جزوه درس مقاومت مصالح

مخصوص مهندسان صنایع

نویسنده: بیر جانستون ترجمه بهرام پوستی

فصل اول

کلیات

مقاومت مصالح:

آن موضوعی از علم مکانیک که با استفاده از روشهای تحلیل به بررسی و تعیین مقاومت ، صلبیت و پایداری ارتجاعی اعضای باربری پردازد به میکانیک جامدات (و یا مکانیک مصالح و یا مقاومت مصالح) مشهور است.

روش مقطع:

صفحه ای فرض و دلخواه از جسم عبور داده می شود به طوری که جسم به طور کامل به دو قسمت مجزا، تقسیم شود این عمل روش مقطع نامیده می شود. از آنجایی که اگر جسم کلاً در تعادل باشد هر جزء آن نیز باید در حال تعادل باشد نتیجتاً اصل زیر منتهی می شود:

نیروهای خارجی مؤثر در یک طرف هر مقطع دلخواه ، با نیروهای به وجود آمده در سطح قطع شده (که نیروهای مقاوم داخلی خوانده می شوند) ، در حال تعادل هستند.

یا به طور خلاصه:

نیروهای مقاوم داخل ، نیروهای خارجی را متعادل می کنند.

سیستمهای یکاها:

سیستم بین المللی یکاها (یکاهای SI)

در طی سالهای اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آحاد یا به زبان فرانسه (system International d' units) که مختلف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب کردند. در این سیستم یکاهای اصل، یکاهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب (m) و کیلوگرم (kg) و ثانیه (s) می نامند.

یکاهای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با $1 m/s^2$ بدهند.

$$1N = (1kg)(1\frac{m}{s^2}) = 1kg.\frac{m}{s^2}$$

پیشوند واحدها:

مقدار	پیشوند	نماد
$1000/000/000=10^9$	گیگا	G
10^6	مگا	M
10^3	کیلو	K
$0/001=10^{-3}$	میلی	M
10^{-6}	میکرو	μ
10^{-9}	نانو	n

$1kg = 1000m$ ، $1mm = 0.001\ m$ $1Mg = 1000\ \ kg$

$1g = 0.001kg$ ، $1kg = 1000N$ $3.82km = 3820m$

$47.2mm = 0.0472m$ ، $3.82KN = 3.82 \times 10^3 N$ $47.2mm = 47.2 \times 10^{-3} mm$

تعاریف پایه

ماده:

ماده عبارت از وجودی است که فضاگیر باشد.

جسم:

ماده ای را گویند که توسط یک سطح بسته محدود شده باشد.

جسم صلب:

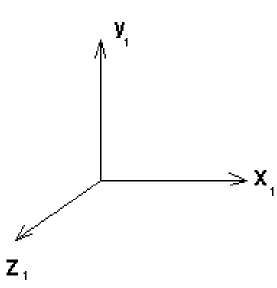
جسمی که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجود نباشد.

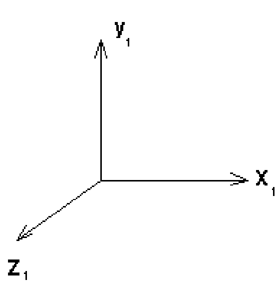
جسم تغییر شکل پذیر:

جسمی که دارای خواص تغییر شکل پذیری باشد.

جسم همگن:

جسمی است که دارای خاصیت یکسان در تمام نقاط باشد . تمام اجسام مورد مطالعه در این درس همگن فرض می شوند.

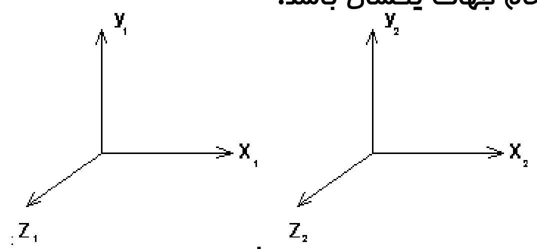




$x_1 = y_1 - z_1$

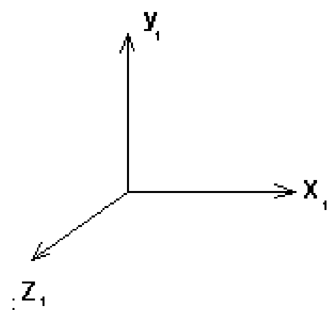
جسم ایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، خواص آن در تمام جهات یکسان باشد.



جسم غیرایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، دارای خواص مختلف در جهات مختلف باشد.



$$x_1 \neq y_1 \neq z_1$$

جسم ارتوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، دارای خواص مختلف در سه جهت عمود بر هم باشد.

فصل سوم

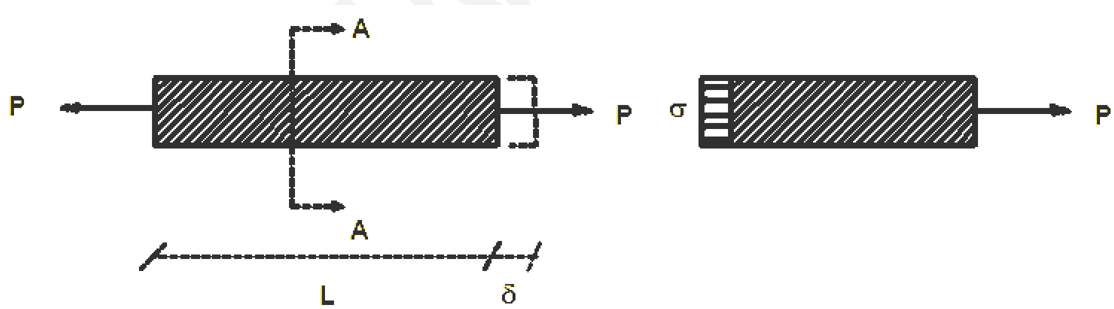
تنش و بارهای محوری

مقدمه:

مقاومت مصالح شاخه ای از مکانیک کاربردی است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری های مختلف بررسی می کند. معمولاً هدف از تحلیل تعیین تنش ، کرنش و تغییر شکل ایجاد شده بوسیله بارها در قطعات ساختمان و به طور کلی اجزاء یک سازه می باشد.

تنش و کرنش:

مفاهیم تنش و کرنش را می توان به طور ساده با مطالعه یک میله منشوری تحت کشش بیان نمود.



شدت نیرو، یعنی نیرو در واحد سطح به نام تنش نامیده می شود و معمولاً با حرف یونانی σ نشان داده می شود.

تنش:

معادله تنش یکنواخت در یک میله منشوری

$$\sigma = \frac{p \to N}{A \to mm^2}$$

1- سیستم انگلیسی $\text{نیرو} = lb \to \frac{lb}{in^2} = psi$

$$A = in^2$$

2- سیستم بین المللی (SI)

$A = m^2$

$\text{نیرو} = N \to N/m^2 = pa$ چون پاسکال کوچک است $\Rightarrow$ $Mpa = N/mm^2$

3-سیستم $\text{نیرو} = kg \to \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow msk$

$$A = Cm^2$$

- موقعی که میله فوق کشیده می شود تنش ایجاد شده به نام تنش کششی نامیده می شود لذا در مقاومت مصالح تنش کششی را مثبت و تنش فشاری را منفی فرض می کنند.
- شرط لازم برای درستی معادله تنش این است که تنش روی سطح مقطع به طور یکنواخت توزیع شده باشد که این شرط موقعی برقرار خواهد شد که نیروی محوری p در مرکز سطح مقطع میله وارد شود.
- لذا در سراسر این جزوه فرض می شود که نیروهای محوری در مرکز سطح مقطع اثر کنند مگر در مواردی که عکس این مطلب ذکر شده باشد.

به طور کلی تعریف تنش در روی سطحی عمود به محور $x-y$ از سیستم مختصات کارتزین سه بعدی را بفرم زیر می توان نشان داد.

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \to 0} \frac{\Delta p_x}{\Delta A_x} \qquad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A_y \to 0} \frac{\Delta p_y}{\Delta A_y} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A_z \to 0} \frac{\Delta p_z}{\Delta A_z}$$

با توجه به فرمول تنش به آسانی می توان حد ماکزیمم نیروی F را پیدا نمود بنحوی که تنش از حد قابل قبول تجاوز نکند:

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \sigma_{all} \qquad \Rightarrow F = A.\sigma_{all}$$

$$F = \sigma_x.A$$

مقدار تنش مجاز بستگی به نوع مصالح و عضو دارد، و با استفاده از نتایج آزمایشات روی نمونه های ساده و استاندارد و منظور داشتن مسائل تجربی و تئوریک به دست می آید.

تنش مجاز $1440\frac{kg}{cm^2}$ برای فولاد معمولی و اعضای تحت کشش ساده اغلب منظور می شود.

صورتهای حل مسائل:

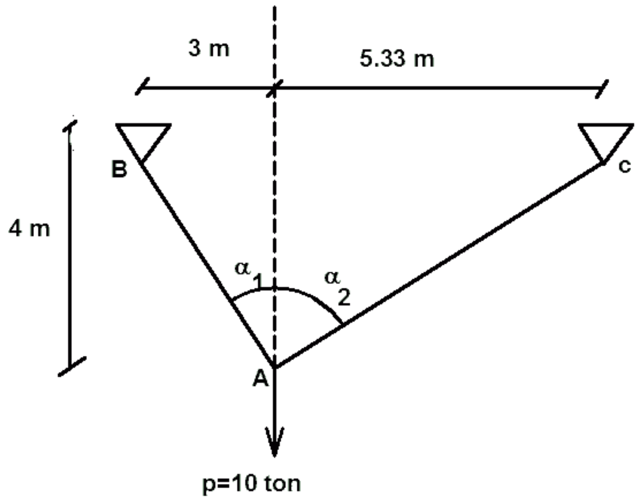
1- بررسی تنش (Analyis آنالیز)

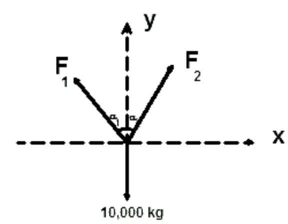
2- با تنش مجاز سطح مقطع را محاسبه کنیم تا تنش از تنش مجاز تجاوز نکند (طراحی،Design)

3- با تنش مجاز و سطح مقطع مشخص، حداکثر بارگذاری را محاسبه کنید (کنترل، control)

مثال:

الف- خرپای دو عضوی زیر که سطح مقطع آنها به ترتیب برابر $A_1 = 10cm^2$، $A_2 = 5cm$ است.تحت اثر بار $p = 10ton$ واقع شده است. تنش نرمال متوسط در هر عضو چقدر است؟





$L_{AB} = 5m \qquad L_{AC} = 6.64m$

$$\sin\alpha_1 = 0.6, \cos\alpha_1 = 0.8, \qquad \sin\alpha_2 = 0.8, \cos\alpha_2 = 0.6$$

$$\xrightarrow{+} \sum Fx = \circ \Rightarrow -F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow -0.6F_1 + 0/8F_2 = \circ \quad \Rightarrow F_2 = \frac{3}{4}F_1 \quad (1)$$

$$\uparrow \sum Fy = \circ \Rightarrow F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 - 10000 = \circ \Rightarrow 0.8F_1 + 0.6F_2 = 10.000 \quad (2)$$

$$(1)at(2) \Rightarrow 0.8F_1 + 0.6(\frac{3}{4}F_1) = 1.25F_1 = 10000 \Rightarrow [F_1 = 8000kg$$

$$F_2 = \frac{3}{4}F_1 = \frac{3}{4}\times 8000 \Rightarrow [F_2 = 6000kg$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{8000}{10} \Rightarrow \left[\sigma_1 = 800\frac{kg}{cm^2}\right. \qquad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{6000}{5} \Rightarrow \left[\sigma_2 = 1200\frac{kg}{cm^2}\right.$$

ب – اگر انتخاب سطح مقطع در اختیار طراح باشد و طراح نخواهد تنش در هر عضو بزرگتر از تنش مجاز $\sigma_{all}=1400\frac{kg}{cm^2}$ شود. مقادیر A_2, A_1 را باید چقدر انتخاب نماید؟

$$\sigma=\frac{F}{A}\Rightarrow A=\frac{F}{.\sigma}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{F_1}{\sigma_1}=\frac{8000}{1400}\Rightarrow\left[A_1=5.72cm^2\right.\\A_2=\frac{F_2}{\sigma_2}=\frac{6000}{1400}\Rightarrow\left[A_2=4.3cm^2\right.\end{cases}$$

ج – اگر تنش مجاز کششی همان $1400\frac{kg}{cm^2}$ و سطح مقطع همان $A_2=5cm^2, A_1=10cm^2$ باشد، حداکثر مقدار نیروی خارجی p چقدر می تواند باشد تا تنش در هیچ عضو از تنش مجاز تجاوز نکند.

$$(F_1)\max=\sigma_{all}.A_1=1400\times10=14000kg$$

$$(F_2)\max=\sigma_{all}.A_2=1400\times5=7000\frac{kg}{cm^2}$$

$$F_1\cos\alpha+F_2\cos\alpha_2=(p)_{\max}\qquad(3)\rightarrow P\max=14000\times0.8+7000\times0.6\Rightarrow P\max=15400kg$$

وقتی p حداکثر ممکن و مجاز را دارد که یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد.طبعاً آن حالتی که در آن P کمتر اتفاق بیافتد ،مورد نظر خواهد بود.برای روشن شدن موضوع تصور کنید،نیروی خارجی P جمع وزنه های است که بتدریج اضافه میشود وقتی که P به حدی میرسد که یکی از سه حالت فوق اتفاق بیفتد،افزایش بیشتر وزنه مجاز نخواهد بود.بنابراین در هر یک از سه حالت با توجه به اینکه همواره گره A باید در تعادل استیک باشد(یعنی $\sum F_y=0$ $\sum F_x=0$ نیروی لازم برای رسیدن به هر حالت را محاسبه میکنیم و از میان آنها کمترین مقدار جواب مساله خواهد بود.

(I $\quad F_2 = 7, F_1 = 14$

$$(p_{\max})_1 = 14\cos\alpha_1 + 7\cos\alpha_2 = 15.4ton$$

(II $\quad F_1 = 14$ از معادله (1) $\Leftarrow F_2 = \frac{3}{4}F_1$ و با جایگزین در معادله (3) خواهیم داشت:

$$(P\max)_2 = F_1\cos\alpha_1 + \frac{3}{4}F_1\cos\alpha_2 = 17.5ton$$

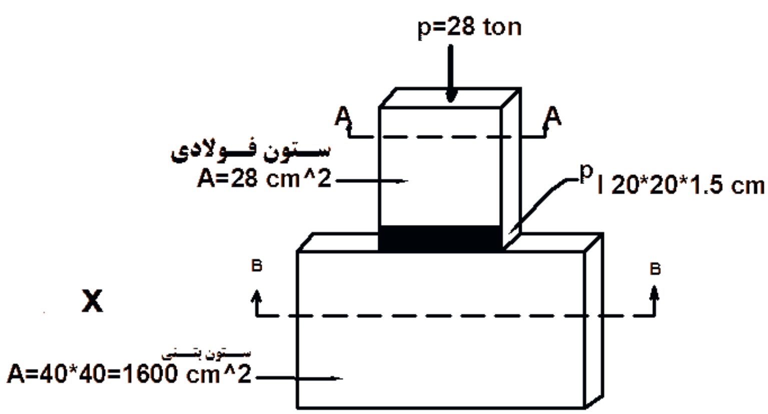
(III $\quad F_2 = 7 \Leftarrow$ $F_1 = \frac{4}{3}F_2$ و با جایگزینی در معادله (3) خواهیم داشت:

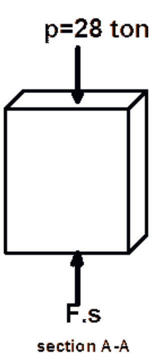
$$(P\max)_3 = \frac{4}{3}F_2\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 = 11.67ton$$

$$P\max = \min((P\max)_1(P\max)_2,(P\max)_3) = 11.67ton$$

مثال2:

الف- ستونی فولادی به مساحت مقطع $A_S = 28cm^2$ روی ستون بتنی مربعی شکل به ابعاد $40cm \times 40cm$ در یک محور قرار گرفته است. تنش متوسط در ستون فلزی و ستون بتنی در اثر بار $p = 28ton$ چقدر است؟

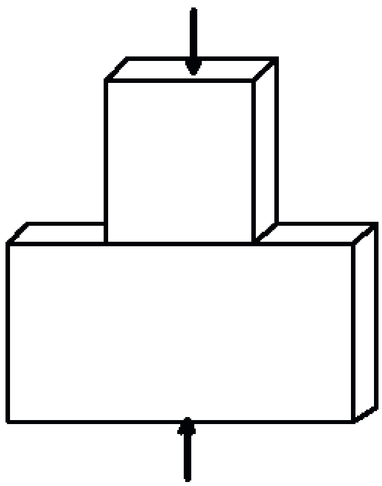




$$\uparrow \sum F_y = 0 \to F_s - P = \to F_s = P = 28 ton$$

$$\sigma_S = \frac{Fs}{A_s} = \frac{28000}{28} \Rightarrow \sigma_s = 1000 \frac{kg}{cm^2} \le \sigma_{alls}$$

این تنش نباید قاعدتاً از تنش مجاز فشاری ستون فولادی تجاوز کند.



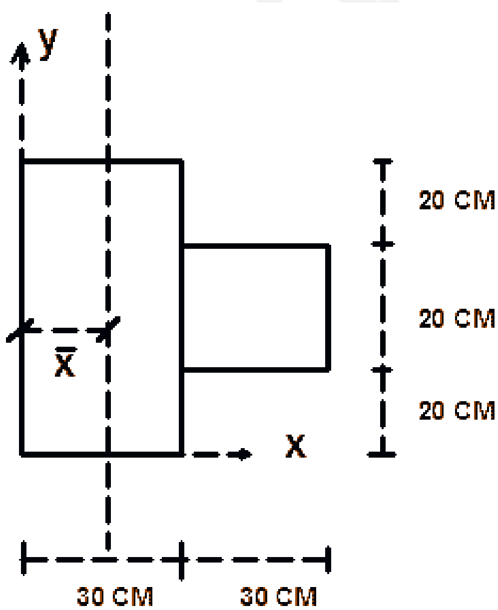
section B-B

$$\sigma_c = \frac{Fc}{A_c} = \frac{28\times10^3}{1600} \Rightarrow \sigma_c = 17.5 \frac{kg}{cm^2} \le \sigma_{all\,c}$$

این تنش نباید از تنش مجاز فشاری ستون بتنی تجاوز کند.

مثال:

محل اثر نیرو را در مقطع ستون مقابل بگونه ای بدست آورید که تنش یکنواخت داشته باشیم؟



$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{x} = \frac{30\times60\times15 + 30\times20\times45}{30\times60 + 30\times20} = 22.5 cm$$

تنش لهیدگی

تنش لهیدگی از نوع تنشهای قائم است که در محل تماس بین دو سطح حاصل می شود. در این حالت تنش لهیدگی را با تنش مجاز لهیدگی جسم ضعیف تر مقایسه می کنیم.

$$\sigma_{bea} = \frac{P}{A} \leq \text{تنش مجاز لهیدگی ماده ضعیفتر}$$

مثال:

ستون مرکب مقابل با سطح مقطع و تنشهای مجاز مشخص شده است، حداکثر بار P که به این ستون می توان اعمال کرد چقدر است؟

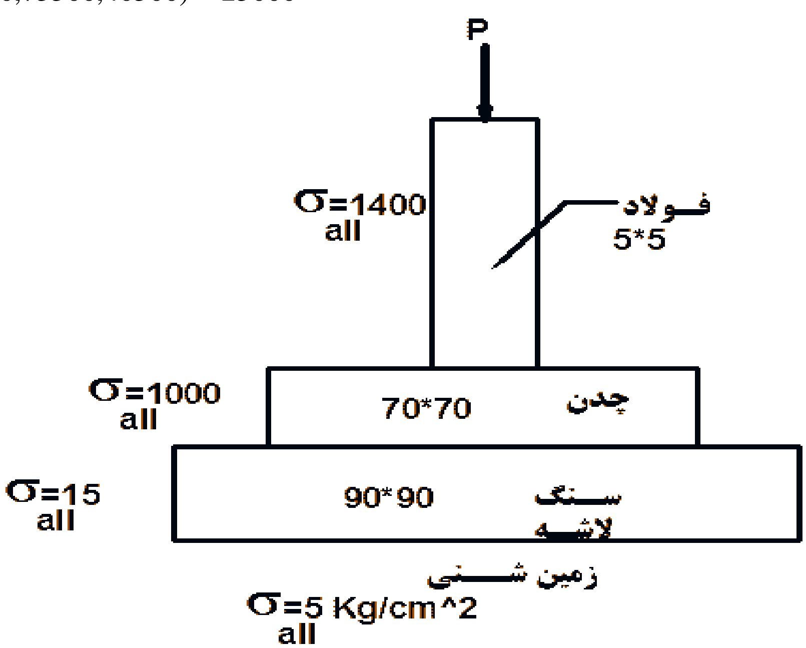
$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_{all}.A$$

ظرفیت لهیدگی بین فولاد و چدن $= 5\times5\times1000 = 25000kg$

ظرفیت لهیدگی بین چدن و لاشه سنگ $= 70\times70\times15 = 73500kg$

ظرفیت لهیدگی بین لاشه سنگ و زمین شنی $= 90\times90\times5 = 40500kg$

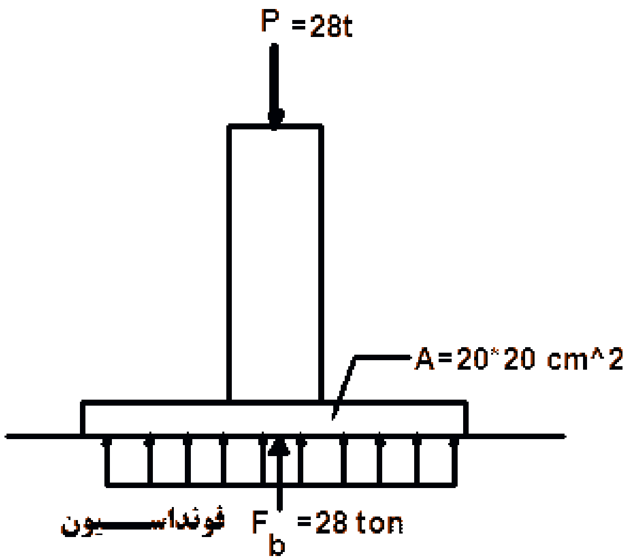
$p = \min(25000,73500,40500) = 25000$



در مثال قبل (مثال 2)

ب- اگر ستون فلزی توسط ورق فولادی نسبتاً ضخیم بضخامت 1.5cm و ابعاد $20\times 20cm$ روی ستون بتنی نشسته باشد، مقدار تنش در محل تماس ورق فولادی و کف ستون و سطح بتن چقدر است؟

$$\text{تنش لهیدگی} = \sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{28\times 10^3}{20\times 20} \Rightarrow \sigma_b = 70\frac{kg}{cm^2}$$



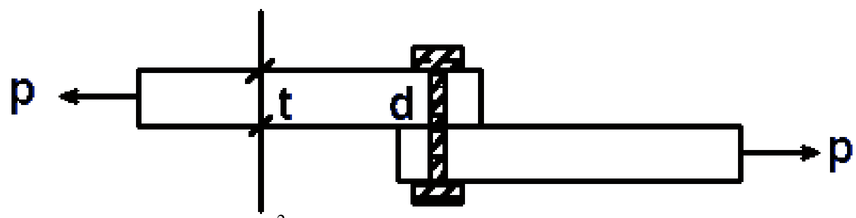
قاعتاً این تنش نباید از تنش مجاز لهیده شدن عضو با مصالح ضعیفتر تجاوز کند.

ج- اگر فرض کنیم تنش مجاز ستون فولادی $1200\frac{kg}{cm^2}$ ، تنش مجاز ستون بتن آرمه $100\frac{kg}{cm^2}$ و تنش مجاز لهیدگی در بتن آرمه $120\frac{kg}{cm^2}$ باشد، حداکثر نیروی فشاری P می تواند باشد تا هیچکدام از تنش مجاز تجاوز نکند.

$$P_1=\sigma_s.A_s=1200\times 28=33600kg\rightarrow P_1=33.6ton$$
$$P_2=\sigma_b.A_b=120\times 20\times 20=48000kg\rightarrow P_2=48ton$$
$$P_3=\sigma_c.A_c=100\times 40\times 40=160000kg\rightarrow P_3=160ton$$
$$P\max=\min(P_1,P_2,P_3)\Rightarrow P_{\max}=33.6ton$$

تنش برشی

در اتصالات پیچی علاوه بر کنترل تنش برشی در مقطع پیچ، باید تنش لهیدگی بین بدنه و صفحه اتصال نیز کنترل گردد. به طور متوسط این تنش از رابطه زیر دست می آید.

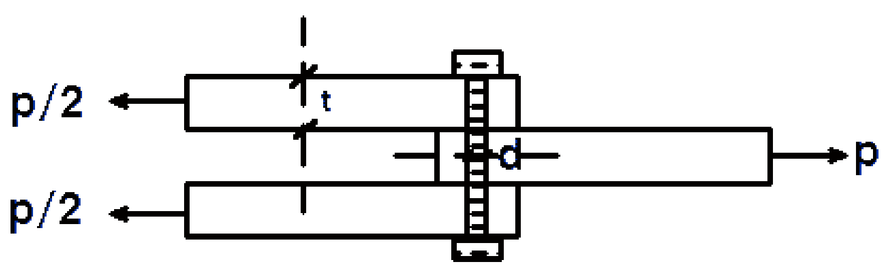


$$\sigma_{bea}=\frac{P}{dt}\Rightarrow\tau=\frac{P}{nA}\qquad A=\frac{\pi d^2}{4}$$

اتصال پیچی یک برشه $\tau=\dfrac{P}{A}$ $\sigma_{bea}=\dfrac{P}{dt}$ $n=1$

اتصال پیچی دو برشه $n=2$

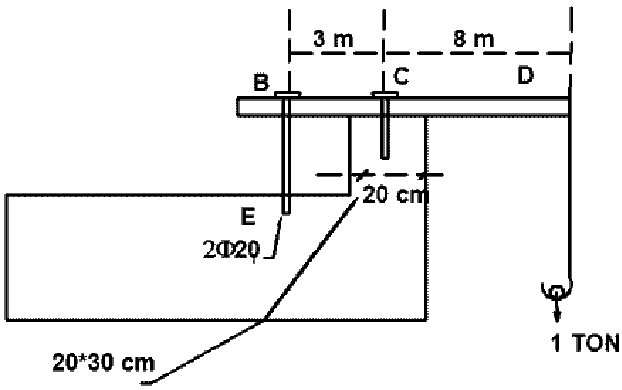
$$\tau=\frac{P}{2A}$$
$$A=\frac{\pi d^2}{4}$$

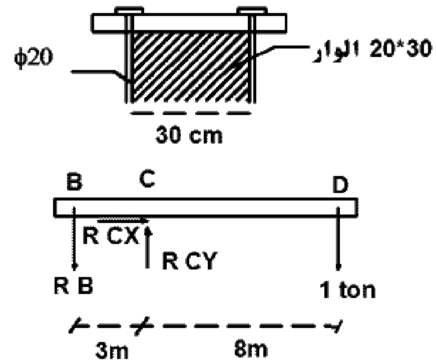


مثال-

الف- تنش نرمال در بدنه پیچها را حساب کنید.

ب- تنش لهیدگی (تماس)در تکیه گاه وسط و سطح اتکا (20×30) چقدر است ؟





$$\xrightarrow{+}\sum F_x=0\rightarrow R_{cx}=0$$

$$-\circlearrowleft\sum Mc=0\rightarrow R_B\times3-1\times8=0\rightarrow R_B=\frac{8}{3}=2.67ton\downarrow$$

$$+\uparrow\sum F_y=0\rightarrow R_{cy}-2.67-1=0\rightarrow R_{cy}=3.67\uparrow$$

عکس العمل R_B به صورت کشش در دو پیچ به تکیه گاه اصلی منتقل می شود . پیچها با قطر 20mm دارای سطح مقطع مساوی هستند.

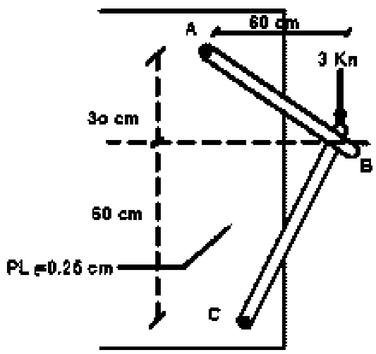
$$\sigma_{bolt}=\frac{F_{bolt}}{\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{RBl_2}{\frac{\pi\times2^2}{4}}=\frac{4\times2.67\times1000}{2\pi\times4}\Rightarrow\sigma_{bolt}=425\frac{kg}{cm^2}$$

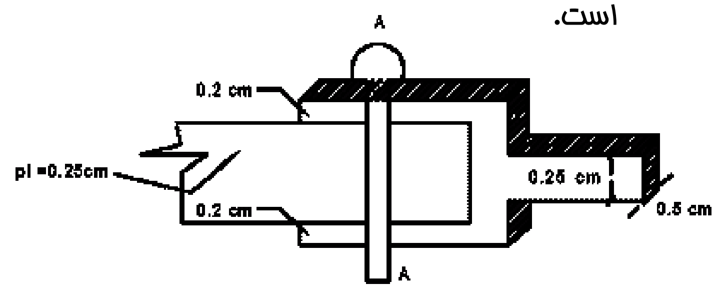
$$\sigma_{bearing}=\frac{Rc_y}{20\times30}=\frac{3.67\times1000}{20\times30}\Rightarrow\sigma_{bea}=6.12\frac{kg}{cm^2}$$

مثال:

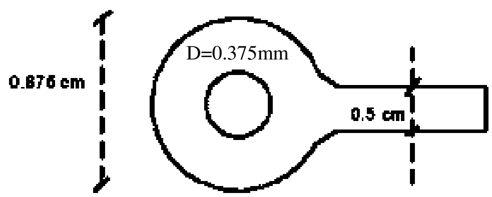
تنش نرمال عضو AB و BC را در حوالی وسط عضو حساب کنید.

مقطع عضو AB در حدود وسط آن $0.25\times0.5\ cm$ و مقطع BC در حدود وسط آن $0.25\times0.875\ cm$ است.

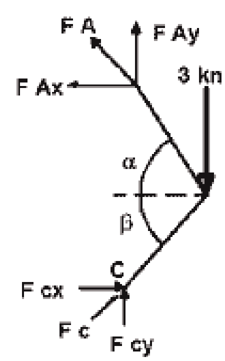




عضو AB



نما ازبالا



$$-\circlearrowleft\sum M_c=0\rightarrow F_{AX}\ (30+60)-3\times60=0\rightarrow F_{AX}=2kn$$

$$FA_y=\frac{FA_x}{2}\Rightarrow FA_y=1kn\quad(\tan\alpha=\frac{1}{2})$$

$$F_A=2(\sqrt{\frac{5}{2}})\Rightarrow F_A=2.23kn$$

$$-\circlearrowleft\sum M_A=0\rightarrow 3\times60-F_{cx}\times90=0\rightarrow F_{Cx}=2kn$$

$$F_{cy}=F_{cx}\tan45\Rightarrow F_{cy}=2kn$$

$$F_c=\sqrt{2}(2)\Rightarrow F_c=2.83kn$$

تنش در عضو AB در وسط:

کششی:
$$\sigma_{AB}=\frac{F_A}{A_{AB}}=\frac{2.23}{(0.25)(0.5)}=17.8\frac{kn}{cm^2}$$

تنش در سرAاز عضو AB در محل سوراخ پیچ(تنش در مقطع بحرانی):

$$\sigma'_{AB}=\frac{2.23}{2\times0.2\times(0.875-0.375)}=11.2\frac{kn}{cm^2}$$

تنش در تنه عضوBC:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_B}{A_{BC}} = \frac{2.83}{0.875 \times 0.25} = 12.9 \frac{kn}{cm^2}$$

چون نقطه BC فشاری است در مقطعی که از سوراخ بگذرد، تنش وجود ندارد (تنش در محل سوراخ پیچ از عضو BC)

تنش لهیدگی بین میله و بدنه سوراخ در نقطه C از عضو BC:

$$\sigma_b = \frac{Fc}{A_{ber}} = \frac{2.83}{(0.375 \times 0.2) \times 2} = 18.8 \frac{kn}{cm^2}$$

تنش لهیدگی بین میله میله و صفحه در C:

$$\sigma_b' = \frac{F_c}{A_{ber}} = \frac{2.83}{0.375 \times 0.25} = 30.1 \frac{kn}{cm^2}$$

تنش برشی در میله $\tau_c = \frac{F_c}{2A} = \frac{2.83}{2 \times \frac{\pi \times 0.375^2}{4}} = 12.9 \frac{kn}{cm^2}$

فصل چهارم

کرنش – تغییر طول

مقاومت مصالح یا مکانیک جامدات عموماً با اجسامی سروکار دارد که تغییر شکل پذیرند. میله فلزی را در نظر بگیرید که از سقفی آویزان و در انتها به آن وزنه ای آویزان می شود با متناظر داشتن این میله با قطعه کش یا فلز به آسانی قابل احساس و استنباط است که :

الف- در اثر اعمال نیرو (افزایش وزنه) طول سیم یا میله اضافه می شود و این افزایش طول با مقدار نیرو متناسب است.

ب- برداشتن کل وزنه ها و حذف نیرو ، باعث برگشت میله یا سیم احالت اولیه خواهد شد.

ج- افزایش طول بستگی مستقیم به طول اولیه و بستگی معکوس با سطح مقطع (متناظر سختی) دارد.

د- با تجسم وضعیت اجسام نرمتر مثل کش و فنر به آسانی قابل احساس است که هماهنگی رفتارهای فوق محدود به حدی از بارگذاری (افزایش وزنه) است. بطوریکه بعد از آن حد هماهنگی و تناسبات فوق مشاهده نمی شود، مثلاً کش شروع به باریک شدن می کند میل فنر تغییر شکل دائم می دهد بنحوی که بعد از برداشتن نیرو به حالت اول باز نمی گردد.

به رفتارهای مشابه رفتارهای فوق رفتارهای «ارتجاعی» یا «الاستیک» می گویند و آن محدوده هماهنگی رفتار را «محدوده الاستیک» جسم معرفی می کنیم.

در مقاومت مصالح اغلب مصالح سازه ای را از جمله فولاد ساختمانی و بتن را می توان تا حدودی از بارگذاری الاستیک خطی دانست، یعنی نیرو با تغییر طول متناسب خواهد بود(مانند فنر)

تغییر طول نسبی:

تغییر طول نسبی عبارت است از نسبت میزان تغییر طول به طول اولیه این تغییر طول در واحد طول به نام کرنش خوانده می شود.

مفهوم تغییر طول نسبی در یک نقطه عبارت است از تغییر طـول نـسبی المـان بـه طـول Δx در امتـداد محور X وقتیکه Δx به سمت صفر میل میکند یعنی

$$\varepsilon = \frac{\Delta_L}{L_\circ} \qquad\qquad \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta}{\Delta x}$$

در فرمول فوق سه کمیت $\varepsilon, L_0, \Delta L$ وجود دارند که در صورت معلوم بودن یا قابل تعیین بودن دو تا از کمیتها،کمیت سوم قابل محاسبه است.بعبارت دیگر فرمول به فرمهای زیر میتواند بیان شود:

$$L_0 = \frac{\Delta L}{\varepsilon} \qquad \Delta L = \varepsilon_0 \times L_0$$

در روابط فوق قطعاً $\Delta L, L_0$ میبایستی واحد طول یکسان داشته باشند و نتیجتا ε بدون بعد میباشد.

رابطه هوک در اعضای بار محوری:

همانطور که از توضیحات قبل استنباط می شود، تنش محوری با تغییر طول نسبی تناسب خطی دارد.این موضـوع در مـورد بـسیاری از مـصالح سـازهای از جملـه فـولاد سـاختمانی تـا حـدود از بارگـذاری صـادق است..آزمایش کشش ساده یک قطعه فولادی با اعمال نیروی کششی بتدریج افزاینده تناسـب تـنش (میزان نیرو بر واحد سطح) و تغییر طول نسبی و میزان تغییر طـول در واحـد طـول را بـشکل منحنـی زیـر نشان می دهد.

A= تنش حد تناسبB= تنش تسلیم

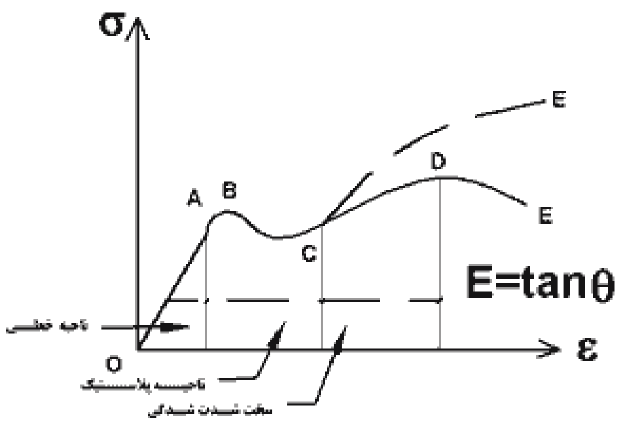
OA = ناحیه خطی

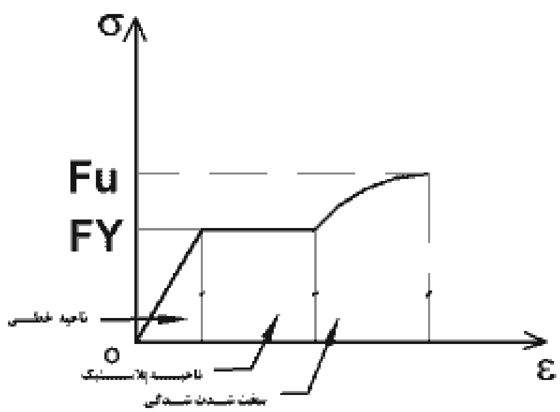
BC= ناحیه خمیری

C= تنش سخت شدگی کرنشی

D= تنش نهایی

E= تنش گسیختگی





افزایش تنش از صفر تا σ_y باعث افزایش تغییر شکل نسبی از صفر تا ε_y میشود که رابطه آنها در محدوده OA تقریبا خطی است.بعد از نقطه A رفتار غیر خطی خواهد بود.ضریب زاویه خط OA ضریب تناسب خطی ε,σ در محدوده الاستیک OA خواهد بود.بنابراین رابطه تنش ،تغییر طول نسبی به فرم زیر نوشته میشود.

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E.\varepsilon$$

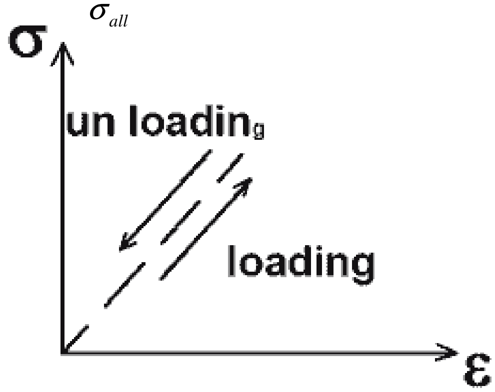
ضریب E را مدول الاستیسیته معرفی میکنیم که برای مصالح مختلف ساختمانی متفاوت است ،و در تعیین آنها مدلهای آزمایشی مختلف بکار میرود.

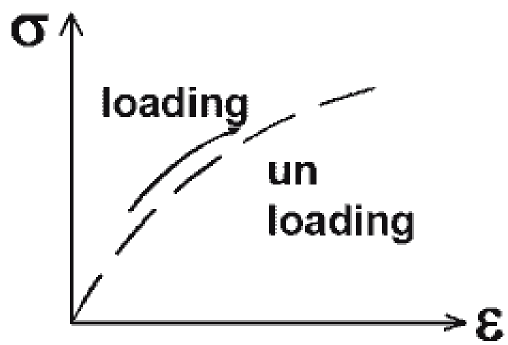
در فرمول بالا مقدار تنش با σ و تغییر طول نسبی با ε نشان داده میشود و ضریب E واحدی یکسان با σ دارد و ε بدون بعد است.

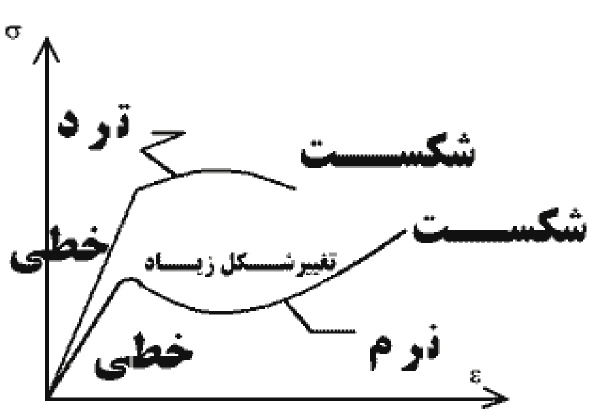
معمولا برای اطمینان، تنش مجاز را کمتر از σ_y(حدود 60 درصد) می گیرند.

اجسام مختلف تحت اثر نیرو، رفتارهای متفاوتی خواهند داشت . نمودار تنش و کرنش یک ماده نشانگر رفتار آن ماده تحت اثر بار خواهد بود . این نمودار ممکن است بصورت الاستیک (برگشت پذیر)و یا غیرالاستیک(برگشت پذیر) باشد، و در هر صورت می تواند بصورت خطی باشد. در مبحث مقاومت مصالح ، بیشتر ، قسمت خطی نمودار تنش – کرنش مورد توجه قرار دارد، که رابطه آن با قانون هوک ($\sigma = E.\varepsilon$) بیان می شود.

$$S.F = \frac{\sigma_y}{\sigma_{all}} \qquad S.F = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$







محاسبه تغییر طول محوری:

با جایگذاری مقداری از فرمول تنش $\sigma=\frac{F}{A}$ و مقدار ε از فرمول تغییر شکل نسبی $\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}$ خواهیم

داشت:

$$\Delta L=\varepsilon.L=\circ(1)$$
$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}(2)\quad ,\sigma=\frac{F}{A}(3)\Rightarrow\quad 2,3\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{F}{AE}(4)$$
$$(4),(1)\Rightarrow\Delta L=\frac{F}{A.E}L\Rightarrow\Delta L=\frac{FL}{AE}$$

در حالت کلی تر مقدار تغییر طول یک عضو محوری از رابطه انتگرال زیر محاسبه خواهد شد.

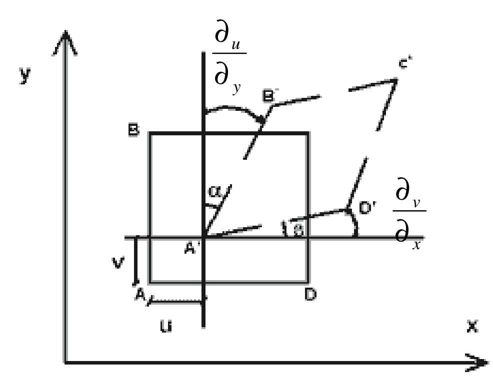
$$\Delta L=\int_{\circ}^{L}\varepsilon dx\qquad\qquad \Delta L=\int_{\circ}^{L}\frac{F}{EA}dx$$

که مقادیر A,E,F ممکن است در طول عضو متغیر باشد (تابعی از x)

تغییر شکل نسبی برشی یا زاویه ای:

علاوه بر آنکه یک نقطه از جسم نسبت به نقطه ای دیگر از آن می تواند تغییر مکان انتقالی با مؤلفه های W,V,Uداشته باشد تغییر شکل زاویه ای نیز ممکن است اتفاق بیفتد ، تغییر شکل نسبی برشی در یک المان در صفحه xy را با علامت γ_{xy} نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

شکل روبرو یک المان دو بعدی را نشان میدهد.



اندیسهای γ،نماینده صفحه ای هستند که تغی $\gamma_{xy}=\frac{\partial_u}{\partial_y}+\frac{\partial_v}{\partial_x}$ $\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial_z}+\frac{\partial_w}{\partial_y}$, $\gamma_{xz}=\frac{\partial_u}{\partial_x}+\frac{\partial_w}{\partial_z}$ یر

زاویه در آن صورت میگیرد.

کل تغییر زاویه$=\alpha+\beta=tg\alpha+tg\beta=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$

α,βیار کوچک هستند و مساوی تانژانت خودشان میباشند.

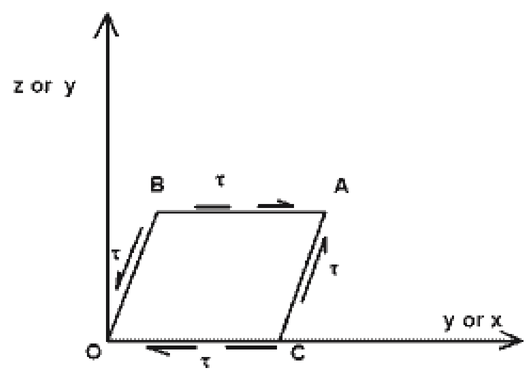
اگر γ را کرنش برشی تعریف نماییم.

$$\tau=G\gamma$$

که در G ثابت تناسب است و ضریب ارتجاعی برشی و یا ضریب صلبیت نامیده می شود و چون γ

همانند ε بدون بعد است γ هم بر حسب رادیان و هم بر حسب درصد بیان می شود.

$$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G$$
$$\gamma_{yz}=\tau_{yz}/G$$
$$\gamma_{zx}=\tau_{zx}/G$$



ضریب پواسون:

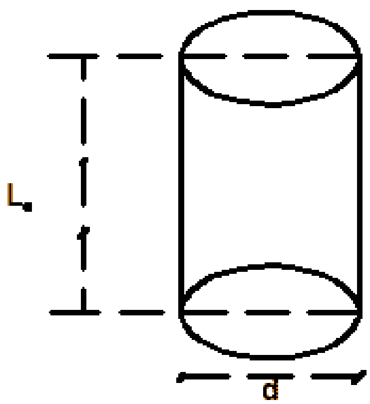
موقعی که میله ای تحت کشش می باشد اضافه طول محوری آن همراه با انقباض جانبی می باشد . به عبارت دیگر با اضافه شدن طول میله عرض آن کاهش می یابد . تا زمانی که میله به صورت ارتجاعی عمل می کند نسبت کرنش در جهت عرض به کرنش در جهت طول میله ثابت و به ضریب پواسون (ν) موسوم می باشد (کرنش جانبی و کرنش طولی مخالف علامت یکدیگر هستند)

$\nu=\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}=$ کرنش طولی/کرنش جانبی

مقدار ν برای فولاد ساختمانی حدود0.25 و برای بتن آرمه حدود 0.15 است.　　$\circ\langle\nu\langle 0.5$

مثال:

میله ای مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی 15ton قرار گرفته و در طول مشخص شده با $L_\circ = 25cm$ مقطع دایره ای به قطر d=5cm تغییر طول $\Delta L = 0.25mm$ اندازه گیری شد و مشاهده گردید که قطر میله به اندازه 0.01mm کاهش یافته است . مطلوبست محاسبه G, γ, E



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_\circ} = \frac{0.25}{250} \Rightarrow \varepsilon_x = 0.001$$

Δd 0.01 [redacted] $=2\times10^{-4}$

[redacted] $.2$

[redacted] $.97 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{763.97}{0.001} \Rightarrow$

A $\pi \times \frac{5}{4}$

$$E = 7.64\times10^5 \, {kg}/{cm^2}$$

از طرفی سه ثابت ارتجاعی ν, G, E از یکدیگر مستقل نیستند و بین آنها رابطه زیر وجود دارد. لذا خواهیم داشت:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{7.64\times1.5}{2(1+0.2)} \Rightarrow G = 318.33\times10^3$$

تعمیم قانون هوک برای اجسام ایزوتروپ و سه بعدی:

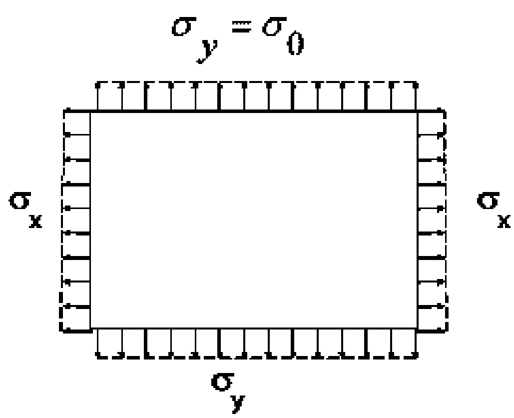
به اجسامی که خواص مکانیکی آن از جهت تغییر شکل پذیری در تمام جهات یکسان است ایزوتروپ گویند. قبلاً قانون هوک را برای اعضای با نیروی محوری بعنوان رابطه تنش در امتداد طول عضو و تغییر شکل نسبی در امتداد طول عضو بصورت $\sigma = E.\varepsilon$ معرفی کردیم که E را مدول الاستیسیته نامیدیم.

در حالت کلی برای اجسامی که تحت اثر تنش در امتداد یک، دو یا سه محور قرار گیرند به فرم کلی زیر بیان می کنیم که به قانون هوک کلی برای اجسام ایزوتروپ معرف است.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

مثال:

صفحه مستطیلی مقابل تحت اثر تنشهای یکنواخت σ_y, σ_x قرار دارد.در صورتیکه $\varepsilon_x = \circ, \sigma_y = \sigma_0$ باشد نسبت $\dfrac{\sigma_\circ}{\varepsilon_y}$ را تعیین کنید.



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \Rightarrow 0 = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E}(\nu\sigma_0) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_0 \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

تنش حرارتی:

اگر جسمی تحت اثر تغییر درجه حرارت قرار گیرد ، یعنی به اندازه ΔT درجه گرم یا ΔT درجه سرد شود از هر جهت بطور مساوی (برای اجسام ایزوتوپ حرارتی)، منبسط یا منقبض می شود بعبارت دیگر تغییر شکل نسبی در هر سه جهت کارتزین بطور مساوی خواهد داشت که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha.\Delta T \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} \end{cases} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon l_\circ = \alpha.\Delta T.l_\circ$$

توجه:تغییر شکل نسبی برشی در اثر تغییرات درجه حرارت بوجود نمی آید.

اگر تغییرات درجه حرارت به اندازه ΔT درجه حرارت همزمان با اعمال تنش باشد. تغییر طول نسبی حرارتی یا تغییر طول نسبی در هر جهت جمع جبری می شود یعنی:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma z}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha\Delta T \end{cases}$$

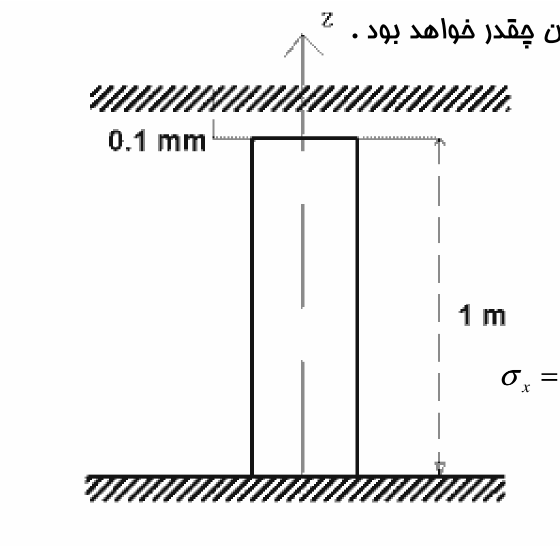
$\Delta T = T_2 - T_1$ برای افزایش درجه حرارت مثبت است.

ضریب انبسلط حرارتی α بستگی به جنس جسم دارد که با آزمایش بدست می آید.

$\alpha_c = 16.7\times10^{-6}/c^\circ$ مس و $\alpha_a = 22\times10^{-6}/c^\circ$ آلومینیوم و $\alpha_s = 11.7\times10^{-6}/c^\circ$ فولاد.

مثال:

چنانچه میله شکل مقابل 30° گرم شود ، تنش ایجاد شده در آن چقدر خواهد بود .



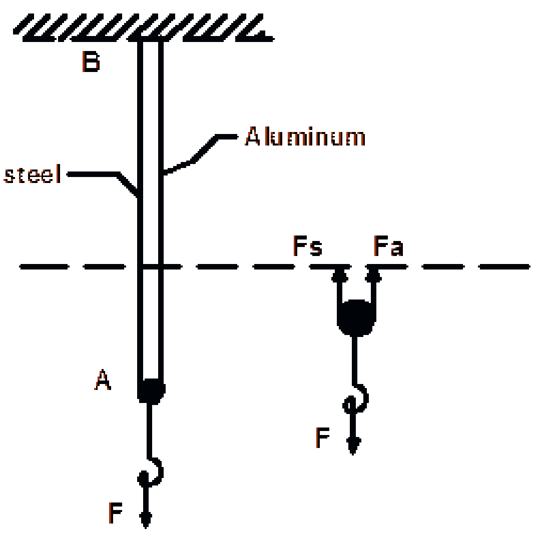
$$\alpha = 17\times10^{-6}\frac{1}{c^{\circ}}, E = 110000\frac{kg}{cm^{2}}$$

$$\Delta L = L\alpha\Delta T = 100\times17\times10^{-6}\times30 = 0.051cm$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \circ \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\delta = 0.041}{L = 100} = 0.00041 \Rightarrow \sigma_z = E.\varepsilon_z = 45.1\frac{kg}{cm^{2}}$$

سازگاری تغییر شکلها:

جهت روشن شدن موضوع سازگاری شکل مقابل که وزنه $F = 2ton$ دو سیم مجاور هم از سقف آویزان است را در نظر می گیریم . سیم فولادی با قطر $1cm$ و ضریب الاستیسیته $E = 2.1\times10^{6}\frac{kg}{cm^{2}}$ و سیم آلومینیومی با قطر $1cm$ و $E = 0.55\times10^{6}$ و هر دو به طول اولیه $1m$ می باشند. با فرض تنش حداکثر الاستیک خطی برای فولاد $F_y = 2400\frac{kg}{cm^{2}}$ و برای آلومینیوم $F_y = 1400\frac{kg}{cm^{2}}$ باشد سهم نیروی حمل شده توسط میله های فولادی و آلومینیومی را بدست آورید.



از تعادل استاتیکی در امتداد قائم می توانیم بنویسیم :

$$+\uparrow\sum F_y = \circ \rightarrow F_a + F_s = F$$

از طرف دیگر A سر قلاب همواره در هر شرایطی به سر دو سیم وصل است و نقطه B اتصال هر دو سـیم به سقف ثابت می باشد، بنابراین در تمام طول بارگذاری قبل و بعد از آن طول هر دو سیم باید مساوی باشد بعبارت دیگر در اثر بارگذاری تغییر شکل طولی کل هر دو سیم یکسان است.

$$\left.\begin{matrix} \Delta L_s = \dfrac{F_s.L_s}{E_s.A_s} \\ \Delta L_a = \dfrac{F_a.L_a}{E_a.A_a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta L_s = \Delta L_a \Rightarrow \frac{F_s.L_s}{E_s.A_s} = \frac{F_a.L_a}{E_a.A_a}\}, L_s = L_a , A_s = A_a$$

$$\frac{F_s}{E_s} = \frac{F_a}{E_a} \rightarrow F_s = \frac{E_s}{E_a} F_a \qquad \textbf{(1)}$$

$$F_a + F_s = F \qquad \textbf{(2)}$$

$$\textbf{(1)و(2)} \Rightarrow F_a + \frac{E_s}{E_a} F_a = F \Rightarrow F_a (1 + \frac{E_s}{E_a}) = F \rightarrow \begin{cases} F_a = \dfrac{E_a}{E_a + E_s} \times F \\ F_s = \dfrac{E_s}{E_s + E_a} \times F \end{cases}$$

پس از بارگذاری تغییر شکل در سیم و تعادل استاتیکی خواهیم داشت.

نیروی داخلی سیم فولادی:

$$F_s = \frac{E_s}{E_s + E_a} \times F = \frac{2.1\times 106}{(2.1 + 0.55)\times 10^6} \times 2 \times 1000 \Rightarrow F_s = 1585 kg$$

نیروی داخل سیم آلومینیومی:

$$F_a = \frac{E_a}{E_a + E_s} \times F = \frac{0.55\times 10^6}{(2.1 + 0.55)\times 10^6} \times 2000 \Rightarrow F_a = 415 kg$$

مشاهده می کنیم که دو سیم با قطر مساوی در طول مساوی و تحت شرایط بارگذاری مساوی نیروهـای متفاوتی حمل می کنند.

$$\sigma_s = \frac{1585}{\pi \times \frac{(1)^2}{4}} = 2108 \langle \sigma_{ys} = 2400 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_a = \frac{415}{\pi \times \frac{(1)^2}{4}} = 528 \langle \sigma_{ya} = 1400 \frac{kg}{cm^2}$$

چون تنش موجود فولاد و آلومینیوم کمتر از تنش تسلیم است. پس شرایط الاستیک خطی در محاسبه تغییر شکل بکار رفته درست بود و گر نه محاسبه تغییر شکل می بایست با توجه به پلاستیک شدن مصالح صورت گیرد.

سازه های کششی – فشاری هیپراستاتیک

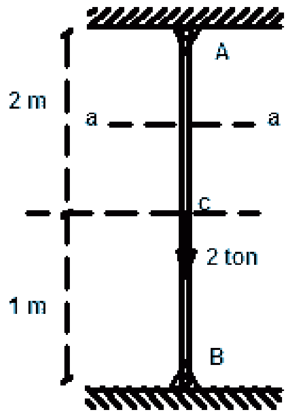
مسائل سازه های نا معین (هیپراستاتیک) را که فقط تحت اثر نیروهای محوری باشند با استفاده از سازگاری تغییر شکلها و اصل جمع اثر نیروها بشرطی که رفتار مصالح الاستیک خطی باشد می توان محاسبه کرد. اصل جمع اثر نیروها بدین معنی است که اگر جسمی تحت اثر چند نیرو قرار گیرد تغییر شکل یا تنش کل ایجاد شده در یک نقطه از جسم برابر است با جمع جبری تغییر شکلها یا تنش ها و اثرات، هر یک از نیروها که به تنهایی منظور شود.

مثال:

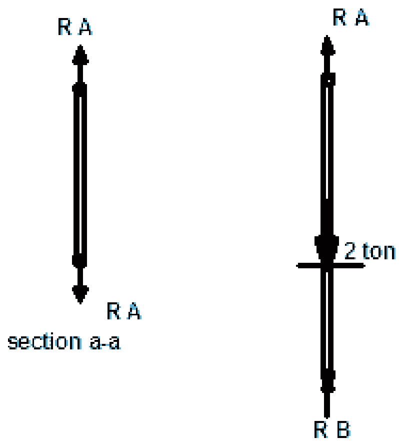
میله ای به طول L=3m و سطح مقطع $A = 2cm^2$ به شکل مقابل تحت بار E=2ton در نقطه ای به فاصله 2m از انتهای بالائی قرار گرفته می خواهیم عکس العمل های آنرا محاسبه کنیم.

$$+\uparrow \sum Fy = \circ \rightarrow R_A + R_B = 2ton \qquad (1)$$

از معادلات تعادل الاستیک نمی توان عکس العمل ها را محاسبه کرد. چون محاسبه دو مجهول R_B, R_A فقط یک معادله تعادل (1) را می توانیم بنویسیم و یک معادله کم داریم.



برای پیدا کردن معادله ای دیگر به سراغ سازگاری تغییر شکلها می رویم . با اندکی دقتی متوجه می شویم که تغییر مکان B نسبت به A یعنی تغییر طول کل میله باید صفر شود چون AوB تکیه گاه هستند . بنابراین بطور پارامتری و بر حسب R_B, R_A تغییر مکان نقطه B را نسبت به A با توجه به رفتار الاستیک خطی محاسبه می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم . طول AB از دو قطعه AC و BC تشکیل شده است.



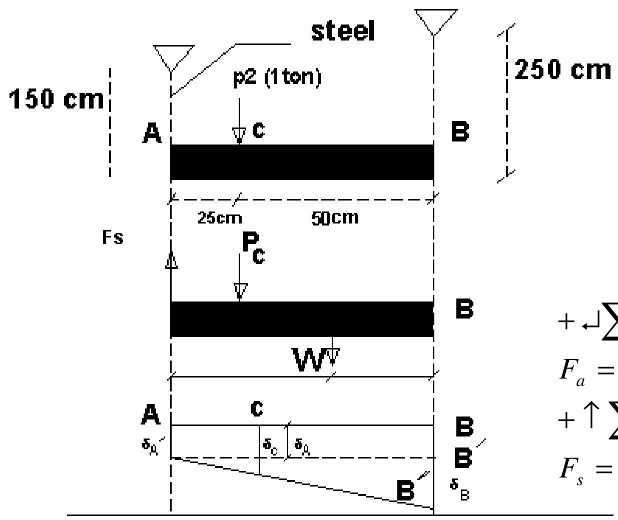
$$\Delta L_{BA_2} = \sum_{1}^{2} \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$$

$$\Delta L_{BA} = \frac{-F_{AC} \cdot L_{AC}}{EA} + \frac{F_{CB} \cdot L_{CB}}{E.A} = \frac{-2\times 1}{EA} + \frac{(RA\times 3)\times 1}{EA} = 0 \Rightarrow \frac{2\times 1}{AE} = \frac{RA\times 3}{AE} \qquad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow R_A = \frac{2}{3} ton, R_B = \frac{4}{3} ton$$

مثال:

دو سیم فولادی و آلومینیومی بمساحت مقطع بـه ترتیـب $A_a = 1.57cm^2, A_S = 0.785cm^2$ توسط عضو صلب و بدون تغییر شکل پذیرC به وزن 200kg وزنه ای به وزن p=1ton را حمل می نماید . تغییر مکان نقطه C چقدر است؟



$$E_A = 6\times10^5 \frac{kg}{cm^2}, E_s = 2.1\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$$

از تعادل استاتیک:

$$+\circlearrowleft\sum M_A = 0 \rightarrow 25P + 37.5W - 75F_a = 0$$

$$F_a = 433.3kg$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \rightarrow F_s + F_a = P + W = 1000 + 200$$

$$F_s = 766.7kg$$

چون جسم AB صلب است خط AB بعد از تغییر مکان بصورت خط باقی می ماند.

$$\delta_A = \delta_S = \frac{F_S.L_S}{E_S.A_S} = \frac{150\times766.7}{2.1\times1.6\times0.782} \Rightarrow \delta_A = \delta_S = 0.07cm$$

$$\delta_B = \delta_a = \frac{F_a.L_a}{E_a.A_a} = \frac{433.3\times250}{6\times10^5\times1.57} \Rightarrow \delta_B = \delta_a = 0.115cm$$

$$\delta_C = 0.07 + \frac{0.115-0.07}{75}\times25 \Rightarrow \delta_c = 0.084cm$$

مثال:

ستونی بتن آرمه به مقطع $40\times40cm$ و طول 3m با یک درصد فولاد طولی مفروض است می خـواهیم مقدار تنش در فولاد و بتن را به ازای نیروی فشاری 20ton بیابیم و مقدار کاهش طولی آنرا حساب کنیم.

$$E_s = 2.1\times10^6 \frac{kg}{cm^2}, E_c = 2.1\times10^5 \frac{kg}{cm^2}$$

مساحت فولاد $A_s = 0.01\times40\times40 = 16cm^2$

مساحت بتن خالص $A_c = 40\times40 = 16 = 1584cm^2$

فرض می شود ، فولاد و بتن تحت این بارگذاری در حد الاستیک خطی باقی می مانند و میلگردهای فولادی

کاملاً به بتن چسبیده است. پس تغییر شکل طولی هر دو باید یکسان باشد.

$$L_C = L_S = 3m$$

$$\delta = \delta_s = \delta_c \rightarrow \frac{F_S.L_S}{E_S.A_S} = \frac{F_C.L_C}{E_C.A_C} \rightarrow F_S = \frac{E_S.A_S}{E_C.A_C} F_C = \frac{2.1\times10^6\times16}{2.1\times10^5\times1534} F_C$$

$$F_S = 0.101 F_C \qquad (1)$$

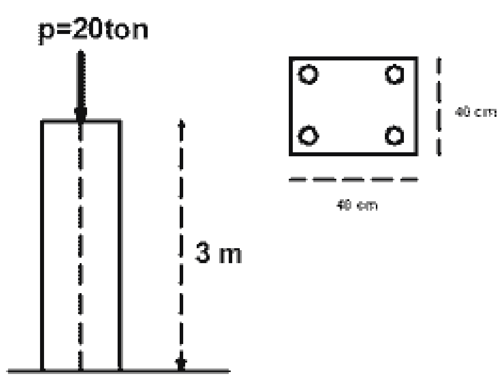
$$\sum F_y = \circ \rightarrow F_s + F_C = 20ton \xrightarrow{(1)} \begin{cases} F_s = 1.84ton \\ F_C = 18.16ton \end{cases}$$

$$\delta_s = \frac{F_S.L_S}{A_S.E_S} = \frac{1.84\times1000\times300}{16\times2.1\times1.6} \Rightarrow \delta_s = 0.0164cm$$

$$\delta_c = \frac{F_C.L_C}{A_C.E_C} = \frac{18.16\times1000\times300}{1584\times2.1\times10^5} \Rightarrow \delta_C = 0.0164cm$$

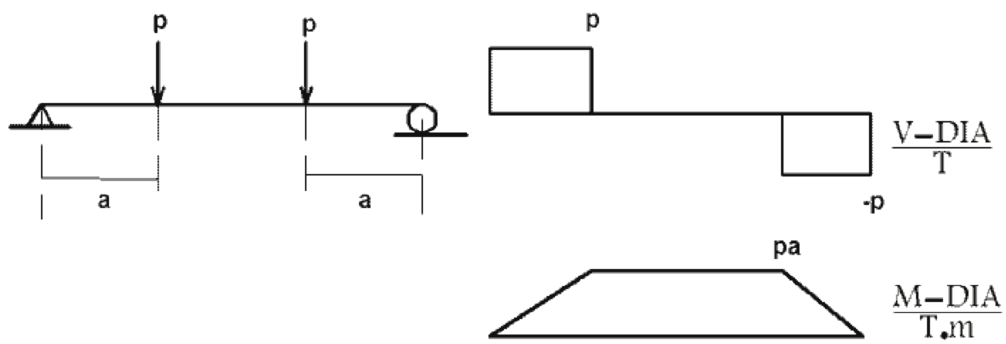
$$\begin{cases} \sigma_s = 114.67 \dfrac{kg}{cm^2} \\ \sigma_c = 88.106 \dfrac{kg}{cm^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_s = \delta_c$$



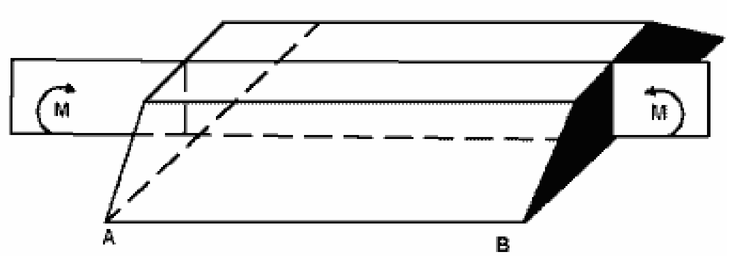
فصل ششم

خمش خالص تیرها:



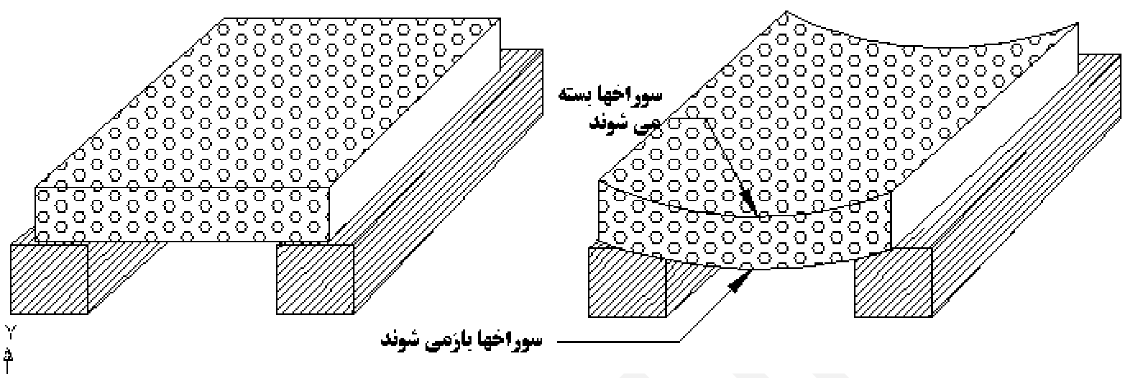
در ناحیه مرکزی این تیر نیروی برشی وجود ندارد و این ناحیه تنها تحت لنگر خمشی ثابتی برابر Pa قرار دارد تیری را که در دو انتهای خود تحت تأثیر و لنگر خمشی مساوی ، مختلف الجهت و هم صفحه قرار دارد، می گویند که در خمش خالص است.

توجه: پیچش ایجاد تنش برشی و خمش ایجاد تنش محوری می کند.

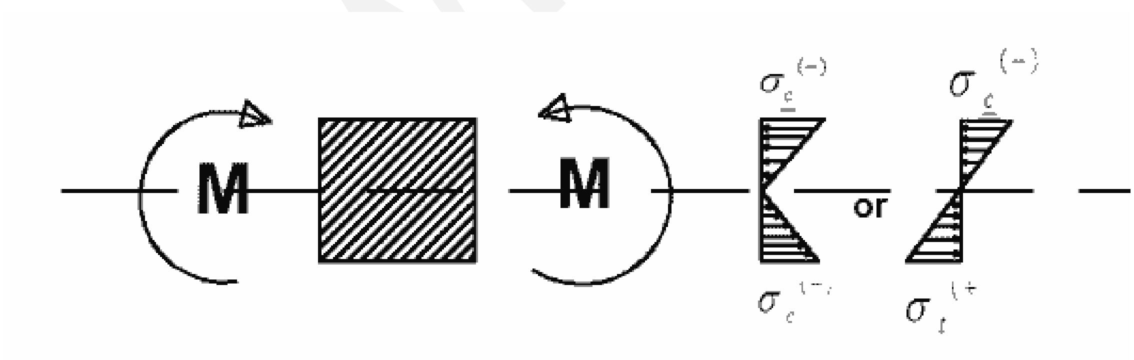


با آزمایش ساده ای می توان خمش یک تیر ساده را مشاهده نمود. برای این کار یک تکه اسفنج به ابعاد مثلاً $150mm \times 100mm \times 50mm$ را مطابق شکل بر روی دو تکیه گاه قرار دهید و با دست بر آن فشار وارد کنید مشاهده خواهید کرد که سوراخهای اسفنج در بالای آن بسته و نشان دهنده فشار در بالای اسفنج، و در پائین آن باز و نشان دهنده کشش در پایین اسفنج ، می باشند. سوراخها در مجاورت دو تکیه

گاه تقریباً بدون تغییر باقی می مانند زیرا لنگر خمشی در دو انتهای تیـر در مقایـسه بـا وسـط تیـر خیلـی کوچک هستند.



با توجه به مثال ذکر شده می توان نیروهای وارد بر مقطع عرض یک تیر را که در خمش خالص قرار دارنـد به صورت زیر نشان داد.

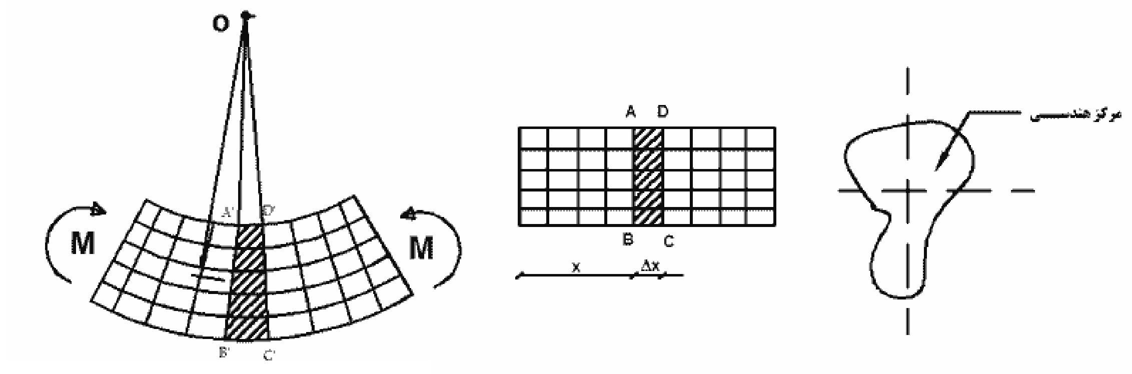


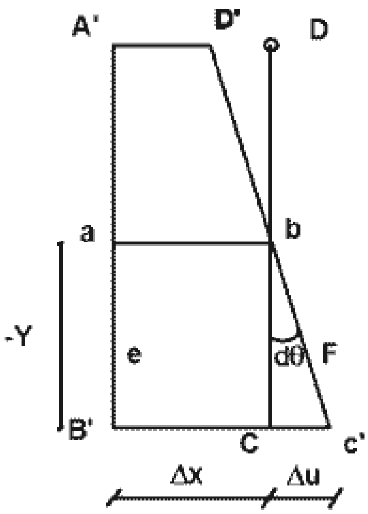
فرضیات اساسی خمشی:

1- صفحات عمود بر محور، بعد از اعمال خمش به صورت صفحه باقی می ماننـد و تنها حـول یـک محور دوران می کنند .

2- تغییر شکلها دارای تغییرات خطی نسبت به محور دوران هستند.

رفتارمصالح در کشش و فشار یکسان است.



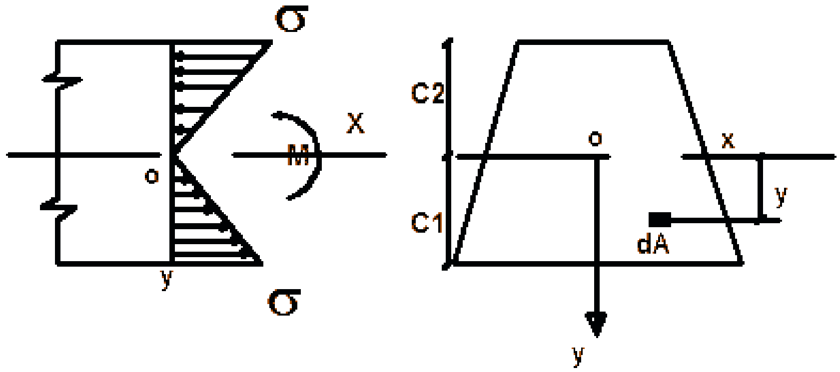


$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_u}{\Delta_x}$$

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d_\theta}{d_x} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{y}{\rho} = ky$$

در یک تیر تحت خمش، تغییرات کرنش موجود در تارهای طولی موازی صفحه خنثی به صورت خطی می باشد و یا به عبارت دیگر، مقدار کرنش تارهای فوق متناسب با فاصله آنها از محور خنثی می باشد.

در تصویر بزرگ شده این جزء کوچک دیده می شود که طول تارهایی از تیر که در روی سطحی نظیر ab قرار دارند، تغییری نمی کند، چون جزء مزبور به صورت دلخواه انتخاب شده است. تارهای عاری از تنش و کرنش به طور پیوسته در تمام طول و پهنای تیر وجود دارند. این تارها در روی صفحه ای قرار دارند که سطح خنثی تیر نامیده می شود. فصل مشترک این صفحه با یک مقطع عرض قائم بر تیر محور خنثی نامیده می شود از هر دو اصطلاح برای نشان دادن محل تنش یا کرنش صفر در یک عضو تحت خمش استفاده می شود.



اثبات اینکه محور اصلی خنثی باید از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور کند:

$$F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{+} \sum \sigma_x = E.\varepsilon \qquad (2) \qquad \varepsilon_x = \frac{y}{\rho} = ky \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow \sigma_x = E.ky \qquad (4) \qquad K = \frac{1}{\rho}$$

(4)و(1)از $\Rightarrow \int \sigma_x dA = \int \frac{Ey}{\rho} dA = 0$

چون شعاع انحناء ρ و ضریب ارتجاعی E مقادیر ثابتی هستند از این معادله نتیجه می شود که برای تیری در خمش خالص رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{E}{\rho}\int ydA = 0 \Rightarrow \int ydA = \bar{y}A \Rightarrow$$

که در آن $\bar{y}$ فاصله مرکز هندسی سطح A از محور مبناء می باشد . بنابراین $\bar{y}A = 0$ از آنجایی که A صفر نیست، $\bar{y}$ باید مساوی صفر شود . بنابراین فاصله مرکز هندسی سطح مقطع محور خنثی باید صفر باشد.

دومین شرط تعادل، تعادل لنگرهای خنثی حول محور Z می باشد لذا داریم:

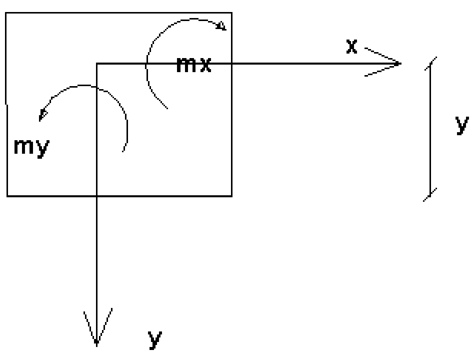
$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 \Rightarrow \qquad M - \int_A (bxdA)y = 0 \Rightarrow M = \frac{E}{\rho}\int \underbrace{y^2 dA}_{I} = \frac{EI}{\rho}$$

انحناء محور طولی تیر مستقیماً با لنگر خمشی M و معکوساً با کمیت EI موسوم به صلبیت خنثی تیر مناسب می باشد.

$$K=\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\Rightarrow(1)$$

$$\sigma_x=K.Ey=\frac{Ey}{\rho}(2)$$

از (1)و(2) $\Rightarrow\sigma_x=\frac{Ey}{\frac{EI}{M}}\Rightarrow\sigma_x=\frac{M.y}{I}$



M= لنگر خمشی

C= دورترین فاصله تا تارخنثی

I= مان اینرسی حول محور خنثی

خمش حول محورy $\sigma_y=\frac{M_y.x}{I_y}$

خمش حول محور z $\sigma_x=\frac{M_x.y}{I_x}$

روابط فوق در صورتی صادق هستند که محورهای xoy محورهای اصلی مقطع باشند.

$\sigma=\frac{M.y}{I}=\frac{M}{S}$ مدول مقطع $S=\frac{I}{Y}$

مثال:

ممان خمشی مجاز تیر با مقطع مربع چند برابر ممان مجاز مقطع دایره ای از جنبش مشابه و سطح مقطع یکسان است؟

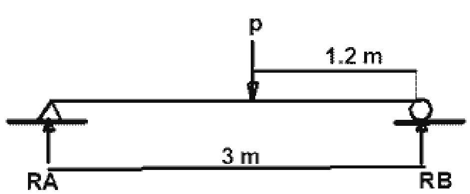
$$A_1 = A_2 \Rightarrow a^2 = \frac{\pi}{4} D^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\pi}{4} D^2} , S_1 = \frac{I_1}{C_1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{48} D$$

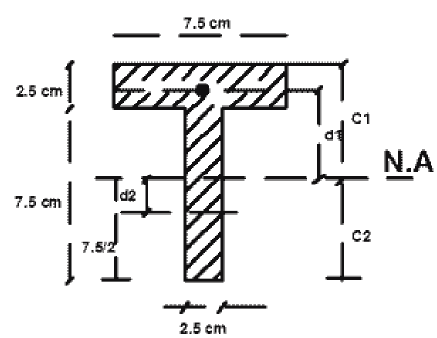
$$S_2 = \frac{I_2}{C_2} = \frac{\pi \frac{D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} = 1.18 \Rightarrow$$

$$\frac{M_{1all}}{M_{2all}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} = 1.18$$

مثال:

تعیین کنید حداکثر تنش عمودی ناشی از خمش را در تیر ساده زیر وقتی که P=600kg و سطح مقطع عرض آن مطابق شکل زیر باشد.





$$+\circlearrowleft \sum mA = 0 \Rightarrow \; -R_B \times 3 + 600 \times 1.8 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{600 \times 1.8}{3} = 360kg \uparrow$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_A + 360 - 600 = 0 \Rightarrow R_A = 240kg \uparrow$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} = \frac{7.5 \times 2.5 \times \frac{2.5}{2} + 7.5 \times 2.5 \times (\frac{7.5}{2} + 2.5)}{7.5 \times 2.5 \times 2} \Rightarrow \bar{y} = 3.75cm$$

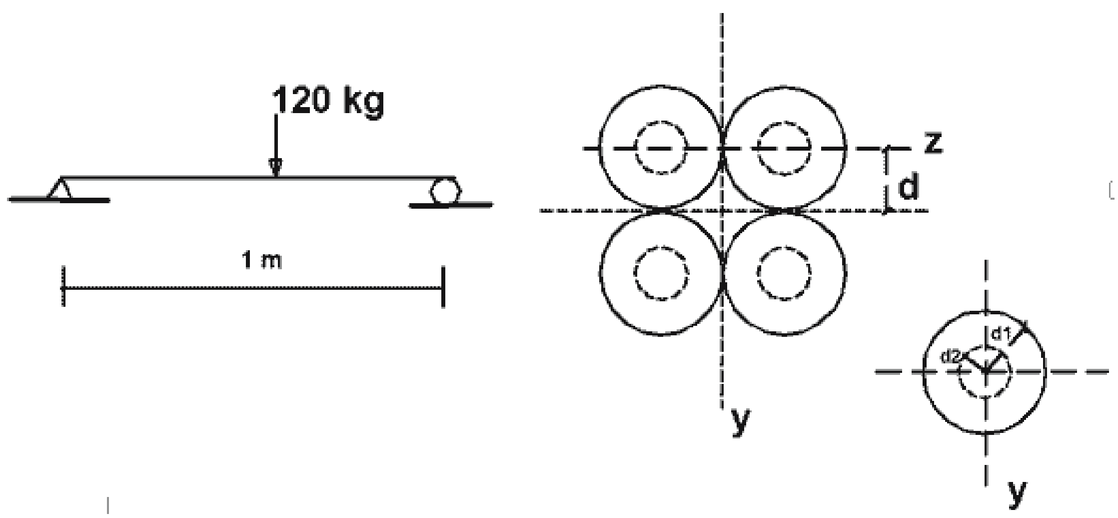
$$C_1 = 3.75cm, C_2 = 10 - 3.75 = 6.25cm$$

$$I = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 2.5^3 + 7.5 \times 2.5 \times (3.75 - \frac{2.5}{2})^2 + \frac{1}{2} \times 2.5 \times 7.5^3 + 2.5 \times 7.5 \times (6.25 - \frac{7.5}{2})^2 = 322.03cm^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{max}.c_2}{I} = \frac{43200 \times 6.25}{332.03} = 813.2 \frac{kg}{cm^2}$$

مثال:

یک لوله فولادی به قطر خارجی $d_1 = 4cm$ و نظر داخلی $d_2 3cm$ بـه صـورت تیـر سـاده بـرای پوشـاندن دهانه یک متری بکار رفته است. حداکثر بار مجازی که ایـن لولـه در وسـط وهانـه اش مـی توانـد تحمـل 120kg می باشد . اگرچه چهار عدد از این لوله ها به صورت موازی به یکدیگر کاملاً متصل گردنـد و بـرای پوشش همان دهانه بکار روند حداکثر باری که چهار لوله می توانند در وسط دهانه شان تحمل کنند چقـدر است؟



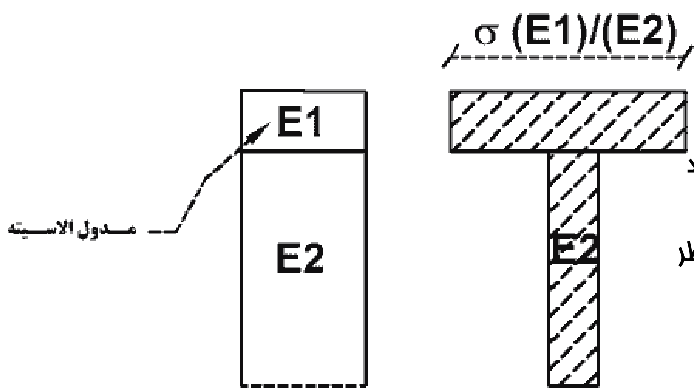
$$I_{Z1} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) = \frac{\pi}{64}(4^4 - 3^4) = 8.59cm^4$$

$$S_1 = \frac{I_{z1}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{8.59}{2} = 4.295cm^3$$

برای چهار لوله مزبور می توانیم بنویسیم

$$I_{Z2} = 4\left[8.59 + \frac{\pi}{4}(4^2 - 3^2)2^2\right] = 122.32cm^4$$

$$S_2 = 122.32/4 = 30.58cm^3 \Rightarrow \frac{30.58}{4.295} \times 120 = 206.7kg$$



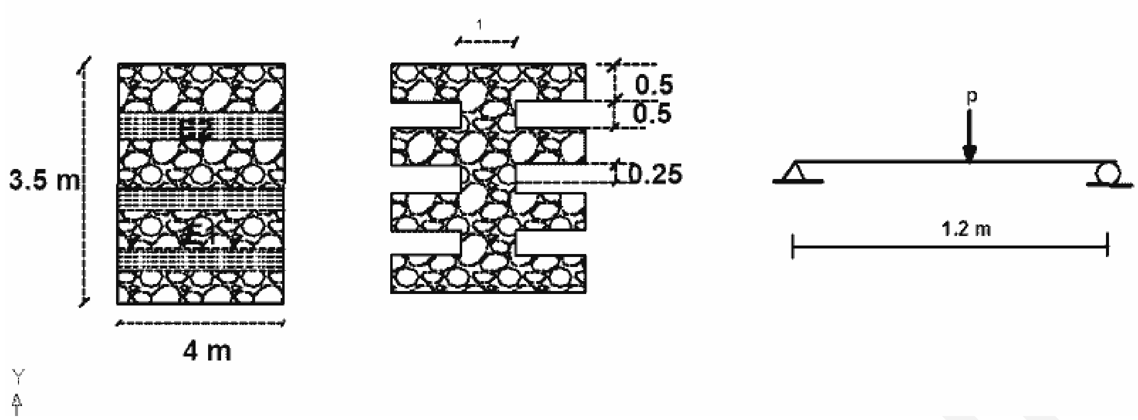
خمش مقطع دو جنسی:

مقاطعی را که از دو جنس متفاوت تشکیل شده اند می توان بصورت یک شکل معادل یک جنسی در نظر گرفت. بدین صورت که عرض یکی از دو قسمت را به نسبت مدولهای الاستیسیته افزایش می دهیم .

در این حالت تنش بدست آمده قسمت قبل تبدیل یافته را باید به نسبت مـدولهای الاسـیته افـزایش دهیم.

مثال:

مقطع عرضی تیر کوچکی که از هفت لاتخته چند لایی ساخته شده در شکل زیر نشان داده شده است. رگـه هایی لایه ها یک در میان موازی طول تیر است. تیر مزبور به طول 1.2m و دارای دو تکیه گاه سـاده مـی باشد و بار متمرکز p در وسط دهانه آن وارد مـی شـود. ضـریب ارتجـاعی در جهـت مـوازی رگـه هـا برابـر $E_1 = 10^6\ kg/cm^2$ و جهت عمود بر رگه ها برابر $E_2 = 2.5\times10^5\ kg/cm^2$ است. تـنش هـای مجـاز مربوطه $\sigma_1 = 84\,kg/cm^2 , \sigma_2 = 21kg/cm^2$ است . مقدار مجاز بارp را تعیین کنید.



$$n=\frac{E_2}{E_1}=0.25 \qquad I=\frac{1}{12}bh^3+Adt^2-3\left[\frac{1}{12}bh^3\right]+2Ad$$

$$I=4\times\frac{3.5^3}{12}-3\left[3\times\frac{0.5^3}{12}\right]-2\left[(3\times0.5)(0.5\times2)^2\right]=11.2cm^4$$

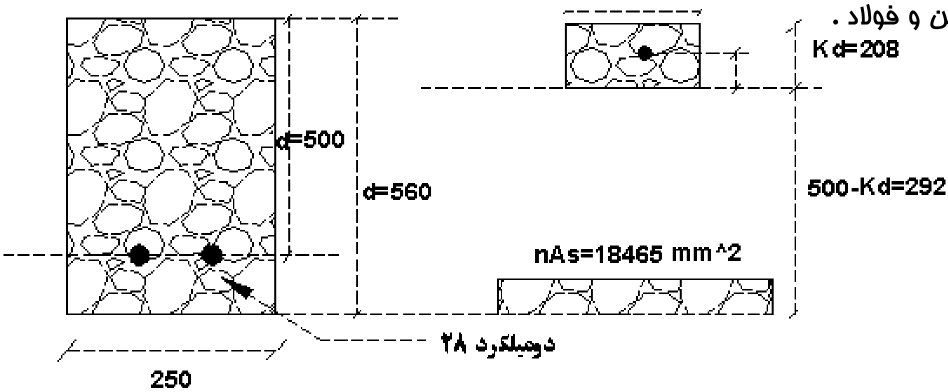
تنش σ_1 در این مسئله تنش تعیین کننده است و لنگر خمشی حداکثری که مقطع مزبور می تواند تحمل کند مساویست با:

$$M_{\max}=\frac{I}{C}\sigma_1=\frac{11.2}{1.75}\times84=537kg.cm$$

$$p=\frac{4M_{\max}}{L}=\frac{4\times537}{120}=18kg$$

مثال:

مقطع تیر بتن سطح شکل زیر تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت 69.2 کیلو نیوتن قرار دارد . اگر فولاد مقطع دو میلگرد به قطر 28 میلی متر و نسبت ضریب ارتجاعی فولاد و به بتن 15 باشد و n=15 مطلوبست تنش حداکثر در بتن و فولاد .



سطح مقطع فولاد = $As = 2\pi \times \frac{28^2}{4} = 1231mm^2$

سطح مقطع تبدیل یافته فولاد = $nAS = 15 \times 1231 = 18465mm^2$

$$250(kd) \times (k\frac{d}{2}) = 18465 \times (500 - kd) \Rightarrow 125(kd)^2 = 0232500 - 18465kd$$

$$(kd)^2 + 147.72kd - 73860 = \circ \Rightarrow kd = 208\,mm, 500 - kd = 292\,mm$$

توجه: اگر در جواب بدست بیاید عدد مثبت قابل قبول می باشد و اگر بیشتر از d باشد عدد بدست آمده

تا قابل قبول نیست.

$$I = 250 \times 208^3 + 250 \times 208 \times (\frac{208}{2})^2 + 0 + 18465(292)^2 = 2.32 \times 10^9\,mm$$

$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{69.2 \times 10^6 \times 208}{2.32 \times 10^9} = 6.2\,N/mm$$

$$\sigma_t = n\frac{Mc}{I} = \frac{15 \times 69.2 \times 10^6 \times 292}{2.32 \times 10^9 = 131N/mm^2} = 131\ N/mm^4$$

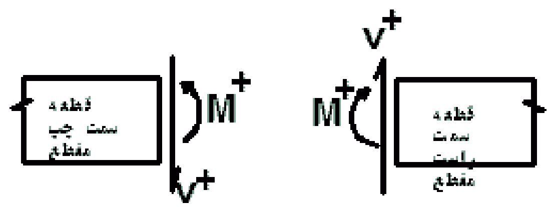
فصل هفتم:

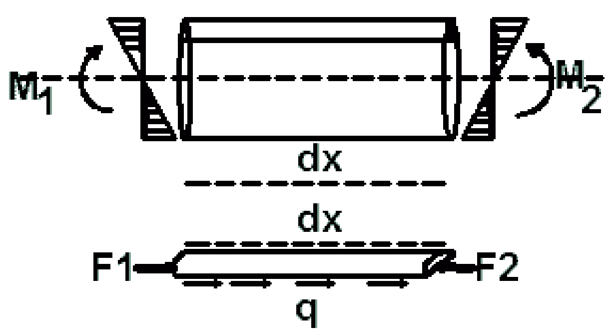
تنشهای برشی در تیرها:

علت اینکه نمی توانیم از روشهای قبلی استفاده کنیم این است که نمی تـوانیم هـیچ فـرض سـاده ای برای توزیع کرنش ناشی از نیروی برشی، برقرار کنیم.

$$d_m = v dx \quad \text{or} \quad \frac{d_m}{dx} = v$$

جریان برش:





$$d_F = F_2 - F_1 = \frac{M_2 Q}{I} - \frac{M_1 Q}{I} = \frac{(M_2 - M_1)Q}{I}$$

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx}\frac{Q}{I} \Rightarrow q = \frac{VQ}{I}$$

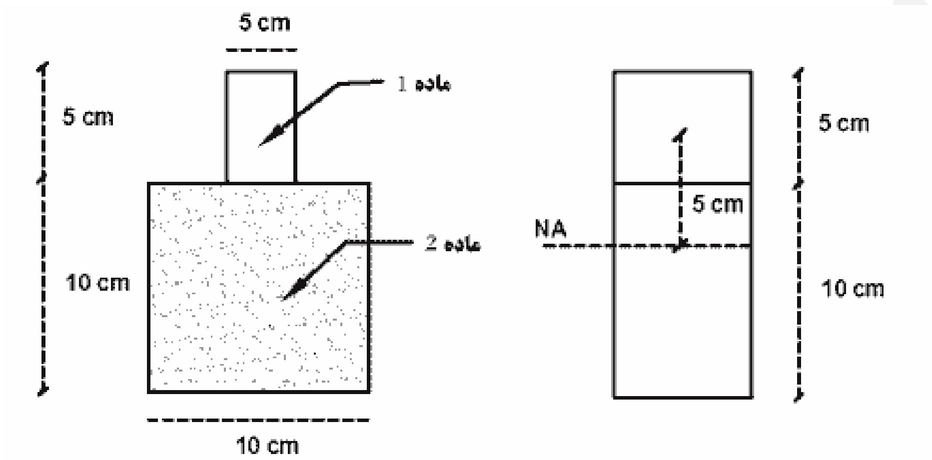
$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$

و تنش برشی در عرض مقطع ، یکسان فرض می شود

q شدت نیروی برشی در طول می باشد که به آن جریان برش گویند.

مثال:

مقطع تیری مطابق شکل از دو ماده تشکیل شده است. چنانچه نیروی برشی6ton به این مقطع اعمال شود تنش برشی در محل اتصال دو ماده برابر با چه مقدار است؟ $\frac{E_1}{E_2} = 2$



نکته:مرکز سطح و ممان اینرسی را از مقطع تبدیل نشده انتخاب میکنیم ولی برای محاسبه تنش برشی در هر هرمقطع باید این جریان برشی در عرض واقعی همان ماده تقسیم شود.

$$\bar{y} = \frac{10\times5\times2.5+10\times10\times10}{10\times10+2.5\times10} = 7.5$$

$$I = \frac{1}{12}\times5^3\times10+5\times10\times5^2+\frac{1}{12}\times10^3\times10+10\times10\times2.5$$

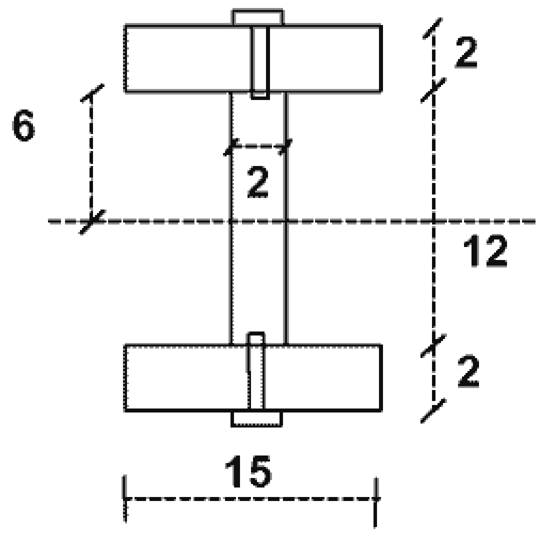
$$= 2812.5 = \frac{1}{12}\times15^3\times10$$

$$q = \frac{vQ}{I} = \frac{6\times10^3\times5\times10\times5}{\frac{10\times15^3}{12}} = 533.3 \qquad \frac{kg}{cm}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{533.3}{5} = 106.66\,kg/cm^3$$

مثال:

مقطع زیر که از اتصال سه قطعه تشکیل شده است تحت اثر نیروی برشی 250kg قرار دارد. درصـورتیکه نیروی برشی مجاز هر یک از پیچهای اتصال150kg باشد فاصله لازم برای پیچها را تعیین کنید.

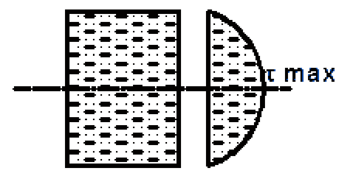


$$I = 2\times(\frac{15\times2^3}{12}+15\times2\times7^2)+2\times\frac{12^3}{12}=3248cm^4$$

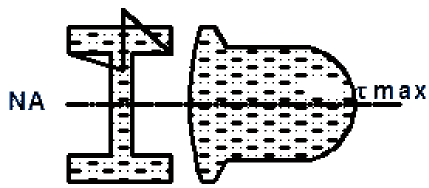
$$q=\frac{VQ}{I}=\frac{250\times2\times15\times7}{3248}=16.16\,kg/cm,\Rightarrow q..s=F_{all}\Rightarrow 16.16\times s=150\Rightarrow s=9.28cm$$

تو یع تنش برشی:

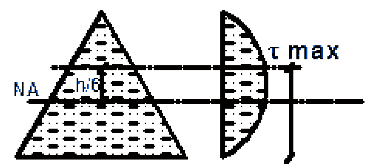
توزیع تنش برشی در عرض مقطع ، یکنواخت فرض می شود. توزیع تنش برشی در ارتفاع تابعی از $\frac{Q}{t}$ می باشد و ماکزیمم آن در جائی است که بیشترین $\frac{Q}{t}$ را داشته باشد.



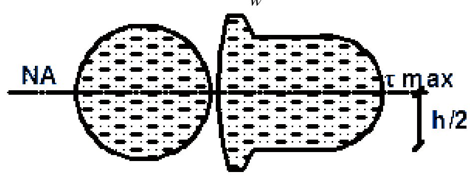
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$



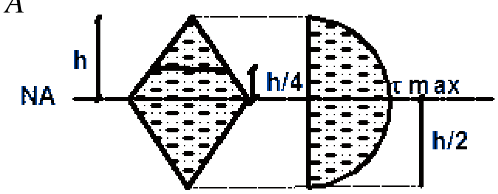
$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_w}$$



$$\tau_{\max} = \frac{8}{9}\frac{V}{A}$$



$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

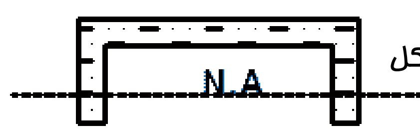


$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

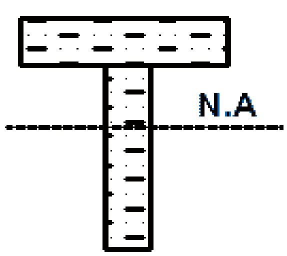
مثال:

در کدام یک از مقاطع زیر حداکثر تنش برشی در روی محور خنثی ظاهر نمی شود.

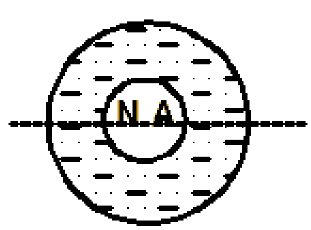
الف) ناودانی شکل



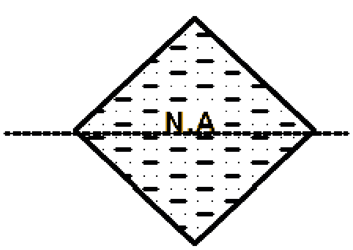
ب) T شکل



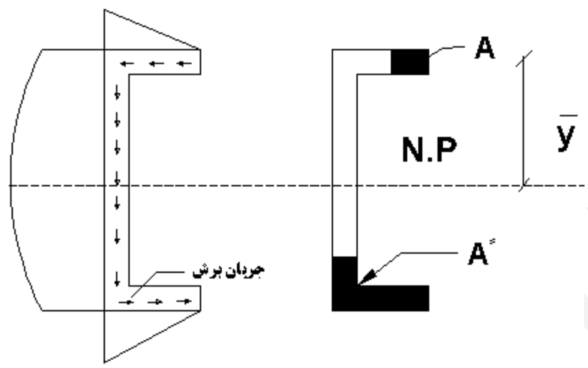
ج) لوله ای شکل



د) لوزی شکل



در شکلهای الف و ب و ج چون در محل تار خنثی که بیشترین مقدارQ وجــود دارد. کمتــرین ضــخامت را داریم ،بنابراین تنش برشی ماکزیمم در تار خنثی خواهد بود. ولی در لوزی به علت متغیر بودن $\frac{Q}{t}$ در ارتفاع همانگونه که در اشکال توزیع تنش برشی دیـده مـی شـود. مـاکزیمم تـنش برشـی در تـار خنثـی نیست.

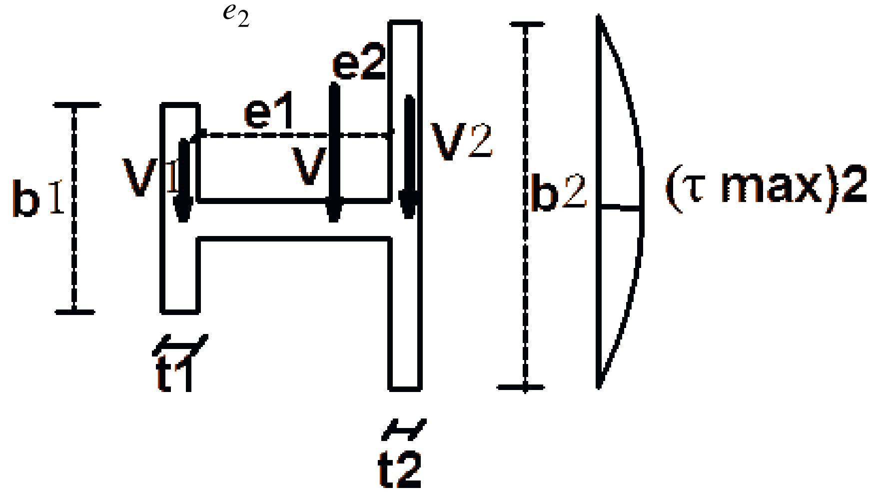


مرکز برش:

به نقطه ای گفته می شود که اگر نیروی برشی از آن نقطه عبور کند، پیچش در مقطع بوجود نمی آید . در شکلهایی که محور تقارن دارند مرکز برش بر روی این محور قرار دارد.

مثال:

در شکل زیر در صورتیکه نقطه A محل مرکز برش باشد مطلوبست نسبت $\frac{e_1}{e_2}$



$$V_1 = \frac{2}{3}(\tau_{\max})_1 \times A_1 = \frac{2}{3} \times \frac{V \times (\frac{b_1 t_1}{2} \times \frac{b_1}{4})}{I t_2} \times b_1 t_1$$

$$= \frac{t_1 b_1^{\,3}}{12} \times \frac{V}{I} = I_1 \frac{V}{I}$$

$$V_2 = \frac{2}{3}(\tau_{\max})_2 \times A_2 = \frac{2}{3} \times \frac{V \times (\frac{b_2 t_2}{2} \times \frac{b_2}{4})}{I t_2} \times b_2 t_2$$

$$= \frac{t_2 b_2^{\,3}}{12} \times \frac{V}{I} = I_2 \frac{V}{I}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{I} V, \qquad V_2 = \frac{I_2}{I} v, \qquad \sum M_A = \circ \Rightarrow V_1 e_1 = V_2 e_2 \Rightarrow$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{t_2 . b_2^{\,3}}{t_1 . b_1^{\,3}}$$

مرکز برش اجسام مختلف: