جدول تبدیل Z و خواص آن

مرجع: کتاب سیستم های کنترل دیجیتال تالیف کاتسوهیکو اگاتا

**TABLE 2–1 TABLE OF $z$ TRANSFORMS**

| | $X(s)$ | $x(t)$ | $x(kT)$ or $x(k)$ | $X(z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | — | — | Kronecker delta $\delta_0(k)$<br>$1, \quad k = 0$<br>$0, \quad k \neq 0$ | $1$ |
| 2. | — | — | $\delta_0(n-k)$<br>$1, \quad n = k$<br>$0, \quad n \neq k$ | $z^{-k}$ |
| 3. | $\frac{1}{s}$ | $1(t)$ | $1(k)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| 4. | $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ |
| 5. | $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $kT$ | $\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ |
| 6. | $\frac{2}{s^3}$ | $t^2$ | $(kT)^2$ | $\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ |
| 7. | $\frac{6}{s^4}$ | $t^3$ | $(kT)^3$ | $\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$ |
| 8. | $\frac{a}{s(s+a)}$ | $1-e^{-at}$ | $1-e^{-akT}$ | $\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$ |
| 9. | $\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ | $e^{-at}-e^{-bt}$ | $e^{-akT}-e^{-bkT}$ | $\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$ |
| 10. | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $te^{-at}$ | $kTe^{-akT}$ | $\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$ |
| 11. | $\frac{s}{(s+a)^2}$ | $(1-at)e^{-at}$ | $(1-akT)e^{-akT}$ | $\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$ |

**TABLE 2–1** (continued)

| | $X(s)$ | $x(t)$ | $x(kT)$ or $x(k)$ | $X(z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 12. | $\frac{2}{(s+a)^3}$ | $t^2 e^{-at}$ | $(kT)^2 e^{-akT}$ | $\frac{T^2 e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$ |
| 13. | $\frac{a^2}{s^2(s+a)}$ | $at - 1 + e^{-at}$ | $akT - 1 + e^{-akT}$ | $\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$ |
| 14. | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin \omega t$ | $\sin \omega kT$ | $\frac{z^{-1}\sin \omega T}{1-2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}}$ |
| 15. | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos \omega t$ | $\cos \omega kT$ | $\frac{1-z^{-1}\cos \omega T}{1-2z^{-1}\cos \omega T + z^{-2}}$ |
| 16. | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-at}\sin \omega t$ | $e^{-akT}\sin \omega kT$ | $\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$ |
| 17. | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-at}\cos \omega t$ | $e^{-akT}\cos \omega kT$ | $\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$ |
| 18. | | | $a^k$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| 19. | | | $a^{k-1}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ | $\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ |
| 20. | | | $ka^{k-1}$ | $\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ |
| 21. | | | $k^2 a^{k-1}$ | $\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$ |
| 22. | | | $k^3 a^{k-1}$ | $\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$ |
| 23. | | | $k^4 a^{k-1}$ | $\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$ |
| 24. | | | $a^k \cos k\pi$ | $\frac{1}{1+az^{-1}}$ |
| 25. | | | $\frac{k(k-1)}{2!}$ | $\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$ |
| 26. | | $\frac{k(k-1)\cdots(k-m+2)}{(m-1)!}$ | | $\frac{z^{-m+1}}{(1-z^{-1})^m}$ |
| 27. | | | $\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}$ | $\frac{z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$ |
| 23. | $\frac{k(k-1)\cdots(k-m+2)}{(m-1)!}a^{k-m+1}$ | | | $\frac{z^{-m+1}}{(1-az^{-1})^m}$ |

$x(t) = 0$, for $t < 0$.

$x(kT) = x(k) = 0$, for $k < 0$.

Unless otherwise noted, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.