

به نام خدا
روز دوم
ترکیبیات شمارشی + احتمال
<http://YazdCS.blog.ir>

۱ روابط کوهی

روابط زیر را ثابت کنید:
الف) D_n را تعداد پریش‌های به طول n در نظر بگیرید.

$$D_n = n \times D_{n-1} + (-1)^n$$

(ب)

$$\sum_{k=d}^n \binom{n}{k} \binom{k}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{d}$$

(ج)

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

۲ نقاط هم فاصله

n و k را اعداد طبیعی در نظر بگیرید. S مجموعه‌ای n عضوی از نقاط در صفحه‌ی دو بعدی است به طوری که به ازای هر نقطه مثل $p \in S$ دست کم k نقطه در S وجود دارند که از p هم فاصله‌اند. ثابت کنید:

$$k < \frac{1}{4} + \sqrt{2n}$$

۳ جایگشت متعارف

یک جایگشت از اعداد ۱ تا $2n$ را متعارف می‌نامیم اگر دست کم دو عدد مجاور در جایگشت وجود داشته باشند که اختلافشان n است. ثابت کنید تعداد جایگشت‌های متعارف از جایگشت‌های نامتعارف بیشتر است.

۴ رشته‌ی اچ‌تی

تعداد رشته‌های به طول ۱۵ از حروف $\{T, H\}$ که در آن زیررشته‌های HH, HT, TH, TT به ترتیب ۵، ۴، ۳، ۲ بار آمده‌اند را محاسبه کنید.

۵ کامل آبی قرمز

یال‌های یک گراف $4n$ راسی کامل را با به دخواه با رنگ‌های آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم به طوری که نصف یال‌ها آبی و نصف یال‌ها قرمز شده‌اند. ثابت کنید تعداد حالت‌های انتخاب دو یال آبی که راس مشترک ندارند برابر با تعداد حالت‌های انتخاب دو یال قرمز که راس مشترک ندارند است.

۶ منتظم بدیهی

ثابت کنید راس‌های هر گراف دو بخشی k -منتظم را می‌توان به دو زیر مجموعه با تعداد اعضای برابر افزایش کرد به طوری که فقط بین اعضای زیرمجموعه‌های مختلف یال باشد.

۷ آزمون ریاضی

در یک آزمون ۶ سواله ۲۰۰ دانش آموز شرکت کرده‌اند. می‌دانیم هر سوال دست کم توسط ۱۲۰ نفر حل شده. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که روی هم همه‌ی سوالات را حل کرده‌اند.

۸ مجموعه‌های عجیب

$A = \{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. S_1, S_2, \dots, S_m زیر مجموعه‌هایی از A هستند به طوری که به ازای هر i, j متفاوت شرایط زیر برای آنها برقرار است:

$$S_i \neq S_j \bullet$$

$$|S_i \cap S_j| = 1 \bullet$$

ثابت کنید $m \leq n$ است.

۹ ایران ۱۹۹۰

$S = \{1, 2, \dots, 1990\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی P را زیر مجموعه‌ای از ۱۰۰-تایی‌های مرتب با اعضای متفاوت از اعضای S در نظر بگیرید. یک زوج مرتب مثل (x, y) در یک ۱۰۰-تایی مرتب مثل $(a_1, a_2, \dots, a_{100})$ مشاهده می‌شود اگر i, j ایی وجود داشته باشند که $i < j$ و $a_i = x, a_j = y$ باشد. اگر هر زوج مرتب (x, y) دست بالا در یکی از اعضای P مشاهده شود، ثابت کنید $|P| \leq 800$ است.

۱۰ ۶ در ۴

چهار بار تاس میریزیم، احتمال اینکه دست کم یک بار ۶ بیاریم را محاسبه کنید.

۱۱ امید مقدماتی

۱.۱۱ اختلاص

جهان می‌داند اگر از مدرسه اختلاص کند و کسی بو نبرد ۱۰۰ میلیون تومان به جیب می‌زند! و اگر گیربیافتد ۱۲ میلیون تومان جریمه‌ی نقدی می‌شود. اگر احتمال موفقیت جهان ۵٪ باشد. امید ریاضی اختلاص را برای جهان محاسبه کنید.

۲.۱۱ به امید شیر

جهان یک سکه‌ی سالم دارد! او تصمیم گرفته تا زمانی که سکه برای اولین بار شیر بیاید هی سکه بیاندازد! متغیر تصادفی X را برابر با تعداد دفعاتی که جهان سکه می‌اندازد در نظر می‌گیریم. مقدار $E[X]$ را محاسبه کنید.

۳.۱۱ خواستگاری

در محله‌ی جهان n دختر دم‌بخت زندگی می‌کنند که از نظر کمالات نمره‌ی ۱ تا n دارند (هیچ دو نفر نمره‌ی یکسانی ندارند).! الگوریتم جهان برای زن گرفتن به صورت زیر است: ابتدا به صورت تصادفی و با احتمال برابر خواستگاری یکی از دخترها می‌رود. سپس بیخیال دختر اول شده و باز به ترتیب تصادفی به خواستگاری دخترهای دیگر می‌رود. (او هیچ وقت دوبار به خواستگاری یک نفر نمی‌رود.) اینکار را تا زمانی ادامه می‌دهد که به اولین دختری برسد که نمره‌ی او بالاتر از دختر اول باشد.

الف) امید ریاضی تعداد خواستگاری‌هایی که جهان می‌رود را محاسبه کنید.
ب) نشان بدهید امید ریاضی تعداد خواستگاری‌ها از مرتبه‌ی $O(\lg n)$ است.

۴.۱۱ نابه‌جایی

امید ریاضی تعداد نابه‌جایی‌های یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n را محاسبه کنید. [خطی بود امید]

۱۲ کیسه‌ی توپ

a توپ آبی و b توپ قرمز در کیسه داریم. هر مرحله عملیات زیر را انجام می‌دهیم: به صورت تصادفی و با احتمال برابر یک توپ از کیسه برمی‌داریم، رنگ آن را نگاه می‌کنیم و توپ را به کیسه برمی‌گردانیم. سپس نیمی از توپ‌های هم‌رنگ آن را از کیسه خارج می‌کنیم و به جای هر کدام یک توپ با رنگ مخالف به کیسه اضافه می‌کنیم.
با فرض اینکه a, b مضرب 2^k هستند، احتمال اینکه پس از k مرحله، آخرین توپی که از کیسه بیرون آورده‌ایم آبی رنگ باشد را محاسبه کنید.

۱۳ میمون لینوکس نویس

فرض کنید به یک میمون یک کامپیوتر می‌دهیم که می‌تواند با آن تایپ کند! میمون در هر ثانیه یکی از دکمه‌های صفحه‌ی کلید را به صورت تصادفی و با احتمال برابر فشار می‌دهد. ثابت کنید احتمال اینکه میمون در زمان متناهی کد لینوکس (!) را تایپ کند برابر یک است. (یا به عبارت دقیق‌تر، احتمال این رویداد به هر میزان دلخواه به یک نزدیک می‌شود.)

۱۴ تباهی قمارباز

دو قمارباز با هم بازی می‌کنند. نفر اول در ابتدا a دلار پول دارد و نفر دوم b دلار. در هر مرحله یک سکه‌ی سالم (احتمال برابر شیر و خط) می‌اندازند. اگر شیر بیاید نفر اول به نفر دوم یک دلار و در غیر این صورت نفر دوم به نفر اول یک دلار می‌دهد. دو نفر بازی را تا زمانی ادامه می‌دهد که پول یکی از طرفین تمام شود!

الف) ثابت کنید بازی به احتمال یک تمام می‌شود.

ب) احتمال برنده شدن نفر اول را محاسبه کنید.