید.

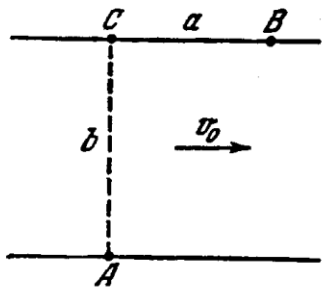
۱۳ـ بین دو اسکلهٔ M و K محمولات پستی به وسیلهٔ دو کشتی حمل می‌شود. کشتیها در وقت مقرر اسکله‌هایشان را ترک می‌کنند و پس از رسیدن به یکدیگر و تعویض محمولات برمی‌گردند. اگر کشتیها همزمان اسکله‌های مربوط به خودشان را ترک کنند، رفت و برگشت کشتی‌ای که از M روانه می‌شود ۳ ساعت و کشتی‌ای که از K حرکت می‌کند ۱/۵ ساعت طول می‌کشد. سرعت هر دو کشتی نسبت به آب یکسان است. به روش ترسیمی معین کنید، کشتی مربوط به M باید چه مدت زمان دیرتر از کشتی مربوط به K اسکله‌اش را ترک کند تا زمان حرکت دو کشتی یکسان باشد.

۱۴ـ با استفاده از شرایط مسئلهٔ قبل، و در صورتی که کشتیها همزمان اسکله‌های خود را ترک کنند، سرعت کشتیها را نسبت به جریان آب، سرعت جریان آب و مکان به هم رسیدن دو کشتی را معین کنید. فاصلهٔ بین اسکله‌ها ۳۰ km است.

۱۵ـ یک قایق پارویی با سرعت $v_1 = 3 km/h$ نسبت به آب از اسکلهٔ C به طرف اسکلهٔ T حرکت می‌کند. در همین زمان یک کشتی با سرعت $v_2 = 10 km/h$ اسکلهٔ T را به مقصد C ترک می‌کند. در حالی که قایق بین دو اسکله در حرکت است، کشتی چهار مرتبه این مسافت را می‌پیماید و همزمان با قایق به اسکلهٔ T می‌رسد. جهت جریان آب را پیدا کنید.

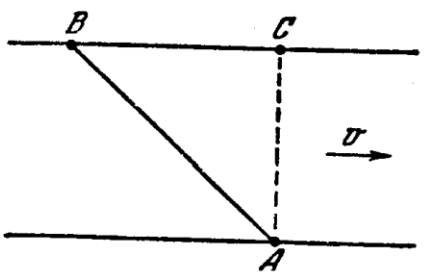
iopm.ir

۱۶ـ مردی با یک قایق پارویی باید از نقطهٔ A به نقطهٔ B واقع در ساحل مقابل رودخانه‌ای برود (شکل ۳) . فاصلهٔ $AC = b$ و پهنای رودخانه $BC = a$ است . مینیمم سرعت قایق نسبت به آب u چه اندازه باید باشد تا به نقطه B برسد ؟ سرعت جریان آب برابر با v_0 است .

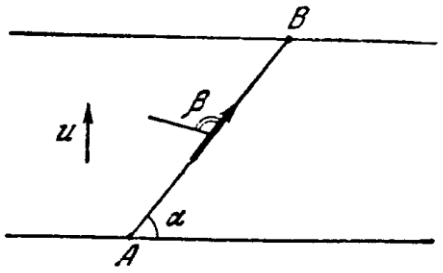


شکل ۳

۱۷ـ شخصی که باید با قایق از نقطهٔ A در ساحل یک رودخانه به نقطهٔ B واقع در ساحل مقابل برود در امتداد خط راست AB در حرکت است (شکل ۴) . پهنای رودخانه $AC = 1km$ و مسافت $BC = 2km$ است . ماکزیمم سرعت قایق نسبت به آب $u = 5km/h$ و سرعت جریان آب $v = 2km/h$ است . آیا شخص می‌تواند فاصلهٔ AB را در مدت ۳۰ دقیقه طی کند ؟



شکل۴



شکل۵

۱۸ـ یک کشتی در عرض یک رودخانه در طول خط راست AB که با ساحل زاویهٔ α می‌سازد از نقطه A به سمت B واقع در ساحل مقابل حرکت می‌کند (شکل ۵) . باد با سرعت u عمود بر ساحل می‌وزد . پرچمِ روی دکل کشتی با راستای حرکت زاویهٔ β می‌سازد . سرعت کشتی را نسبت به ساحل پیدا کنید . آیا با استفاده از داده‌های این مسئله می‌توان سرعت جریان آب رودخانه را پیدا کرد ؟

۱۹ـ برای پیدا کردن سرعت یک هواپیما باید مدت زمانی را که طول می‌کشد تا هواپیما دور یک مسیر بسته با اندازهٔ مشخص پروازکند معین کرد . چه مدت زمانی طول خواهد کشید تا هواپیما پیرامون مسیری به شکل مربع به ضلع a پروازکند اگر باد با سرعت u بوزد ؟ دو حالت را در نظر بگیرید : (۱) راستای وزش باد بر یکی از اضلاع مربع منطبق است . (۲) راستای وزش باد منطبق بر قطر مربع است . سرعت هواپیما بدون در نظرگرفتن باد برابر است با v و $v > u$.

۲۰ـ دو وسیلهٔ نقلیهٔ موتوری با سرعتهای ثابت v_1 و v_2 در طول دو بزرگراه که با هم زاویهٔ α می‌سازند ، حرکت می‌کنند . اندازه و جهت سرعت هر یک را نسبت به دیگری پیدا کنید . چه مدت پس از رسیدن به تقاطع فاصلهٔ بین آنها برابر با s خواهد بود ؟

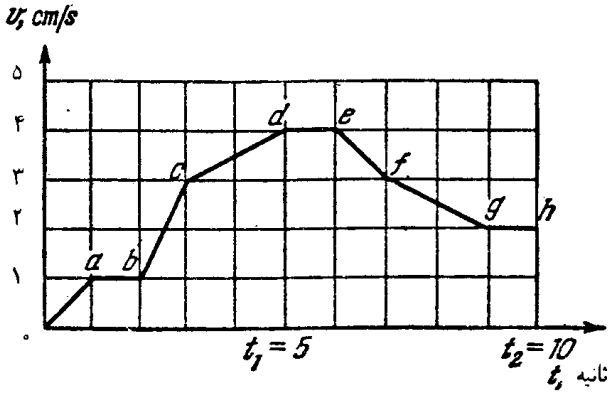
iopm.ir

۲۱ـ دو خط راست متقاطع با سرعت‌های v_1 و v_2 هر یک به موازات خود و در جهتهای مخالف با یکدیگر دارای حرکتی انتقالی هستند. زاویهٔ بین خطوط برابر با α است. پیدا کنید سرعت نقطهٔ تقاطع این دو خط را.

۱ـ۲ سینماتیک حرکت مستقیم‌الخط غیریکنواخت و متشابه‌التغییر

۲۲ـ یک وسیلهٔ نقلیهٔ موتوری یک سوم مسافت s را با سرعت $v_1 = ۱۰ km/h$، یک سوم بعدی را با سرعت $v_2 = ۲۰ km/h$ و آخرین قسمت را با سرعت $v_3 = ۶۰ km/h$ طی می‌کند. سرعت میانگین این متحرک را در تمام مسیر پیدا کنید.

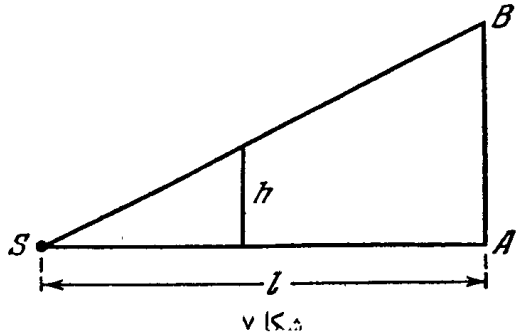
۲۳ـ در حرکت نشان داده شده در شکل ۶، سرعت میانگین و شتاب میانگین یک ذرّهٔ متحرک را در مدت ۵ و ۱۰ ثانیه معین کنید.



شکل ۶

۲۴ـ مردی که در ساحل شیبدار دریاچه‌ای ایستاده است قایقی را در آب به وسیلهٔ طنابی که در دست دارد با سرعت ثابت v به سوی خود می‌کشد. سرعت قایق در لحظه‌ای که زاویهٔ بین راستای طناب و سطح آب برابر با α است، چه اندازه خواهد بود؟

۲۵ـ چشمهٔ نقطه‌ای نور S به فاصلهٔ l از پردهٔ قائم AB قرار دارد. یک شیء کدر به ارتفاع h با سرعت ثابت v در امتداد خط راست SA از منبع به طرف پرده انتقال می‌یابد. معین کنید لبهٔ بالایی سایهٔ شیء با چه سرعت لحظه‌ای در طول پرده حرکت می‌کند؟ (شکل ۷).

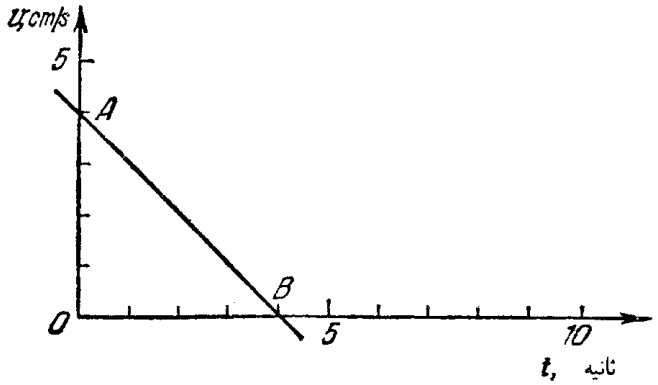


شکل ۷

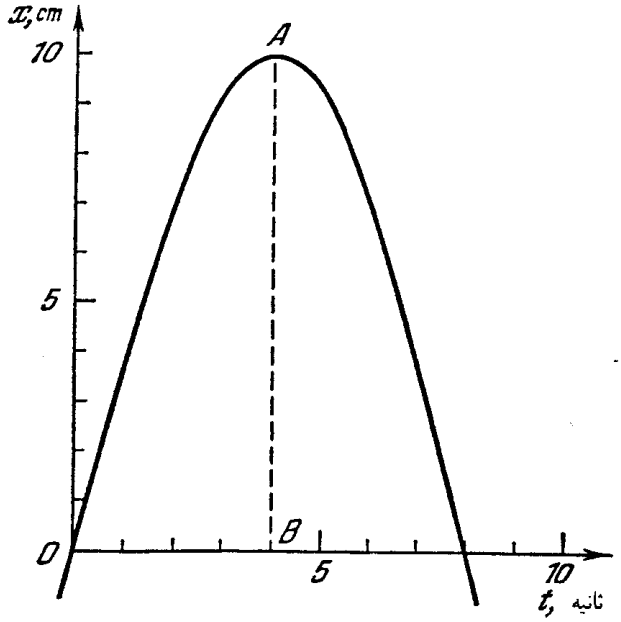
iopm.ir

۲۶ـ مختص نقطه‌ای که به‌طور مستقیم‌الخط در امتداد محور x‌ها در حرکت است، طبق معادلهٔ $x = ۱۱ + ۳۵t + ۴۱t^۲$ با زمان تغییر می‌کند (x برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه). سرعت و شتاب این نقطه را به دست آورید.

۲۷ـ شکلهای ۸ و ۹ سرعت جسم و تغییر مختص آن (سهمی) را نسبت به زمان نشان می‌دهند. مبداء مقایسهٔ زمان روی هر دو نمودار یکی است. آیا حرکتهای نشان داده شده در این دو نمودار یکی هستند؟



شکل۸



شکل۹

۲۸ـ دو وسیلهٔ نقلیه موتوری همزمان نقطهٔ A را ترک می‌کنند و پس از $t_۰ = ۲h$ به نقطهٔ B می‌رسند. وسیلهٔ نخست نصف مسافت را با سرعت $v_۱ = ۳۰ km/h$ و نصف دیگر را با سرعت

iopm.ir

$v_2 = 45km/h$ طی می‌کند. وسیلهٔ دوم تمام مسیر را با شتاب ثابتی می‌پیماید. در چه لحظه‌ای از زمان سرعت دو وسیله یکسان است؟ آیا در این مسیر یکی از دیگری جلو می‌زند؟

۲۹ـ گلوله‌ای از ارتفاع H روی یک سطح افقی کشسان آزادانه سقوط می‌کند. نمودارهایی رسم کنید که تغییرات مختص و سرعت گلوله را برحسب زمان نشان دهند. برخورد کاملاً کشسان و مدت زمان آن ناچیز است.

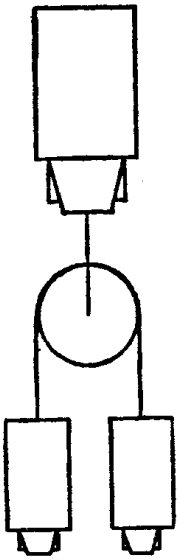
۳۰ـ دو گلولهٔ فولادی روی یک سطح افقی کشسان آزادانه سقوط می‌کنند. گلولهٔ اول از ارتفاع $h_1 = 44cm$ و دومی $\tau > 0$ ثانیه پس از آن از ارتفاع $h_2 = 11cm$. پس از زمان معینی سرعت هر دو گلوله از لحاظ اندازه و جهت یکسان می‌شود. معین کنید زمان τ و مدت زمانی را که سرعت گلوله‌ها یکسان باقی می‌ماند. برخوردی بین گلوله‌ها صورت نمی‌گیرد.

۳۱ـ جسمی که بدون سرعت اولیه آزادانه سقوط می‌کند، سانتیمتر n ام از مسیرش را در چه زمانی طی خواهد کرد؟

۳۲ـ دو جسم از بالای برجی یکی پس از دیگری با سرعت v_0 پرتاب می‌شوند. جسم اول در راستای قائم به طرف بالا و جسم دوم پس ازگذشت زمان τ در همین راستا به طرف پایین پرتاب می‌شوند. سرعت اجسام را نسبت به یکدیگر و فاصلهٔ بین آنها را در لحظه $t > \tau$ معین کنید.

۳۳ـ سه نقطهٔ A، B و C ابتدا روی یک خط راست افقی در فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند. نقطهٔ A با سرعت ثابت v در راستای قائم به طرف بالا و نقطهٔ C بدون سرعت اولیه و با شتاب ثابت a در همین راستا به طرف پایین شروع به حرکت می‌کنند. نقطهٔ B در راستای قائم چگونه باید حرکت کند، تا هر سه نقطه دائماً روی یک خط راست باقی بمانند؟ نقاط همزمان شروع به حرکت می‌کنند.

۳۴ـ دو کامیون، کامیون دیگری را به کمک قرقره‌ای که به آن وصل شده، به دنبال می‌کشند (شکل ۱۰). شتاب دو کامیون a_1 و a_2 است. شتاب a_3 کامیونی راکه کشیده می‌شود معین کنید.



شکل ۱۰

۳۵ـ آسانسوری با شتاب ثابت a در حرکت است. شخصی داخل این آسانسور کتابی را رها می‌کند. شتاب کتاب نسبت به کف آسانسور چه اندازه است در صورتی که: (۱) آسانسور در حال بالا رفتن باشد. (۲) آسانسور در حال پایین آمدن باشد؟

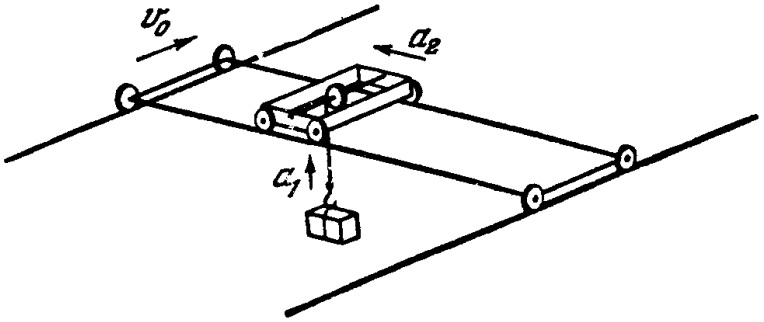
۳۶ـ قطاری روی ریلهای مسطح و مستقیم با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. مسافری داخل قطار سنگی را رها می‌کند. شتاب سنگ نسبت به قطار و زمین چه اندازه است؟

۳۷ـ مردی در یک آسانسورکه با شتاب a در حرکت است، گلوله‌ای را از ارتفاع H بالای کف رها می‌کند. پس از t ثانیه

iopm.ir

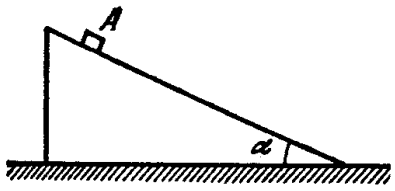
جهت شتاب آسانسور معکوس و در $2t$ ثانیه برابر صفر می‌شود. در همین لحظه گلوله با کف آسانسور تماس پیدا می‌کند. گلوله پس از برخورد تا چه ارتفاعی از کف آسانسور جهش خواهد کرد؟ برخورد را کاملاً کشسان در نظر بگیرید.

۳۸ـ بالابر یک چرثقیل متحرک، باری را از زمین با شتاب a_1 بالا می‌برد. در همین حال، قلاب حمل کنندهٔ بار با شتاب a_2 نسبت به جرثقیل در راستای افقی حرکت می‌کند. علاوه‌بر این، جرثقیل با سرعت ثابت v_0 روی ریلهایش جابه‌جا می‌شود (شکل ۱۱). سرعت اولیهٔ قلاب نسبت به جرثقیل صفر است. سرعت بار را نسبت به زمین هنگامی که به ارتفاع h می‌رسد پیدا کنید.

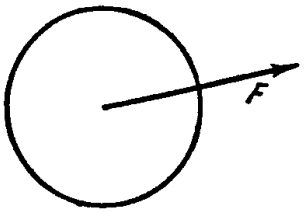


شکل۱۱

۳۹ـ جسم A روی یک گوه که با افق زاویهٔ α می‌سازد قرار دارد (شکل ۱۲). چه شتابی باید در راستای افقی به گوه داده شود تا جسم A آزادانه سقوط کند؟



شکل۱۲



شکل۱۳

۱۵۴ـ دو استوانهٔ A و B توسط یک تسمهٔ دوار که چرخش را از A به B منتقل می‌سازد، به یکدیگر متصلند. سرعت استوانهٔ محرک $n_1 = 3000$ دور در دقیقه است. قرقره‌ای به قطر $D_2 = 500\,mm$ روی استوانهٔ واداشته نصب شده که می‌تواند با سرعت $n_2 = 600$ دور در دقیقه بچرخد. قطر قرقره‌ای که روی استوانهٔ محرک نصب شده، چه اندازه است؟

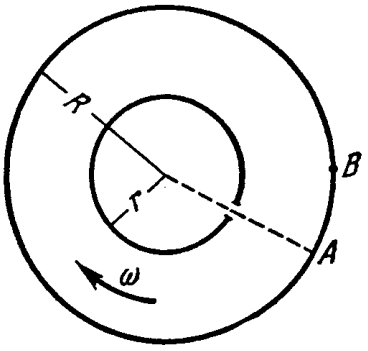
۱۵۵ـ چرخ زنجیر یک تراکتور شامل n اتصال هر یک به طول a است. شعاع چرخهایی که چرخ زنجیر روی آنها قرار داده شده، برابر با R است. تراکتور با سرعت v حرکت می‌کند فرض براین‌است که چرخ زنجیر خم نمی‌شود.

iopm.ir

(۱) چه تعداد اتصال در این لحظه حرکت انتقالی دارند و چه تعداد از آنها ساکنند (نسبت به زمین) و چه تعدادی روی چرخها می‌چرخند؟

(۲) تراکتور مسافت $s \gg na$ را طی می‌کند. در این فاصله، هر یک از اتصالها چه مدت زمان دارای حرکت انتقالی است و چه مدتی ساکن است و در حرکت چرخشی شرکت می‌کند؟

۱۵۶ـ وسیلهٔ نشان داده شده در شکل ۶۰ برای تعیین سرعت مولکولها مورداستفاده قرار می‌گیرد. سیمی با اندود نقره که با جریانی گرم می‌شود روی محور مشترک دو استوانه که به یکدیگر متصلند و با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند، قرار دارد. مولکولهای آزاد شده از سیم می‌توانند از طریق شکافی که در استوانه داخلی وجود دارد به بیرون راه یابند. کل دستگاه در خلأ قرار دارد. اگر استوانه‌ها ساکن باشند، رد مولکولهای نقرهٔ رسوب کرده در نقطهٔ A و در صورتی که بچرخند، رد آنها در نقطهٔ B به فاصلهٔ l از A ظاهر خواهد شد. سرعت حرکت مولکولها را پیدا کنید. شعاع استوانه‌ها r و R است.



شکل ۶۰

۱۵۷ـ برای چرخیدن تراکتوری که با سرعت $v_0 = 18km/h$ در حال حرکت است، راننده آن‌چنان یکی از چرخ زنجیرها را ترمز می‌کند که محور چرخ محرک آن با سرعت $v = 14km/h$ به جلو شروع به حرکت کند. فاصلهٔ بین چرخ زنجیرها $d = 1/5$ متر است. شعاع قوسی که توسط مرکز تراکتور طی می‌شود، چه اندازه است؟

۱۵۸ـ پدیدهٔ زیر را می‌توان در کوهها مشاهده کرد: یک ستاره که توسط ناظری در حال رؤیت است، به‌سرعت پشت یک قلهٔ دور ناپدید می‌شود. (همین پدیده را می‌توان در سطح هموار در صورتی که ساختمان بلند نسبتاً دوری وجود داشته باشد مشاهده کرد)، شخص ناظر با چه سرعتی باید بدود تا به طور ثابت ستاره را در همان فاصلهٔ زاویه‌ای از کوه ببیند؟ فاصلهٔ بین ناظر و قلهٔ کوه ۱۰ کیلومتر است. فرض کنید که این مشاهده در قطب صورت می‌گیرد.

۱۵۹ـ سرعت جریان آب در رودخانه متناسب با فاصله از ساحل افزایش می‌یابد و در وسط رودخانه به ماکزیمم مقدارش v_0 می‌رسد. نزدیک ساحل سرعت آب برابر با صفر است. قایقی با سرعت ثابت u نسبت به‌جریان آب و در راستای عمود بر جریان روی آب در حرکت است. معین کنید قایق ضمن عبور از رودخانه، چه مسافتی توسط جریان آب از جا رانده خواهد شد؟ پهنای رودخانه برابر با C است. همچنین مسیر حرکت قایق را مشخص کنید.

۱۶۰ـ چهار لاکپشت در چهارگوشهٔ مربعی به ضلع a قرار دارند آنها همزمان و با سرعت ثابت v شروع به حرکت می‌کنند. جهت حرکت اولی همواره به طرف دومی، دومی به طرف سومی، سومی به طرف چهارمی و چهارمی به طرف اولی است. آیا لاکپشتها به یکدیگر خواهند رسید و اگر می‌رسند، پس از چه مدت؟

iopm.ir

۱۶۱ـ دو کشتی A و B که ابتدا به فاصلهٔ $a = 3km$ از یکدیگر در یک خط ساحلی مستقیم قرار دارند، همزمان شروع به حرکت می‌کنند. کشتی A در خط راستی عمود بر ساحل و کشتی B با سرعتی که در هر لحظه برابر با سرعت کشتی A است، پیوسته رو به‌طرف آن، حرکت می‌کند. بدیهی است پس از فاصلهٔ زمانی نسبتاً زیادی کشتی دوم به فاصلهٔ معینی ازکشتی اول، و به دنبال آن قرار می‌گیرد. این فاصله را معین کنید.

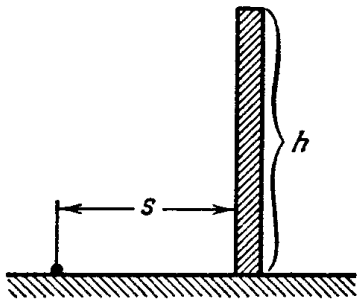
۱۶۲ـ جسمی با سرعت اولیهٔ v_0 و با زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود. مدت پرتاب جسم چه‌قدر است؟ در چه فاصله‌ای از نقطه پرتاب، جسم به زمین خواهد افتاد؟ به ازای چه زاویه‌ای مسافت حرکت ماکزیمم است؟ جسم پس از گذشت زمان τ از شروع حرکت در چه ارتفاعی خواهد بود؟ مقدار و جهت سرعت جسم در لحظهٔ معین چه خواهد بود؟

τ را بزرگتر از مدت زمانی که جسم به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد در نظر بگیرید و از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

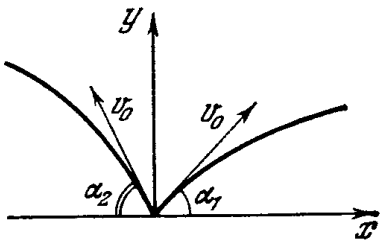
۱۶۳ـ مسیر جسمی را که با زاویه‌ای نسبت به افق پرتاب شده است، پیدا کنید (رجوع کنید به مسئلهٔ ۱۶۲).

۱۶۴ـ یک گلولهٔ لاستیکی که به فاصلهٔ s از دیواری عمودی به بلندی h قرار دارد، از روی زمین به بالای دیوار پرتاب می‌شود (شکل ۶۱). مینیمم سرعت اولیهٔ لازم برای این کار چه اندازه است؟ در این حالت زاویه بین امتداد سرعت با افق چه اندازه باید باشد؟

۱۶۵ـ جسمی از نقطه‌ای به ارتفاع H واقع بر ساحل شیبدار یک رودخانه به داخل آب پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ جسم برابر است با v_0 و امتداد آن با افق زاویهٔ α می‌سازد. جسم در چه فاصله‌ای از ساحل به داخل آب خواهد افتاد؟ چند ثانیه پس از شروع حرکت، جسم در ارتفاع h بالای سطح آب خواهد بود؟ سرعت جسم هنگام افتادن به داخل آب چه‌قدر است؟



شکل۶۱



شکل۶۲

۱۶۶ـ با چه زاویه‌ای نسبت به افق باید یک سنگ از ساحل شیبدار رودخانه‌ای پرتاب شود، تا دورترین فاصلهٔ ممکن از ساحل به داخل آب بیفتد؟ ارتفاع ساحل $h_0 = 20m$ و سرعت اولیهٔ سنگ $v_0 = 14m/s$ است.

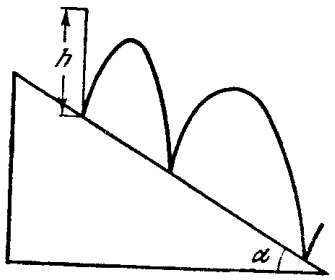
iopm.ir

۱۶۷ـ دو جسم همزمان و با سرعت اولیهٔ یکسان v_0 از نقطهٔ $x = y = 0$ با زاویه‌های مختلف α_1 و α_2 نسبت به افق پرتاب می‌شوند (شکل ۶۲) . سرعت حرکت دو جسم نسبت به یکدیگر چه اندازه است ؟ فاصلهٔ بین آنها پس از گذشت زمان τ چه اندازه خواهد بود؟

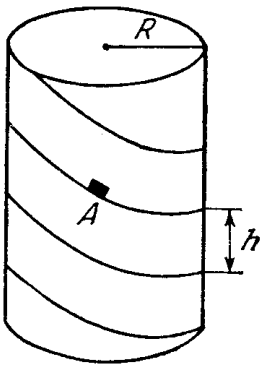
۱۶۸ـ یک شکاری بمب‌افکن ، بمبی را از ارتفاع h به سوی هدفی که به فاصلهٔ l از آن قرار دارد ، می‌اندازد . اگر سرعت شکاری برابر با v باشد ، با چه زاویه‌ای نسبت به افق باید شیرجه برود ؟

۱۶۹ـ یک اتومبیل سواری روی بزرگراه مسطحی به دنبال کامیونی در حرکت است . سنگی مابین یکی از جفت لاستیکهای چرخ عقب کامیون فرو رفته است . فاصله سواری از کامیون چه اندازه باید باشد تا سنگ در صورت پرتاب شدن از میان لاستیکها به آن برخورد نکند ؟ سرعت هر دو وسیله $50\,km/h$ است .

۱۷۰ـ توپی از ارتفاع h بالای یک سطح شیبدار که با افق زاویهٔ α می‌سازد ، روی آن سقوط آزاد می‌کند (شکل ۶۳) . معین کنید نسبت فواصل بین نقاطی را که توپ در حال جهش به‌سطح شیبدار برخورد می‌کند . برخوردهای بین توپ و سطح را کاملاً کشسان در نظر بگیرید .



شکل ۶۳



شکل ۶۴

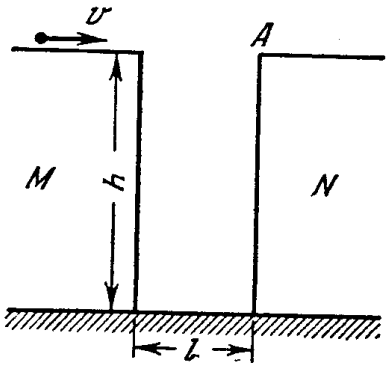
۱۷۱ـ جسم A بدون سرعت اولیه در یک شیار مارپیچ به طرف پایین می‌لغزد (شکل ۶۴) . فاصلهٔ بین دو شیار متوالی h ، شعاع مارپیچ R و اصطکاک ناچیز است . شتاب جسم را در پایان دور n ام معین کنید .

۱۷۲ـ دو تخته سنگ محکم M و N به ارتفاع h ، به فاصلهٔ $l = 20\,cm$ از یکدیگر روی زمین قرار دارند (شکل ۶۵) . گلوله‌ای که سرعتش کاملاً معلوم نیست روی تخته سنگ M حرکت می‌کند . تنها مشخص است که سرعت این گلوله بین دو مقدار $200\,cm/s$ و $267\,cm/s$ قرار دارد .

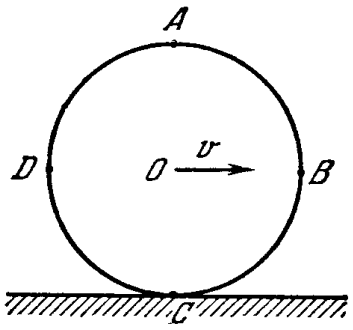
(۱) در چه ارتفاع h ، پیشبینی راستای افقی سرعت گلوله در لحظه افتادنش روی زمین ناممکن است ؟ (گلوله قبل از تماس با زمین حداقل یکبار به تخته سنگ N برخورد می‌کند) .

(۲) به ازای چه ارتفاع مینیممی برای تخته سنگها ، پیشبینی محل برخورد گلوله روی مقطع l ، ناممکن است ؟ از مدت زمان برخورد گلوله و تخته سنگ صرفنظر کنید و برخورد را کاملاً کشسان در نظر بگیرید .

iopm.ir



شکل۶۵



شکل۶۶

۱۷۳ـ یک دیسک همگن سخت با سرعت ثابت v روی مسیری افقی بدون لغزیدن، می‌غلتد (شکل ۶۶).

(۱) ثابت کنید که سرعت خطی چرخش هر نقطهٔ دیسک روی لبهٔ آن نسبت به مرکز O برابر با سرعت انتقالی دیسک است.

(۲) مقدار و جهت سرعتهای مربوط به نقاط A، B، C و D واقع بر لبهٔ دیسک را نسبت به یک ناظر ساکن پیدا کنید.

(۳) اندازه سرعت چه نقاطی از دیسک نسبت به یک ناظر ساکن برابر با سرعت مرکز دیسک است؟

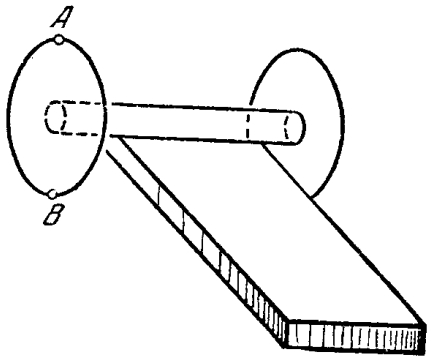
۱۷۴ـ ارابهٔ متحرکی روی پردهٔ سینما نشان داده می‌شود. شعاع چرخهای جلوی ارابه $r = ۰٫۳۵m$ و چرخهای عقب آن $R = ۱٫۵r$ است. هر یک از چرخهای جلو دارای $N_۱ = ۶$ پره است. به فرض اینکه چرخهای ارابه نلغزند، معین کنید مینیمم سرعت حرکت ارابه را برای اینکه چرخهای جلویی روی پرده ساکن به‌نظر آیند. هر یک از چرخهای عقب حداقل چند پره ($N_۲$) داشته باشد تا آنها نیز ساکن به نظر آیند؟ در دوربین سینما فیلم با سرعت ۲۴ قاب در ثانیه حرکت می‌کند.

۱۷۵ـ با مراجعه به مسئلهٔ ۱۷۴ موارد زیر به ازای چه سرعتهایی از ارابهٔ در حال حرکت از چپ به راست، به نظر تماشاگران خواهد رسید: (۱) پرهٔ چرخها پاد ساعتگرد بچرخد؟ (۲) پرهٔ چرخهای جلو و عقب در خلاف جهت یکدیگر بچرخند؟ هر یک از چرخهای جلو و عقب دارای شش پره است.

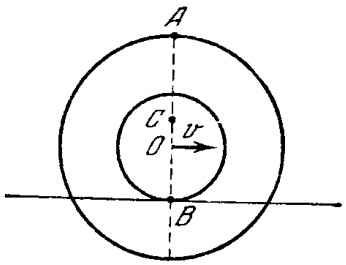
۱۷۶ـ قرقره‌ای شامل یک استوانه میانی و دو سر محکم مشابه است. استوانه بدون لغزیدن با سرعت ثابت v در طول قطعه‌ای ناصاف می‌غلتد (شکل ۶۷). شعاع استوانه r و شعاعهای دو سر آن R است.

iopm.ir

سرعت لحظه‌ای نقاط A و B واقع بر لبهٔ یکی از سرها چه اندازه است؟ سرعت لحظه‌ای چه نقاطی روی سرها از لحاظ اندازه با سرعت استوانهٔ قرقره برابر است؟



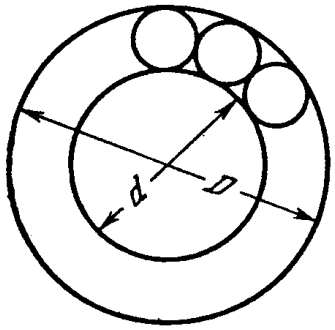
شکل۶۷



شکل۶۸

۱۷۷ـ مسیر حرکت هر یک از نقاط A، B و C از یک قرقره را (شکل ۶۸) که توسط استوانهٔ مرکزیش بدون لغزیدن در طول یک قطعه در حال غلتیدن است، رسم کنید (رجوع کنید به مسئله ۱۷۶).

۱۷۸ـ بلبرینگی انتهای یک محور که با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخیدن است قرار دارد. قطر محور d و قطر کاسهٔ بلبرینگ D است (شکل ۶۹). پیدا کنید سرعت خطی حرکت مرکز یکی از ساچمه‌ها را در صورتی که ساکن باشد یا با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد. در هر دو حالت فرض کنید که ساچمه‌ها هنگام غلتیدن روی محور نلغزند.



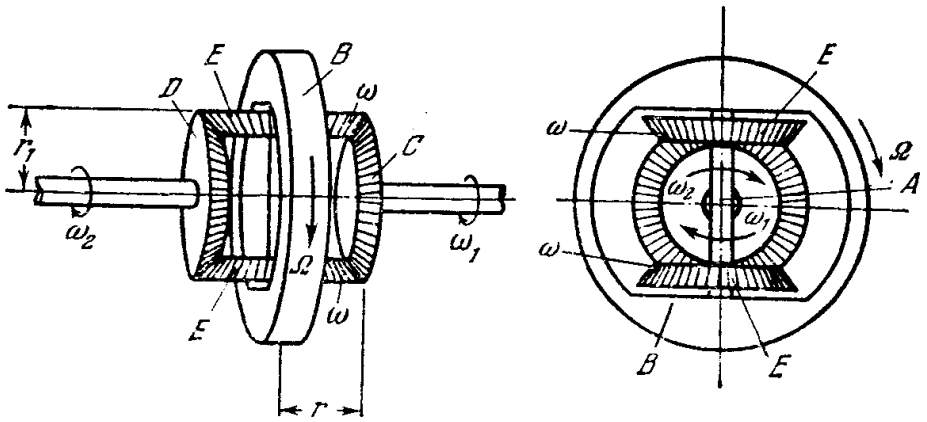
شکل ۶۹

۱۷۹ـ مخروطی بدون لغزش روی یک سطح افقی می‌غلتد. محور مخروط با سرعت زاویه‌ای ω حول خط عمودی که از رأس مخروط می‌گذرد می‌چرخد. ارتفاع مخروط h و زاویهٔ بین محور و مولد آن برابر با α است. مخروط با چه سرعت زاویه‌ای حول محورش می‌چرخد؟ همچنین معین کنید سرعت خطی یک نقطه اختیاری روی قطر قاعده مخروط را که در یک صفحهٔ عمودی قرار دارد.

۱۸۰ـ شکل ۷۰ طرحواری از دیفرانسیال انتقال را در یک وسیلهٔ نقلیهٔ موتوری نشان می‌دهد که مانع از سر خوردن چرخهای محرک وسیلهٔ نقلیهٔ هنگام عبور از پیچ جاده می‌شود (در این حالت چرخها باید با سرعتهای متفاوتی بچرخند).

موتور چرخ B را که محکم روی محور A نصب شده می‌چرخاند و یک جفت دندهٔ مخروطی E می‌توانند آزادانه حول این محور بچرخند. این دنده‌ها با یک جفت دنده مخروطی دیگر که با

iopm.ir



شکل ۷۰

چرخش محور A می‌چرخند ، درگیرند . محور چرخهای محرک (معمولاً چرخهای عقب) به دو نیمهٔ مجزا تقسیم شده‌اند که در انتهایشان دنده‌های C و D قرار دارند که می‌توانند با سرعتهای زاویه‌ای متفاوتی از یکدیگر بچرخند . این دو نیمه توسط دیفرانسیال انتقال با یکدیگر مرتبطند .

معین کنید رابطهٔ بین سرعتهای زاویه‌ای Ω ، ω ، ω_1 و ω_2 دیفرانسیال انتقال را در صورتی که شعاع هر یک از دنده‌های E برابر r و شعاع دندانه‌های D وC برابر با r_1 باشد .

iopm.ir

مسائل ۳۱ و ۳۵ که دوجسم یکی پس‌ازدیگری به‌طرف بالاپرتاب می‌شوند، ودرهوا به‌هم می‌رسند)، کاربرد این راه‌حل دشواراست. دراین راه حل ازاین واقعیت چشم می‌پوشیم که معادلهٔ $S = v_0 t - at^2/2$ یك‌عبارت‌کلی «مسافت ـ زمان» برای‌حرکت جسمی است‌که با شتاب ثابت‌کندشونده تا زمان $t = v_0/a$ (لحظه‌ای‌که جهت مؤلفهٔ سرعت تغییر می‌کند)، حرکت‌کرده‌است وپس‌ازآن باشتاب ثابت تندشونده حرکت می‌کند.

دربخشهای ۲ و ۳ باید به‌مفهوم‌کاربرد معادلهٔ $S = v_0 t - at^2/2$ درحل مسائل و آسانی حاصل‌ازکاربردآن درحل توجه شود.

تعدادی از مشکلات به‌این دلیل است‌که توالی صحیح عملیات رعایت نشده است. دانش آموزان اغلب در تعیین مبدأ حرکت و جابه‌جاییهای اجسام دقت کافی به عمل نمی‌آورند. بعد سعی می‌کنند از پیدا کردن معادلات اساسی در حالت‌کلی اجتناب‌کنند و می‌خواهند فرمولهای ریاضی برای کمیتهای مجهول بنویسند. به‌هنگام حل مسائل مربوط به‌حرکت‌پرتابی چندجسم درلحظه‌های مختلف یا از ارتفاعهای متفاوت، آنها مبدأ مکان و زمان متفاوت برای جابه‌جایی و زمان هرجسم در نظر می‌گیرند. ارتباط بین حرکتهای جداگانه، که درضمن حل لازم می‌شوند، فقط سرانجام با محاسبات اضافی و گیج‌کننده تعیین می‌گردند. این‌روش حتی درحل مسائل ساده منجربه‌ایجاد پیچیدگیهایی می‌شود.

بیشترمسائل بخشهای ۱ـ۳ درنظردارند یك‌بار دیگر قوانین‌اساسی در انتخاب مبدأ مشترك زمان ومکان‌را برای اجسام موردنظر درمسئله نشان دهند.

دراین مسائل بهتراست به‌توالی‌کلی عملیات، ترتیب به‌دست‌آوردن معادلات‌اساسی و روشهای استفاده ازداده‌های مربوط به‌نقاطی ازمسیربرای به‌دست‌آوردن معادلات‌ریاضی توجه شود.

بسیاری ازمسائل بخشهای ۱ـ۳ باروش‌ترسیم‌حل می‌شوند. ازآنجاکه‌توانایی‌به‌کار بردن وفهمیدن نمودارها بسیار مهم‌است، دانش‌آموزان باید سعی‌کنند حتی در مواردی‌که به‌طورصریح گفته نشده مسائل‌را ازطریق رسم‌حل‌کنند.

به‌استثنای حالتهای مشخص شده، درتمام مسائل مربوط به‌سینماتیك ازمقاومت هوا چشم‌پوشی شده‌است.

۱. دونفریکی درسالن اپرا و دیگری درخانهٔ خود نزدیك رادیو نشسته وبه‌یك‌نوع موزیك‌گوش می‌دهند.

(۱) شخصی‌که در سالن اپراست درچه مسافتی ازارکستر بنشیند تا اولین‌صدا را با شخصی‌که درخانه، به‌فاصلهٔ ۷۵۰۰ km از سالن اپرا، درکنار رادیو نشسته است، به‌طور همزمان بشنود؟

iopm.ir

(۲) اگرشخصی که درسالن اپرا نشسته در ۳۰متری ارکستر باشد، شخصی که درخانه نشسته درچه فاصله‌ای از رادیو بنشیند، تا همزمان بادیگری صدا را بشنود؟ میکروفون در محل ارکستر قرار دارد. سرعت صوت ۳۴۰ m/s و سرعت انتشار امواج رادیویی ۳×۱۰^{۱۰}cm/s است.

۳. فاصلهٔ بین دوشهر M و K برابر با ۲۵۰ km است. دواتومبیل به‌طورهمزمان از دو شهر به‌طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. سرعت اتومبیلی که از شهر M حرکت کرده، $v_۱ = ۶۰$ km/hr وسرعت اتومبیلی که ازشهر K حرکت کرده $v_۲ = ۴۰$ km/hr است.

نمودارمسافت برحسب زمان‌حرکت هراتومبیل‌را رسم کنید وازروی‌آن محل‌رسیدن دواتومبیل به‌هم وزمان حرکت‌آنهارا قبل‌ازرسیدن به‌یکدیگر تعیین کنید.

۳. در هر ۱۰ دقیقه یك اتومبیل از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B حرکت می‌کند. فاصلهٔ بین A و B، ۶۰ km است وماشینها باسرعت ۶۰ km/hr حرکت می‌کنند.

نمودارهای مسافت برحسب زمان حرکت آنها را رسم کنید. از آنها برای تعیین تعداد اتومبیلهایی که رانندهٔ درحال حرکت از B به‌طرف A درمسیرخود خواهد دیداستفاده کنید، باتوجه به‌اینکه این‌راننده بایکی از اتومبیلهایی که از A به‌طرف B می‌رود، به‌طور همزمان شروع بـه حرکت کرده باشد. سرعت اتومبیلی کـه از B حرکت کـرده است، ۶۰ km/hr است.

۴. یك توپ ضدتانك به‌طورمستقیم به‌تانکی شلیك می‌کند. پس‌ازمدت $t_۱ = ۰٫۶$ s انفجارگلوله به‌وسیلهٔ تیرانداز مشاهده می‌شود و صدای آن پس‌ازگذشت $t_۲ = ۲٫۱$ s از لحظهٔ شلیك شنیده می‌شود.

فاصلهٔ توپ ازتانك چه‌مقداراست؟ سرعت افقی گلوله چه‌اندازه است؟ درصورتی که سرعت صوت ۳۴۰ m/s باشد. ازمقاومت هوا صرفنظر کنید.

۵. مسافری درکنار پنجرهٔ قطاری نشسته و قطار با سرعت $v_۱ = ۵۴$ km/hr در حرکت است. تماشای قطاردیگری که باسرعت $v_۲ = ۳۶$ km/hr ازطرف مقابل می‌آید و طول‌آن $l = ۱۵۰$ m است، برای مسافرچه مدت طول خواهدکشید؟

۶. مسافری که درداخل یك‌قطاربرقی نشسته‌است، متوجه می‌شودکه قطاردیگری از طرف‌مقابل می‌آید، که ازیك لوکوموتیو وده واگن‌تشکیل شده‌است و ۱۰ s طول‌می‌کشد، تاازکنار اوبگذرد.

درصورتی که طول هرواگن ۱۶٫۵ m وطول لوکوموتیو باانبار عقب‌آن ۲۰ m و فاصلهٔ بین واگنها ۱٫۵ m باشد و وقتی که دوقطار به‌هم می‌رسند دارای سرعت یکسانی باشند، سرعت قطاربرقی چه‌اندازه است؟

iopm.ir

۷. آیازمان لازم برای بالا وپایین‌رفتن ۱ km راه به‌وسیلهٔ یك‌قایق‌موتوری دریك رودخانه (سرعت جریان آب رودخانـه $v_1 = 2\ km/hr$ است) و در یك دریاچه (باآب راکد) یکسان‌است؟ سرعت قایق نسبت به‌آب درهردوحالت $v_2 = 8\ km/hr$ است.

مسئله‌را ازطریق محاسبه ورسم نمودارحل‌کنید.

۸. درمسئلهٔ قبل مسافتی‌راکه به‌وسیلهٔ قایق موتوری درروددخانه نسبت به‌آب طی می‌شود، محاسبه کنید.

۹. یك دقیقه طول می‌کشد تا مسافری از زیرزمین ساختمانی‌درحالی‌که برروی پله برقی‌ایستاده به‌بالاترین نقطه بیاید. اگرپله‌برقی‌کارنکند وشخص پله‌را قدم‌بزند برای‌رسیدن به‌بالا سه‌دقیقه وقت صرف می‌کند.

چه‌مدت طول می‌کشد تا شخص اززیرزمین به‌بالاترین نقطه برسد درحالی‌که هم او به‌طرف بالا قدم‌می‌زند وهم پله‌برقی درحرکت‌است؟

۱۰. ۳ ساعت وقت لازم‌است تا یك قایق موتوری در امتداد جریان آب ازنقطهٔ A به‌نقطهٔ B برود. برای برگشتن همان راه باقایق موتوری ۶ ساعت وقت صرف می‌شود.

چه‌مدت طول می‌کشد تااین قایق مسافت AB درامتداد جریان را باموتور خاموش طی‌کند؟

۱۱. هواپیمایی از نقطهٔ M بـه نقطهٔ B و بالعکس پرواز می‌کند سرعت هواپیما $v_1 = 300\ km/hr$ (نسبت به‌هوا) می‌باشد.

اگرباد به‌طور دایم وباسرعت $v_2 = 60\ km/hr$ درامتداد پرواز بوزد، چه‌زمانی برای پروازکامل لازم می‌باشد؟ فاصلهٔ بین M و B، $900\ km$ است.

۱۲. دوقایق موتوری‌باسرعتهای مختلف درجهت جریان‌آب در رودخانه‌ای درحال حرکت هستند. درلحظه‌ای‌که یکی‌ازدیگری جلومی‌زند، حلقهٔ شناوری ازدرون یکی‌ازآنها به‌داخل‌آب می‌افتد. مدتی بعد هردوقایق به‌طور همزمان برمی‌گردند و باهمان سرعت قبلی (نسبت به‌آب) به‌طرف محلی‌که حلقه‌افتاده‌است، می‌روند.

کدامیك ازقایقها زودتر به‌حلقه خواهند رسید؟

این‌مسئله‌را برای‌دوحالت دیگرنیزحل‌کنید: (۱) قایقها در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کنند. (۲) قبل‌ازرسیدن به‌هم به‌طرف یکدیگر حرکت می‌کنند.

۱۳. لوله‌ای‌که‌می‌تواند حول محوری درسطح‌قائم گردش‌کند، برروی‌یك‌چهارچرخه قرار دارد (شکل۱). چهارچرخه برمسیرافقی باسرعت ثابت $v_1 = 2\ m/s$ درحرکت‌است.

لوله تحت چه‌زاویه‌ای مثل α نسبت به‌سطح افق بایـد بایستد تا قطرات بارانی‌که به‌طورقائم باسرعت $v_2 = 6\ m/s$ می‌بارند، بدون‌آنکه با بدنهٔ لوله برخوردکنند، موازی

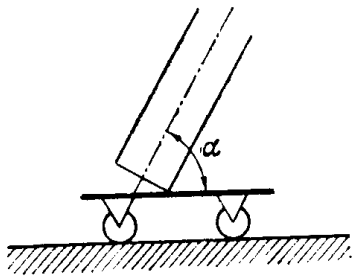
iopm.ir

بادیوارهٔ لوله حرکت کرده وبه‌زمین برسند. به‌علت مقاومت هوا سرعت باران ثابت‌است.

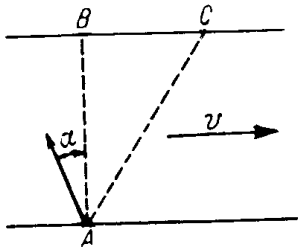
۱۴. یك‌قایق‌اسکی روی یك‌سطح افقی ویخزده درامتداد یك خط راست با سرعت v سر می‌خورد. باد درامتداد عمود برقایق باسرعت $u = 2v$ می‌وزد.

بادنمایی‌که بربالای دکل بادبان قایق نصب شده، باسطح بادبان چه زاویه‌ای (β) می‌سازد؟

زاویهٔ بین بادبان باامتداد وزش باد 45° است.



شکل ۱

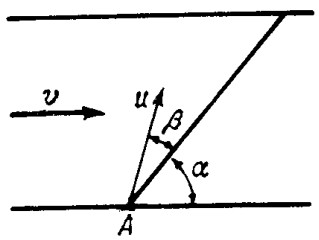


شکل ۲

۱۵. شخصی بـا قایقی ازنقطهٔ A واقـع برساحل رودخانه‌ای (شکل ۲) در عرض رودخانه‌ای شروع به‌حرکت می‌کند. اگرجهت قایق اوعمودبرساحل رودخانه باشد پس از ۱۰ دقیقه به‌نقطهٔ C ازساحل‌که $S = 120\ \text{m}$ پایینتر از B واقع‌است می‌رسد. اگر شخص درامتدادی که باخط AB (AB برساحل عمود است) زاویهٔ α می‌سازد، در جهت مخالف جریان آب حرکت‌کند، پس‌از ۱۲٫۵ دقیقه به‌نقطهٔ B می‌رسد.

l عرض رودخانه، u سرعت قایق نسبت به‌آب، v سرعت جریان آب وزاویهٔ α را به‌دست‌آورید. فرض‌کنیدکه سرعت قایق‌نسبت به‌آب مقدار ثابتی‌است و اندازهٔ آن در هر دوحالت یکی‌است.

۱۶. یك قایق موتوری بین دو نقطهٔ A و B که در دوطرف رودخانه‌ای (شکل ۳) قراردارند، درمسیر AB رفت‌وآمد می‌کند. S، فـاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، $1200\ \text{m}$ است. سرعت‌آب در تمام عرض رودخانـه ثابت و برابر $v = 1{,}9\ \text{m/s}$است.مسیرAB باامتدادجریان‌آب زاویهٔ $\alpha = 60^\circ$ می‌سازد.



شکل ۳

باچه‌سرعت u وتحت چه‌زاویهٔ β نسبت به مسیر AB قایق باید حرکت‌کند، تامسیر AB رادرمدت $t = 5$ دقیقه رفت‌و برگشت کند؟ انـدازهٔ زاویهٔ β هنگام رفتن

iopm.ir

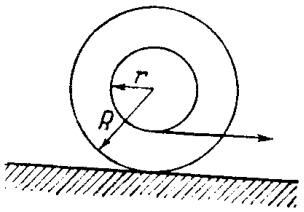
از A به B یا بازگشتن از B به A ثابت است.

۱۷. اگردوچرخه‌سواری باسرعت $v = ۲۰\ \mathrm{km/hr}$ در حال حرکت باشد، سرعت حرکت انتقالی نقطهٔ بالایی طوقهٔ چرخ دوچرخه چه‌اندازه‌است؟

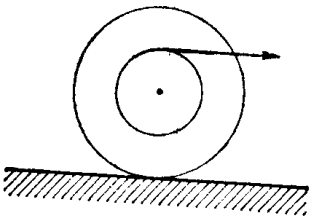
۱۸. نخی به‌دورقرقره‌ای‌که برروی یك‌صفحهٔ افقی قراردارد، بسته‌شده‌است. قرقره می‌تواند بدون لغزش برروی میزبچرخد.

اگرانتهای نخ باسرعت v درامتداد افق‌کشیده شود، محور قرقره با چه سرعت و در چه‌امتدادی حرکت خواهدکرد (شکل ۴)؟ شعاع داخلی قرقره r وشعاع خارجی‌آن R است.

۱۹. مسئلهٔ قبل را برای حالتی کـه مطابق شکل ۵ نخ از قرقره بـاز می‌شود نیز حل‌کنید.



شکل ۴



شکل ۵

۲۰. وقتی‌دوجسم به‌طوریکنواخت به‌طرف هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین‌آنها درهر $t_1 = ۱۰\ \mathrm{s}$ به‌اندازهٔ $S_1 = ۱۶\ \mathrm{m}$ کم می‌شود. اگردوجسم باهمان مقدارسرعت اما دریك جهت حرکت‌کنند، فاصلهٔ بین‌آنها در هر $t_2 = ۵\ \mathrm{s}$ به اندازهٔ $S_2 = ۳\ \mathrm{m}$ زیاد خواهد شد. سرعت هریك‌ازاجسام چه‌اندازه‌است؟

۲. حرکت متشابه‌التغییر برروی خط راست

۲۱. نقطهٔ متحرکی بـا شتاب ثابت مسافتهای $S_1 = ۲۴\ \mathrm{m}$ و $S_2 = ۶۴\ \mathrm{m}$ را در اولین دوفاصلهٔ زمانی متوالی ومساوی طی می‌کند، زمان لازم برای طی‌هریك از مسافتها $t = ۴\ \mathrm{s}$ است.

سرعت اولیه وشتاب حرکت این‌نقطه‌را محاسبه‌کنید.

۲۲. م. و. لومونوسف (M. V. Lomonosov) درآزمایشگاهش نتایج حاصل ازاندازه‌گیریهای زیررا برای اجسام درحال سقوط ثبت‌کرده‌است: درثانیهٔ اول (۱/۲)۱۵ فوت، در دوثانیه ۶۲ فوت، در سه‌ثانیه (۱/۲)۱۳۹ فوت، درچهارثانیه ۲۴۸ فوت و در پنج ثانیه (۱/۲)۳۸۷ فوت‌مسافت‌راطی کرده‌اند (هرفوت مورد نظر ۳۱٫۳۹ cm است).

iopm.ir

بااستفاده ازاین نتایج شتاب جاذبه‌را حساب کنید.

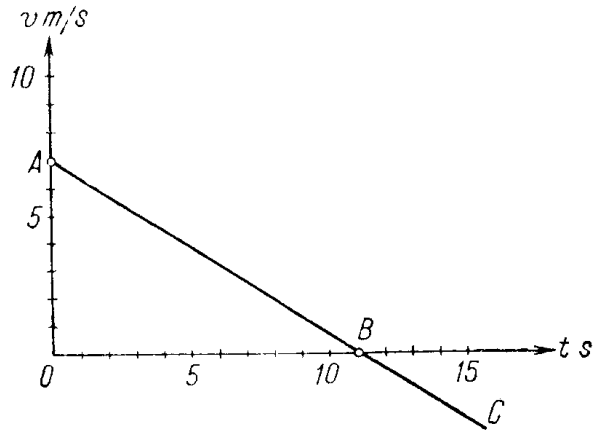
۲۳. قطرات آب درفاصله‌های زمانی منظمی ازسقف ساختمانی به‌ارتفاع $H = ۱۶\ \mathrm{m}$ سقوط می‌کنند، اولین قطره لحظه‌ای به‌زمین می‌رسدکه پنجمین قطره ازسقف جدا می‌شود. فاصلهٔ بین قطرات موجود در هوا را در لحظه‌ای‌که اولین قطره به زمین می‌رسد به‌دست آورید.

۲۴. جسمی از نقطهٔ مشخص O باشتابی که جهت و اندازهٔ آن ثابت است، حرکت می‌کند. درپایان ثانیهٔ پنجم حرکت سرعت‌آن به $۱٫۵\ \mathrm{m/s}$ می‌رسد. درپایان ثانیهٔ ششم جسم می‌ایستد وسپس به‌طرف عقب برمی‌گردد.

مسافتی راکه جسم قبل‌ازایستادن طی‌کرده است به‌دست‌آورید.

سرعت جسم‌را به‌هنگام بازگشت به‌نقطهٔ O تعیین کنید.

۲۵. شکل ۶ نمودار «سرعت ـ زمان» حرکت یك جسم است. نوع حرکت جسم را تعیین کنید. سرعت اولیه وشتاب جسم‌را پیداکرده ومعادلهٔ حرکت را بنویسید.



شکل ۶

درنقطهٔ B وضعیت جسم به‌چه‌صورت است؟ پس از این لحظه حرکت جسم چگونه خواهد بود؟

۲۶. دوجسم ازدونقطه با ارتفاعهای مختلف به‌طور آزاد سقوط می‌کنند و به‌طور همزمان به زمین می‌رسند. زمان سقوط جسم اول، $t_۱ = ۲\ \mathrm{s}$ و زمان سقوط جسم دوم، $t_۲ = ۱\ \mathrm{s}$ است.

هنگامی‌که جسم دوم رها می‌شود، جسم‌اول درچه‌ارتفاعی ازسطح زمین قراردارد؟

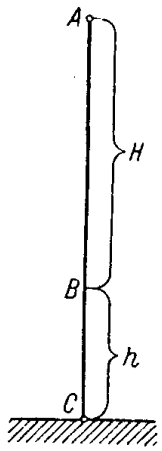
۲۷. دوجسم به‌طورآزاد ازیك ارتفاع ویکی τ ثانیه پس ازاولی سقوط می‌کند.

iopm.ir

چه‌مدت بعدازسقوط جسم اول فاصلهٔ بین دوجسم برابربا l می‌گردد؟

۲۸. جسمی درآخرین ثانیهٔ حرکت سقوطی‌آزاد خود نصف مسیررا طی می‌کند. جسم‌ازچه‌ارتفاعی (h) سقوط‌کرده وزمان رسیدن‌آن به‌زمین (t) چقدراست؟ مسئله را ازدوراه حل‌کنید.

۲۹. جسمی به‌طورآزاد ازنقطهٔ A واقع درارتفاع $H+h$ (شکل ۷) سقوط می‌کند. درهمان لحظه‌ای که‌جسم‌اول‌از A سقوط‌کرده‌است، جسم دیگری با سرعت اولیهٔ v_0 ازنقطهٔ C به‌طرف بالا پرتاب می‌شود.



شکل ۷

v_0 سرعت‌اولیهٔ جسم‌دوم چه اندازه باید باشد تا دوجسم درنقطهٔ B واقع در ارتفاع h به‌یکدیگر برسند؟ جسم دوم بااین سرعت‌اولیه حداکثرتاچه‌ارتفاعی بالاخواهد رفت؟ حالت $H=h$ را نیزجداگانه بررسی‌کنید.

۳۰. چه‌مدت قبل یابعدازاینکه جسم اول سقوط می‌کند، جسم دوم راباچه سرعت اولیه‌ای از نقطهٔ C به‌طرف بالاپرتاب کنیم (مسئلهٔ ۲۹ را ببینید) تا شرایط زیر همزمان برقرار باشد: (۱) اجسام درنقطهٔ B واقع درارتفاع h به‌یکدیگر برسند و (۲) ارتفاع h بیشترین ارتفاعی باشدکه جسم دوم به‌آن می‌رسد؟

۳۱. دوجسم ازیك نقطه وبایك سرعت اولیهٔ v_0 در امتداد قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شوند، جسم دوم τ ثانیه‌پس‌ازجسم‌اول پرتاب شده است.

پس‌ازچه‌مدت این دوجسم به‌یکدیگر می‌رسند؟

۳۲. بالنی با سرعت v_0 در حال صعود است. باری که به‌وسیلهٔ طنابی به‌سبد آن گره خورده، به‌بالن‌آویزان است.

اگرزمانی‌که بالن به‌ارتفاع H_0 می‌رسد، طنابی‌که باررا نگهداشته‌است بریده‌شود، حرکت بارنسبت به‌زمین چگونه خواهدبود؟ چه‌مدت طول می‌کشد تابار به‌زمین برسد؟ و با چه‌سرعتی به‌زمین برخورد می‌کند؟

۳۳. ثابت‌کنید برای جسمی‌که درامتداد قائم به‌طرف‌بالا پرتاب می‌شود:

(۱) سرعت اولیهٔ پرتاب باسرعت‌آن به‌هنگام برخورد با زمین یکسان می‌باشد؛

(۲) زمان صعود جسم بازمان سقوط آن برابراست.

۳۴. یك‌گلولهٔ سنگین الاستیك (کشسان) از نقطهٔ A واقع در ارتفاع H_0 بر بالای سطح افقی و سختی به‌طور آزاد سقوط کرده و به سطح برخورد می‌کند. هنگامی که گلوله به‌سطح برخورد می‌کند، گلولهٔ دیگری مشابه‌گلولهٔ اول ازهمان نقطه رها می‌شود.

iopm.ir

چه‌مدت (t) پس‌از سقوط گلولهٔ دوم و در چه ارتفاعی دو گلوله به‌هم می‌رسند؟

۳۵. دوجسم درامتداد قائم‌باسرعت اولیه‌ای برابر با v_0 به‌طرف بالاپرتاب شده‌اند. جسم دوم τ ثانیه پس‌از جسم‌اول پرتاب شده است.

(۱) سرعت جسم دوم نسبت به‌جسم‌اول چقدر خواهد بود؟ اندازه و جهت سرعت نسبی فوق را مشخص کنید. تغییر فاصلهٔ بین دوجسم تابع چه‌قاعده‌ای خواهد بود؟

(۲) این‌مسئله را هنگامی که‌سرعت اولیهٔ جسم دوم (v_0) نصف سرعت اولیهٔ جسم اول است نیز حل کنید.

۳۶. دوموتورسوار از دونقطهٔ A و B واقع بردامنهٔ تپه‌ای به‌طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. آنکه از نقطهٔ A حرکت کرده است، باشتاب ثابت $a = ۲\ \mathrm{m/s^2}$ و سرعت‌اولیهٔ $v_1 = ۷۲\ \mathrm{km/hr}$ به‌طرف سربالایی، در صورتی‌که دومی از نقطهٔ B با سرعت اولیهٔ $v_2 = ۳۶\ \mathrm{km/hr}$ و شتابی به‌اندازهٔ شتاب موتورسوار اول به‌طرف سرپایینی می‌رود.

درصورتی‌که فاصلهٔ بین A و B، $S = ۳۰۰\ m$ باشد، زمان‌حرکت وفاصله‌ای را که موتورسوار اول قبل از رسیدن به‌دومی می‌پیماید حساب کنید. معین کنیدکه فاصلهٔ بین موتورسوارها با گذشت زمان چگونه تغییرمی‌کند؟ نمودار تغییرات فاصلهٔ موتورسوارها را برحسب زمان رسم کنید. از روی‌این نمودار زمانی راکه موتورسوارها به‌یکدیگر می‌رسند پیدا کنید.

۳. حرکت برمسیر منحنی

۳۷. جسمی به‌طور آزاد از پنجرهٔ یك وسیلهٔ نقلیهٔ خط‌آهن سقوط می‌کند. آیا در حالتهای زیر زمان سقوط جسم یکسان خواهد بود؟ اگر وسیلهٔ نقلیه درحال سکون باشد؛ اگر وسیلهٔ نقلیه باسرعت ثابت v در حرکت باشد؛ اگر وسیله باشتاب ثابت a در حال حرکت باشد.

۳۸. مسلسلی بربالای ساحل عمودی دریاچه‌ای نصب شده است و درامتداد افقی تیراندازی می‌کند. سرعت‌اولیهٔ گلوله‌ها v_0 است. اگر ارتفاع‌ساحل h باشد، سرعت گلوله‌ها وقتی‌که به‌سطح آب دریاچه می‌رسند، چقدر خواهد بود؟

۳۹. دو جسم سخت از دو نقطه با ارتفاعهای معین واقع بربالای ساحل عمودی دریاچه‌ای به‌طور همزمان در امتداد افق پرتاب می‌شوند. سرعت اولیهٔ آنها به‌ترتیب $v_1 = ۵\ \mathrm{m/s}$ و $v_2 = ۷٫۵\ \mathrm{m/s}$ است. هر دوجسم‌دریك زمان به‌داخل‌آب‌می‌افتند. جسم اول در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ $S = ۱۰\ \mathrm{m}$ از ساحل وارد آب می‌شود.

معین کنید: (۱) زمان حرکت پرتابه‌ها؛ (۲) ارتفاع نقاط پرتاب؛ (۳) محل برخورد

iopm.ir

جسم دوم باسطح آب.

۴۰. گلوله‌ای باسرعت $v_0 = 1000\ m/s$ تحت زاویهٔ $\alpha = 30°$ نسبت به‌افق از دهانهٔ لولهٔ توپ دوربردی شلیك می‌شود.

گلوله چه‌مدت درهوا خواهدبود؟ درچه فاصله‌ای (S) ازتوپ گلوله به‌زمین‌می‌افتد؟ توپ و نقطه‌ای‌که گلوله فرود آمده است دریك سطح افقی قرار دارند.

۴۱. تحت چه زاویه‌ای (α) نسبت به‌افق باید جسمی را پرتاب کرد، تا باسرعت اولیهٔ معین بیشترین برد را داشته باشد؟

۴۲. دوجسم با سرعتهای اولیهٔ یکسان تحت زوایای α و $(90° - \alpha)$ نسبت به‌افق پرتاب می‌شوند.

نسبت بین بیشترین ارتفاعهایی را که اجسام به‌آنها می‌رسند، حساب‌کنید.

۴۳. سرعت‌اولیهٔ جسمی‌که تحت‌زاویه‌ای نسبت به‌افق‌پرتاب می‌شود v_0، وبیشترین بردآن S است.

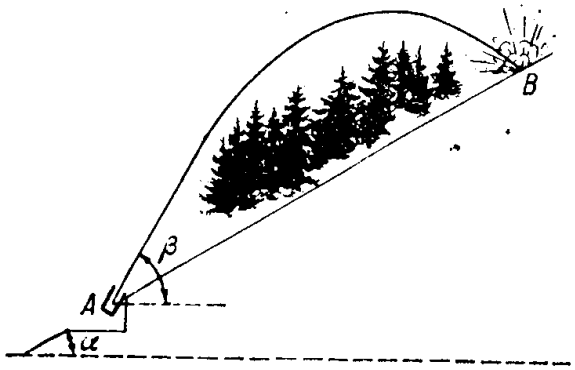
تحت چه‌زاویه‌ای (α) نسبت به‌افق جسم را باید پرتاب‌کرد تا دارای بردی برابر l باشد؟ $(l < S)$

۴۴. در میدان تیری تا برد نهایی آتش‌گشوده شده است.

اگـرسرعت اولیهٔ گلوله‌هـا $v_0 = 800\ m/s$ باشد، کمترین ارتفاع امن برای بمب‌افکنهایی‌که درمیدان‌تیر پروازمی‌کنند چقدراست؟ گلوله‌ها تحت زاویهٔ فراز $\alpha = 15°$ نسبت به‌افق شلیك می‌شوند.

۴۵. لولهٔ یك‌فوارهٔ آب تحت چه زاویه‌ای نسبت به‌افق باید تنظیم گردد، تا طول برد و ارتفاع اوج جهش‌آب یکی باشد؟

۴۶. ازسنگر خمپاره‌اندازی به‌طرف هدفی واقع بردامنهٔ تپه‌ای‌آتش‌گشوده شده‌است (شکل ۸).



شکل ۸

iopm.ir

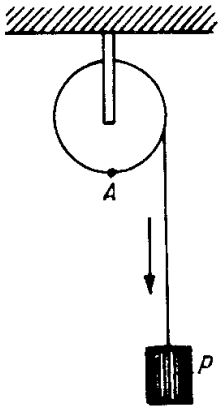
l مسافتی که گلوله‌ها طی می‌کنند تا به‌زمین برسند چقدر است ($l = AB$)، درصورتی که سرعت اولیهٔ گلوله‌ها v_0، شیب تپه نسبت به‌افق $\alpha = 30°$ و زاویهٔ پرتاب گلوله‌ها نسبت به‌افق $\beta = 60°$ است؟

۴. حرکت برمسیر دایره‌ای

۴۷. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار برج دانشگاه مسکو ۴٫۵ m است.
سرعت خطی انتهای عقربه چقدر است؟ سرعت زاویه‌ای عقربه چه‌اندازه است؟

۴۸. سرعت v و شتاب a را برای نقطه‌ای واقع در عرض جغرافیایی $60°$ در حرکت وضعی زمین به‌دست آورید. شعاع زمین ۶۴۰۰km است.

۴۹. نخی به‌دور قرقرهٔ ثابتی به‌شعاع $R = 20\,\text{cm}$ پیچیده شده و قرقره به‌وسیلهٔ وزنه‌ای که به‌نخ بسته شده هنگام بازشدن نخ به گردش درمی‌آید (شکل ۹). ابتدا وزنه ساکن بوده و سپس با شتاب $a = 2\,\text{cm/s}^2$ شروع به‌پایین رفتن می‌کند.

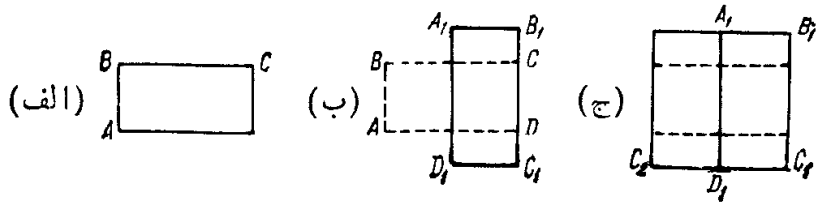


شکل ۹

سرعت زاویه‌ای قرقره را وقتی که وزنه مسافت $S_1 = 100\,\text{cm}$ را طی کرده است، حساب کنید. اندازه و جهت شتاب نقطهٔ A را در این لحظه تعیین کنید.

۵۰. سرعت افقی‌لازم برای آنکه جسمی به موازات سطح زمین ودرامتداد خط استوا حرکت نماید، چقدراست؟ شعاع استوایی زمین را ۶۴۰۰km و شتاب جاذبهٔ زمین را دراستوا $9{,}7\,\text{m/s}^2$ درنظر بگیرید.

۵۱. رویهٔ میز تاشویی که $1\,\text{m}^2$ مساحت دارد، از دو قسمت مساوی درست شده که به‌وسیلهٔ لولاهایی به‌یکدیگر متصل می‌باشند. وقتی میز کاملاً بسته است، یك نیمه برروی نیمهٔ دیگرمی‌خوابد (شکل ۱۰-الف). وقتی می‌خواهند میز را باز کنند، قبل‌از اینکه دونیمه



شکل ۱۰

iopm.ir

بازشوند (شکل ۱۰-ج)، باید رویهٔ تاشده ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند (شکل ۱۰-ب).

مرکز دوران رویهٔ میز را تعیین کنید.

۵. دینامیک ذره درحرکت برروی خط راست

به‌دلیل نیاز به‌محاسبهٔ نیروهاوشتاب‌حاصل‌ازآنها، دانستن‌چگونگی حل‌مسائل بابه‌کارگیری قوانین‌نیوتن تقریباً درتمام‌شاخه‌های فیزیک بسیارمهم است. دراین‌بخش به‌شرح چگونگی استفاده از این قوانین می‌پردازیم.

غالباً دانش‌آموزان سعی دارند مسائل را به‌محاسبه‌ای از فرمول $F=ma$ محدود کنند، بدون آنکه مفهوم فیزیکی نیرو (F) را در این معادلـه به‌خوبی درک‌کرده باشند. به‌عنوان‌مثال به‌هنگام محاسبهٔ نیروی‌کشش نخی ($F_۲$) که جسمی را به‌حرکت درمی‌آورد، بااستفاده ازشتاب جسم‌ونیروی‌اصطکاک ($F_۱$)، دانش‌آموز ابتدانیروی «محرکه»$F=ma$ را تعیین می‌کند (این نیرو را به‌جـای برایند به‌عنوان یکی از مؤلفه‌هـای نیروها درنظر می‌گیرد)، سپس بااضافه‌کردن نیروی «کند کنندهٔ» $F_۱$ نیروی‌کشش‌نخ راکه درواقع باعث حرکت جسم می‌شود پیدا می‌کند.

این روش‌دید درستی از اثر متقابل اجسام را نشان نداده و خواصی غیرواقعی به‌هر یك ازنیروها نسبت می‌دهد، ودربرخی موارد به‌دست آوردن نتیجهٔ صحیح، بدون افزودن استدلالی ساختگی و بی‌پایه غیرممکن می‌شود. به‌ویژه این روش در مسائلی‌که اثر متقابل اجسام مطرح است، مشکلاتی را به‌وجود می‌آورد. (به‌عنوان مثال، درحالاتی مثل تعیین نیروی‌وارده ازطرف باری‌که برتکیه‌گاه متحرکی قرار دارد، ویا تعیین عددی‌که نیروسنج به‌هنگام‌کشیده شدن بانیروهای متفاوت درجهتهای مختلف نشان می‌دهد.)

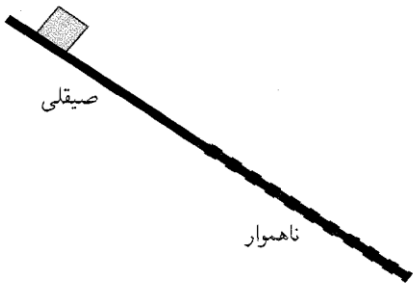
دراین بخش روشی برای حل مسائلی‌که مستلزم استفاده از قانون دوم نیوتن است دنبال‌می‌شود. این روش دانش‌آموز را مجبورمی‌کندکه تصویر واضحی از اثر متقابل‌اجسام که نیروها را به‌وجود می‌آورد داشته‌باشد. سپس او باید این نیروها را به‌صورت واضح و قابل فهمی (مانند یك جمع جبری) در معادلهٔ قانون دوم نیوتن وارد کند. دانش‌آموز فقط وقتی می‌تواند به‌طور مستقیم شروع به‌محاسبهٔ کمیتهای مجهول کند، که تمام معادلات را به‌طور صحیح نوشته باشد.

چون‌برای تسلط براین روش‌تمرین‌زیادی لازم‌است، به‌دانش‌آموزان توصیه می‌شود که تمام مسائل این‌بخش را به‌طور باقاعده (سیستماتیك) حل‌کنند.

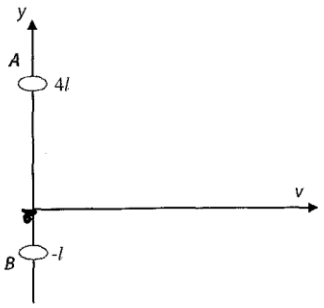
به‌مسائل مربوط به‌حرکت چندجسم‌متصل به‌یکدیگر بایدتوجه ویژه‌ای مبذول‌شود.

iopm.ir

۲. **نیمه و ناهموار.** جسم کوچکی را از بالای سطح شیب‌داری رها می‌کنیم تا به طرف پایین سطح بلغزد. نیمه‌ی بالایی سطح صیقلی و نیمه‌ی پایینی آن ناهموار است، به‌نحوی که شتاب جسم روی نیمه‌ی صیقلی سه‌برابر بیش‌تر از شتاب روی نیمه‌ی ناهموار است. جسم در مدت زمان t_1 به پایین سطح می‌رسد. سپس سطح را برمی‌گردانیم طوری که نیمه‌ی بالایی ناهموار و نیمه‌ی پایینی صیقلی باشد. دوباره جسم را از بالای سطح رها می‌کنیم. در این حالت جسم در مدت زمان t_2 به پایین سطح می‌رسد. در هر دو حالت، زاویه‌ی سطح شیب‌دار با افق یکسان است. نسبت t_1/t_2 را به‌دست آورید.



۵. **دارودسته‌ی برادرها.** دوتا سوسک به‌نام‌های A و B دو انتهای یک نوار لاستیکی کشیده را که روی یک میز افقی قرار دارد نگه داشته‌اند. مختصات اولیه‌ی سوسک‌ها همان‌طور که در شکل می‌بینیم در $(0, 4l)$ و $(0, -l)$ است، مختصات گره روی نوار لاستیکی نشان دهنده‌ی مبدأ مختصات است.



سوسک‌ها هم‌زمان روی میز شروع به دویدن می‌کنند. سوسک A از حالت سکون در جهت مثبت محور y با شتاب نامعلوم a شروع به حرکت می‌کند. سوسک B هم فوراً با سرعت ثابت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. هنگام دویدن سوسک‌ها، گره روی نوار لاستیکی از نقطه‌ای با مختصات $(2l, l)$ می‌گذرد. شتاب سوسک A را به‌دست آورید.

iopm.ir

۷. **معمای لگاریتم طبیعی.** تنه‌ی درختی روی زمین قرار دارد. شکل تنه‌ی درخت، استوانه‌ای به شعاع R است. یک کک کوچولو سعی می‌کند روی تنه‌ی درخت بپرد. سرعت اولیه‌ی کمینه‌ای

را که به کک امکان می‌دهد روی تنه‌ی درخت بپرد به‌دست آورید. فرض کنید کک به اندازه‌ی کافی باهوش است و نقطه‌ی مناسب را برای پریدن از زمین انتخاب می‌کند.

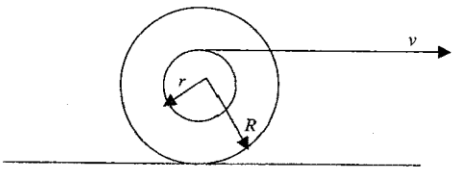
۱۰. **نیمی از این و نیمی از آن.** سنگی در راستای قائم پرتاب می‌شود. در آخرین ثانیه‌ی پرواز، سنگ نیمی از کل مسافت طی‌شده در مدت پرواز را پیموده است. بیش‌ترین مدت زمان ممکن پرواز چقدر است؟

۱۲. **کاغذ بر سنگ غلبه می‌کند.** سنگی از سطح زمین با سرعت v تحت زاویه‌ی θ در امتداد افق پرتاب می‌شود. پس از گذشت زمان t از شروع حرکت (t نامشخص است.) فاصله‌ی بین سنگ و نقطه‌ی پرتاب کاهش می‌یابد. با چشم‌پوشی از اثر مقاومت هوا مقدار t را به‌دست آورید.

۱۵. **نه این‌جا نه آن‌جا.** رودخانه‌ای پهنایی برابر d دارد. ماهیگیری با قایق دوبار از عرض رودخانه عبور می‌کند. در مدت زمان عبور اول، هدف او کمینه کردن مدت زمان عبور است. در مدت زمان عبور دوم، هدف او، کمینه کردن فاصله‌ای است که قایق به طرف پایین رودخانه رانده می‌شود. در حالت اول، زمان عبور برابر t است. در حالت دوم، زمان عبور $3t$ است. سرعت جریان آب رودخانه چقدر است؟ همه‌ی جواب‌های ممکن را به‌دست آورید.

۲۰. **فراز و نشیب در کار.** متصدی آسانسوری نوبت کاری هشت ساعته دارد. او می‌خواهد مطمئن شود که دقیقاً هشت ساعت کار می‌کند و به این منظور یک ساعت آونگی داخل آسانسور نصب می‌کند. آیا او به هدفش می‌رسد؟ فرض کنید شتاب بالاسو و پایین‌سوی آسانسور یک اندازه باشند و مدت زمان شتاب گرفتن در هر دو حالت بنابه معیار یک ساعت ساکن یک اندازه باشد.

۲۲. **چرخاندن قرقره.** قرقره‌ای مطابق شکل با نخی که به دور آن پیچیده شده است در راستای افقی



کشیده می‌شود. لغزشی بین قرقره و سطح وجود ندارد. نخ با سرعت ثابت v کشیده می‌شود. سرعت زاویه‌ای قرقره (ω) را با فرض معلوم بودن r و R به‌دست آورید.

iopm.ir

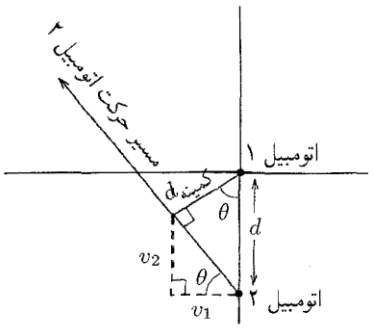
۲۴. **خروش جاده.** دو اتومبیل روی جاده‌ای مستقیم هم‌زمان به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند. اتومبیل (۱) از نقطه‌ی A با سرعت v_1 و اتومبیل (۲) از نقطه‌ی B با سرعت v_2 حرکت خود را آغاز می‌کنند. شتاب اتومبیل (۱) برابر a_1، و جهت آن به طرف A است. شتاب اتومبیل (۲) برابر a_2 و جهت آن به طرف B است. هنگام حرکت، اتومبیل‌ها دوبار از کنار هم می‌گذرند. مدت زمان بین این دو برخورد را برابر t در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی بین A و B را محاسبه کنید.

۲۵. **رقص رودخانه.** کودکی می‌خواهد با قایق از عرض رودخانه عبور کند. سرعت جریان آب رودخانه kبرابر بیش‌تر از سرعت قایق در آب ساکن است. اگر کودک از عرض رودخانه طوری عبور کند که جابه‌جایی عرضی قایق کمینه شود این حرکت tثانیه طول می‌کشد. زمان کمینه برای عبور از عرض رودخانه چقدر است؟

۲۷. **جنگ‌های آغاز.** پرتابه‌ی ۱ با سرعت اولیه‌ی v در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. پرتابه‌ی ۲، t ثانیه پس از آغاز حرکت پرتابه‌ی ۱ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. پرتابه‌ی ۲ از پرتابه‌ی ۱ عبور می‌کند و به بالاترین نقطه‌ی مسیر حرکتش می‌رسد. سرعت اولیه‌ی پرتابه‌ی ۲ (V_{i2}) را به‌دست آورید. شتاب گرانشی را g در نظر بگیرید.

۲۹. **شاهکار.** ذره‌ای با سرعت ثابت v در حال حرکت است. نیروی ثابت F به ذره وارد می‌شود. بعد از گذشت t ثانیه، سرعت ذره نصف می‌شود. پس از گذشت t ثانیه‌ی دیگر سرعت ذره دوباره نصف می‌شود. سرعت ذره (v_f) بعد از گذشت t ثانیه‌های دیگر چقدر است؟

۳۰. **تقاطع کلی.** دو اتومبیل مطابق شکل به تقاطع دو جاده‌ی عمود بر هم نزدیک می‌شوند. سرعت اتومبیل‌ها v_1 و v_2 است. در لحظه‌ای که اتومبیل ۱ به تقاطع می‌رسد، فاصله‌ی بین اتومبیل‌ها d است. فاصله‌ی کمینه بین دو اتومبیل در مدت حرکت چقدر است؟



۳۱. **خانه، خانه‌ی دوست‌داشتنی.** یک موش خرما ۵ m دورتر از پناهگاهش حمام آفتاب می‌گیرد. او تصمیم می‌گیرد آهسته بدود. موش خرما در امتداد خط راستی از پناهگاه دور می‌شود به‌ترتیبی که سرعتش با فاصله‌اش از پناهگاه رابطه‌ی عکس دارد. اگر سرعت اولیه‌ی موش خرما ۲ m/s باشد، چه مدت طول می‌کشد تا ۱۵ m از محل استقرارش دور شده باشد.

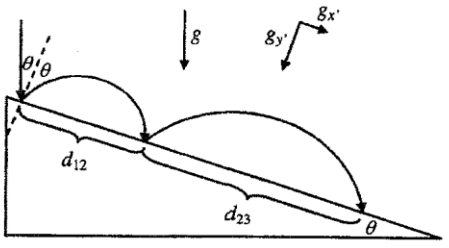
iopm.ir

۳۲. **به آرامی از رودخانه می‌گذرم.** دانش‌آموزی می‌خواهد با قایق از عرض رودخانه‌ای از نقطه‌ی K تا نقطه L پارو بزند. سرعت جریان آب رودخانه برابر $v = ۲\,\mathrm{km/h}$ و سرعت قایق در آب ساکن برابر $u = ۵\,\mathrm{km/h}$ است. پهنای رودخانه برابر $a = ۰٫۲۵\,\mathrm{km}$ و فاصله‌ی LM برابر $b = ۰٫۵\,\mathrm{km}$ است. این حرکت چه مدت طول خواهد کشید؟

۳۶. **تعقیب بیهوده.** یک چندضلعی منتظم n ضلع به طول d دارد. رئوس این چندضلعی به‌طور متوالی شماره‌گذاری شده است: ۱، ۲، ۳، . . . n. در هر رأس آن یک مورچه قرار داده می‌شود. در یک لحظه‌ی خاص، همه‌ی مورچه‌ها با سرعت ثابت و یکسان یکدیگر را به روش زیر تعقیب می‌کنند: مورچه‌ی رأس (۱) به‌طور مستقیم به طرف رأس (۲) می‌رود، مورچه‌ی رأس (۲) به طرف مورچه‌ی رأس (۳) شروع به حرکت می‌کند و الی آخر. در نهایت مورچه‌ای که از رأس n شروع به حرکت می‌کند به طرف مورچه‌ی رأس (۱) می‌رود. مورچه‌ها با تغییر مکانشان به تعقیب یکدیگر ادامه می‌دهند. سرانجام، همه‌ی مورچه‌ها حرکت خود را در مرکز چندضلعی به پایان می‌رسانند. این تعقیب چه مدت طول می‌کشد؟

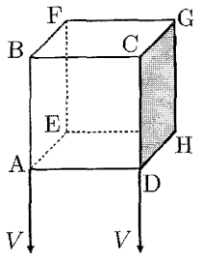
۳۷. **پرواز جادویی.** دانش‌آموزی توپ کشسانی را از سطح زمین به‌طور مستقیم به طرف یک دیوار عمودی بلند پرتاب می‌کند. بعد از اولین پرتاب، توپ از دیوار کمانه و سپس به زمین برخورد می‌کند. دانش‌آموز متوجه می‌شود که نقطه‌ی پرتاب در فاصله‌ای مساوی از نقطه‌ی فرود و دیوار قرار دارد. او سپس در جهت عمود بر دیوار به اندازه‌ی ۲۰ متر از نقطه‌ی پرتاب دور می‌شود و دوباره توپ را پرتاب می‌کند. پس از کمانه کردن و فرود آمدن مجدد توپ، دانش‌آموز متوجه می‌شود که فاصله‌ی بین نقطه‌ی پرتاب و نقطه‌ی فرود مشابه حالت قبل و مساوی است. سرانجام او توپ را به آن طرف دیوار پرتاب می‌کند. این‌بار فاصله‌ی بین نقطه‌ی پرتاب و نقطه‌ی فرود چقدر است؟ سرعت اولیه‌ی توپ در هر سه حالت یکسان است.

۳۸. **جهش، جهش، جهش.** یک توپ کشسان روی یک سطح شیب‌دار طولانی رها می‌شود. توپ از روی سطح می‌جهد و دوباره به سطح برخورد می‌کند و به همین صورت حرکت خود را رو به پایین ادامه می‌دهد. فاصله‌ی بین نقطه‌ی اول و نقطه‌ی دوم برخورد را $d_{۱۲}$ و فاصله‌ی بین نقطه‌ی دوم و نقطه‌ی سوم برخورد را $d_{۲۳}$ در نظر می‌گیریم. نسبت $d_{۱۲}/d_{۲۳}$ را به‌دست آورید.



iopm.ir

۴۱. **بازگشت به مربع اول.** مکعب صلبی در حال حرکت است. در یک لحظه‌ی مشخص، وجه ABCD در راستای قائم قرار دارد، و جهت بردار سرعت رأس‌های A و D در راستای قائم به طرف پایین و اندازه‌ی آن V است. در همین لحظه، سرعت نقطه‌ی H برابر $2V$ است. در این لحظه کدام نقطه از مکعب بیش‌ترین سرعت را دارد؟ این سرعت را محاسبه کنید.



۴۸. **ملاقات لغو می‌شود.** دو نقطه‌ی A و B، روی سطح زمین در فاصله‌ی مشخص d از هم قرار دارند.

دو سنگ، به‌طور مشابه، از نقاط A و B با سرعت‌های برابر ولی با زاویه‌های مختلف پرتاب می‌شوند. هر سنگ در نقطه‌ی پرتاب دیگری فرود می‌آید. با دانستن این‌که یکی از سنگ‌ها با زاویه‌ی $\theta > 45^\circ$ در راستای افق پرتاب می‌شود، فاصله‌ی کمینه‌ی بین سنگ‌ها در مدت حرکت چقدر است؟

iopm.ir

سینماتیک دوبعدی مسئله

۱. سه حلزون کوچک از سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶۰ cm با سرعت یکنواخت ۵ cm/min شروع به حرکت می‌کنند. اولی به سمت دومی، دومی به سمت سومی و سومی به سمت اولی حرکت می‌کنند طوری‌که هنگام حرکت همواره در جهت هدف موردنظر پیش می‌روند. پیش از رسیدن حلزون‌ها به یکدیگر چه مدت زمانی طی می‌شود و آنها چه مسافتی را می‌پیمایند؟ معادلهٔ مسیر آنها چیست؟ اگر حلزون‌ها را جرم نقطه‌ای در نظر بگیریم، آنها چند بار به دور نقطهٔ ملاقات نهایی خواهند چرخید؟

۳. قایقی می‌تواند با سرعت ۳ m/s روی آب ساکن حرکت کند. قایقران می‌خواهد عرض رودخانه را با کمترین مسافت ممکن طی کند. اگر سرعت آب در حالت (الف) ۲ m/s و در حالت (ب) ۴ m/s باشد، او باید در چه جهتی نسبت به ساحل پارو بزند؟ سرعت آب را در همه‌جا یکسان بگیرید.

۵. چهار حلزون با حرکت راست‌خط یکنواخت روی صفحهٔ بزرگی سفر می‌کنند. جهت مسیرها دلخواه است (اما موازی یکدیگر نیست، یعنی هر دو حلزونی می‌توانند با یکدیگر برخورد کنند)، اما فقط دو مسیر می‌تواند از یک نقطه بگذرد. پنج حالت از $۶ = \frac{۴ \times ۳}{۲}$ برخورد ممکن اتفاق افتاده است. آیا می‌توان با قطعیت اظهار کرد که برخورد ششم نیز اتفاق خواهد افتاد؟

۳۶. درازای عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعتی دوبرابر درازای عقربهٔ ساعت‌شمار است. چه زمانی پس از نیمه شب انتهای عقربهٔ دقیقه‌شمار با بیشترین آهنگ از انتهای عقربهٔ ساعت‌شمار دور می‌شود؟

۳۷. بیشترین زاویه نسبت به افق که می‌توان سنگی را پرتاب کرد به نحوی که همواره از پرتاب‌کننده دور شود چقدر است؟

*۳۸. تنهٔ درختی به قطر ۲۰ cm روی سطحی افقی قرار دارد. ملخ تنبلی می‌خواهد از روی تنه بپرد. کمترین سرعت لازم برای پرش ملخ را پیدا کنید. از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

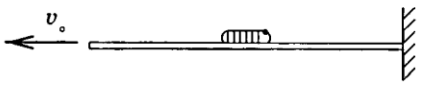
iopm.ir

۴۰. فواره‌ای، آب‌پاش کوچکی به شکل نیم‌کره دارد که مطابق شکل روی سطح آب در حوضچه قرار می‌گیرد. آب‌پاش سوراخ‌های ریز بسیاری دارد که به‌طور منظم توزیع شده‌اند و آب از طریق آنها با سرعت یکسان در تمام جهات پخش می‌شود.

شکل «ناقوس» آبی که با فواره‌ها درست می‌شود چگونه است؟

۴۱. ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی Q در معرض کنش هم‌زمان نیروی گرانش و میدان الکتریکی افقی یکنواخت E قرار می‌گیرد. ذره با سرعت v در صفحهٔ قائم موازی میدان با زاویهٔ θ نسبت به افق پرتاب می‌شود. بیشترین مسافتی که ذره در امتداد افقی می‌پیماید پیش از آنکه با نقطهٔ آغازش هم‌ارتفاع شود چقدر است؟

۶۴. عنکبوتی یک سر رشتهٔ ابریشمی «فوق کشسان» به طول یک متر را به دیوار قائمی می‌چسباند. کرم پروانهٔ کوچکی جایی روی رشته می‌نشیند.

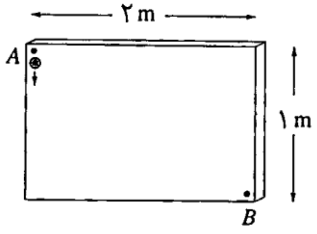


عنکبوت گرسنه، درحالی‌که از جای خودش تکان نمی‌خورد انتهای دیگر رشته را با سرعت یکنواخت $v_0 = 1\,\mathrm{cm/s}$ به طرف خودش می‌کشد و در این حین کرم پروانه با سرعت یکنواخت $1\,\mathrm{mm/s}$ نسبت به رشتهٔ متحرک به سمت دیوار فرار می‌کند. آیا کرم به دیوار خواهد رسید؟

*۶۵. اگر در مسئلهٔ فوق عنکبوت به‌جای اینکه بی‌تحرک باشد خلاف جهت دیوار حرکت کند و سر رشته را با خودش ببرد جواب مسئله چه خواهد بود؟

iopm.ir

۶۶. میخ‌هایی مطابق شکل روبه‌رو در راستای افقی داخل تختهٔ رسم که به‌طور قائم قرار گرفته است فرو رفته‌اند. گوی فولادی کوچکی از نقطهٔ A رها می‌شود و پس از جهش کشسان از میخ‌های بیرون آمده (که در شکل نشان داده نشده است) به نقطهٔ B می‌رسد.



آیا می‌توان میخ‌ها را به گونه‌ای چید که:

(الف) گوی سریع‌تر از حالتی که اصطکاک وجود ندارد، کوتاه‌ترین مسیر یعنی امتداد خط راست AB را طی کند و از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد؟

(ب) گوی در کمتر از ۰٫۴ s به نقطهٔ B برسد؟

*۸۴. قایق‌رانی از یک طرف کانال مستقیم و یکنواختی راه می‌افتد و مستقیماً به سمت مخالف نقطهٔ آغاز پیش می‌رود. سرعت جریان آب در همه جای کانال v است. قایق‌ران به‌طور یکنواخت با آهنگی پارو می‌زند که اگر جریان آب نبود سرعت قایق v می‌شد. قایق‌ران قایق را همواره به سمت هدف می‌راند اما جریان آب او را به سمت پایین رودخانه می‌کشد. خوشبختانه او هرگز احساس خستگی نمی‌کند! جریان آب، قایق را تا چه مسافتی در جهت پایین‌دست رود می‌برد؟ مسیر حرکت قایق نسبت به ساحل رود چگونه خواهد بود؟

*۸۶. قاچاقچی‌ها با کشتی با سرعت ثابت v در جهتی عمود بر خط راست ساحل راه می‌افتند. قایق گارد ساحلی به فاصلهٔ a از کشتی در همان زمان ساحل را ترک می‌کند. قایق با سرعت ثابت در جهت حرکت کشتی پیش می‌رود و در حالی به مجرمان می‌رسد که به فاصلهٔ a از ساحل رسیده است. سرعت قایق چند برابر سرعت کشتی است؟

iopm.ir

در مسائل این فصل، در صورت لزوم شتاب گرانش زمین (g) را برابر $۱۰m/s^۲$ در نظر بگیرید.

۱) جسمی با سرعت اولیه صفر از بالای یک سطح شیب‌دار به ارتفاع h پایین می‌آید و از سطح شیبدار مشابهی تا همان ارتفاع بالا می‌رود، تا بایستد در کدام مورد مدت زمان حرکت طولانی‌تر است؟

۲) قطاری که با سرعت $v = ۵۴km/h$ در حال حرکت است هنگامی که در فاصله $L = ۴۰۰m$ از یک چراغ راهنما قرار می‌گیرد شروع به ترمز می‌کند اگر شتاب قطار بعد از ترمز کردن $a = -۰/۳m/s^۲$ باشد، مکان آن را ۱ دقیقه پس از شروع ترمزگیری بدست آورید.

۳) چرخ بالی از حال سکون با شتاب $a = ۳m/s^۲$ شروع به پرواز در امتداد قائم می‌کند. در لحظه معلوم $t_۱$ خلبان موتور را خاموش می‌کند. در نقطه‌ی شروع حرکت، صدای چرخ‌بال در لحظه‌ی $t_۲ = ۳۰s$ از بین می‌رود.
سرعت چرخ‌بال (v) را در لحظه‌ای که موتور خاموش می‌شود به دست آورید. سرعت صورت (c) را $۳۲۰m/s$ در نظر بگیرید.

۴) ذره‌ای با شتاب ثابت a در امتداد خط راستی شروع به حرکت می‌کند. $t_۱$ ثانیه بعد از شروع حرکت، جهت شتاب حرکت عوض می‌شود بدون این که اندازه آن تغییر کند.
چه مدت پس از شروع حرکت (t) جسم به مکان اولیه خود باز می‌گردد؟

۵) دو جسم با سرعت‌های اولیه‌ی $v_۱$ و $v_۲$ و شتاب‌های ثابت $a_۱$ و $a_۲$ به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند به طوری که شتاب حرکتشان در خلاف جهت سرعت اولیه‌ی آنها می‌باشد.
حداکثر فاصله بین دو جسم $(l_{\max})$ چقدر می‌تواند باشد به طوری که این دو جسم به یکدیگر برسند؟

۶) دو گلوله‌ی فلزی آزادانه روی یک سطح کشسان رها می‌شوند. گلوله‌ی اول از ارتفاع $h = ۴۴cm$ و گلوله‌ی دوم از ارتفاع $h = ۱۱cm$، τ ثانیه بعد از گلوله‌ی اول، رها

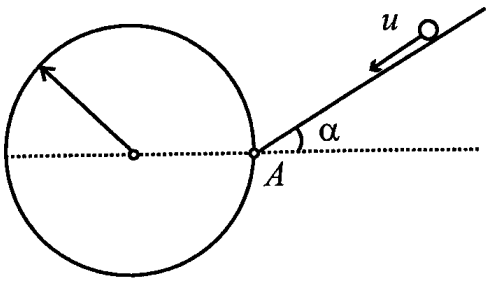
iopm.ir

می‌شود. بعد از گذشت زمان t، سرعت گلوله‌ها از نظر اندازه و جهت برابر می‌شود. زمان t و بازه‌ی زمانی را که در طی آن سرعت دو گلوله برابر می‌ماند محاسبه کنید. فرض کنید گلوله‌ها با یکدیگر برخورد نمی‌کنند.

۷) گلوله‌های کوچکی را با سرعت اولیه صفر از ارتفاع $H = \frac{R}{\lambda}$ نزدیک محور تقارن یک سطح کروی مقعر با شعاع R رها می‌کنیم. فرض کنید که برخورد گلوله‌ها با سطح کاملاً کشسان است. ثابت کنید که پس از اولین برخورد، هر یک از گلوله‌ها به پایین‌ترین نقطه سطح کروی می‌رسد. (گلوله‌ها به یکدیگر برخورد نمی‌کنند).

۸) گلوله کوچکی که با سرعت اولیه‌ی v_0 و زاویه α نسبت به امتداد افق پرتاب شده است، با دیواری عمودی که با سرعت افقی v به طرف آن حرکت می‌کند، برخورد می‌نماید. و در اثر برخورد به نقطه‌ای که از آن جا پرتاب شده بود باز می‌گردد. تعیین کنید برخورد چه مدت پس از شروع حرکت (t) اتفاق می‌افتد. تلفات انرژی نیروی اصطکاک نادیده گرفته شود.

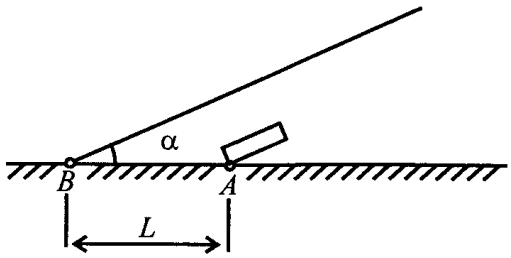
۹) * توپ کوچکی که در حال حرکت روی یک سطح افقی با سرعت ثابت v می‌باشد، به درون یک چاه عمودی به عمق H و شعاع r سقوط می‌کند. سرعت توپ با قطر چاه در نقطه A زاویه α را تشکیل می‌دهد (شکل ۱، دید از بالا). چه رابطه‌ای بین v، H، r و α وجود داشته باشد تا توپ بتواند پس از برخوردهای کشسان به دیواره‌های چاه، نهایتاً از آن خراج شود. تا تلفات انرژی در اثر اصطکاک صرف‌نظر شود.



شکل ۱

۱۰) توپی از زیر یک پناهگاه که با افق زاویه‌ی α می‌سازد گلوله‌های خود را شلیک می‌کند (شکل ۲). فاصله‌ی توپ که در نقطه‌ی A قرار دارد تا انتهای پناهگاه برابر l می‌باشد (نقطه B). سرعت اولیه‌ی گلوله‌ها برابر v_0 است و مسیر حرکت آنها در صفحه‌ی شکل قرار دارد. ماکزیمم برد گلوله‌ها $(L_{\max})$ چقدر است؟

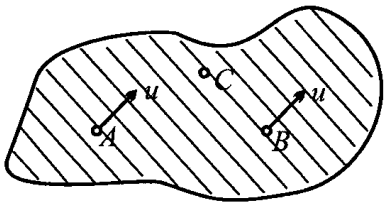
iopm.ir



شکل ۲

۱۱) شیب شیشه‌ی جلوی دو اتومبیل به ترتیب $\beta_1 = ۳۰^\circ$ و $\beta_2 = ۱۵^\circ$ می‌باشد. نسبت بین سرعت حرکت آنها $\frac{v_1}{v_2}$ چقدر باشد تا راننده‌ها مشاهده کنند که ذرات تگرگ پس از برخورد به شیشه جلوی ماشینشان به طور عمودی به سمت بالا می‌رود. فرض کنید که تگرگ به طور قائم می‌بارد.

۱۲) یک ورقه تخته چندلا روی سطح افقی صافی حرکت می‌کند. سرعت‌های نقاط A و B برابر v است و در صفحه‌ی تخته قرار دارد (شکل ۳). سرعت نقطه‌ی c را تعیین کنید.



شکل ۳

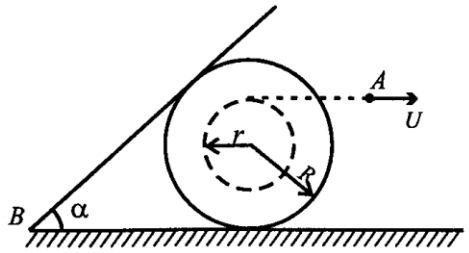
۱۳) ماشینی باید در جای خالی کمی که بین ماشین‌های پارک شده در کنار پیاده‌رو وجود دارد، پارک شود. با فرض اینکه فقط چرخهای جلوی ماشین می‌توانند با فرمان کنترل شوند، تعیین کنید برای این منظور ماشین باید به سمت جلو رانده شود یا عقب (با دنده جلو پارک کند یا با دنده‌ی عقب)؟ آیا برای این منظور باید ماشین به سمت جلو رانده شود به سمت عقب (با دنده جلو پارک کند یا دنده عقب) در صورتی که می‌دانیم تنها چرخ‌های جلو می‌توانند با فرمان کنترل شوند.

۱۴) * هواپیمایی که در حال حرکت با سرعت v_0 در امتداد افق است، شروع به بالا رفتن می‌کند و دایره‌ای را در صفحه‌ی قائم می‌پیماید. سرعت هواپیما در ارتفاع h بالای سطح پرواز اولیه، از رابطه $v^2 = v_0^2 - 2a_0 h$ قابل محاسبه است. سرعت هواپیما در بالاترین نقطه‌ی مسیر برابر است با $v_1 = \frac{v_0}{2}$. شتاب حرکت هواپیما را در لحظه‌ای که جهت سرعت آن عمودی و به سمت بالاست، حساب کنید.

iopm.ir

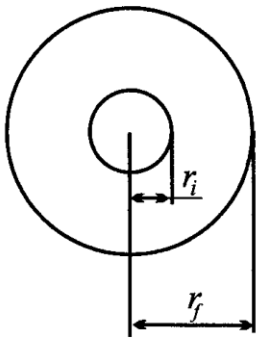
۱۵) شخصی بر یک چرخ و فلک که در صفحه افقی با سرعت زاویه w دوران می‌کند، سوار شده و در فاصله‌ی r از محور دوران نشسته است. قطرات باران به صورت قائم در حال باریدن است. شخص باید چتر خود را چگونه نگه دارد تا کمتر خیس شود؟

۱۶) * قرقره‌ای بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد. سرعت انتهای نخ (نقطه A) در امتداد افق و برابر v است. تخته‌ای که در نقطه‌ی B لولا شده روی قرقره قرار دارد. (شکل ۴) شعاع داخلی و خارجی قرقره به ترتیب r و R است سرعت زاویه‌ای تخته (w) را به صورت تابعی از α بدست آورید.



شکل ۴

۱۷) در نوار کاست، نوار مغناطیسی حول قرقره‌ی آن با سرعت زاویه‌ای ثابت پیچیده می‌شود؛ به طوری که شعاع نهایی پس از پیچیدن نوار سه برابر شعاع اولیه قرقره است (شکل ۵) مدت زمان پیچیده شدن نوار t_1 است. برای اینکه نواری با ضخامت نصف نوار اول به دور قرقره پیچیده شود، چه مدت زمان، (t_2) لازم است؟

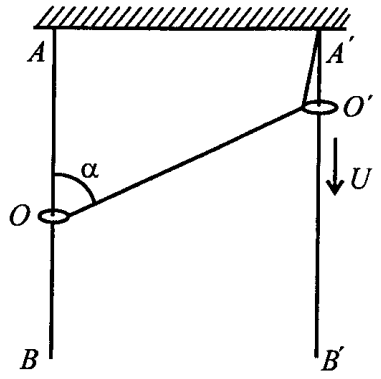


شکل ۵

۱۸) می‌دانیم شعاع نوار پیچیده شده به دور قرقره در یک نوار کاست در مدت $t_1 = 20 min$ به نصف کاهش می‌یابد. چه مدت لازم است تا شعاع نوار پیچیده شده دوباره نصف شود؟

iopm.ir

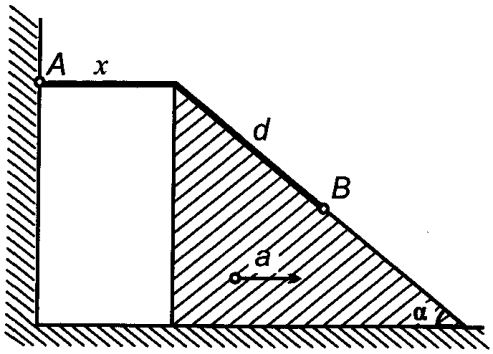
۱۹) دو حلقه O و O' روی دو میله ساکن AB و $A'B'$ قرار گرفته‌اند. نخ غیر کشسانی که یک سر آن در نقطه A' بسته شده است، پس از عبور از حلقه‌ی O' به حلقه‌ی O وصل شده است (شکل ٦)



شکل ٦

فرض کنید حلقه‌ی O' با سرعت ثابت v_1 به سمت پایین حرکت کند. سرعت حلقه‌ی O (v_2) را در لحظه‌ای که $\angle AOO' = \alpha$ است، بیابید.

۲۰) طنابی بدون جرم و با طول ثابت روی سطح شیبدار ساکنی که با افق زاویه α می‌سازد قرار دارد (شکل ۷). یک سر طناب در نقطه‌ی A به دیوار متصل شده است. جرم کوچکی در نقطه‌ی B به طناب متصل است. شتاب حرکت جسم (a_1) را تا هنگامی که روی سطح قرار دارد بیابید.

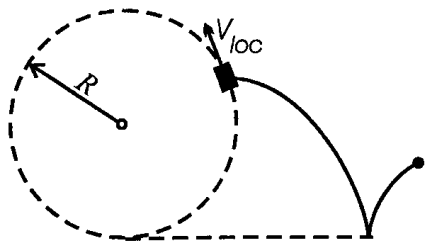


شکل ۷

۲۱) مورچه‌ای در امتداد خط راست از لانه خود دور می‌شود. سرعت مورچه متناسب با عکس فاصله‌ی آن تا لانه است. وقتی مورچه در نقطه‌ی A در فاصله‌ی $l_1 = 1m$ از لانه قرار دارد سرعت آن $v_1 = 2cm/s$ است. چه مدت طول می‌کشد تا مورچه از نقطه‌ی A به نقطه B که در فاصله‌ی $l_2 = 2m$ از لانه قرار دارد برسد؟

iopm.ir

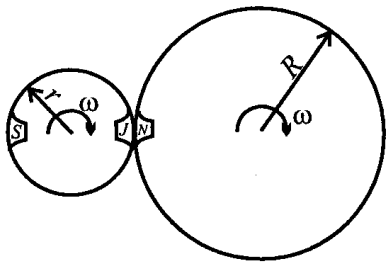
۲۲) در طی حرکت لوکوموتیوی روی یک مسیر دایره‌ای با شعاع R، باد در امتداد افق در حال وزیدن است. دود خارج شده از لوکوموتیو، ردی به صورت شکل 8 برجای می‌گذارد.



شکل ۸

با کمک شکل، سرعت باد (V_{wind}) را که ثابت است بدست آورید. می‌دانیم سرعت حرکت لوکوموتیو $۳۶km/h$ است.

۲۳) سه دانش‌آموز، سعید، جواد و ناصر سوار بر چرخ و فلک هستند. سعید و جواد در طرفین قطر چرخ و فلکی به شعاع r، قرار دارند. ناصر سوار بر چرخ و فلک دیگری به شعاع R است. وضعیت اولیه آنها در شکل ۹ نشان داده شده است. فرض کنید که چرخ و فلک‌ها با همدیگر تماس داشته و با سرعت زاویه‌ای برابر، ω، و در یک جهت حرکت می‌کنند. وضعیت حرکت ناصر را از دید جواد و وضعیت حرکت سعید را از دید ناصر تعیین کنید.



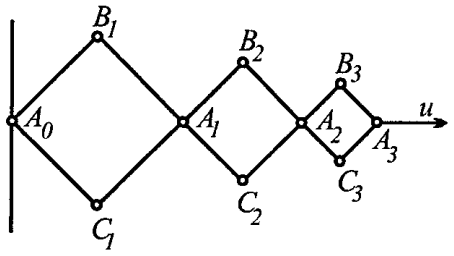
شکل ۹

۲۴) حلقه‌ای با شعاع R روی سطح افقی ساکن است. حلقه‌ی مشابهی با سرعت v از کنار آن عبور می‌کند در هنگام عبور حلقه‌ی دوم دو نقطه تماس ظاهری دیده خواهد شد. سرعت نقطه‌ی تماس بالایی (V_A) را به صورت تابعی از فاصله‌ی بین مرکز دو حلقه (d) بدست آورید. فرض کنید حلقه‌ها نازک هستند.

۲۵) یک ساختار لولایی شامل سه لوزی با نسبت اضلاع ۱ : ۲ : ۳ است (شکل ۱۰)

iopm.ir

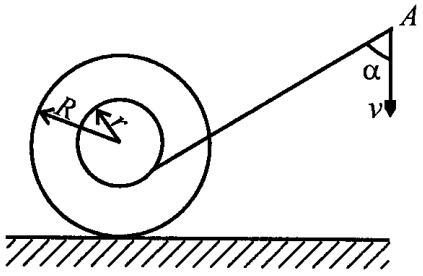
رأس A_3 در امتداد افق با سرعت v حرکت می‌کند. سرعت رئوس A_1، A_2 و B_2 را در لحظه‌ای که زاویه‌ی ساختار 90° است، به دست آورید.



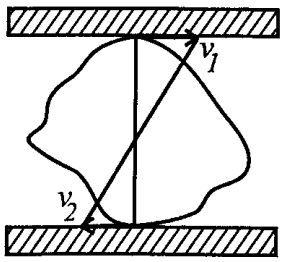
شکل ۱۰

۲۶) سر آزاد یک نخ که به دور قرقره‌ای با شعاع داخلی r و شعاع خارجی R پیچیده شده، از روی میخی که در نقطه A به دیوار کوبیده شده، عبور کرده است. نخ با سرعت ثابت v کشیده می‌شود(شکل ۱۱).
سرعت مرکز قرقره (v_0) را در لحظه‌ای که نخ با امتداد قائم زاویه α می‌سازد، محاسبه نمایید. فرض کنید قرقره بدون لغزش، روی سطح می‌غلتد.

۲۷) یک شمش حلبی بین دو صفحه افقی موازی که در خلاف جهت یکدیگر با سرعت‌های v_1 و v_2 حرکت می‌کنند، قرار دارد. در لحظه‌ی معینی، نقاط تماس شمش با صفحات در امتداد خطی که بر صفحات عمود است قرار می‌گیرند (شکل ۱۲). در این لحظه چه نقاطی از شمش دارای سرعتی با اندازه v_1 و یا v_2 هستند؟
(فرض کنید ساختار حلبی در حرکت صفحات موازی تغییر نمی‌کند)



شکل ۱۱



شکل ۱۲

۲۸) سرعت بلوکی که روی سطح افقی یک تسمه نقاله بلند در حال حرکت است، نسبت به زمین برابر $V_0 = 5m/s$ و خلاف جهت حرکت تسمه نقاله می‌باشد. پس از $t = 4s$ سرعت بلوک با تسمه نقاله برابر می‌شود. ضریب اصطکاک بین بلوک و تسمه نقاله $\mu = 0/2$ است. سرعت تسمه نقاله (v) را بیابید.

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

تمرین شمارهٔ ۱ فیزیک پایهٔ دوّم

گروه فیزیک

دبیرستان علامه حلی تهران

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲

۱- مکان یک اتومبیل نسبت به یک چراغ راهنما، در لحظات مختلف مطابق جدول زیر است:

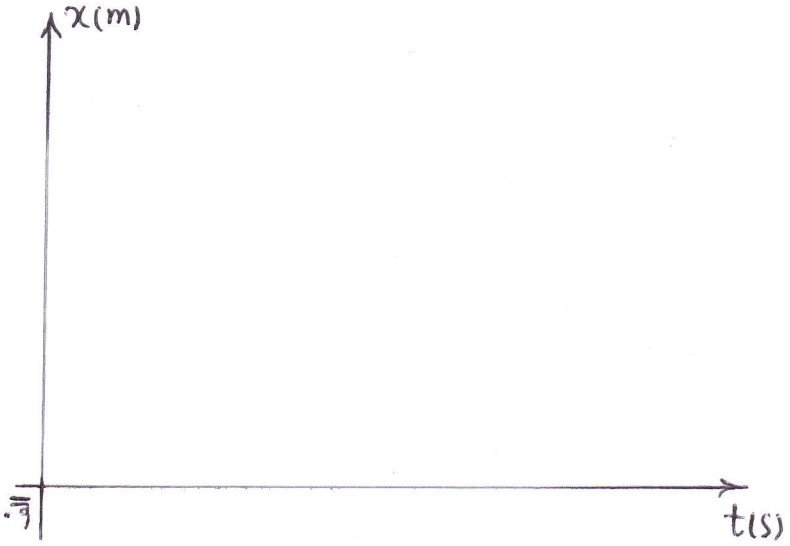
t(s)	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
x(m)	۲۰	۶۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۰۰	۶۰	۳۰	۰

الف) نمودار مکان - زمان اتومبیل را رسم کنید.

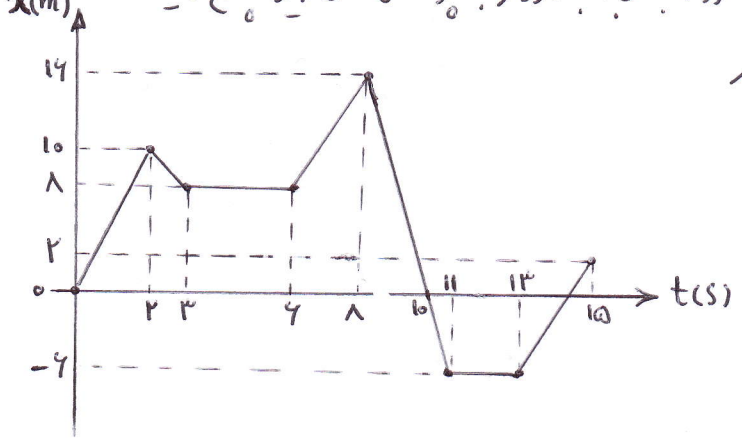
ب) جابجایی اتومبیل را در بازه‌های زمانی زیر به دست آورید: (۱۲و۱۶) - (۱۰و۱۴) - (۰و۴)

ج) اتومبیل، چند ثانیه ساکن بوده است؟ ...

د) بازه‌ی زمانی خاصی را پیدا کنید که در آن، سرعت متوسط اتومبیل از بازه‌های معلوم دیگر بیشتر باشد.



۲- در شکل روبرو، نمودار مکان - زمان یک متحرک دیده می‌شود. با توجه به نمودار به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:



الف) بیشترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان، چه مقدار و در چه زمانی بوده است؟

ب) متحرک در مجموع چند ثانیه ساکن بوده است؟

iopm.ir

ج) کل مسافت طی شده توسط متحرک چقدر است؟

د) سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است؟

هـ) در چه زمان هایی، متحرک در مبدأ مکان بوده است؟

۳- رابطه‌ی مکان - زمان متحرکی به صورت $x(t)=2t^2-32$ است.

الف) مکان متحرک در لحظات $t_1=0$ ، $t_2=5s$ ، $t_3=10s$ را بیابید.

ب) در چه زمانی این متحرک به مبدأ مکان می‌رسد؟

ج) جابجایی متحرک در بازه‌ی زمانی $\Delta t=(0,10)$ چقدر است؟

د) سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی $(0,t)$ برحسب t به دست آورید.

به سنا روز
که در نشیب دره سر به سنگی زند
روزه باش
امید هیچ معجزی ز مرده نیست
زنده باش

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

تمرین شمارهٔ ۲ فیزیک پایهٔ دوم

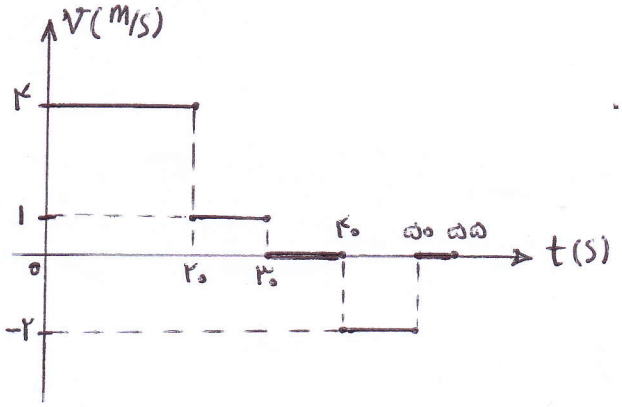
گروه فیزیک

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲ **دبیرستان علامه حلی تهران**

۱- دو قطار به فاصله‌ی زمانی ۱۵ دقیقه و با سرعت $30\ Km/h$، تهران را به مقصد مشهد ترک می‌کنند. سرعت قطار دیگری که عازم تهران است و به فاصله‌ی زمانی ۴ دقیقه از کنار این دو قطار می‌گذرد، چقدر است؟

۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی به صورت شکل مقابل است:

الف) نمودار مکان - زمان متحرک را، با فرض $x_0 = 10\ m$، رسم کنید.



ب) سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است؟

ج) بیشترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان، در کدام لحظه و چقدر است؟

۳- متحرکی مسافت‌های d، $2d$، $3d$، ...، nd را روی یک مسیر مستقیم، به ترتیب با سرعت‌های v، $2v$، $3v$، ...، nv طی می‌کند. سرعت متوسط متحرک در کل مسیر برحسب v چقدر است؟

۴- یک قایق موتوری که در خلاف جهت جریان رودخانه‌ای حرکت می‌کند، از کنار الوارهایی که روی آب شناورند، می‌گذرد. یک ساعت بعد، موتور قایق خراب می‌شود و تعمیر آن نیم ساعت طول می‌کشد. در طول تعمیر، قایق (مانند الوارها) همراه

iopm.ir

جریان آب شناور است. پس از تعمیر موتور، قایق با همان تندی پیشین نسبت به الوارها (جریان آب) در جهت جریان آب حرکت می‌کند و در محلی به فاصلهٔ ۱۲ Km از محل برخورد اول، از الوارها جلو می‌افتد. سرعت جریان آب رودخانه را - با فرض ثابت بودن - پیدا کنید.

۵- دو قطار، هردو با تندی ۳۰ $\frac{Km}{h}$ به طور رو در رو در مسیر مستقیمی حرکت می‌کنند. گوسفند پرنده‌ای که با سرعت ۶۰ $\frac{Km}{h}$ پرواز می‌کند، وقتی که فاصلهٔ دو قطار از هم ۶۰ Km است، از جلوی قطار اول بلند می‌شود و به طور مستقیم به طرف قطار دوم پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که به جلوی قطار دوم می‌رسد، دوباره به طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار ادامه پیدا می‌کند.

الف) گوسفند پرنده در قسمت اول پرواز (تا رسیدن به قطار دوم) چه مسافتی را پرواز می‌کند؟

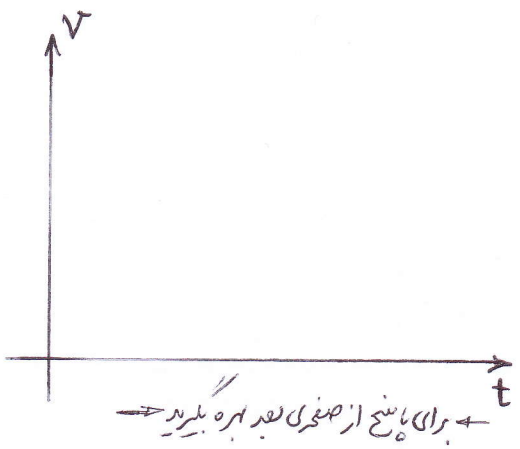
ب) گوسفند پرنده در قسمت دوم پرواز، چه مسافتی را می‌پیماید؟

ج) تا رسیدن دو قطار به همدیگر، گوسفند پرنده چه مسافتی را پرواز کرده است؟

د) سرعت متوسط حرکت گوسفند پرنده، از ابتدا تا رسیدن دو قطار به هم چقدر است؟

۶- اتومبیلی نیمی از یک مسیر مستقیم را با سرعت V_1 و نیمی دیگر را با سرعت V_2 می‌پیماید.

الف) سرعت متوسط اتومبیل را برحسب V_1 و V_2 بیابید ($\bar{V}$).



ب) ثابت کنید اگر $V_1 \neq V_2$، آنگاه $\bar{V} < \frac{V_1 + V_2}{2}$. همین حکم را از روی نمودار سرعت - زمان هم ثابت کنید.

iopm.ir

برای پاسخ از صفحهٔ بعد بهره بگیرید ←

ج) اگر اتومبیل پس از رسیدن به مقصد، فوراً به طرف مبدأ برگردد، با این تفاوت که این بار، نصف زمان برگشت را با سرعت v_1 و نصف دیگر زمان را با سرعت v_2 براند، تندی متوسط اتومبیل در کل رفت و برگشت را برحسب v_1 و v_2 به دست آورید.

د) نمودار مکان - زمان اتومبیل در کل رفت و برگشت را رسم کنید و از روی آن نشان دهید که زمان برگشت کم‌تر است.

هـ) کم‌تر بودن زمان برگشت، چگونه بخش (ب) را اثبات می‌کند؟

۷- پانزده ثانیه طول می‌کشد تا قطاری از کنار یک تیر تلگراف بگذرد. این قطار، تونلی به طول ۲۵۰ متر را در مدت ۴۵ ثانیه طی می‌کند. وقتی این قطار به قطار دیگری به طول ۳۰۰ m می‌رسد، ۲۱ ثانیه طول می‌کشد تا آن‌ها به طور کامل از کنار یکدیگر رد شوند. سرعت قطار دوم چقدر است؟

iopm.ir

نه من نریی عملی در جهان معلوم و بین / علامت علما هم ز علم بی عمل است ...

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

تمرین شمارهٔ ۳ فیزیک پایهٔ دوم

گروه فیزیک

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲

دبیرستان علامه حلی تهران

۱- در یک مسابقه‌ی اتومبیل‌رانی، اتومبیلی دور اول از مسیر دو دوری را با سرعت متوسط $60\ mi/hr$ می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان زیاد کند که سرعت متوسط‌اش در کل مسابقه $120\ mi/hr$ باشد. نشان دهید که چنین کاری ممکن نیست و نقطه در حدّ یک آرزوست!

۲- متحرکی از نقطه‌ی A با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱۰ s به نقطه‌ی B می‌رسد. اگر سرعت متوسط این متحرک در مسیر AB برابر با $15\ m/s$ باشد، مطلوب است:

الف) سرعت متحرک در مکان B.

ب) شتاب حرکت متحرک.

ج) طول مسیر AB.

۳- ذره‌ی باردار با سرعت $5\times10^{6}\ m/s$ به ناحیه‌ای وارد می‌شود و در آنجا تحت تأثیر یک میدان الکتریکی، شتابی به بزرگی $1/25\times10^{14}\ m/s^2$ و در خلاف جهت سرعت اولیه‌اش پیدا می‌کند.

الف) این ذره پیش از آن که به حالت سکون درآید، چه مسافتی را می‌پیماید؟

ب) چه مدّت طول می‌کشد تا ذره به حالت سکون درآید؟

۴- اتومبیل A با سرعت ثابت ۷ از اتومبیل B که با سرعت $7/2$ در حال حرکت است، سبقت می‌گیرد. در همان لحظه، اتومبیل B با شتاب ثابت بر سرعت خود می‌افزاید. اتومبیل B با چه سرعتی - برحسب ۷ - به اتومبیل A خواهد رسید؟

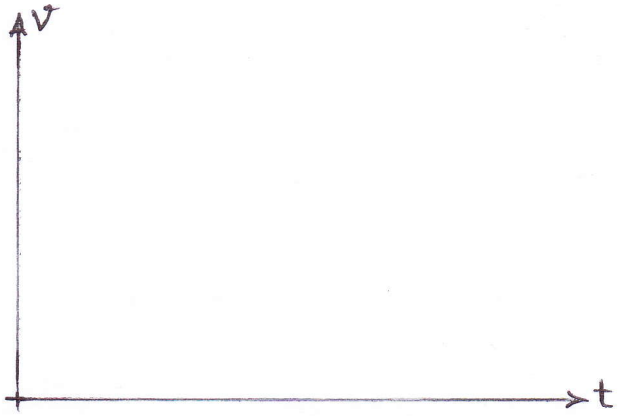
بهتر است با استفاده از نمودار سرعت - زمان حل کنید!

iopm.ir

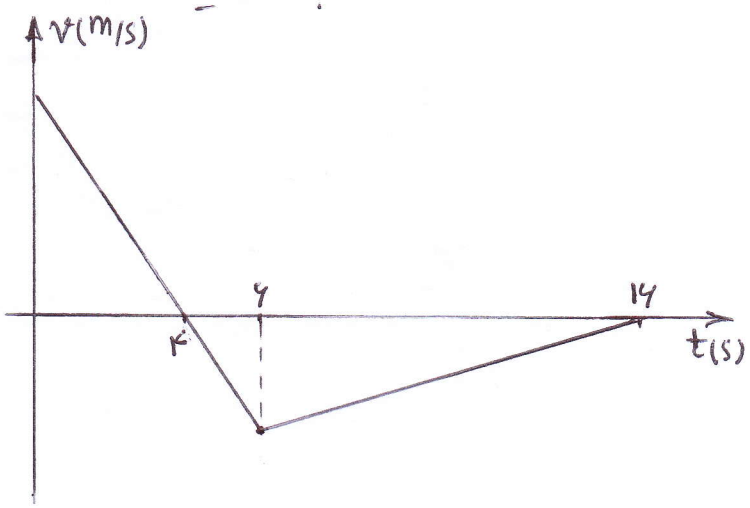
۵- متحرکی که با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند، مسافتی که در ثانیه‌ی دهم حرکتِ خود طی می‌کند، ۵۰ متر بیشتر از مسافتی است که در ثانیه‌ی پنجم حرکتِ خود می‌پیماید. شتابِ متحرک چقدر است؟

۶- [با استفاده از نمودار سرعت - زمان] متحرکی با سرعت اولیه‌ی $20\frac{m}{s}$ و با شتاب $+2\frac{m}{s^2}$ به مدت ۱۰ s در حال حرکت می‌باشد. این متحرک در ۳ ثانیه‌ی آخر حرکت خود چه مسافتی را می‌پیماید؟

۷- [با استفاده از نمودار سرعت - زمان] یک قطار مترو می‌تواند حداکثر با شتاب $2\ m/s^2$ به سرعت خود بیفزاید و بیشترین شتاب ترمز آن برابر با $6\ m/s^2$ است. کم‌ترین زمان ممکن که این قطار می‌تواند فاصله‌ی ۳/۲ کیلومتری میان دو ایستگاه را بپیماید، چقدر است؟



۸- نمودار سرعت - زمانِ جسمی که کلّ مسافت طی شده توسط آن، ۶۰ m است، مطابق شکل زیر است:



الف) متحرک در چه لحظه‌هایی ساکن است؟

ب) سرعت اولیه‌ی متحرک چقدر است؟

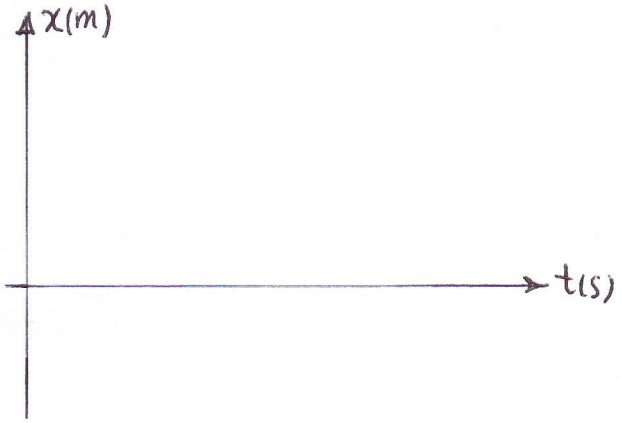
ج) سرعت متوسط کلّ حرکت را حساب کنید.

iopm.ir

۹- معادلهٔ مکان - زمان متحرکی به صورت $x(t)=3t^2-5t+2$ در SI داده شده است.

الف) شتاب این حرکت چقدر است؟

ب) نمودار مکان - زمان متحرک را - به صورت تقریبی - رسم کنید.

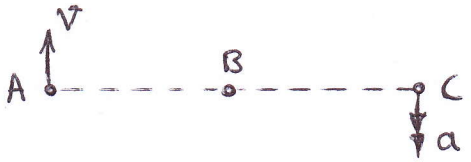


ج) سرعت اولیهٔ متحرک چقدر است؟

د) متحرک در چه زمانی دور می‌زند؟ در این لحظه مکان متحرک کجاست؟

هـ) متحرک در چه زمان(ها)یی به مبدأ مکان می‌رسد؟

۱۰- سه نقطهٔ A، B و C ابتدا روی یک خط راست افقی و در فواصل مساوی از هم قرار دارند. نقطهٔ A با سرعت ثابت V در راستای قائم به طرف بالا و نقطهٔ C بدون سرعت اولیه و با شتاب ثابت a در راستای قائم به طرف پایین شروع به حرکت می‌کنند. اگر فرض کنیم که هر سه نقطه همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، سرعت اولیه و شتاب حرکت نقطهٔ B در راستای قائم را به گونه‌ای تعیین کنید که این ۳ نقطه دائماً روی یک خط راست باقی بمانند؟

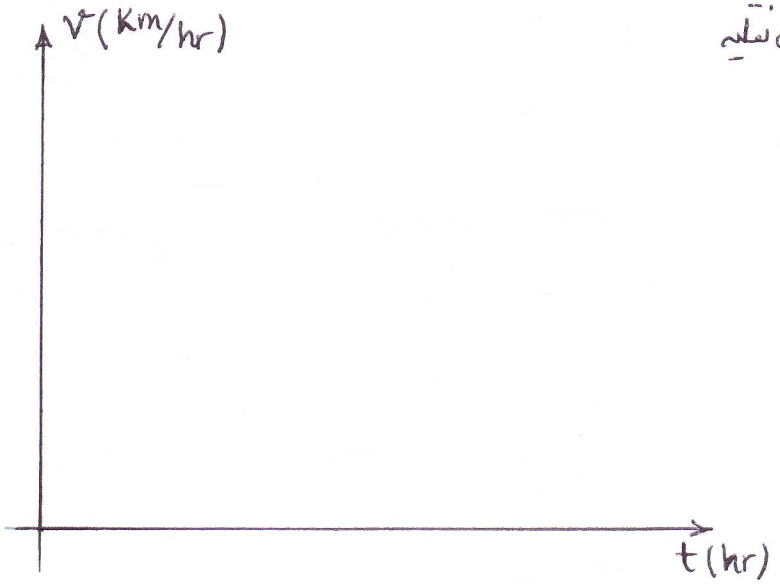


iopm.ir

۱۱- دو وسیله‌ی نقلیه‌ی موتوری هم‌زمان از نقطه‌ی A به طرف نقطه‌ی B حرکت می‌کنند و پس از دو ساعت باهم به نقطه‌ی B می‌رسند. وسیله‌ی نخست، نصف مسافت را با سرعت $30\ km/h$ و نصف دیگر را با سرعت $45\ \frac{km}{h}$ طی می‌کند. وسیله‌ی دوم، تمام مسیر را بدون سرعت اولیه و با شتاب ثابتی می‌پیماید.

نمودار سرعت - زمان را برای هر دو وسیله رسم کنید و به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) در چه لحظه (ها)یی از زمان، سرعت دو وسیله‌ی نقلیه یکسان است؟



ب) آیا در طول مسیر، یکی از دیگری جلو می‌زند؟ چند بار و در چه زمان‌هایی؟

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

تمرین شمارهٔ ۴ فیزیک پایهٔ دوم

گروه فیزیک

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲ **دبیرستان علامه حلی تهران**

۱- توپی را با سرعت اولیه‌ی $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب می‌کنیم.

الف) توپ پس از چه مدت ثانیه‌ای چقدر بالا می‌رود؟

ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به بالاترین نقطه (اوج) برسد؟ ارتفاع اوج چقدر است؟

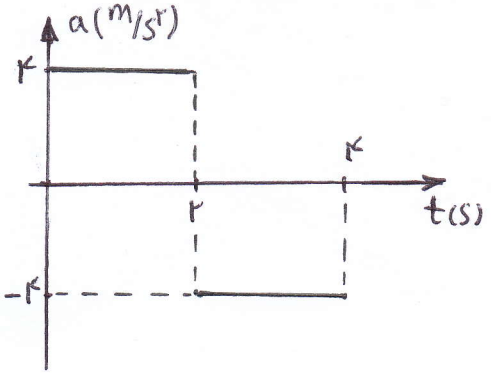
۲- اتومبیلی که با سرعت $25 \frac{m}{s}$ در حال حرکت است، با شتاب یکنواخت ترمز می‌گیرد و در طول ۲۵ متر، سرعت خود را به $15 \frac{m}{s}$ می‌رساند. شتاب ترمز چقدر است؟

۳- اتومبیلی از سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از یک دقیقه، سرعتش به $20 \frac{m}{s}$ می‌رسد. سپس شتاب خود را تغییر داده و با شتاب ثابت $1 \frac{m}{s^2}$، سرعت خود را به $40 \frac{m}{s}$ می‌رساند. سرعت متوسط اتومبیل در کل حرکت چقدر است؟

۴- دو قطار، اولی با سرعت $16 \frac{m}{s}$ و دومی با سرعت $20 \frac{m}{s}$ به طرف هم در حال حرکت هستند. این دو قطار در فاصله‌ی ۸۰ m همدیگر را می‌بینند؛ قطار اول با شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ سرعت خود را کم می‌کند. قطار دوم دست‌کم باید با چه شتابی سرعت خود را کم کند تا قطارها با هم تصادف نکنند؟

iopm.ir

۵- شکل روبرو، نمودار شتاب-زمان خودرویی است که در زمان $t=0$، با سرعت $5\ m/s$ از یک چراغ سبز عبور می‌کند. مبدأ مکان را چراغ سبز در نظر بگیرید و نمودارهای $x-t$ و $v-t$ خودرو را به دقت رسم کنید.

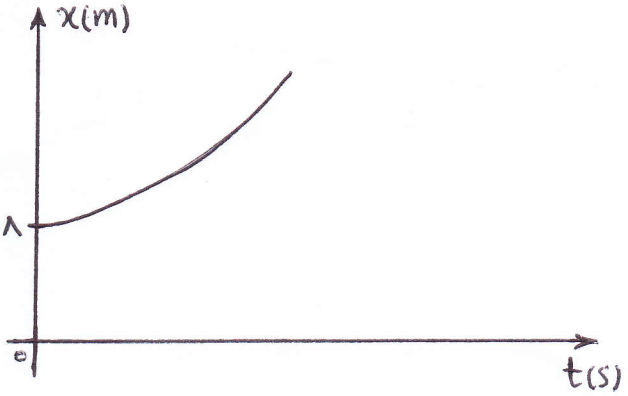


۶- بالونی در ارتفاع ۱۰۸ متری سطح زمین، با سرعت $2\ m/s$ به طرف بالا در حرکت است. بسته‌ای از داخل این بالون به بیرون رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا این بسته به زمین برسد؟

۷- در حادثه‌ای که چند سال پیش در یکی از کشورهای اروپایی رخ داد، زنی از بالای یک ساختمان ۴۸ متری سقوط کرد و روی یک جعبه‌ی هوا کش افتاد؛ جعبه را ۴۵ سانتی‌متر در هم فرو برد و بی هیچ جراحت شدیدی زنده ماند. شتاب که این زن، طی برخورد با جعبه متحمل شده است، چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب g بنویسید، اگر $g=10\ m/s^2$. مدت زمان برخورد را محاسبه کنید.

iopm.ir

۸- اتوبوسی در یک ایستگاه ایستاده است. شخصی با سرعت ثابت ۷ می‌دود تا به اتوبوس برسد. وقتی فاصله‌ی این شخص تا اتوبوس ۸ متر است، اتوبوس با شتاب $1\ m/s$ به راه می‌افتد. سرعت دویدن شخص (۷) دست‌کم باید چقدر باشد تا به اتوبوس برسد؟



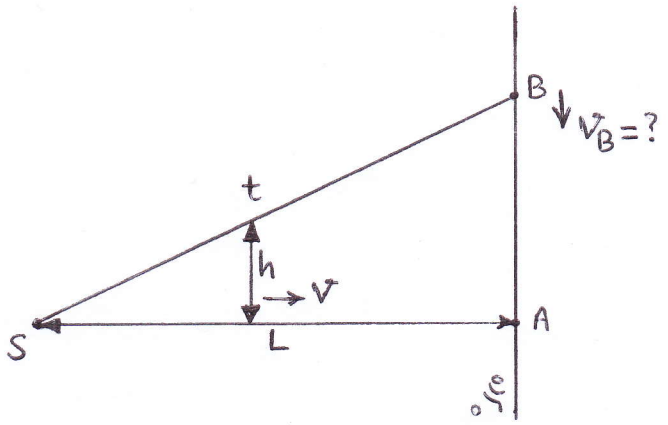
[راهنمایی: فرض کنید نمودار روبرو، نمودار حرکت اتوبوس است. مبدأ زمان، شروع حرکت اتوبوس؛ و مبدأ مکان، مکان فرد در این لحظه فرض شده است. برای شخص سرعت‌های متفاوتی در نظر بگیرید و روی نمودار نشان دهید. آیا شخص با هر سرعتی به اتوبوس می‌رسد؟]

۹- تله‌ی سرعت که در بزرگراه‌ها نصب می‌شود، دو نوار به فاصله‌ی $110\ m$ از هم است که زمان سنج آن‌ها در اثر فشار فعال می‌شود و سرعت متوسط اتومبیل در این فاصله را می‌سنجد. راننده‌ای، در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن $90\ \frac{km}{h}$ است، با سرعت $126\ \frac{km}{h}$ می‌راند. او درست در لحظه‌ای که از روی نوار اول رد می‌شود، شروع به کم کردن سرعت خود می‌کند. چه شتاب کاهنده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل بین دو نوار از سرعت مجاز فراتر نرود؟

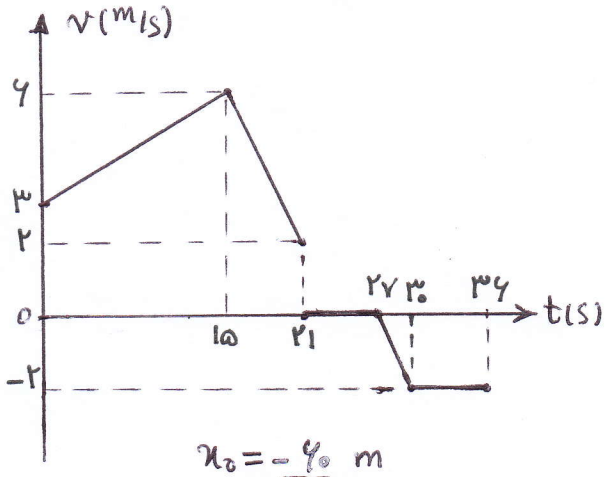
۱۰- در شکل صفحه‌ی بعد، چشمه‌ی نقطه‌ای نور S، به فاصله‌ی l از پرده‌ی قائم AB قرار دارد. یک جسم کدر به ارتفاع h، در لحظه‌ی $t=0$، در نقطه‌ی S بوده و با سرعت ثابت ۷ در امتداد خط راست SA از منبع به طرف پرده حرکت می‌کند. لبه‌ی بالایی سایه‌ی جسم در هر لحظه (مانند لحظه‌ی دلخواه t) چه سرعتی دارد؟ پاسخ را برحسب

iopm.ir

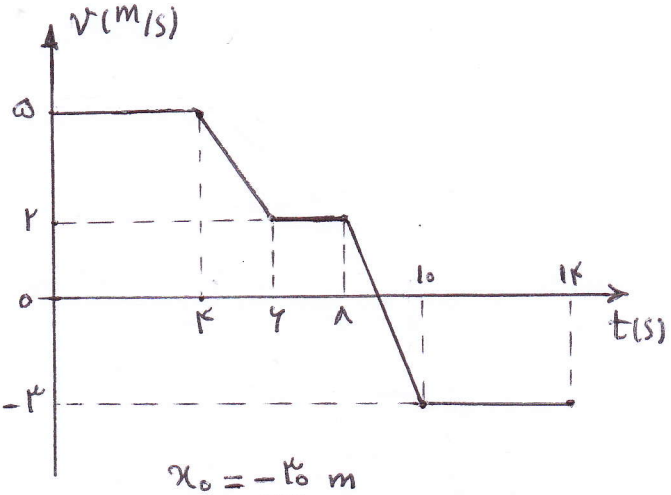
۵ پارامترهای مسئله، یعنی L، h، V و t بیابید. نمودار کیفیِ سرعت - زمانِ لبه‌ی بالایی را رسم کنید.



۱۱- در شکل‌های زیر، نمودار مکان - زمانِ متحرک را رسم کنید:



$x_0 = -\underline{40}$ m



$x_0 = -\underline{20}$ m

گفتی: «هدف کجاست؟»
کماندار را بپرس. من تیرم را پرتاب کرده‌ام...!!

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

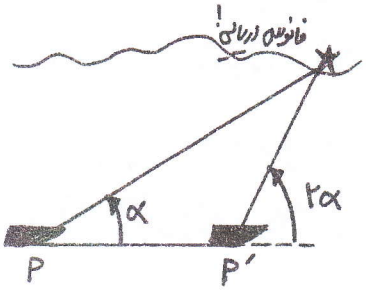
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

تمرین شمارهٔ ۵ فیزیک پایهٔ دوم

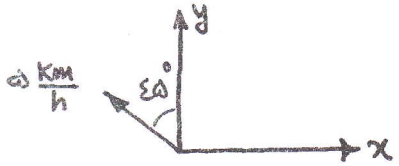
گروه فیزیک

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲ دبیرستان علامه حلی تهران

۱- کشتی ران، با روشی که به آن «دو برابر کردن زاویه‌ی دماغه» گفته می‌شود، می‌تواند فاصله‌ی خود را نسبت به یک نقطه‌ی ثابت مانند فانوس دریایی تعیین کند. در نقطه‌ی P، کشتی ران زاویه‌ی بین خط دید فانوس دریایی و جهت حرکت کشتی (α) را اندازه می‌گیرد؛ سپس پیشرفت کشتی را درآب، تا جایی که زاویه‌ی بین خط دید و جهت حرکت، دو برابر زاویه‌ی قبلی شود ادامه می‌دهد. در این حالت، فاصله‌ی کشتی تا فانوس دریایی به اندازه‌ی مقدار پیشرفت کشتی (PP') است. چرا؟



۲- شخصی در جهت شمال غرب (۴۵°)، و با تندی $۵\ km/h$ می‌دود. مؤلفه‌های سرعت شخص در راستای x و y را بنویسید.



۳- ملخی از آفتاب‌زدگی بعد از ظهر در یک دشت، عصبی شده و روی سطح افقی یک منطقه‌ی لجنی جست و خیز می‌کند. از روی جای پاهای ملخ و با انتخاب یک دستگاه دلخواه در صفحه، مؤلفه‌های چهار جست متوالی به صورت (۴۰ و ۳۰)، (۷۰- و b_x)، (c_x و ۲۰-) و (۷۰- و ۸۰-) و هم‌چنین بر حسب میلی‌متر اندازه‌گیری شده‌اند. همچنین این چهار جست در مدت ۱۰ ثانیه و با جابه‌جایی کل (۲۰- و ۱۴۰-) انجام شده‌اند.

الف) b_x و c_x را بیابید.

ب) اندازه‌ی سرعت متوسط کل این چهار جست را حساب کنید. [پاسخ: $۱۴٫۱۴\ \frac{mm}{s}$]

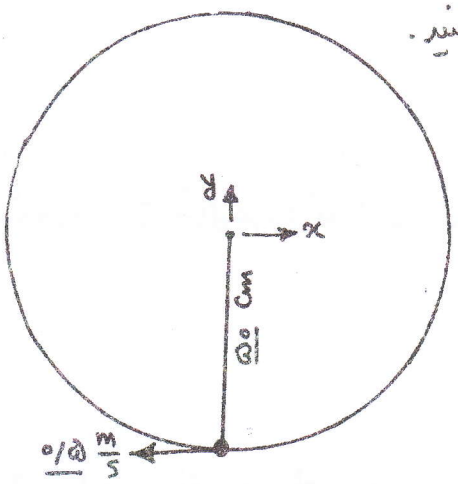
۴- یک بازیکن گلف در سه مرحله توپ را به داخل حفره می‌اندازد. با ضربه‌ی اول، توپ ۱۸ ft به طرف شمال می‌رود. با ضربه‌ی دوم ۸ ft به جنوب شرقی (۴۵°) حرکت می‌کند؛ و سرانجام با ضربه‌ی سوم ۳ ft به طرف غرب حرکت کرده و داخل حفره می‌افتد. در ابتدا، توپ در چه فاصله‌ای از حفره بوده است؟ شکل بکشید. [پاسخ: $۱۲٫۶۲\ ft$]

iopm.ir

۵- سرچه‌ای در صفحه‌ی xOy، روی خط $y=2x+1$ و با تندی $10\ m/s$ در حرکت است. مؤلفه‌های تندی $(v_x$ و $v_y)$ را برای حرکت سرچه بنویسید.

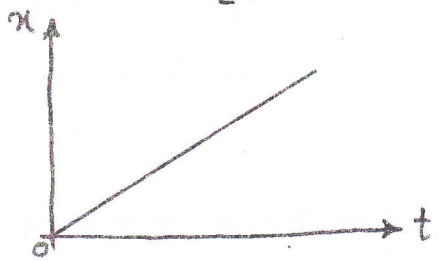
۶- وزنه‌ای به کمک نخی به طول $50\ cm$ در یک مسیر دایره‌ای روی صفحه‌ی قائم می‌چرخد. در آغاز، وزنه در پایین‌ترین نقطه‌ی دایره بوده است و تندی حرکت وزنه در مسیر دایره‌ای $0/5\ m/s$ اندازه‌گیری شده است. ۱۰ ثانیه پس از آغاز، نخ پاره می‌شود. وزنه با چه سرعتی و در چه جهتی پرتاب می‌شود؟ مؤلفه‌های تندی فرار را حساب کنید.

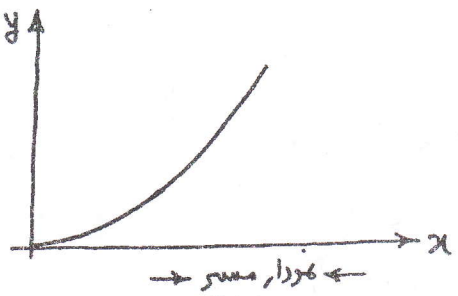
$$\left[v_y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\ m/s,\ v_x=\frac{1}{4}\ m/s\ :\ \text{پاسخ}\right]\quad(\pi=3)$$



۷- نمودارهای $x-t$ و $x-y$ یک حرکت دوبعدی در دسترس است. با استفاده از آنها، نمودارهای $y-t$ و $v-t$ این حرکت را رسم کنید. v تندی کل جسم در هر لحظه است.

[راهنمایی: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. برای رسم v برحسب t می‌توانید از نرم‌افزار Excel استفاده کنید]

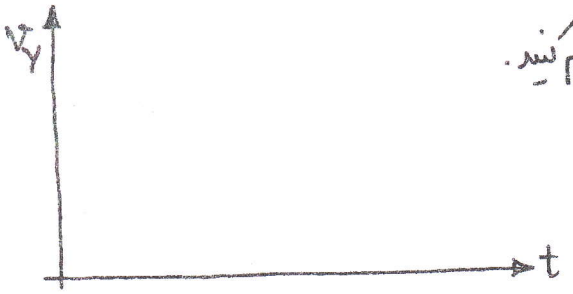




iopm.ir

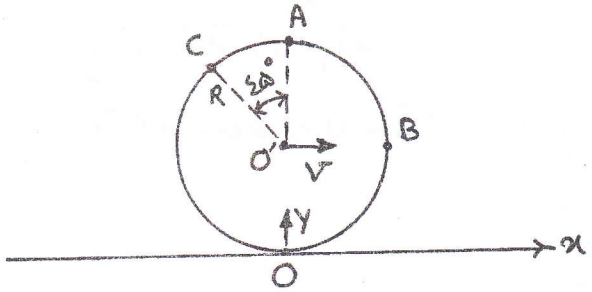
۸- قطره‌ی بارانی از ابر جدا شده و پس از مدتی سقوط، به سرعت حدی $3\ m/s$ در راستای عمودی می‌رسد. در تمام مدت سقوط، باد نسبتاً شدیدی با سرعت $4\ m/s$ در امتداد افقی می‌وزد.

الف) نمودار سرعت عمودی (V_y) قطره بر حسب زمان را به طور کیفی رسم کنید.



ب) قطره با چه تندی‌ای با زمین برخورد می‌کند؟ [پاسخ: $5\ m/s$]

۹- دیسکی به شعاع R و با سرعت V در راستای افقی می‌غلتد. بردار سرعت نقاط A، B و C را در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل تعیین کنید. [راهنمایی: V، سرعت مرکز دیسک است؛ اما در چنین حالت‌هایی می‌توان فرض کرد که بردار سرعت هر نقطه، مجموع دو بردار سرعت جداگانه است. یکی بردار سرعت V در جهت افقی و به طرف حرکت؛ و دیگری بردار سرعتی مماس بر دیسک است. اندازه‌ی بردار دوم هم V است. فکر کنید می‌فهمید چرا! به همین خاطر، نقطه‌ای مانند O در هر لحظه ساکن است.]



۱۰- چهار لاک پشت در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع a قرار دارند. آنها هم‌زمان و با سرعت ثابت V شروع به حرکت می‌کنند. جهت حرکت لاک پشت اول همواره به طرف دومی، دومی به طرف سومی، سومی به طرف چهارمی و چهارمی به طرف اولی است. به نظر شما آیا لاک پشت‌ها به همدیگر خواهند رسید؟ پس از چه مدت؟

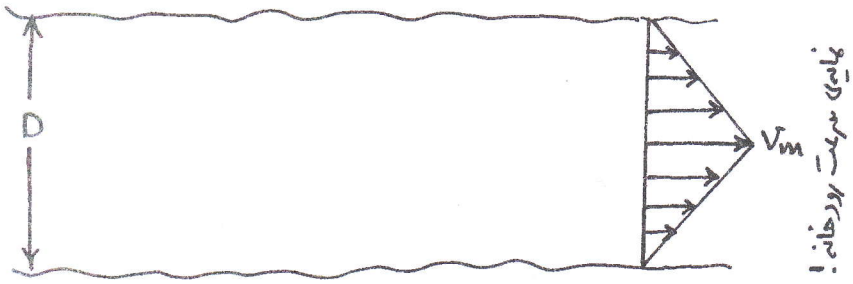
[راهنمایی: یک تقارن جالبی در مسئله موجود است! بنابراین لاک پشت‌ها همیشه روی یک مربع‌اند]

iopm.ir

۱۱- رودخانه‌ای به پهنای D، به گونه‌ای است که سرعت جریان آب در آن متناسب با فاصله از ساحل افزایش می‌یابد. یعنی در کنار دو ساحل شمالی و جنوبی، سرعت آب صفر است و در وسط رودخانه به بیشترین مقدارش یعنی V_m می‌رسد. قایقی با سرعت ثابت u نسبت به جریان آب و در راستای عمود بر جریان، روی آب در حرکت است. معین کنید قایق وقتی از کنار یک ساحل به ساحل روبرو می‌رسد، چقدر توسط جریان آب - در راستای افقی - منحرف می‌شود؟

مسیر حرکت قایق را رسم کنید.

[سرعت نسبی قایق همواره u است]



سبحان من یمیت و یحیی و لا الٰه
الّا هو الّذی أخذ العهد فی الّست
سبحان ربّ هرچه دلم را زمن برید
سبحان ربّ هرچه دلم را زمن گسست

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

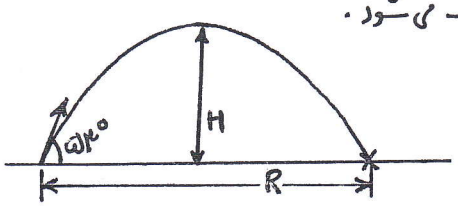
تمرین شمارهٔ ۶ فیزیک پایهٔ دوم

گروه فیزیک

دبیرستان علامه حلی تهران

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲

۱- توپی با سرعت اولیه‌ی $20\ m/s$ و با زاویه‌ی 53° نسبت به سطح افق زمین شوت می‌شود.



الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به بالاترین نقطه از مسیر حرکت خود (نقطه‌ی اوج) برسد؟ ($t_{اوج}=?$)

ب) نقطه‌ی اوج چند متر بالاتر از محل شوت شدن توپ است؟ ($H=?$)

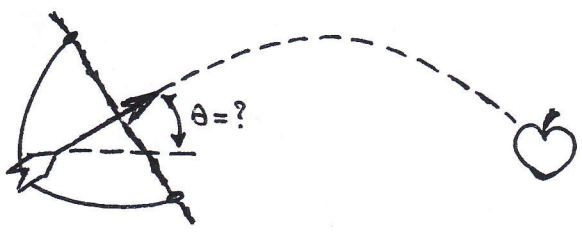
ج) چقدر طول می‌کشد تا این توپ دوباره به سطح زمین برسد؟ ($t_{برد}=?$)

د) برد حرکت توپ چقدر است؟ ($R=?$)

هـ) اگر مبدأ دستگاه مختصات را محل شوت شدن توپ بگیریم، بردار مکان توپ، بردار سرعت توپ و تندی توپ را در لحظات زیر محاسبه کنید:

$t_1 = \frac{2}{3} t_{اوج}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{5}{8} t_{برد}$

۲- تیراندازی می‌خواهد هدفی را در فاصله‌ی ۱۵ متری و هم‌ارتفاع شانه‌اش بزند. سرعت تیر، هنگام رها شدن از کمان، $30\ m/s$ است. تیر تقریباً با چه زاویه‌ای باید پرتاب شود تا با وجود سقوط ناشی از وزن، به هدف برخورد کند؟ [پاسخ دو تاست!]



iopm.ir

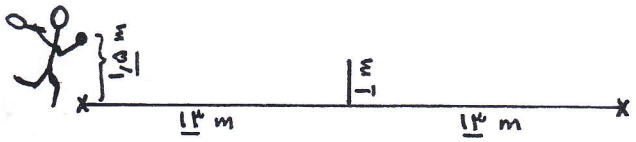
۴- تندی پرتاب یک پرتابه، دو برابر تندی آن در ارتفاع اوج است. زاویه‌ی پرتاب چقدر است؟

۳- یک هواپیمای بمب‌افکن در ارتفاع ۷۲۰ متری سطح زمین، به طور افقی و با سرعت ثابت $900\ \frac{km}{h}$ به سمت هدفی که روی زمین قرار دارد در حرکت است.

الف) بمب‌افکن در چه فاصله‌ای از خط قائم هدف، باید بمب را رها کند؟

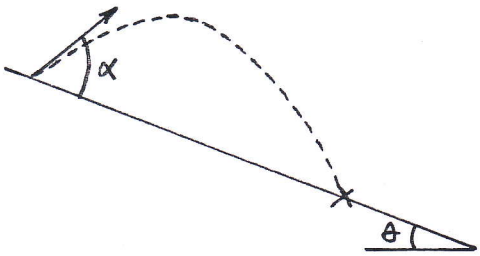
ب) تندی بمب هنگام برخورد با هدف چقدر است؟

۵- طول هر نیمه از زمین تنیس ۱۳ متر و ارتفاع تور وسط آن نیز ۱ متر است. یک بازیکن تنیس، هنگام زدن سرویس، تقریباً از ارتفاع ۲٫۵ متری به توپ ضربه می‌زند. این ضربه، یک سرعت اولیه‌ی افقی به توپ می‌دهد. حداقل و حداکثر این سرعت اولیه چقدر باید باشد تا توپ در زمین حریف بخوابد (یعنی از بالای تور بگذرد و از انتهای زمین رد نشود)؟

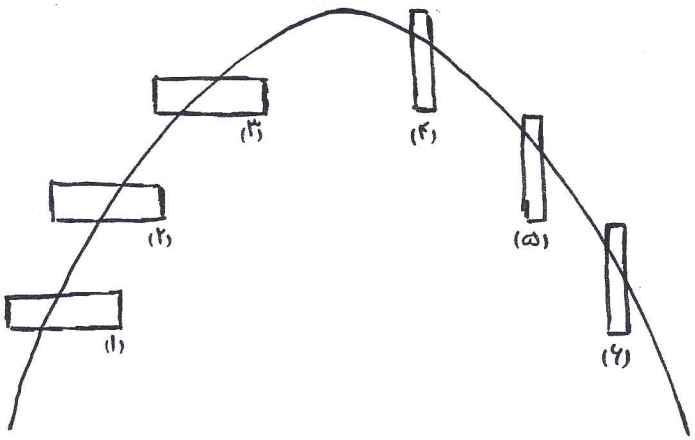


۶- مطابق شکل صفحه‌ی بعد، گلوله‌ای از روی تپه‌ای با شیب θ طوری پرتاب می‌شود که راستای سرعت اولیه‌ی پرتاب با سطح تپه زاویه‌ی α می‌سازد. اگر $T = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g\cos\theta}$ پس از زمان T به سطح تپه برخورد می‌کند. V_0 سرعت پرتاب است.

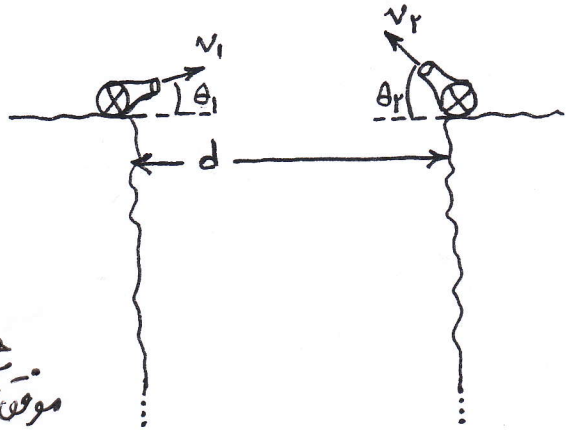
i-opm.ir



۷- در شکل زیر، تکه‌ای پوست نارنگی پرتاب شده را می‌بینید که در مسیر حرکت پرتابی خود، از مقابل ۶ پنجره می‌گذرد. پنجره‌های ۱ تا ۳؛ و پنجره‌های ۴ تا ۶ را جداگانه بر حسب الف) مدت زمانی که پوست نارنگی در مقابل آنها قرار دارد؛ و ب) تندی متوسط پوست نارنگی حین عبور از مقابل پنجره مرتب کنید.



۸- مطابق شکل زیر، دو توپ خنثی بر دولبه‌ی پرتگاه عمیقی کار گذاشته شده‌اند. فاصله‌ی دولبه‌ی پرتگاه از هم، d متر است. توپ اول، گلوله‌اش را با سرعت اولیه‌ی v_1 و زاویه‌ی θ_1؛ و توپ دوم گلوله‌اش را با سرعت اولیه‌ی v_2 و زاویه‌ی θ_2، هم‌زمان به طرف هم پرتاب می‌کنند. شرط لازم و کافی برای این که دو گلوله در نقطه‌ای از مسیر حرکت‌شان به هم برخورد کنند را به دست آورید. [راهنمایی: برخورد یعنی، در یک لحظه، x و y هر دو یکی باشد!]



موفق باشید!

iopm.ir

به نام هستی بخش یکتا

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

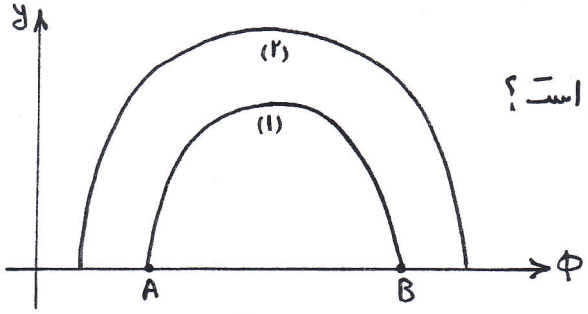
تمرین شمارهٔ ۷ فیزیک پایهٔ دوم

گروه فیزیک

دبیرستان علامه حلی تهران

نام و نام‌خانوادگی: کلاس: ۲

۱- (در نمودار زیر، منحنی ۱، ارتفاع یک تخم مرغ گندیده‌ی پرتاب شده را برحسب زاویه‌ی بین بردار سرعت و بردار شتاب (Φ) تخم مرغ در حین حرکت نشان می‌دهد.



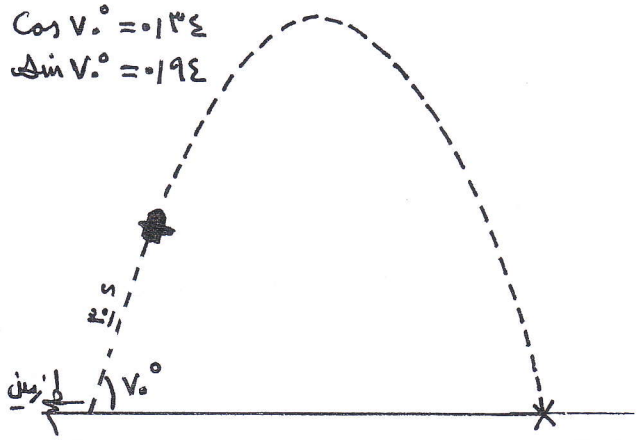
الف) کدام یک از نقاط A و B مربوط به لحظه‌ی برخورد تخم مرغ گندیده با زمین است؟ چرا؟

ب) منحنی ۲، منحنی مشابهی است که در آن تندی پرتاب یکسان؛ ولی زاویه‌ی پرتاب متفاوت است. تخم مرغ گندیده‌ی ۲ نسبت به تخم مرغ گندیده‌ی قبلی در نقطه‌ای دورتر با زمین برخورد می‌کند یا نزدیک‌تر؟ توضیح دهید.

۲- موشکی از حالت سکون و با شتاب $46\ m/s^2$ روی خط راستی با زاویه‌ی 70° نسبت به افق حرکت می‌کند. ۳۵ ثانیه بعد، موتور موشک از کار می‌افتد. حساب کنید:

$\cos 70^\circ = 0.34$

$\sin 70^\circ = 0.94$

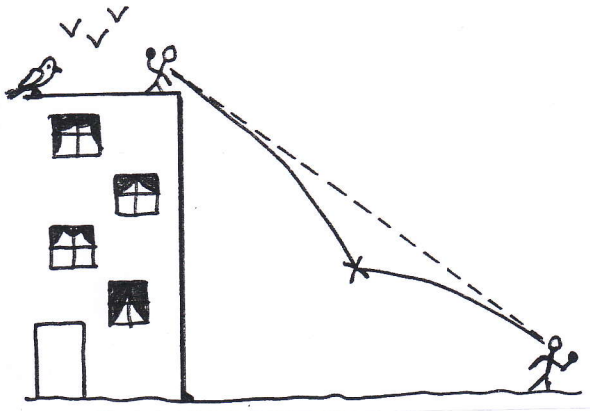


الف) موشک تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ب) چقدر طول می‌کشد تا موشک با زمین برخورد کند؟

iopm.ir

۳- دو کودک، سنگ به دست، یکی روی لبه‌ی ساختمانی و دیگری روی زمین ایستاده اند و هرکدام، نفر دیگر را نشانه رفته است! نشان دهید مستقل از این که هرکدام از سنگ ها با چه سرعتی پرتاب شود، سنگ ها در مسیر حرکت حتماً با هم برخورد خواهند کرد. دو کودک، سنگ‌ها را هم‌زمان به طرف هم پرت می کنند.

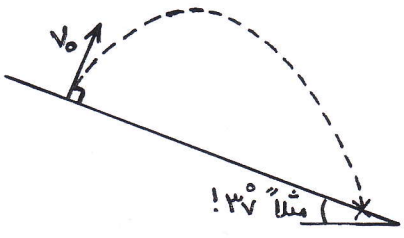


۴- خلبان یک هواپیمای جنگی به دلیل "عدم انجام وظیفه" در یک مأموریت مهم، تعلیق شد. استدلال فرماندهان نیروی هوایی، این بود که خلبان در یک موقعیت حساس - درحالی‌که می‌توانست - از بمباران یک واحد SAM (موشک اندازِ زمینی) خودداری کرده و در نتیجه، ۳ بالگرد خودی منهدم شده اند. خلبان در جلسه‌ی دفاع، شرایط را این طور توصیف کرد:

« با سرعت ۸۶۴ km/h و با زاویه‌ی ۳۷° زیر افق در حال شیرجه رفتن بودم. ناگهان واحد SAM را در فاصله‌ی افقی ۱۸۵۰ متری رویت کردم. در این شرایط ۱۰۰۰ متر ارتفاع داشتم و امکان بمباران وجود نداشت...»

استدلال خلبان درست است یا فرماندهان نیروی هوایی؟ ثابت کنید.

۵- از یک نقطه واقع بر روی یک جاده‌ی شیبدار، با شیب ۳۷°، گلوله‌ای در راستای عمود بر سطح جاده به طرف بالا شلیک می‌شود. ۳ ثانیه بعد، گلوله در پایین دست جاده، با سطح جاده برخورد می‌کند.

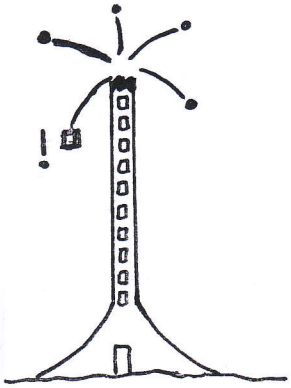


الف) سرعت اولیه‌ی گلوله هنگام خروج از تفنگ چقدر بوده است؟

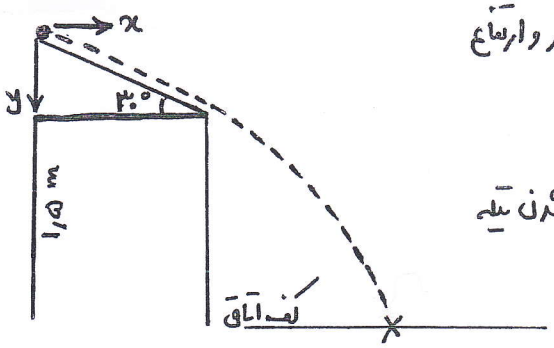
ب) محل شلیک گلوله، چند متر با محل برخورد گلوله با سطح جاده فاصله دارد؟

iopm.ir

۶- در بالای برج بسیار بلندی، یک انفجار رخ می‌دهد. در اثر این انفجار، تکه‌های مختلفی از اجزای ساختمان، همه با سرعت اولیهٔ یکسان V_0 و در جهت‌های تصادفی به اطراف پرت می‌شوند. ثابت کنید این تکه‌ها، همواره روی محیط یک کره هستند که این کره با شتاب g در حال سقوط است و شعاع آن با سرعت V_0 زیاد می‌شود.

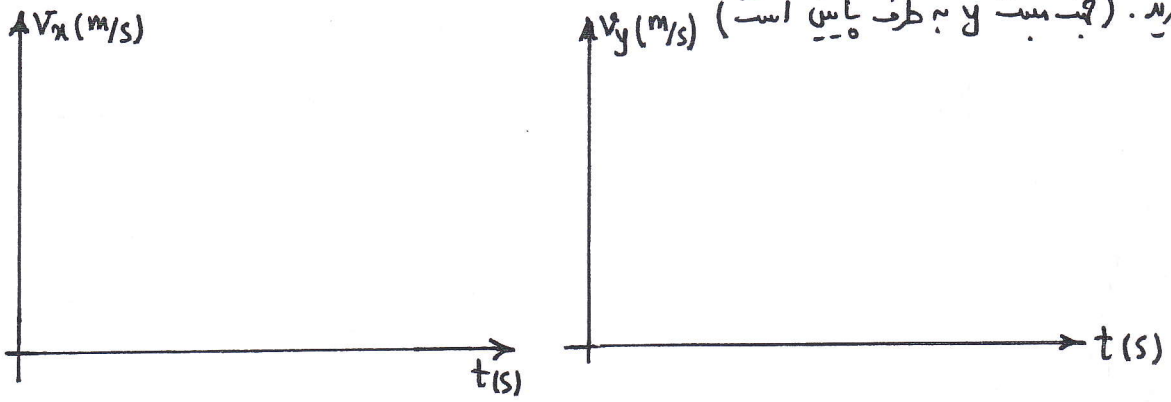


۷- یک تیله‌ی کوچک از بالای سطح شیبدار ۳۰° بدون اصطکاکی رها شده و مطابق شکل روبرو، در نقطه‌ی C به کف اتاق برخورد می‌کند. طول سطح شیبدار ۱ متر و ارتفاع میز ۱٫۵ متر است.



الف) چقدر طول می‌کشد تا تیله به کف اتاق برخورد کند؟ (مبدأ زمان، لحظه‌ی رها شدن تیله روی سطح شیبدار است)

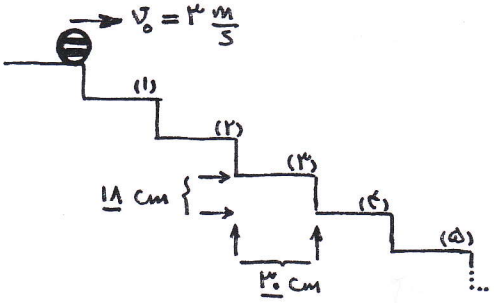
ب) نمودارهای $V_x - t$ و $V_y - t$ را برای تیله رسم کنید و از روی آن بردار سرعت تیله هنگام برخورد با کف اتاق را به دست آورید. (جهت مثبت y به طرف پایین است)



ج) از روی نمودار، حساب کنید تیله در فاصله‌ای از پایه‌ی سمت راست میز با زمین برخورد می‌کند؟

iopm.ir

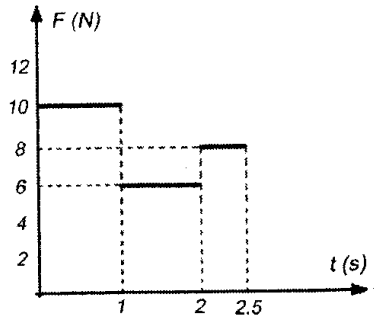
۸- توپی را با سرعت افقی $3\frac{m}{s}$ از بالاترین پله شوت می‌کنیم. توپ در اولین برخورد، به چندمین پله می‌خورد؟ ارتفاع پله‌ها ۱۸ cm و عرض آن‌ها ۳۰ cm است.



۹- یک اتومبیل سواری روی بزرگراه مسطحی به دنبال کامیونی در حرکت است. سرعت هردو وسیله، ثابت و برابر $54\frac{km}{h}$ است. سنگی بین یکی از جفت لاستیک‌های چرخ عقب کامیون گیر کرده است. فاصله‌ی سواری از کامیون دست‌کم چقدر باید باشد تا مطمئن باشیم چنانچه سنگ از بین لاستیک‌ها به عقب پرتاب شد، به سواری برخورد نکند.

iopm.ir

۳) شکل زیر نمودار تغییرات نیروی وارد بر جسمی به جرم ۵ kg را نسبت به زمان نشان می‌دهد. اگر تحت اثر این نیرو جسم از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت آن پس از ۲/۵ ثانیه چند m/s می‌باشد؟



الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰

۵) شتاب سنگی که در شرایط خلأ به طرف بالا پرتاب می‌شود:

الف) بزرگ‌تر از شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

ب) برابر شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

ج) کوچک‌تر از شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

د) برابر g است تاآن‌که جسم به بالاترین نقطهٔ حرکت برسد و در آنجا صفر می‌شود.

۱) داخل اتومبیلی که پنجره‌های آن کاملاً بسته است مگسی وجود دارد و اتومبیل با سرعت ثابت در حرکت است. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) مگس می‌تواند مانند حالتی که اتومبیل ساکن است داخل آن پرواز کند.

ب) مگس ناچار است روی شیشه عقب اتومبیل قرار گیرد تا بتواند همراه آن حرکت کند.

ج) فشار هوا در قسمت عقب اتاقک اتومبیل مگس را به ناحیهٔ جلوی آن می‌راند.

د) مگس باید جایی بنشیند، چون اگر به پرواز درآید نمی‌تواند با سرعت اتومبیل حرکت کند.

iopm.ir

۴) متحرکی در ۲ متری مبدأ قرار دارد. از این نقطه ۳ متر به طرف شرق و ۴ متر به طرف جنوب حرکت می‌کند. فاصلهٔ نهایی متحرک از مبدأ چند متر است؟

الف) ۵ متر　　ب) ۷ متر
ج) ۶/۴ متر　　د) بااین داده‌ها قابل محاسبه نیست.

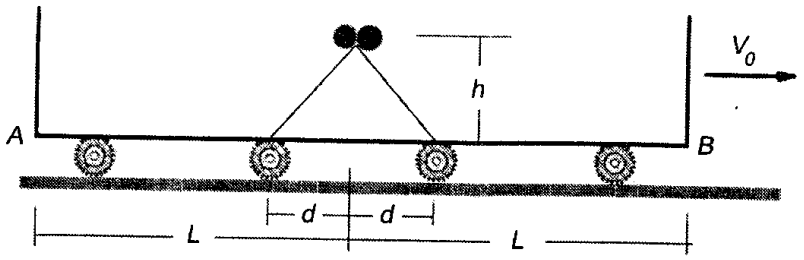
۵) اتوموبیلی فاصلهٔ بین دو شهر را با سرعت متوسط ۶۰ km/h طی کرده است. کدام یک از جملات زیر قطعاً درست است؟

الف) اتوموبیل در بین راه توقف نکرده است.
ب) اتوموبیل با سرعت ۶۰ km/h حرکت کرده است.
ج) فاصلهٔ دو شهر از ۶۰ km بیشتر نیست.
د) سرعت اتوموبیل حداقل یک‌بار ۶۰ km/h بوده است.

۲۳) یک خط‌کش چوبی به طول L به طور قائم روی زمین قرار گرفته و نور خورشید با زاویهٔ θ نسبت به امتداد قائم بر آن می‌تابد.($\theta \neq 0$) خط‌کش به آرامی بدون آن‌که پای آن حرکت کند روی زمین می‌افتد. در حین افتادن، طول سایهٔ خط‌کش روی زمین ابتدا بزرگ و سپس کوچک می‌شود. ماکزیمم طول سایه کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف) L　　ب) $\frac{L}{\cos\theta}$　　ج) $Ltg\theta$　　د) $L\cos\theta$

۳) واگنی با سرعت ثابت V_0 در حال حرکت است. در بالای سطح شیبدار دو طرفه‌ای که مطابق شکل به وسط کف واگن چسبیده است دو گلولهٔ کوچک یکسان قرار دارند. این دو گلوله همزمان از بالای سطح شیبدار و از حالت سکون نسبت به واگن رها می‌شوند. اختلاف زمان رسیدن گلوله‌ها به نقاط A و B عبارت است از :

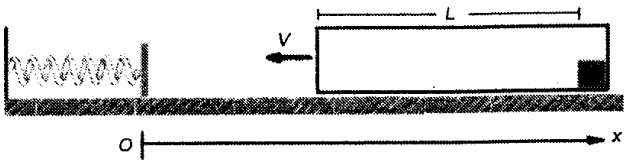


الف) $\frac{\sqrt{2gh}L}{V_0^2 - 2gh}$　　ب) $\frac{\sqrt{2gh}(L-d)}{V_0^2 - 2gh}$

ج) صفر　　د) $\frac{\sqrt{2gh}(L-d)}{V_0^2}$

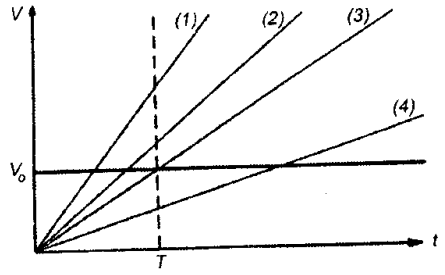
iopm.ir

۱۵) مطابق شکل، داخل یک جعبه جسمی به جرم m و به فاصلهٔ L از یک انتهای آن قرار دارد. جعبه همراه با جسم درون آن با سرعت V به سمت فنری در حرکت است. انتهای آزاد فنر را قبل از برخورد جعبه با آن مبدأ مختصات می‌گیریم. بعد از برخورد جعبه با فنر و بازگشت آن، جسم برای نخستین بار در نقطه‌ای به مختصهٔ x با انتهای جعبه برخورد خواهد کرد. با چشم‌پوشی از کلیهٔ اصطکاک‌ها کدام گزینه درست است؟



الف) $x = \frac{L}{۲}$ ب) $x > \frac{L}{۲}$ ج) $x < \frac{L}{۲}$

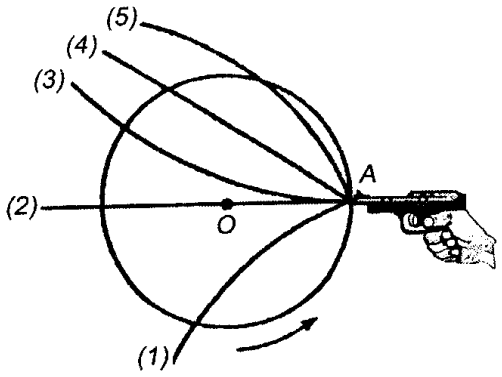
۱۶) کامیونی با سرعت ثابت $V_۰$ درست در لحظهٔ سبز شدن چراغ راهنمایی به چهارراه می‌رسد و بدون تغییر سرعت از چهارراه می‌گذرد. در همین لحظه اتومبیلی از حال سکون با شتاب ثابت از چهارراه شروع به حرکت می‌کند و بعد از زمان T به کامیون می‌رسد. کدام‌یک از نمودارها تغییرات سرعت اتومبیل بر حسب زمان را نشان می‌دهد؟



الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

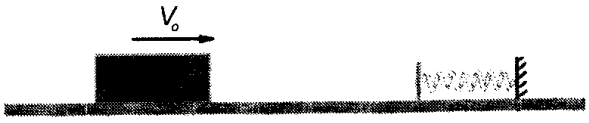
iopm.ir

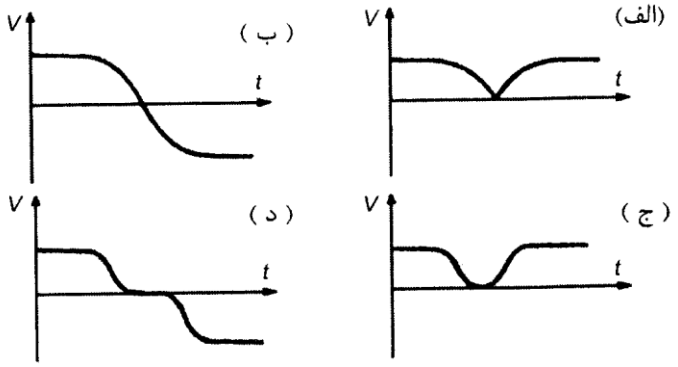
۸) بر روی یک میز ساکن افقی، تپانچه‌ای مطابق شکل زیر در یک مسیر دایره‌ای به طور یکنواخت حرکت می‌کند. جهت لولهٔ تپانچه همواره به سمت مرکز دایره است و دوران آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. در لحظه‌ای که تپانچه از نقطهٔ A می‌گذرد، گلوله‌ای از آن شلیک می‌شود. کدام یک از مسیرهای مشخص شده در شکل می‌تواند مسیر حرکت گلوله بعد از شلیک باشد؟



الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

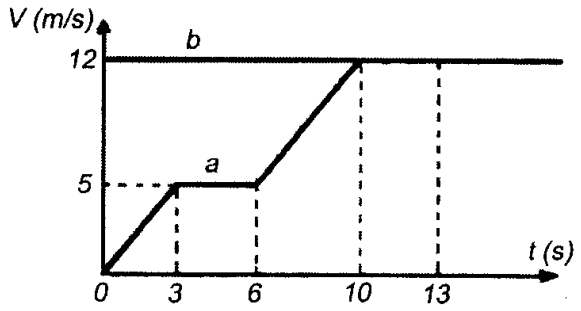
۹) جسمی که با سرعت V_0 روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حال حرکت است، مطابق شکل زیر با فنری برخورد می‌کند. کدام نمودار می‌تواند اندازهٔ سرعت جسم بر حسب زمان را نشان دهد؟





iopm.ir

۱۵) دو متحرک a و b روی یک خط راست و در یک جهت حرکت می‌کنند. نمودار سرعت - زمان دو متحرک که در لحظه $t = ۰$ در یک مبدأ بوده‌اند مطابق شکل زیر است. این دو متحرک:

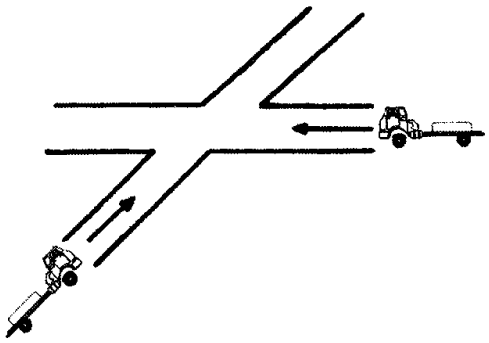


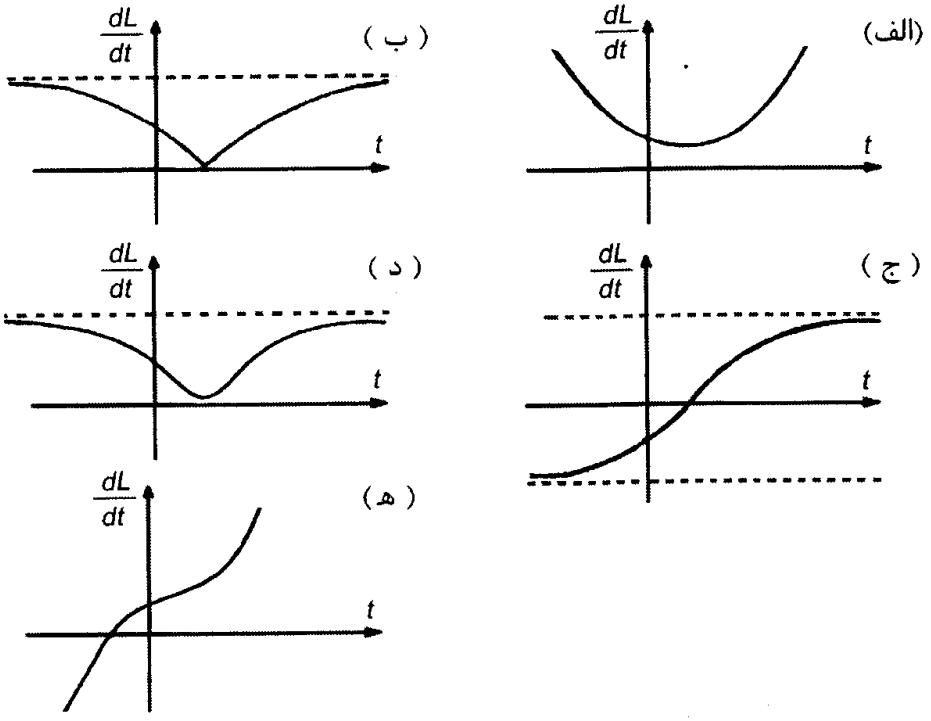
الف) در ۱۵۶ متری مبدأ به هم می‌رسند.
ب) بعد از ۱۰ ثانیه به هم می‌رسند.
ج) بعد از ۱۳ ثانیه به هم می‌رسند.
د) اصلاً به هم نمی‌رسند.

۲۴) روی دو جادهٔ مستقیم متقاطع، مطابق شکل زیر دو اتومبیل با سرعت ثابت به طرف محل تقاطع در حرکت‌اند، و موقعیتشان چنان است که با هم به تقاطع نمی‌رسند. فرض کنید

iopm.ir

فاصلهٔ دو اتومبیل در هر لحظه از هم L باشد. نمودار $\frac{dL}{dt}$ بر حسب زمان (t) شبیه کدام یک از شکل‌های زیر است؟



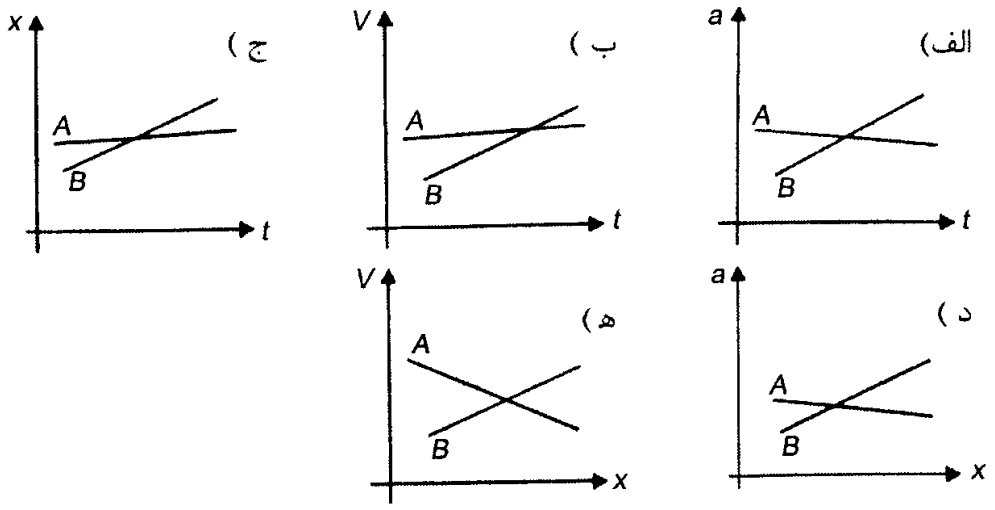


iopm.ir

۱) دو جسم را از یک ارتفاع h با سرعت‌های افقی V_1 و V_2 ($V_1 > V_2$) پرتاب می‌کنیم. دو جسم به دیواری قائم در فاصلهٔ افقی l از نقطهٔ پرتاب برخورد می‌کنند، به‌طوری که دو محل برخورد، ارتفاع h را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. نسبت $\frac{V_1}{V_2}$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{2}$ ب) ۲ ج) ۳ د) $\sqrt{3}$

۲) دو خودروی A و B در جاده‌ای در حرکت‌اند. اگر متغیرهای حرکت آن‌ها یکی از نمودارهای زیر باشد، کدام‌یک از این نمودارها حتماً یک تصادف را نشان می‌دهد؟

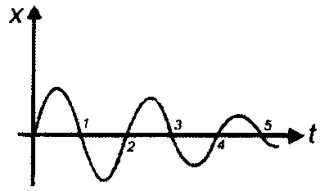


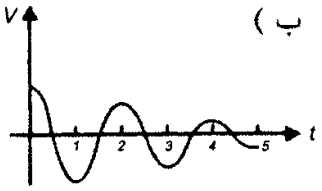
۴) متحرکی $\frac{1}{2}$ مسیر خود را با سرعت V، $\frac{1}{4}$ مسیر را با سرعت $\frac{V}{2}$، $\frac{1}{8}$ مسیر را با سرعت $\frac{V}{4}$، ... و به همین صورت تا انتها طی می‌کند. سرعت متوسط این متحرک چه‌قدر است؟

الف) $\frac{V}{2}$ ب) $\frac{2V}{3}$ ج) $\frac{V}{4}$ د) صفر

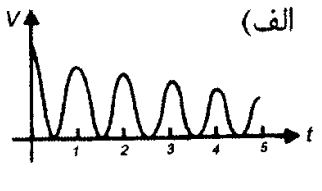
iopm.ir

۹) نمودار مکان- زمان جسمی مطابق شکل است.
نمودار سرعت- زمان آن کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

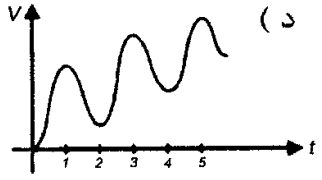




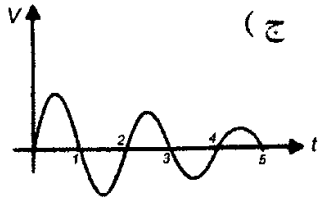
ب)



الف)

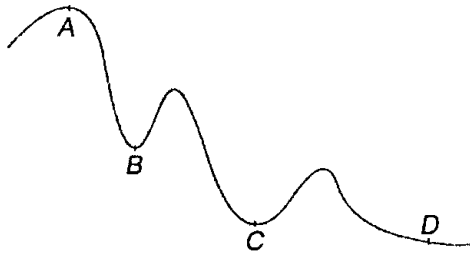


د)



ج)

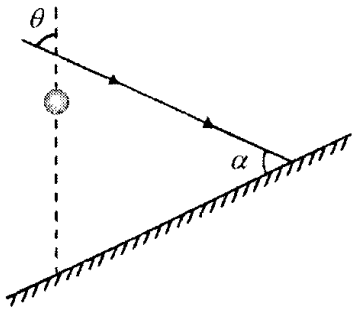
۱۱) اتومبیلی روی یک مسیر افقی مارپیچ، که در شکل نشان داده شده است، حرکت می‌کند. اندازهٔ سرعت اتومبیل ثابت است. شتاب اتومبیل در کدام‌یک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟

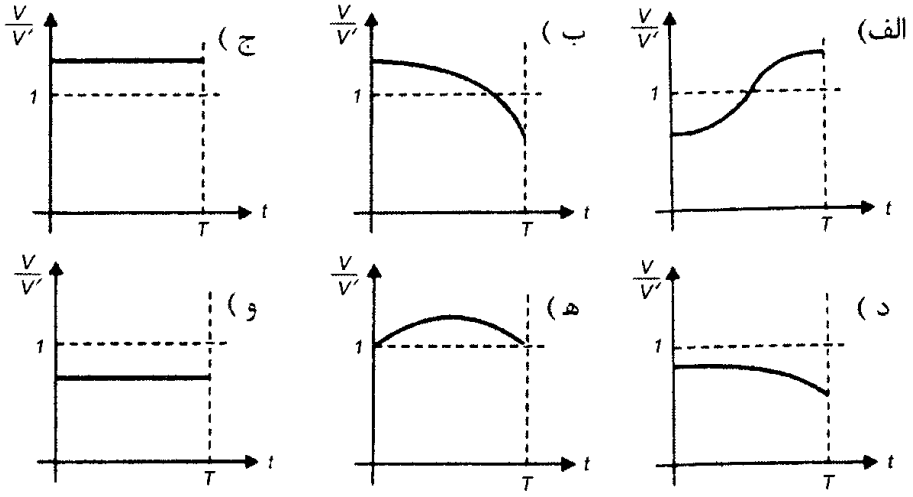


الف) A ب) B ج) C د) D

۱۸) مطابق شکل، نور خورشید با زاویهٔ α به یک سطح شیب‌دار می‌تابد. زاویهٔ تابش پرتوهای آفتاب با خط قائم θ است $(\theta < \alpha)$. گلوله‌ای را بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم تا در راستای قائم سقوط کند. سایهٔ گلوله روی سطح شیب‌دار می‌افتد. کدام‌یک از نمودارهای زیر ممکن است نشان‌دهندهٔ نسبت سرعت گلوله (V) به سرعت سایهٔ آن روی سطح شیب‌دار (V') بر حسب زمان باشد؟

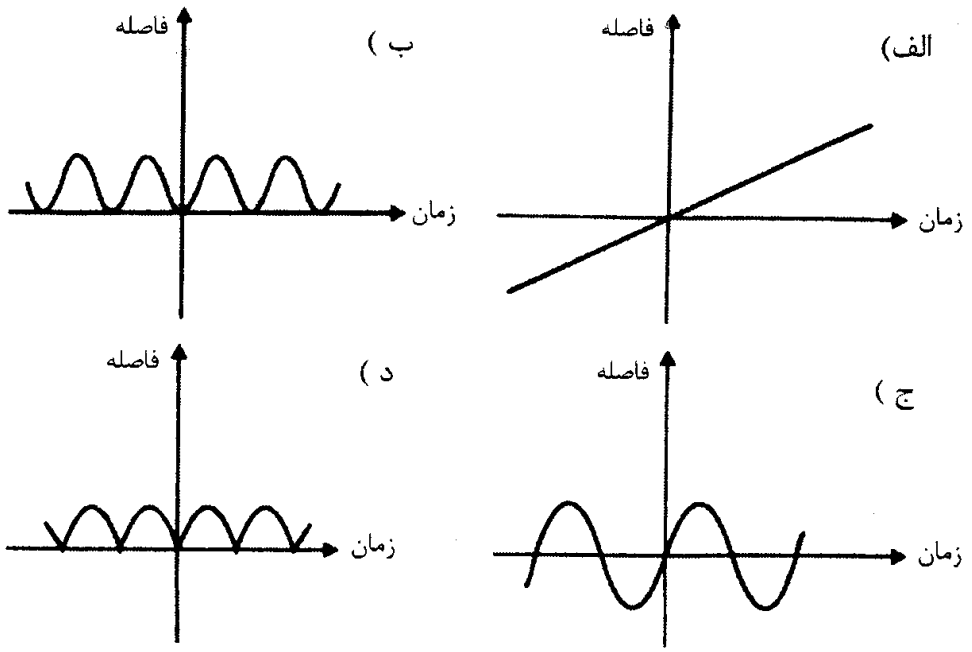
iopm.ir



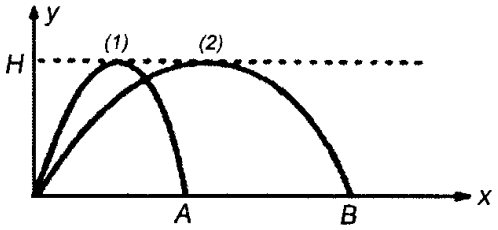


iopm.ir

۲۱) متحرکی با سرعت ثابت روی دایره‌ای حرکت می‌کند. نمودار فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ ثابت A روی محیط دایره، بر حسب زمان شبیه کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟



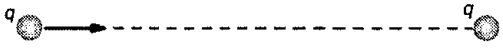
۳۱) نمودار حرکت دو پرتابهٔ ۱ و ۲ مطابق شکل روبه‌رو است. دو پرتابه هم‌زمان پرتاب می‌شوند و ارتفاع اوجشان یکسان است. کدام‌گزینه درست است؟

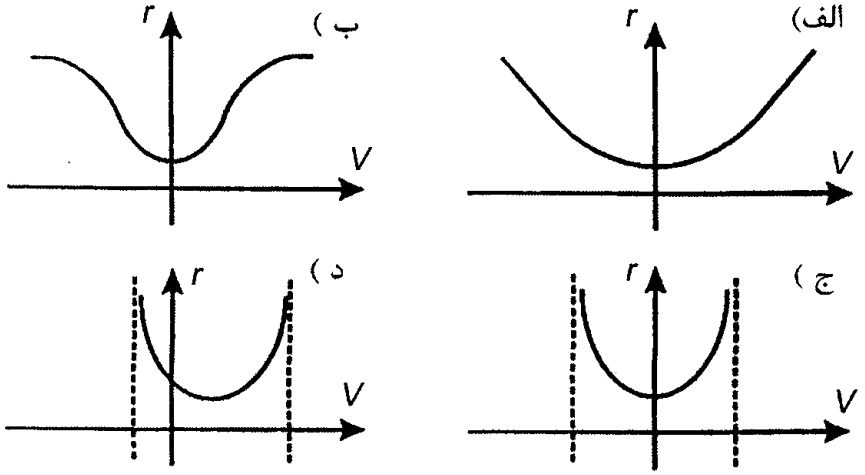


الف) پرتابه‌ها هم‌زمان، به ترتیب، به نقاط A و B می‌رسند.
ب) پرتابهٔ ۱ زودتر به A می‌رسد.
ج) پرتابهٔ ۲ زودتر به B می‌رسد.

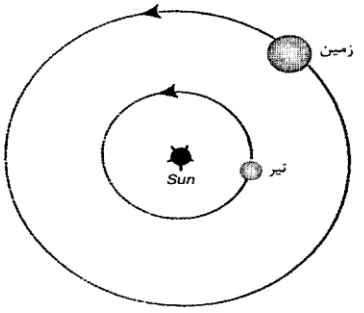
iopm.ir

۶) ذره‌ای به بار q در یک نقطه قرار دارد. از فاصلهٔ بسیار دور، ذرهٔ مشابه دیگری با همان بار مطابق شکل به سمت آن پرتاب می‌شود. منحنی تغییرات فاصلهٔ دو ذره بر حسب سرعت نسبی آن‌ها کدام است؟





۱۱) زمین و سیارهٔ تیر (عطارد)، هر کدام روی یک مدار تقریباً دایره‌ای دور خورشید می‌گردند. این دو مدار تقریباً در یک صفحه‌اند و جهت گردش زمین و تیر به دور خورشید یکی است. تقریباً سه ماه طول می‌کشد تا تیر یک بار خورشید را دور بزند. فرض کنید در زمان صفر، تیر در کمترین فاصله از زمین باشد؛ به این حالت مقارنهٔ سفلی می‌گویند. اولین باری که مقارنهٔ سفلی تکرار می‌شود چند ماه بعد است؟

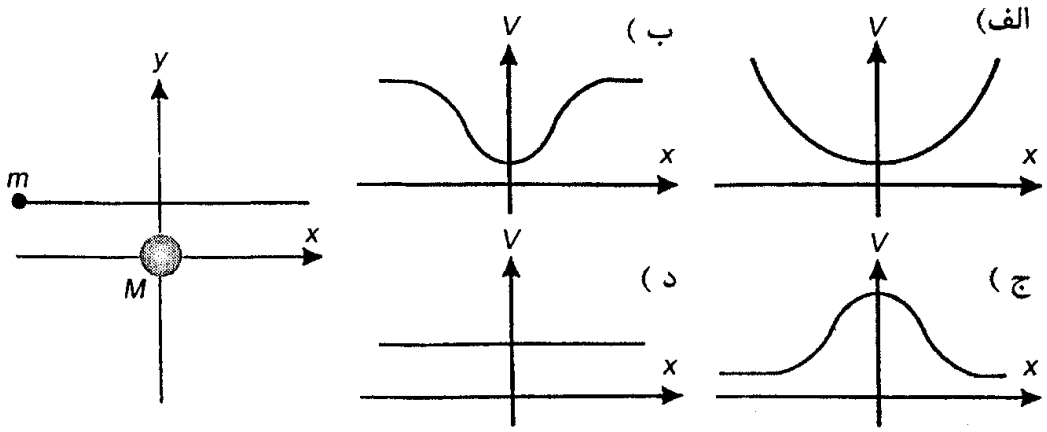


الف) پانزده ماه ب) دوازده ماه ج) نه ماه د) چهار ماه ه) سه ماه

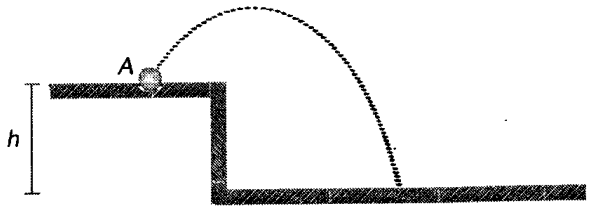
iopm.ir

۱۷) جرم M در مبدأ مختصات قرار دارد. جرم m مطابق شکل از بی‌نهایت به این جسم نزدیک می‌شود و سپس به بی‌نهایت می‌رود. فرض کنید تنها برهم کنش مؤثر بر این دو جسم، بر

هم کنش گرانشی است؛ اما چون جرم m خیلی کوچک‌تر از M است می‌توان از حرکت M چشم‌پوشید. همچنین، فرض کنید سرعت m آن‌قدر زیاد است که نیروی گرانشی حاصل از M شکل مسیر آن را تغییر نمی‌دهد به طوری که مسیر حرکت m، خطی موازی با محور x است. نمودار سرعت جسم m بر حسب x کدام است؟



۲۹) توپی را مطابق شکل از نقطهٔ A پرتاب می‌کنیم. مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت اولیهٔ توپ به ترتیب V_x و V_y است. پس از برخورد توپ با زمین مؤلفهٔ قائم سرعت آن e برابر می‌شود. (e ضریب جهندگی نام دارد.) فرض کنید مؤلفهٔ افقی سرعت ثابت می‌ماند. می‌خواهیم سرعت توپ پس از برخورد به زمین، با سرعت اولیهٔ آن برابر باشد. کدام گزینه درست است؟ (شتاب جاذبه g است.)



الف) $V_y = \frac{e\sqrt{۲gh}}{۱-e}$

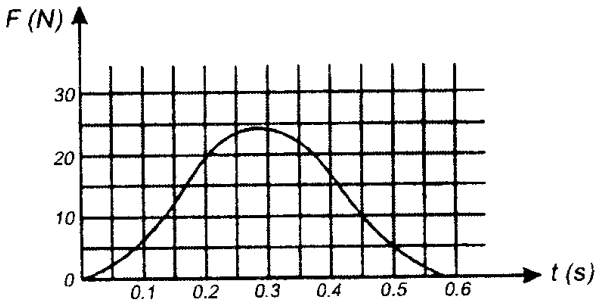
ب) $\sqrt{V_x^۲ + V_y^۲} = \frac{e\sqrt{۲gh}}{۱-e}$

ج) $V_y = \frac{e\sqrt{۲gh}}{\sqrt{۱-e^۲}}$

د) $\sqrt{V_x^۲ + V_y^۲} = \frac{e\sqrt{۲gh}}{\sqrt{۱-e^۲}}$

iopm.ir

۵) توپی به جرم ۰/۵kg در راستای قائم به زمین می‌خورد. توپ با سرعت V به زمین می‌خورد و با سرعت $0/8V$ از زمین بالا می‌جهد. نمودار تغییرات نیروی سطح زمین بر توپ مطابق شکل است. توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



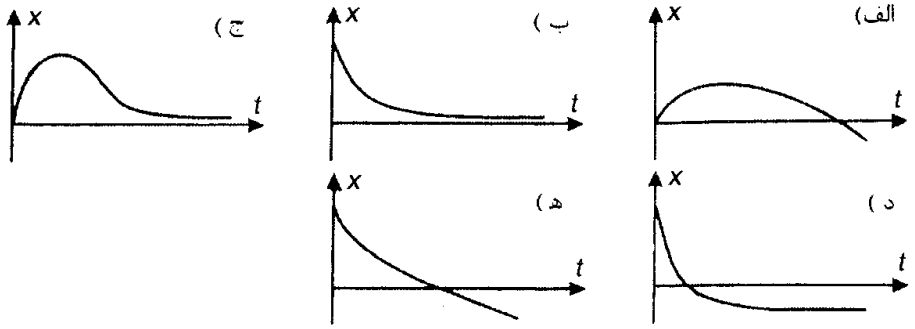
الف) $0/4m$ ب) $0/8m$ ج) $1/2m$ د) $2m$

۱۵) یک آینه در $t = 0$ از نقطهٔ O می‌گذرد و با سرعت ثابت V به طرف راست حرکت می‌کند. یک ساعت در نقطهٔ O است. وقتی این ساعت $t = T$ را نشان می‌دهد، یک تپ نور از نقطهٔ O گسیل می‌شود. این تپ به آینه می‌خورد و از آن باز می‌تابد و به نقطهٔ O برمی‌گردد. وقتی تپ به نقطهٔ O می‌رسد ساعت $t = T'$ را نشان می‌دهد. سرعت نور C است. رابطهٔ T' با T چیست؟

الف) $T' = T\dfrac{C+V}{C-V}$ ب) $T' = T\sqrt{\dfrac{C+V}{C-V}}$ ج) $T' - T$

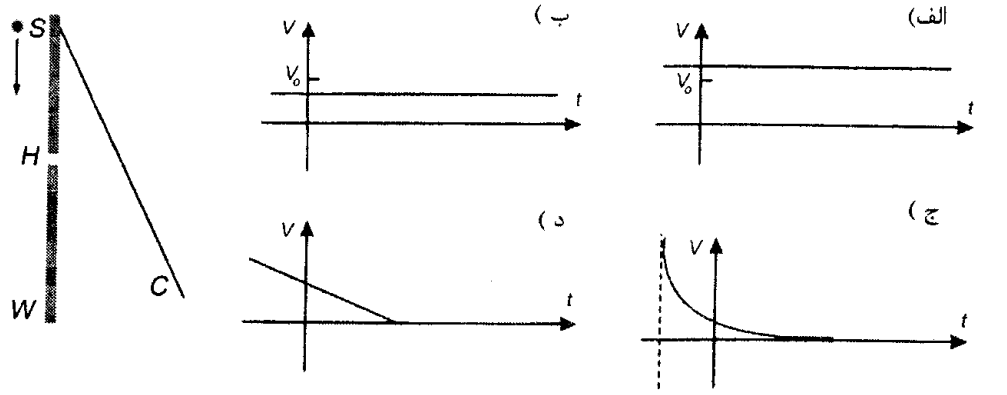
د) $T' = T\sqrt{\dfrac{C-V}{C+V}}$ ه) $T' = T\dfrac{C-V}{C+V}$

۲۱) سرعت جریان یک رود v_1 است، رود به طرف شرق جریان دارد. روی این رود یک قایق با سرعت ثابت v_2 نسبت به آب به طرف شرق حرکت می‌کند. در $t = 0$ یک تکه چوب از قایق با سرعت v_3 به طرف شرق، نسبت به قایق، در رود پرتاب می‌شود. جهت مثبت را رو به شرق می‌گیریم. نمودار مکان این تکه چوب نسبت به قایق (x) بر حسب زمان کدام است؟



iopm.ir

۲۳) پردهٔ C، مطابق شکل پشت دیوار W قرار دارد. روزنهٔ کوچک H در دیوار W است. چشمهٔ کوچک S با سرعت ثابت v_0 به موازات دیوار به طرف پایین حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t = 0$ درست روبه‌روی H است (طوری که SH بر دیوار عمود است.) نور چشمهٔ S لکهٔ کوچکی روی پردهٔ C درست می‌کند. نمودار سرعت این لکه روی پرده چگونه است؟

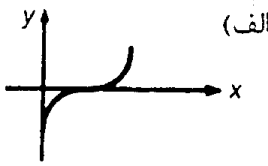


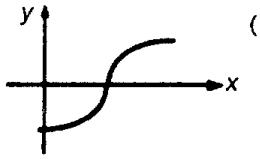
۲۴) ذرهٔ ۱ با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند و با ذرهٔ مشابه دیگری، (ذرهٔ ۲) برخورد می‌کند. ذرهٔ ۲ ساکن است. از دید یک دستگاه مختصات دیگر، ذرهٔ ۱ با سرعت v' به طرف راست و ذرهٔ ۲ با سرعت $-v'$ حرکت می‌کنند. پس از برخورد، سرعت ذرهٔ ۱ در این دستگاه مختصات $-\frac{v}{2}$ و سرعت ذرهٔ ۲ در همین دستگاه مختصات $\frac{v}{2}$ می‌شود. سرعت ذرهٔ ۱ پس از برخورد از دید دستگاه مختصات اول چقدر است؟
(راهنمایی: فرض کنید سرعت یک ذره در یک دستگاه مختصات v باشد. فرض کنید دستگاه مختصات دیگری با سرعت V نسبت به دستگاه مختصات اول حرکت کند. در این صورت سرعت ذره نسبت به دستگاه مختصات دوم $v' = v - V$ می‌شود.)

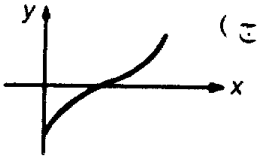
الف) ۰ ب) $\frac{v}{4}$ ج) $\frac{v}{3}$ د) $\frac{v}{2}$ ه) $\frac{-v}{4}$

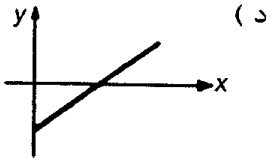
iopm.ir

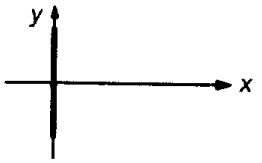
۸) فردی می‌خواهد با قایق از رودخانه‌ای عبور کند. سرعت پارو زدن او در آب ساکن را v بگیرید. او همواره در جهت عرض رودخانه پارو می‌زند. سرعت آب رودخانه از ساحل تا وسط آن تقریباً با فاصله از ساحل نزدیک‌تر متناسب است. منحنی مسیر حرکت قایق کدام است؟ محور x در طول رودخانه و محور y در عرض آن است.

الف)


ب)


ج)


د)


هـ)


۹) قطاری روی یک ریل مستقیم حرکت می‌کند. مسافری که در قطار روبه شمال ایستاده است، یک توپ را رها می‌کند و مشاهده می‌کند، توپ کمی جلوتر از او به کف قطار می‌رسد. در این صورت:

الف) قطار حتماً به طرف شمال حرکت می‌کند.
ب) قطار حتماً به طرف جنوب حرکت می‌کند
ج) قطار حتماً به طرف شمال شتاب دارد.
د) قطار حتماً به طرف جنوب شتاب دارد.

۱۷) شخصی از بالای یک ساختمان دو گلوله را به فاصلهٔ زمانی t رها می‌کند. وقتی گلولهٔ دوم رها می‌شود، گلولهٔ اول به اندازهٔ h سقوط کرده است. دو شخص دیگر (B, A) در طبقه‌های پایین همان ساختمان‌اند. وقتی گلولهٔ اول به B می‌رسد، گلولهٔ دوم به A می‌رسد. فاصلهٔ این دو نفر از هم H است. اختلاف زمانی گذشتن دو گلوله از کنار A برابر T است. کدام گزینه درست است؟

الف) $T < t$ و $H = h$
ب) $T = t$ و $H = h$
ج) $T < t$ و $H > h$
د) $T = t$ و $H > h$

۱۸) طی یک بارش بسیار شدید باران، پس از ۱۰۰ دقیقه $۶۰\ mm$ باران جمع شده است. فرض کنید سرعت سقوط قطره‌های باران $۱m/s$ است.

iopm.ir

حجم قطره‌های باران چه کسری از هوا را تشکیل می‌دهد؟

الف) $۱۰^{-۲}$ ب) $۱۰^{-۳}$ ج) $۱۰^{-۴}$ د) $۱۰^{-۵}$ ه) $۱۰^{-۶}$

۲۵) وقتی قطار سریع‌السیر تهران - کرج به ایستگاه کرج می‌رسد، مسافران باید از راهرویی به عرض ۴m و طول ۱۰m بگذرند. معمولاً جلوی ورودی این راهرو ازدحام است؛ به طوری که چند دقیقه طول می‌کشد تا همهٔ مسافران وارد راهرو شوند و از آن بگذرند.
فرض کنید در مواقع شلوغ، موقع عبور از راهرو، هر نفر به طور متوسط $۰/۵\ m^۲$ جا را اشغال کند و سرعت عبور مسافران در عبور از راهرو $۰/۵\ m/s$ باشد. وقتی که جریان عبور مردم تقریباً یکنواخت شده باشد، هر ثانیه تقریباً چند نفر از راهرو خارج می‌شوند؟

الف) ۱ نفر ب) ۴ نفر ج) ۲۰ نفر د) ۱۰۰ نفر

۴) یک اتوموبیل روی یک جادهٔ افقی مستقیم حرکت می‌کند. در هر یک از زمان‌های $t = ۱s, t = ۲s, t = ۳s$، یک کیسه از اتوموبیل روی جاده می‌افتد. فاصلهٔ کیسهٔ اول تا کیسهٔ دوم ۲۰m، و فاصلهٔ کیسهٔ دوم تا کیسهٔ سوم ۳۰m است. جهت مثبت را جهت حرکت اتوموبیل بگیرید. کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً سرعت متوسط اتوموبیل بین $t = ۲s, t = ۳s$، از سرعت متوسط اتوموبیل بین $t = ۱s, t = ۲s$ بیشتر است.

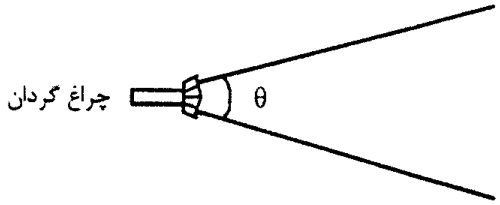
ب) حتماً سرعت اتوموبیل در $t = ۲s$، از سرعت اتوموبیل در $t = ۳s$ بیشتر است.

ج) حتماً شتاب اتوموبیل در $t = ۲s$ مثبت است.

د) حتماً شتاب متوسط اتوموبیل بین $t = ۱s, t = ۳s$ مثبت است.

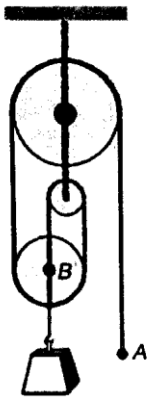
iopm.ir

۸) یک چراغ‌گردان مثل میلهٔ کوتاهی است که در یک صفحهٔ افقی است. این میله با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در این صفحه می‌چرخد. (سرعت زاویه‌ای یعنی زاویهٔ پیموده شده بر زمان.) نور این چراغ ناحیه‌ای بین دو نیم‌خط در این صفحه را روشن می‌کند. زاویهٔ این دو نیم‌خط با هم θ است. ناظری که به فاصلهٔ r از چراغ، در صفحه ساکن است، به مدت t نور این چراغ را می‌بیند و به مدت $T - t$ نوری نمی‌بیند، و این روند برایش تکرار می‌شود. کدام گزینه درست است؟



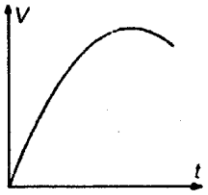
الف) اگر r زیاد شود، t کم می‌شود و T ثابت می‌ماند.
ب) اگر r زیاد شود، t و T هردو کم می‌شوند.
ج) اگر ω زیاد شود، t ثابت می‌ماند و T کم می‌شود.
د) اگر ω زیاد شود، t و T هر دو کم می‌شوند.
ه) اگر θ زیاد شود، t و T هر دو زیاد می‌شوند.

۱۸) انتهای طناب (نقطهٔ A) درشکل به اندازهٔ ℓ پایین کشیده می‌شود. مرکز قرقرهٔ متحرک (نقطهٔ B) چقدر جابه‌جا خواهد شد؟



الف) ℓ
ب) $\ell/2$
ج) $\ell/3$
د) $\ell/4$

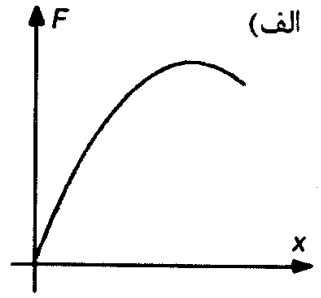
۱۹) نمودار سرعت - زمان یک متحرک مطابق شکل است.



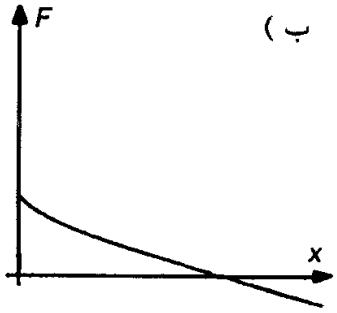
iopm.ir

نمودار نیروی وارد بر متحرک بر حسب مکان کدام است؟

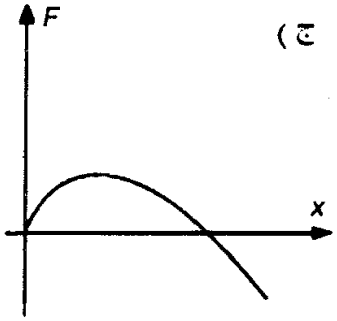
الف)



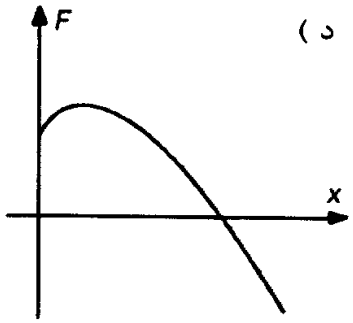
ب)



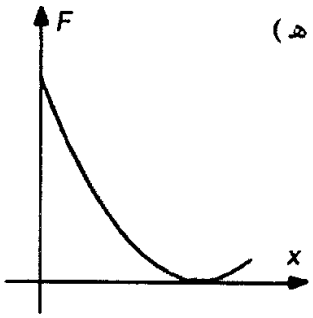
ج)



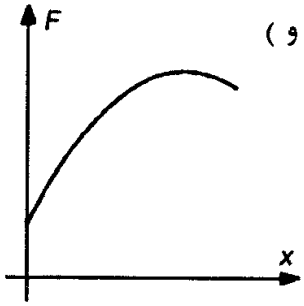
د)



ه)



و)



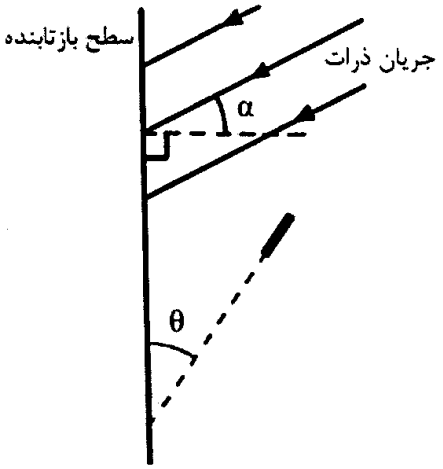
iopm.ir

۲۱) یوزپلنگی آهویی را در فاصله‌ای می‌بیند و به سوی آن می‌دود. سرعت یوزپلنگ ۹۵km/h است و یوزپلنگ حداکثر می‌تواند یک دقیقه با این سرعت بدود. سرعت آهو ۶۵km/h است و آهو می‌تواند چند دقیقه با این سرعت بدود. فرض کنید یوزپلنگ می‌تواند آهویی را که حداکثر در فاصلهٔ D قرار بگیرد.

اگر یوزپلنگ و آهو برای رسیدن به سرعت نهایی ۴ ثانیه زمان لازم داشته باشند، همچنین آهو پس از دیدن یوزپلنگ آناً فرار نکند، بلکه حدود ۲ ثانیه تأخیر داشته باشد، D حداکثر چند درصد تغییر می‌کند؟

الف) ۱% ب) ۱۰% ج) ۵۰% د) ۱۰۰%

۲۲) جریانی از ذرات، به یک سطح بازتابنده می‌تابد. تعداد ذره‌های گذرنده از واحد سطح عمود بر مسیر جریان، J بر واحد زمان است. هر ذره‌ای که به سطح بازتابنده می‌خورد، از آن باز می‌تابد، چنان که اندازهٔ سرعت آن تغییر نمی‌کند و جهت بازتابش آن هم مثل بازتابش نور است. یک سطح کوچک جاذب به مساحت A در مسیر ذره‌های بازتابیده است. این سطح همهٔ ذره‌هایی که به آن می‌رسند را جذب می‌کند. سرعت ذرات فرودی، روی صفحهٔ شکل قرار دارد وسطح جاذب و سطح بازتاباننده بر صفحهٔ شکل عموداند. مطابق شکل، زاویهٔ باریکهٔ ذرات فرودی با عمود بر سطح بازتابنده α، و زاویهٔ سطح جاذب باسطح بازتابنده θ است. تعداد ذره‌های جذب شده بر واحد زمان چقدر است؟



الف) JA

ب) $JA\cos\alpha$

ج) $JA\cos(\alpha-\theta)$

د) $JA\cos\theta$

ه) $JA\cos\alpha\cos\theta$

و) $JA\cos(\alpha+\theta)$

iopm.ir