به نام حضرت دوست

فروردین ماه ۱۳۹۶

پاسخنامه اولین آزمون آزمایشی مرحله دوم

11 TH IOAA TEAM
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

سینا بلوکی — امیراحسان علیزاده

امیرحسین ستوده فر — عباس فروزان نژاد

عماد صالحی — زهرا فرهمند

پریماه صفریان — علیرضا ملکی

شایان عزیزی — محمد علی نادمی

.۱

نرخ ستاره‌زایی	R^*	7
کسر ستاره‌های دارای سیاره	f_p	80%
تعداد سیاره‌های زمین‌گون در هر منظومه	n_e	0.5
کسر سیاره‌هایی که حیات دارند	f_l	1%
کسر سیاره‌های قابل سونتی که حیات هوشمند دارند	f_i	1%
کسری از حیات‌های هوشمند که تکنولوژی برقراری ارتباط دارند	f_c	50%
طول زمانی که شروع به برقراری ارتباط کردند	L	100
تعداد کل تمدن‌های انسانی در راه‌شیری	N	0.014

.۲

الف) کمیت‌های فیزیکی دخیل عبارتند از : m جرم آونگ , L طول آونگ , g شتاب گرانشی , T دوره تناوب آهنگ

$$C = m^{\alpha} g^{\beta} L^{\gamma} T^{\delta} \to \ [C] = M^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} L^{\gamma} T^{\delta}$$

که کمیتی بی‌بعد است. بنابراین :

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \ -\beta$$

$$\delta = 2\beta$$

$$\to [C] = \left(\frac{gT}{L}\right)^{\beta}$$

در اینجا برای سادگی $\beta = \frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم.

ب) باتوجه به اینکه f_{ϕ_0} نیز بی‌بعد است، خواهیم داشت :

$$T\sqrt{\left(\frac{g}{L}\right)} \ = \ f_{\phi_0}$$

$$\to T = \ \sqrt{\frac{g}{L}} \ f_{\phi_0}$$

ج) بسط تیلور :

$$f_{\phi_0} \ = \mathrm{f}_0 + \phi_0 f_0' + \frac{1}{2}\phi_0^2 f_0'' + \cdots$$

$$\rightarrow T = \sqrt{\frac{L}{g}}\left[\mathrm{f}_0 + \phi_0 f_0' + \frac{1}{2}\phi_0^2 f_0'' + \cdots\right]$$

د) در $0 \ll \phi_0$ داریم $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، بنابراین $f_0 = 2\pi$ می‌باشد. همچنین باتوجه به تقارن مسئله می‌دانیم که اگر دامنه نوسان چه ϕ_0 باشد و چه $-\phi_0$ ، T یکسان است. بنابراین f_{ϕ_0} باید تابعی زوج باشد. پس توان‌های فرد ϕ_0، صفر هستند و خواهیم داشت : $T == \sqrt{\frac{L}{g}}\left[2\pi + \frac{1}{2}\phi_0^2 f_0'' + \cdots\right]$

.۳

الف)

$$h = m\sqrt{GMr} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h^2}{GM\,m^2} \quad \Rightarrow \quad \delta r = \frac{2h_0\,\delta h}{GM\,m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta r = \frac{2{h_0}^2}{GM\,m^2}\,\varepsilon}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2\frac{h^2}{GM\,m^2}} = -\frac{(GM)^2 m^3}{2h^2} \quad \Rightarrow \quad \delta E = \frac{(GM)^2 m^3}{{h_0}^3}\,\delta h$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta E = \frac{(GM)^2 m^3}{{h_0}^2}\,\varepsilon}$$

ب)با توجه به قضیه کار و انرژی کل کاری که باید انجام شود برابر است با اختلاف انرژی جنبشی در ابتدا و انتهای انجام کار:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GMm}{2r} = -E \quad \Rightarrow \quad \Delta K = -\delta E$$

توجه کنید W کاری است که در این انتقال مدار انجام شده است و برای اینکه ذره به مدار ابتدایی خود بازگردد کاری به اندازه‌ی $-W$ باید انجام شود.

$$\boxed{-W = \delta E = \frac{(GM)^2 m^3}{{h_0}^2}\,\varepsilon}$$

.۴

برای منحنی چرخش تخت $V(R) = V_0 = 200\ km/s$. برای هر نقطه در طول کهکشانی l سرعت شعاعی را این چنین می یابیم:

$$v_r = V\cos\alpha - V_0 \sin l$$

که α زاویه ی راستای دید ما و سرعت مداری گاز در آن نقطه است.مدار گاز دایروی ست و نتیجتا سرعتش عمود بر شعاع است.

با نوشتن رابطه ی سینوس‌های مسطحه در مثلث خورشید، مرکزکهکشان و نقطه ی مورد نظر می توان رابطه‌ی بالا را به صورت زیر نوشت.

$$v_r = R_0 V_0 (1/R - 1/R_0) \sin \ell$$

برای حلقه‌ی داخلی بازه‌ی طول کهکشانی محدود است؛ پس:

$$R/R_0 = \sin \ell_{max}$$

پس سرعت شعاعیِ بیشینه بدین صورت نوشته خواهد شد:

$$|v_{r,max}| = V_0(1 - R/R_0).$$

و برای حلقه‌ی بیرونی در $l = \frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2}$:

$$|v_{r,max}| = V_0(1 - R_0/R)$$

فوتونی که از این توده گازها تابش می‌شود طول موج $\lambda_0 = 6564\dot{A}$ دارد که دستخوش قرمزگرایی می شود. انرژی رصد شده برابر با $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0}(1+z)$ است و $z = \frac{v_r}{c}$.

$$E = \frac{hc}{\lambda_0}\left(1 + \frac{R_0 V_0}{c}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)\sin l\right)$$

و مقادیر متناظر با سرعت شعاعی‌های بیشینه و کمینه از این قرارند:

$$z_{max/min} = \pm 2 \times 10^{-4} , \pm 1.3 \times 10^{-4}$$

برای حلقه ی درونی و بیرونی به ترتیب

$$\lambda = 6565.3 \ .6564.9\ \dot{A}$$

$$E_{min} = 1.8914ev \ . 1.8912ev$$

$$E_{max} = 1.8906ev \ . 1.8908ev$$

.۵

از روی منحنی نوری نسبت شار به شار بیشینه در هر کدام از گرفت ها را می‌توان بدست آورید.

$$\frac{I_1}{I_{total}} = 0.64\,.\,\frac{I_2}{I_{total}} = 0.78$$

فرض کنید ستاره کوچکتر B داغ تر است ، در نتیجه گرفت اول مربوط به عبور پشتی و گرفت دوم مربوط به عبور جلویی می‌باشد .

$I_1 = \sigma {T_A}^4 \times \pi R_A^2$

$I_2 = \sigma T_B^4 \times \pi R_B^2 + \sigma T_A^4 \times (\pi R_A^2 - \pi R_B^2)$

$I_{total} = \sigma T_A^4 \times \pi R_A^2 + \sigma T_B^4 \times \pi R_B^2$

در نتیجه :

$$\frac{I_{total} - I_1}{I_1} = \frac{\sigma T_B^4 \times \pi R_B^2}{\sigma {T_A}^4 \times \pi R_A^2} = \frac{L_B}{L_A} \Longrightarrow \frac{L_B}{L_A} = \frac{1 - 0.64}{0.64} = 0.56 \Longrightarrow \Delta M = -2.5 \log \frac{L_B}{L_A} = -0.62$$

$$\frac{I_{total} - I_2}{I_1} = \frac{\sigma T_A^4 \times \pi R_B^2}{\sigma {T_A}^4 \times \pi R_A^2} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \Longrightarrow \frac{R_B}{R_A} = 0.34$$

$$\frac{I_{total} - I_1}{I_{total} - I_2} = \frac{\sigma T_B^4 \times \pi R_B^2}{\sigma {T_A}^4 \times \pi R_B^2} = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4 \Longrightarrow \frac{T_B}{T_A} = 1.64$$

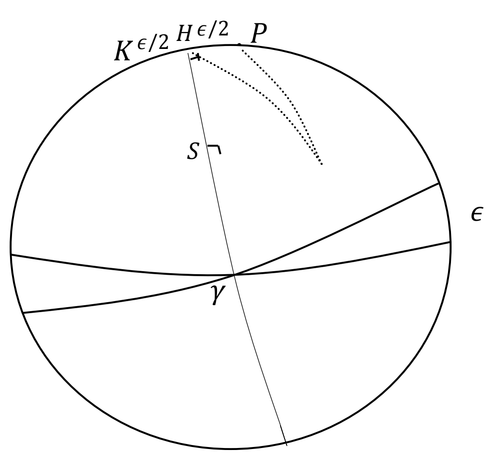
استفاده از $B - V$ داده شده و نمودار $H - R$ می توان مشاهده کرد که ستاره A می‌تواند در دسته ستارگان انتهایی رشته اصلی غول ها و ابرغول ها قرار بگیرد . با توجه به اینکه اختلاف قدر مطلق دو ستاره تنها ۰,۶ است ، در دو ناحیه نزدیک قرار می گیرند ؛ به علت نزدیک بودن دمای این دو ستاره به هم و اختلاف نسبتا مناسب شعاع ها ، می توان دریافت که ستاره A یک غول و ستاره B یک ستاره رشته اصلی می‌باشد .

چون دمای دو ستاره به هم نزدیک است ، باید سعی شود که نقطه ای از غول ها در نظر گرفته شود که کمینه اختلاف $B - V$ بین دو نقطه ایجاد شود ، در نتیجه :

$$M_A = 2\ .\,M_B = 2.6$$

۶.

تمامی ستارگانی که عرض دایرهٔ البروجی و میل برابر و در نتیجه فاصله‌های مساوی از نقاط PوK دارند باید روی عمود منصف کمان KP قرار داشته باشند که در شکل رسم شده است(SH).



برای پیدا کردن ستاره‌ای از این دسته که بیشترین ارتفاع و به عبارتی کمترین فاصله از سرسو را دارد باید سعی کنیم یک دایره صغیره به مرکز سرسو رسم کنیم به‌طوری‌که به SHمماس باشد؛

یعنی $\widehat{HSZ} = 90°$.

درست همانند هندسه مسطحه که کمترین فاصله یک نقطه از یک پاره‌خط همان طول عمود بر پاره‌خط از آن نقطه می‌باشد.

$\widehat{HPZ} = 90 + LST = 135°$ ، $PZ = 90 - \phi = 50°$، $HP = \frac{\epsilon}{2}$ ضمن این‌که از فرمول کسینوس‌ها در مثلث HPZ:

$$\cos HZ = \cos PZ \cos HP + \sin PZ \sin HP \cos \widehat{HPZ}$$

بنابراین $HZ = 58.73°$.

از طرفی باز هم بنابه فرمول کسینوس‌ها در همین مثلث:

$$\cos PZ = \cos HP \cos HZ + \sin HP \sin HZ \cos \widehat{PHZ}$$

بنابراین:

$$\cos \widehat{PHZ} = \frac{\cos PZ - \cos HP \cos HZ}{\sin HP \sin HZ}$$

از این‌جا $\widehat{PHZ} = 39.35°$.

اکنون با استفاده از فرمول سینوس‌ها در مثلث SHZ :

$$\frac{\sin SZ}{\sin \widehat{SHZ}} = \frac{\sin HZ}{\sin 90°}$$

با استفاده از مقادیر به‌دست آمده در بالا برای HZ و $\widehat{SHZ}$($\widehat{SHZ} = 90° - \widehat{PHZ} = 50.65°$)، $SZ = 31.37°$ که این فاصله سمت‌الرأسی ستاره‌ی با بیشترین ارتفاع است؛ بنابراین:

$$\boxed{a_{max} = 48.63°}$$

۷.

الف) اول فروردین و اول مهر، به دلیل این که مسیر خورشید دایره عظیمه است.

ب)

ΔAHB:

$a^2 = \frac{a^2}{4} + (AH)^2 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

ΔAKC:

$a^2 = 2(AK)^2 - 2(AK)^2 \cos 120 = 3(AK)^2 \Rightarrow AK = \frac{1}{\sqrt{3}}a$

$(KH) = (AH) - (AK) = a\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

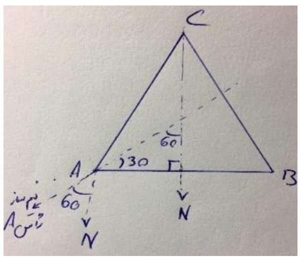
$\angle DHK = 90 - \phi$

$$\cot\phi = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$$

$$a^2 = h^2 + (AK)^2 => h = \sqrt{\frac{2}{3}}a => \phi = 19.47°$$

ج)

جهت شمال زاویه$60°$ با نیم ساز راس A میسازد.

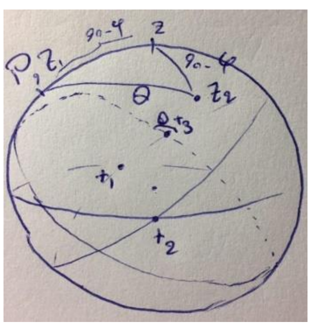


د)

$t_2 - t_1 = 12h$

$cos\theta = \sin^2\phi + \cos^2\phi\cos 120 => \theta = 109.47°$

خورشید با زاویه $180 - \theta = 70.53°$ با افق برای ناظر ۲ غروب میکند.

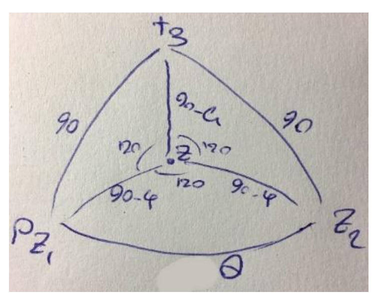


ه)

$0.5\cos\phi\cos a = \sin\phi\sin a => a = 54.73°$

$\sin a = \cos\phi\cos H_3 => H_3 = 30°$

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{90 - H_3}{180} = \frac{1}{3}$$



۸.

الف)

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v \Longrightarrow \bar{v} = \frac{\bar{\dot{M}}}{4\pi \bar{r}^2 \bar{\rho}} = 531.15 \frac{km}{s}$$

از رابطه نشر خطا :

$$\Delta v = \bar{v}\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{M}}{\bar{\dot{M}}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta r}{\bar{r}}\right)^2} = 180.68 \frac{km}{s}$$

در نتیجه :

$$v = \bar{v} \pm \Delta v = (5.3 \pm 1.8) \times 10^5 \frac{m}{s}$$

ب) ابتدا از روی نمودار شیب خط مورد نظر را بدست می آوریم :

$$m = -1.43 \Longrightarrow m = \frac{\bar{t} - 1}{0.53 - 0.16} \Longrightarrow \bar{t} = 4.7 \times 10^4 yr$$

$$\Delta t = 1.43 \times \Delta\dot{M} \Longrightarrow \Delta t = 1.6 \times 10^4\ yr$$

در نتیجه :

$$t = (4.7 \pm 1.6) \times 10^4 yr$$

می‌دانیم :

$$R = vt \Longrightarrow \bar{R} = \bar{v}\bar{t} = 25.57\ pc$$

$$\Delta R = \bar{R}\sqrt{\left(\frac{\Delta v}{\bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2} = 12.19\ pc$$

در نتیجه :

$$R = (2.6 \pm 1.2) \times 10^1\ pc$$

می دانیم :

$$\theta = \frac{R}{d} \Longrightarrow \bar{d} = \frac{\bar{R}}{\bar{\theta}} = 6.58\ kpc$$

$$\Delta d = \bar{d}\sqrt{\left(\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}}\right)^2} = 3.18\ kpc$$

در نتیجه :

$$d = (7 \pm 3)\ kpc$$

.۹

الف) برای چرخه $p-p$، شاخه های مختلف از لحاظ انرژی که در نهایت فرآورده‌ها می‌گیرند هیچ تفاوتی با یکدیگر ندارند اما تفاوت در انرژی موثر آزاد شده توسط هر واکنش است؛ انرژی‌ای که توسط هر واکنش آزاد می‌شود توسط نوترینوها به خارج از ستاره برده می‌شود؛ سطح مقطع برخورد نوترینوها بسیار کم است، بنابراین طول پویش آزاد میانگین زیادی دارند، و انرژی‌ای که صرف افزایش انرژی درونی ستاره می‌شود، تنها انرژی فوتون‌ها و پوزیترون‌های آزاد شده می‌باشد.

پس برای چرخه $p-p$ انرژی که کلا آزاد می‌شود برابر است با :

$$Q_{tot} = \left(4 \times M_p - M_{{}^4_2He}\right)c^2 = 26.7\ Mev$$

برای چرخه اول دو نوترینو با انرژی $0.3\ Mev$ آزاد می‌شود. برای چرخه دوم یک نوترینو با انرژی $0.3\ Mev$ و یک نوترینو با انرژی $0.8\ Mev$ آزاد می‌شود. در چرخه سوم نیز یک نوترینو با انرژی $0.3\ Mev$ و یک نوترینو با انرژی $7.4\ Mev$ آزاد می‌شود. بنابراین انرژی موثر هر واکنش به این صورت محاسبه می‌گردد:

$$Q_{eff1} = 26.7 - 2 \times 0.3 = 26.1\ Mev$$

$$Q_{eff2} = 26.7 - (0.3 + 0.8) = 25.6\ Mev$$

$$Q_{eff3} = 26.7 - (0.3 + 7.4) = 19\ Mev$$

{خوب است بدانید این است که در واکنش تولید هلیوم از همجوشی $p-p$ چیزی که در واکنش شرکت می‌کند عملا ۴ تا پروتون است ولی چیزی که حاصل می‌شود ۲ پروتون دارد و ۲ نوترون، یعنی دوتا از پروتون‌ها به نوترون تبدیل شده‌اند. پروتون‌ها طبق برهمکنش هسته‌ای ضعیف به نوترون‌ها تبدیل می‌شوند:

$$p \rightarrow n + e^+ + v$$

و در این واکنش یک نوترینو آزاد می‌شود. بنابراین باید انتظار داشته باشیم که در هر شاخه از چرخه پروتون پروتون دو نوترینو آزاد شود.}

ب) دقت کنید که در صورت سوال گفته است برای "یک" همجوشی $p-p$ درصدهای مختلف، شاخه اول ۸۵ ٪، شاخه دوم ۱۵ ٪، و شاخه سوم ۰,۰۲ ٪ می‌باشد. نکته‌ی قابل توجه این که شاخه اول نیاز به "دو" همجوشی $p-p$ دارد! (چون دو هلیوم ۳ در واکنش نیاز می‌باشد و برای هر هلیوم ۳ یک همجوشی پروتون پروتون نیاز است. بنابراین در یک همجوشی می‌توان گفت شاخه اول ۱ نوترینو و شاخه دوم و سوم ۲ نوترینو آزاد می‌کنند. ابتدا باید تعداد کل واکنش‌ها را محاسبه کنیم، برای این کار میانگین انرژی موثری که از یک همجوشی آزاد می‌شود را بدست می‌آوریم:

$$Q_{eff} = \left(0.85 \times \frac{26.1}{2} + 0.15 \times 25.6 + 0.0002 \times 19\right) = 14.9Mev$$

$$\dot{n}_{tot} = \frac{L_{sun}}{Q_{eff}} \times (1neutrino \times 0.85 + 2neutrino \times 0.15 + 2neutrino \times 0.0002)$$
$$= 1.8 \times 10^{38} \ \ 1/s$$

$$f = \frac{\dot{n}_{tot}}{4\pi d_{earth}^2} = 6.5 \times 10^{14} \ \frac{1}{s.m^2}$$

ج) با توجه به صورت سوال نوترینوهایی که می‌توانند با کلر واکنش دهند باید انرژی بالاتر از انرژی 0.9 Mev داشته باشند. نوترینوهایی که انرژی بالاتر از این مقدار دارند تنها از شاخه سوم آزاد می‌شوند. (با توجه به جدول ۱) بنابراین شاری از نوترینوهایی که می‌توانند آشکار شوند برابر است با :

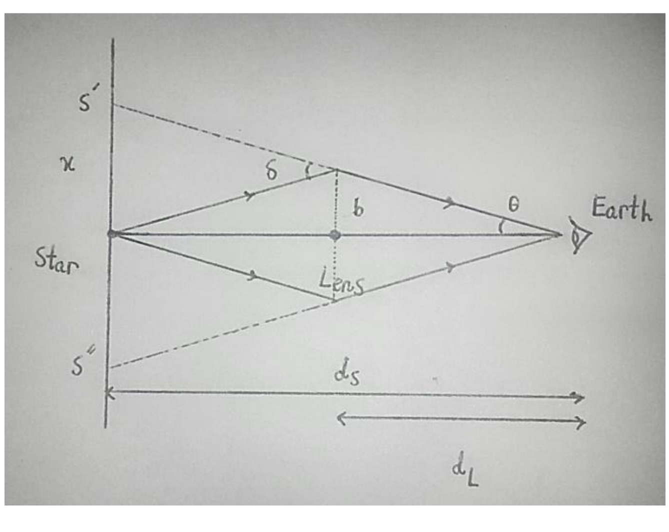
$$\frac{\dot{n}_3}{4\pi d_{earth}^2} = \frac{L_{sun}}{Q_{eff}} \times 2 \times \frac{0.0002}{4\pi d_{earth}^2} = 1.8 \times 10^{11} \ \frac{1}{s.m^2}$$

این شار نوترینوهایی که می‌توانند توسط این واکنش آشکارسازی شوند ولی این واکنش با احتمالی صورت می‌گیرد که به سطح مقطع برخورد کلر و نوترینو مربوط می‌شود اما در صورت سوال تنها شاری که می‌توانند آشکارسازی شوند از شما خواسته شده است.

به هرحال با همه این‌ها (اگر احتمال برخورد را نیز تاثیر دهیم) شاری که از تئوری بدست می‌آید با چیزی که در زمین آشکارسازی می‌کنیم تطابق ندارد، برای این عدم تطابق یکی از دلایل مهمی که ارائه می‌شود مربوط به خواص ذاتی نوترینوها می‌باشد، این است که با توجه به معادله واکنش برای انجام این واکنش، نوترینوی الکترون نیاز است، اما در ابتدای سوال توضیح داده بود که طعم‌های مختلف نوترینو می‌توانند به هم تبدیل شوند و یک نوترینو بین طعم‌های مختلف در نوسان است. بنابراین از شاری که از تئوری بدست می‌آید تنها بخشی آشکارسازی می‌شوند که زمانی که به زمین می‌رسند در حالت نوترینوی الکترون هستند و حالت-های دیگر نوترینو با این واکنش آشکارسازی نمی‌شوند.

.۱۰

الف) مسیر پرتو نور هنگامی که از کنار لنز عبور می‌کند ، به اندازه زاویه δ منحرف می شود ، در نتیجه نوعی همگرایی پدید می آید .



$$x = \theta d_S \ . x = (d_S - d_L)\delta \Longrightarrow (d_S - d_L)\frac{4GM}{c^2 b} = \theta d_S$$

همچنین از روی شکل داریم :

$$b = \theta d_L \Longrightarrow (d_S - d_L)\frac{4GM}{c^2\theta d_L} = \theta d_S \ \Longrightarrow \theta^2 = \frac{4GM}{c^2}\frac{d_S - d_L}{d_S d_L} \Longrightarrow \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{d_S - d_L}{d_S d_L}}$$

ب)از رابطه حد تفکیک رایلی داریم :

$$\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D} = 2.796 \times 10^{-7} rad$$

چون تنها تشخیص دو نقطه متفاوت روی حلقه انیشتین به معنی تشخیص حلقه خواهد بود ، در نتیجه اگر قطر حلقه انیشتین لنزی از حد تفکیک بیشتر باشد ، برای تلسکوپ فضایی هابل قابل مشاهده خواهد بود .

$$\text{شرط} : 2\theta_E \geq \alpha \Longrightarrow 4 \times \frac{4GM}{c^2}\frac{d_S - d_L}{d_S d_L} \geq \alpha^2 \Longrightarrow M \geq \frac{\alpha^2 c^2 d_S}{16G(d_S - d_L)} d_L$$

در صورتی که جرم لنز از مقدار بالا بیشتر باشد ، قابل تفکیک است ؛ اما دقت کنید که سمت راست نامساوی تابع d_L است . در حالت حدی طرفین نامساوی با یکدیگر برابرند . در این حالت نامساوی تبدیل به معادله یک خط مبدا گذر می‌شود؛ در صورتی که در شکل مربوط به سوال نقاط در بالا خط قرار گیرند ، قابل تفکیک و در غیر این صورت ، غیر قابل تفکیک خواهند بود .

$$M = \frac{\alpha^2 c^2 d_S}{16G(d_S - d_L)} d_L$$

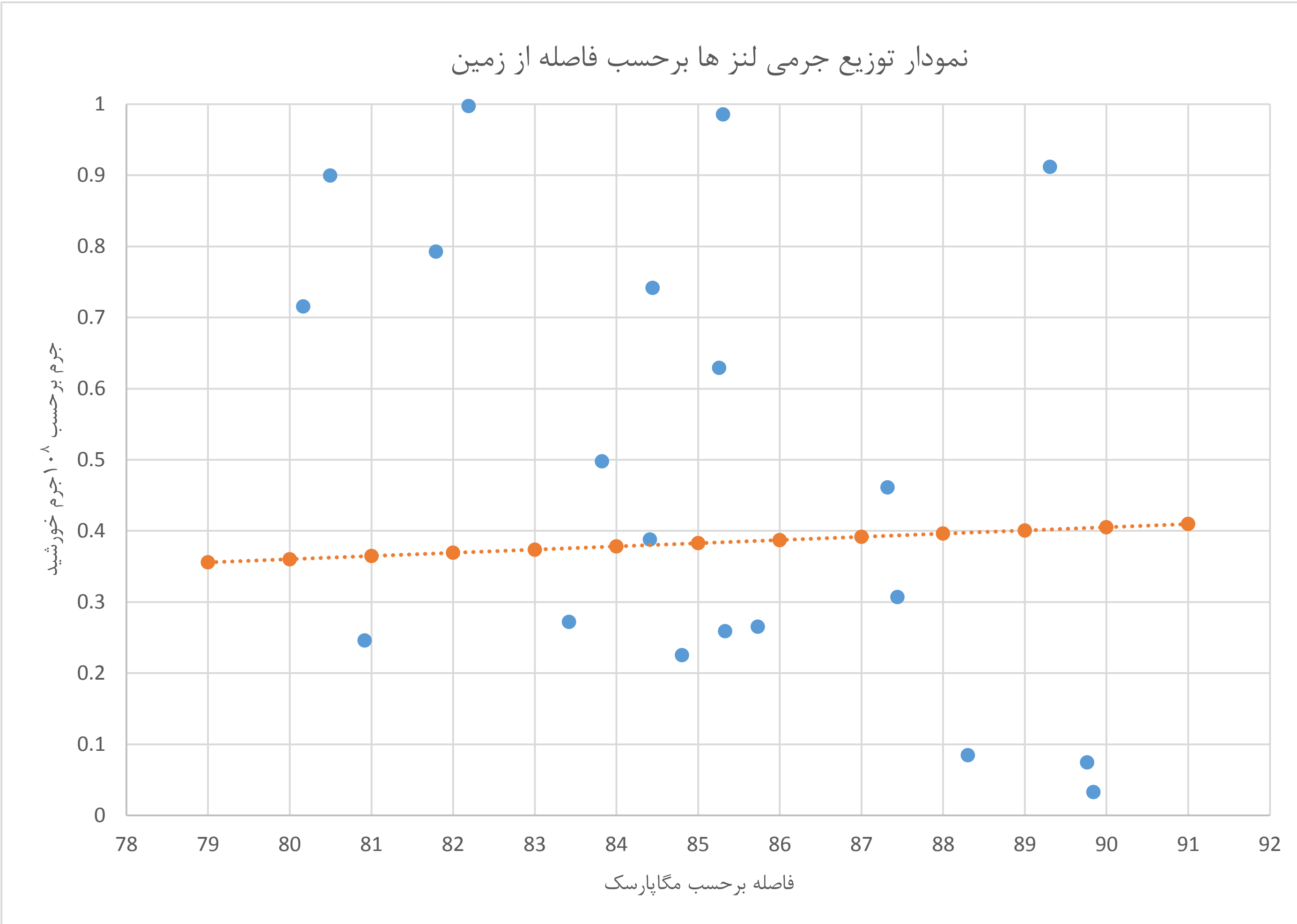
با توجه به راهنمایی سوال و توزیع تقریبا یکنواخت لنز ها در بازه فاصله ۸۰ تا ۹۰ مگا پارسکی ، مقدار متوسط $d_S - d_L$ تقریبا برابر است با $150Mpc \ - 85Mpc = 65 \ Mpc$

در نتیجه معادله خط مورد نظر با توجه به واحد های مربوط به محور ها به شکل زیر است :

$$M(10^8 M_{Sun}) = 4.50 \times 10^{-3} d_L(Mpc)$$

با رسم این خط در شکل مربوط به سوال داریم :

داده های بالاتر از این خط ، قابل تفکیک هستند که تعداد آن ها ۱۱ لنز است . پس جواب قسمت ب ۱۱ می باشد .



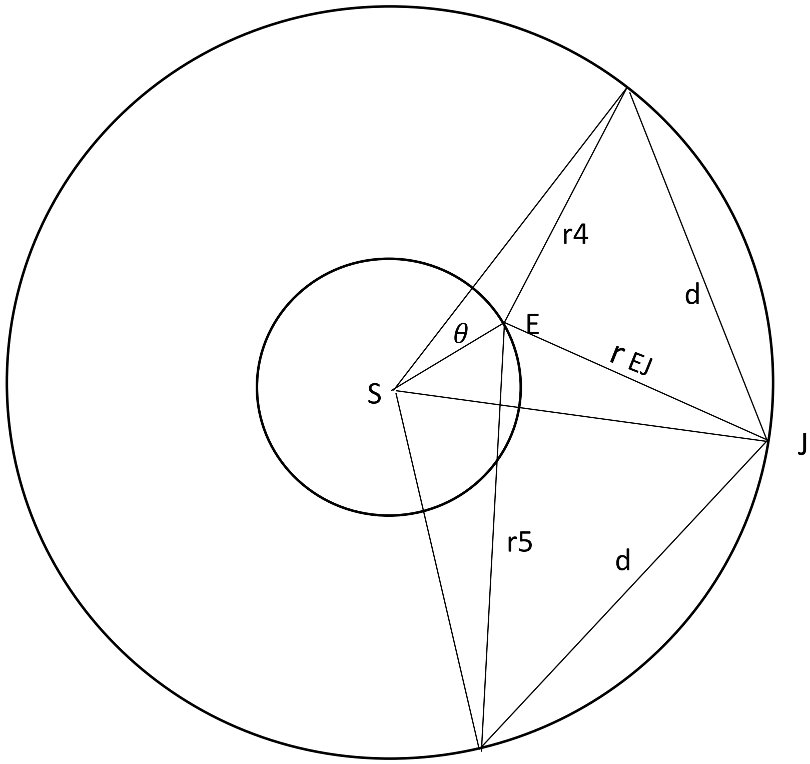
.۱۱

الف)

برای اثبات نشان می‌دهیم برای زاویه $60°$ در آن نقطه تعادل داریم. نیروهای وارد بر جرم آزمون باید همدیگر را در راستای عمود بر بردار مرکز جرم خنثی کنند و در راستای بردار مرکز جرم برآیند $mr\omega^2$ داشته باشند که r فاصله جرم آزمون از مرکز جرم و m جرم آزمون و ω سرعت زاویه‌ای چرخش سیستم است.

ب)

مقدار δr در مکان جرم آزمون در راستای شعاعی تغییر ایجاد می‌کنیم و با فرض بیشتر بودن یکی از جرم‌ها از دیگری، نیروهای وارد بر جرم آزمون را نوشته و پایداری آن را بررسی می‌کنیم.



ج)

$$\Delta\theta = 2R\left(\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_5}\right) \Rightarrow \frac{d\Delta\theta}{dt} = 2R\left(\frac{\dot{r_4}}{r_4^2}+\frac{\dot{r_5}}{r_5^2}\right) = 0$$

فقط در مقابله و مقارنه مشتری شرط بالا برقرار است.

د)

$$r_4^2 = r_E^2 + r_J^2 - 2r_E r_J \cos\theta$$

$$r_5^2 = r_E^2 + r_J^2 - 2r_E r_J \cos 120 - \theta$$

$$r_{EJ}^2 = r_E^2 + r_J^2 - 2r_E r_J \cos 60 - \theta$$

$$d = r_J$$

$$\Rightarrow d^2 = r_J^2 = r_4^2 + r_{EJ}^2 - 2r_4 r_{EJ} \cos 73 \ \Rightarrow r_4 \,.\, r_5 \rightarrow \theta \ \Rightarrow \theta$$

از روی مقدار θ مقدار r_5 را محاسبه می‌کنیم. حال میدانیم:

احتمال $= p = \frac{R}{\pi}\left(\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}\right) = \frac{1}{24}$

در نتیجه مقدار R محاسبه می‌شود.