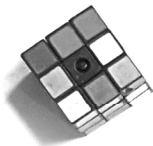


آزمون انتخابی نوزدهمین دوره مسابقات جهانی ریاضی (IMC2017)



دفترچه سوال مرحله اول

ویژه دانش آموزان پایه‌های هفتم و هشتم
(متولدین ۴ مرداد ۱۳۸۲ به بعد)

اسفند ماه ۱۳۹۵

مدت زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

* پیام ویژه *

دانش آموزان عزیز لطفاً متن زیر را دقیق مطالعه نمایید.

- انتشار پاسخ‌نامه آزمون، اطلاعاتها و اخبار بعدی فقط از طریق کانال تلگرام خانه ریاضی تهران: @Mathhome یا Telegram.me/Mathhome می‌باشد. پس همین امروز بعد از آزمون، به ما بپیوندید.
 - نتایج آزمون تا ۲۵ اسفند از طریق سایت www.MathHome.ir منتشر می‌گردد.
 - دوره‌های آمادگی حضوری (تهران) و مجازی (استان‌ها) پس از اعلام نتایج برای همه دانش‌آموزان برگزار خواهد شد.
ثبت نام دوره: هفته آخر اسفندماه از طریق سایت خانه ریاضی تهران
زمان دوره: فروردین و اردیبهشت ۹۶
آزمون مرحله دوم برای شرکت‌کنندگان در دوره‌های آموزشی و منتخبین اردیبهشت ماه ۹۶ برگزار خواهد شد.
آزمون مرحله دوم از کتب منابع، نرم‌افزارهای IMC و محتوای دوره‌های آموزشی خواهد بود.
- این دفترچه ویژه دانش‌آموزان پایه‌های هفتم و هشتم متولدین ۴ مرداد ۱۳۸۲ به بعد خواهد بود.
بدیهی است اگر قانون سنی توسط دانش‌آموزان رعایت نشود حضور آن دانش‌آموز به‌صورت آزمایشی منظور می‌گردد و تعهدی برای اعزام نخواهد بود.

سوالات نمره‌ی منفی دارد. (به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، یک پاسخ صحیح حذف می‌گردد).
استفاده از ماشین حساب، تبلت، تلفن همراه و هرگونه وسیله الکترونیکی ممنوع است.

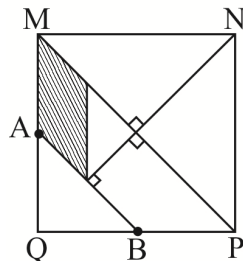


نشانی: خیابان کارگر شمالی، خیابان فاطمی غربی، بعد از چهارراه سیندخت، پلاک ۲۵۰، خانه ریاضی تهران
شماره تماس: ۰۲۲۶۳۴۳۰-۶۶۴۳۰۰۱۷-۶۶۴۳۰۰۹۱-۶۶۱۲۸۰۳۱-۶۶۱۲۸۰۳۵
سامانه پیامکی: ۰۲۲۶۳۴۳۰
www.MathHome.ir
[Telegram.me/MathHome](https://t.me/MathHome)

۱. اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. اگر حاصل ضرب اعداد دسته‌ی اول را بر حاصل ضرب اعداد دسته‌ی دوم تقسیم کنیم و نتیجه‌ی تقسیم یک عدد صحیح باشد، حداقل مقدار ممکن برای خارج قسمت این تقسیم چیست؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۸ (۵)

۲. در شکل زیر مساحت مربع $MNPQ$ برابر با ۱۴۴ واحد است و نقاط A و B وسط اضلاع مربع هستند. با توجه



به شکل زیر، مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورخورده کدام است؟

- ۲۴ (۱)
۱۲ (۲)
۲۰ (۳)
۱۶ (۴)
۱۸ (۵)

۳. x و y اعداد صحیح دلخواه هستند. حداقل مقدار عبارت $۳۶x + ۱۲۶y + ۱۳۹۶$ به شرطی که $۳۶x + ۱۲۶y$ یک مقدار مثبت باشد، برابر با چه عددی است؟

- ۱۳۸۰ (۱) ۱۴۱۸ (۲) ۱۳۹۶ (۳) ۱۴۱۴ (۴) ۱۴۰۰ (۵)

۴. در یک مدرسه تعداد دانش‌آموزان، عددی بین ۱۰۰ تا ۱۱۵ است. روز پنج‌شنبه، برخی از دانش‌آموزان به کلاس شنا و بقیه به کلاس المپیاد می‌روند. اگر شرکت‌کنندگان در کلاس شنا، $\frac{۸}{۹}$ شرکت‌کنندگان در کلاس المپیاد باشند،

مجموع ارقام عددی که نشان‌دهنده‌ی تعداد دانش‌آموزان این مدرسه است، چیست؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷ (۵)

۵. می‌دانیم که عدد شش رقمی $\overline{۵۱a۵۴b}$ بر ۶۳ بخش‌پذیر است. باقیمانده‌ی تقسیم این عدد بر ۱۲۵ چند است؟

- ۴۵ (۱) ۳۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۸۵ (۵)

۶. روی هفت کارت اعداد ۱ تا ۷ را نوشته و کارت‌ها را به دوست خود داده‌ایم. در حالی که پشت کارت‌ها به طرف ما است، پنج کارت را انتخاب کرده و از دوست خود می‌خواهیم تا حاصل ضرب اعداد روی کارت‌های انتخاب شده را به ما بگوید. در صورتی که حاصل ضرب داده شده برای تشخیص زوج یا فرد بودن مجموع اعداد انتخابی کافی نباشد، مجموع ارقام حاصل ضرب پنج عدد روی کارت‌های انتخاب شده برابر است با:

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۳ (۵)

$A: 1, 4, 7, 10, \dots$

$B: 9, 16, 23, \dots$

۷. دو دسته عدد مقابل را در نظر بگیرید:

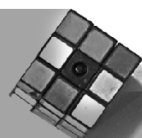
اگر ۲۰۰۴ عدد ابتدایی دسته‌های A و B را جدا کنیم و در دسته‌ی جدیدی به نام C قرار دهیم، تعداد اعداد موجود در دسته‌ی C کدام است؟ (اعداد مشترک فقط یک بار شمرده می‌شوند).

- ۴۰۰۸ (۱) ۳۷۲۲ (۲) ۳۹۱۲ (۳) ۳۶۸۸ (۴) ۳۷۹۷ (۵)

۸. اعداد شبه اول را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اعدادی که مرکب باشند، اما بر ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نباشند. مثلاً اعداد ۴۹، ۷۷ و ۹۱ شبه اول هستند. در صورتی که بدانیم ۱۶۸ عدد اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد، چند عدد شبه اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰ می‌توان پیدا کرد؟

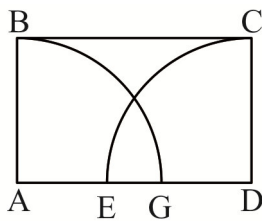
- ۱۷۵ (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۰۰ (۳) ۹۰ (۴) ۸۵ (۵)



۹. در یک آلبوم خانوادگی ده عکس وجود دارد. در هر کدام از این عکس‌ها سه نفر دیده می‌شوند. یک مرد در وسط که در سمت چپ و راست او به ترتیب پسرش و برادرش حضور دارند. حداقل تعداد افرادی که در این عکس‌ها حضور دارند، چند نفر باشد، به شرط این که تمامی ده مردی که نفرهای وسطی عکس‌ها هستند، با یکدیگر متفاوت باشند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵) ۲۰

۱۰. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است و $AB=4$. اگر مساحت $ABCD$ نصف مساحت دایره‌ای با شعاع AB باشد، اندازه‌ی EG کدام است؟ (فرض کنید $\pi=3/14$)
 ربع دایره‌ای است که مرکزش A و ربع دایره‌ای است که مرکزش D می‌باشد.



- (۱) $0/86$
 (۲) $1/34$
 (۳) $2/12$
 (۴) $1/57$
 (۵) $1/72$

۱۱. همهی کلمه‌های چهار حرفی با حروف A, B, C, D را می‌نویسیم. حرف A در مجموع چند بار نوشته می‌شود؟

- (۱) ۲۶۸ (۲) ۳۰۰ (۳) ۱۸۸ (۴) ۱۶۹ (۵) ۲۵۶

۱۲. مجموعه‌ی اعداد $\{7, 83, 421, 659\}$ را در نظر بگیرید. همان طور که می‌بینید، همهی این اعداد اول هستند و اعداد موجود در این مجموعه با ارقام ۱ تا ۹ و بدون تکرار ارقام نوشته شده‌اند. می‌توان نشان داد که مجموعه‌های دیگری از اعداد نیز وجود دارد که دارای چنین خاصیتی هستند. کوچک‌ترین مقدار ممکن برای مجموع اعضای چنین مجموعه‌ای چیست؟

- (۱) ۲۰۷ (۲) ۱۸۸ (۳) ۲۱۳ (۴) ۲۰۱ (۵) ۱۹۹

۱۳. می‌خواهیم با حروف کلمه‌ی **triangle** کلمه‌های هشت حرفی (بدون تکرار حروف) بنویسیم، به طوری که در این کلمه‌ها حرف t قبل از حرف n باشد. چند کلمه با این ویژگی می‌توان یافت؟

- (۱) ۶۷۲۰ (۲) $8! - 6!$ (۳) ۱۲۴۰۰ (۴) ۲۰۱۶۰ (۵) ۸۱۰۰

۱۴. حاصل عبارت مقابل برابر با چه مقداری است؟

$$\frac{1110 \times 993 \times 444 + 666 \times 560 \times 444 + 3 \times 5 \times 6}{6 + 112 \times 222 \times 444 + 222 \times 444 \times 331}$$

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۲۵ (۵) ۲۰

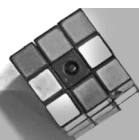
۱۵. روی اضلاع BC, CA, AB از مثلث ABC به ترتیب نقاط A_1, B_1, C_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که میانهم‌های A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 در مثلث $A_1B_1C_1$ به ترتیب با AB, BC, CA موازی باشند.

حاصل $\frac{BC_1}{C_1A} + \frac{CA_1}{A_1B}$ برابر است با:

- (۱) $2/5$ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) $6/5$ (۵) ۳

۱۶. حداقل تعداد اضلاع یک چندضلعی با تعداد اضلاع غیرزوج، به طوری که بتوانیم آن را به چند متوازی‌الاضلاع تبدیل کنیم، چند تاست؟ (چندضلعی الزاماً محدب نیست و متوازی‌الاضلاع‌ها نباید همپوشانی داشته باشند.)

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱ (۵) ۱۳



۱۷. می‌دانید که هر عدد پنج رقمی را می‌توان به صورت $xyztw$ نشان داد. چند عدد پنج رقمی می‌توان یافت که

در آن‌ها حاصل جمع دو عدد xyz و tw بر ۱۱ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۸۱۸۱ (۲) ۸۱۸۰ (۳) ۸۰۰۸ (۴) ۸۱۶۸ (۵) ۸۱۶۶

۱۸. اندازه‌ی قاعده‌های یک دوزنقه برابر با ۶۰ و ۴۰ سانتی‌متر است. دو قطر این دوزنقه یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند. از M خطی موازی دو قاعده‌ی دوزنقه رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر دوزنقه را در نقطه‌های P و Q قطع کند. اندازه‌ی پاره‌خط PQ برابر با چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۸ (۳) ۵۰ (۴) ۵۲/۵ (۵) ۴۷/۵

۱۹. اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم سه عدد از بین این اعداد را طوری انتخاب کنیم که مجموع سه عدد انتخاب شده همیشه مضربی از ۳ باشد. این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴) ۳۳ (۵) ۳۶

۲۰. حاصل ضرب $۱۲۵ \times ۷۲۱۶۸۴۸۲۴۴۸۱۶۸۵۶۶۴۳۲$ را حساب کرده و روی کاغذ می‌نویسیم. هشتمین رقم از سمت چپ حاصل به دست آمده برابر با چه عددی است؟

- (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۶ (۴) ۱ (۵) ۲

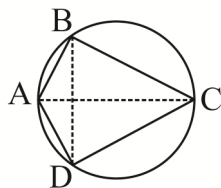
۲۱. چند عدد چهار رقمی می‌توان پیدا کرد که کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها با عدد ۶۰ بر عدد ۱۱۶ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۱۸۵ (۲) ۳۱۰ (۳) ۲۶۰ (۴) ۳۲۵ (۵) ۲۹۵

۲۲. تعدادی وزنه داریم. می‌توانیم آن‌ها را به پنج دسته تقسیم کنیم. به طوری که وزن وزنه‌های هر دسته با هم برابر و با دسته‌های دیگر متفاوت باشد. همچنین می‌دانیم که هر دو وزنه‌ی دلخواهی را که انتخاب کنیم، دو وزنه‌ی دیگر وجود دارند که مجموع وزنشان با مجموع وزن‌های دو وزنه‌ی انتخاب شده برابر است. کمترین تعداد ممکن برای تعداد کل وزنه‌ها چند تاست؟ (وزن هر وزنه عددی طبیعی است.)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵) ۹

۲۳. چهارضلعی $ABCD$ را می‌توان داخل یک دایره قرارداد، به طوری که از هر چهار رأس آن یک دایره بگذرد. همچنین می‌توان دایره‌ای را یافت که بر هر چهارضلع آن مماس باشد. قطرهای این چهارضلعی بر یکدیگر عمودند. در صورتی که $BC = 2AB$ و شعاع دایره‌ی محیطی (دایره‌ی گذرنده از چهار رأس) باشند، مساحت چهارضلعی $ABCD$ عبارت است از:



- (۱) $\frac{9}{4}R^2$ (۲) $3R^2$ (۳) $\frac{8}{5}R^2$ (۴) $\frac{11}{7}R^2$ (۵) $\frac{7}{3}R^2$

۲۴. دنباله‌ی عددی زیر به دنباله‌ی فیبوناچی شهرت دارد. همان‌طور که می‌بینید، از عدد سوم به بعد، هر عدد مساوی است با مجموع دو عدد قبلی خودش. اگر عدد دو هزار و پانزدهم این دنباله عددی را بر ۸ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر با چه عددی خواهد شد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۶ (۵) ۷

۲۵. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A برابر 90° است. روی اضلاع BC و AB دو مربع $BEFC$ و $AMNB$ را ساخته‌ایم، به طوری که نقطه‌های E و A در دو طرف BC و نقاط M و C نیز در دو طرف AB قرار دارند. در صورتی که $AB = 5$ و $AC = 6$ باشند و فاصله‌ی مرکز دو مربع را با x نشان دهیم، مقدار x^2 برابر با چه عددی است؟

- (۱) ۶۱ (۲) ۵۹ (۳) ۷۷ (۴) ۷۳ (۵) ۸۱

