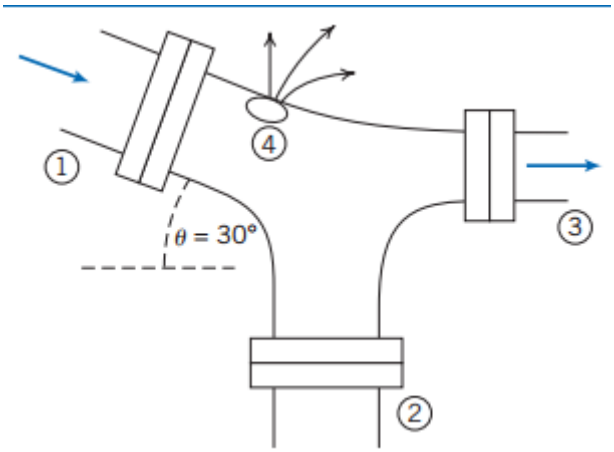
**سوال ۱ :** مطابق شکل جریانی پایا در اتصال بین لوله های آب را در نظر بگیرید.



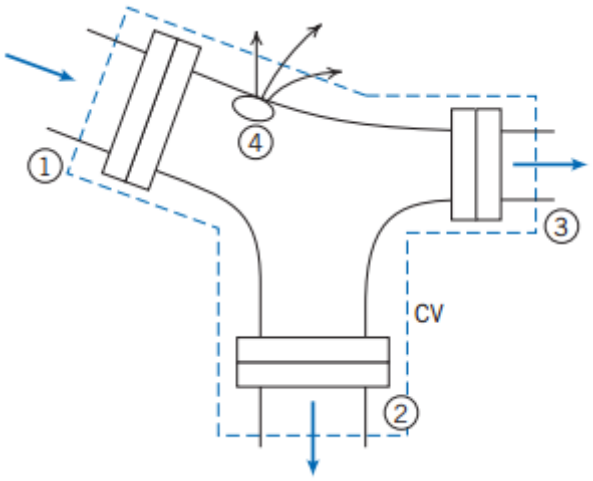

مساحت، سرعت و چگالی به صورت زیر داده شده است:

$$A_1 = 0.2\,\text{m}^2 \quad A_2 = 0.2\,\text{m}^2 \quad A_3 = 0.15\,\text{m}^2$$
$$V_1 = 5\,\text{m/s} \quad V_3 = 12\,\text{m/s} \quad \rho = 999\,\text{kg/m}^3$$

سیال در سوراخی واقع در نقطه ۴ از اتصال خارج میشود ( نشتی دارد). دبی حجمی خروجی از این محل $0.1\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ تخمین زده می شود. مطلوبست محاسبه سرعت در مقطع ۲؟

**پاسخ)**

مطابق شکل زیر یک حجم کنترل انتخاب میکنیم و فرض میکنیم که مقطع ۲ خروجی است.




از آنجایی که جریان پایا و تراکم ناپذیر بوده و همچنین ورودی و خروجی ها یک بعدی هستند، معادله بقای جرم ( معادله حاکم بر مسئله) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{CS} \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

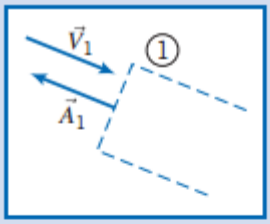
با بسط این معادله داریم:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 + \vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 + Q_4 = 0$$

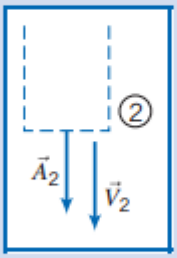
که $Q_4$ دبی حجمی در قسمت نشتی لوله است.

سه ترم اول معادله بالا با توجه به جهت بردار سرعت و بردار نرمال سطح به صورت زیر خواهند بود:

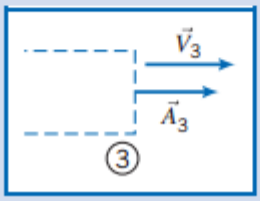
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = -V_1 A_1$$




$$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = +V_2 A_2$$




$$\vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 = +V_3 A_3$$




بنابراین :

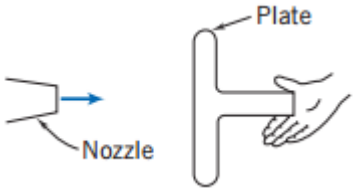
$$-V_1 A_1 + V_2 A_2 + V_3 A_3 + Q_4 = 0$$

که مقدار سرعت در مقطع ۲ برابر خواهد بود با:

$$V_2 = \frac{V_1A_1 - V_3A_3 - Q_4}{A_2}$$
$$= \frac{5\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.2\,\text{m}^2 - 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.15\,\text{m}^2 - \frac{0.1\,\text{m}^3}{\text{s}}}{0.2\,\text{m}^2}$$
$$= -4.5\,\text{m/s} \leftarrow V_2$$

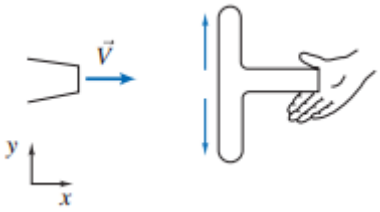
چون علامت V2 منفی بدست آمد فرض اولیه ما که جریان در مقطع ۲ را خروجی در نظر گرفتیم اشتباه بوده و جریان در مقطع ۲ ورودی خواهد بود.

**سوال ۲ :** مطابق شکل آب از یک نازل ساکن به یک صفحه برخورد میکند. سرعت آب در خروجی از نازل ۱۵ متر بر ثانیه و مساحت نازل 0.01 متر مربع است. فرض کنید که آب به صورت عمودی به صفحه برخورد میکند و سپس در امتداد صفحه جریان می‌یابد. برای ثابت نگه داشتن صفحه شما چه مقدار نیروی افقی باید به آن وارد کنید؟




**پاسخ:**

جهت حرکت آب، پیش و پس از برخورد به صفحه به صورت زیر است:




معادلات حاکم بر این مسئله عبارتند از:

معادله بقای جرم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\forall + \int_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

معادله مومنتم :

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\forall + \int_{CS} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

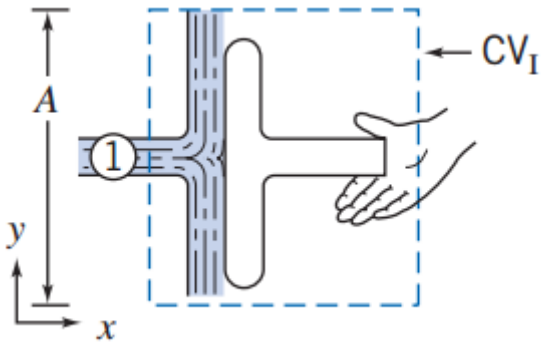
جریان را به صورت پایا، تراکم ناپذیر و دارای خروجی و ورودی‌های یک بعدی در نظر می‌گیریم:

با این فرضیات معادلات فوق به صورت زیر ساده میشوند:

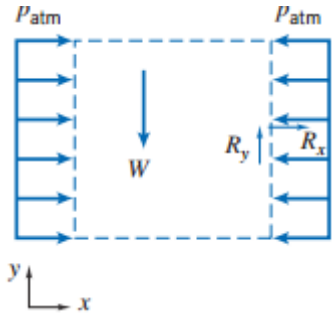
$$\sum_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \sum_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

حجم کنترلی به شکل زیر انتخاب میکنیم:




نیروهای وارد بر این حجم کنترل در شکل زیر نشان داده شده است:




از آنجایی که فقط به دنبال نیروی افقی هستیم معادله مومنتم را در جهت x می‌نویسیم:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

در جهت x هیچ نیروی بدنی وجود ندارد $F_{B_x} = 0$ پس :

$$F_{S_x} = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

برای ارزیابی $F_{S_x}$ لازم است همه نیروهایی که روی سطح حجم کنترل وارد میشوند ارزیابی گردد:

$$F_{S_x} = R_x + p_{atm}A - p_{atm}A$$

| | | |
|---|---|---|
| نیروی دست شما روی حجم کنترل ( در جهت مثبت فرض شده است) | نیروی ناشی از فشار اتمسفر که روی صفحه سمت راست وارد می شود ( در جهت منفی) | نیروی ناشی از فشار اتمسفر که روی صفحه سمت چپ وارد می شود ( در جهت مثبت) |

بنابراین:

$$F_{S_x} = R_x$$

و:

$$R_x = \sum_{CS} u\,\rho\vec{V}\cdot\vec{A} = u\,\rho\vec{V}\cdot\vec{A}|_1$$

$$R_x = -u_1\,\rho V_1 A_1$$

$$R_x = -15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.01\,\text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

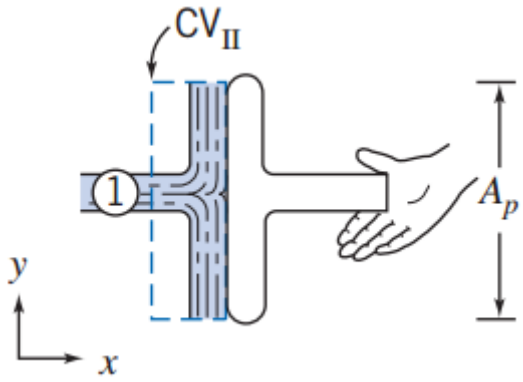
بنابراین نیروی که روی دست شما وارد می شود برابر خواهد بود با :

$$K_x = -R_x = 2.25\,\text{kN}$$

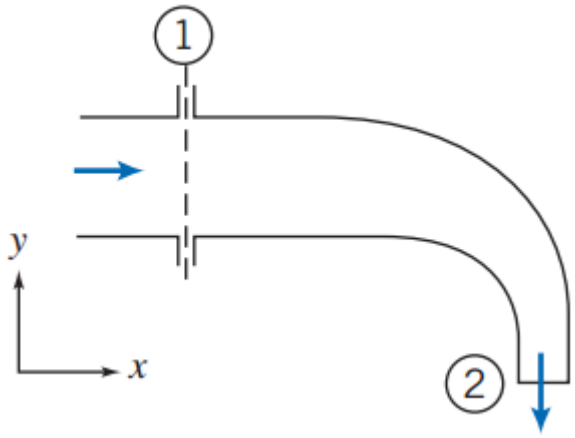
که این نیرو به سمت راست روی دست شما وارد می شود.

**تمرین:**

سعی کنید حجم کنترل را به شکل زیر در نظر گرفته و مجددا نیروی وارد بر دست خود را محاسبه کنید.

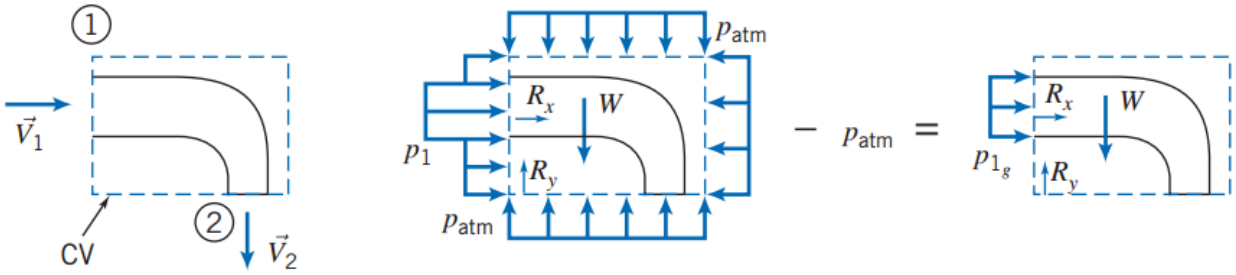


**سوال ۳ :** از طریق یک زانوی ۹۰ درجه کاهشی، جریان آب به شکل زیر به اتمسفر تخلیه میشود. در ورودی فشار مطلق ۲۲۰ کیلوپاسکال و سطح مقطع 0.01 متر مربع است. در خروجی سطح مقطع 0.0025 متر مربع و سرعت ۱۶ متر بر ثانیه است. نیروی مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن این زانویی را محاسبه کنید.




**پاسخ:**

حجم کنترلی به شکل زیر انتخاب میکنیم. توجه کنید که فشار اتمسفر روی تمام سطوح وارد می شود و روی ورودی فشار P1 را داریم. خروجی به صورت جت آزاد است بنابراین فشار آن برابر فشار محیط ( فشار اتمسفر) است. از آنجایی که محاسبه نیروها در این مسئله اهمیت دارند، میتوانیم فشار اتمسفر را از تمامی سطوح کم کرده و با فشار گیج مسئله را ساده تر حل کنیم.




فرض میکنیم جریان پایا، تراکم ناپذیر، دارای ورودی و خروجی های یک بعدی است. همچنین از وزن زانویی و آب درون آن نیز صرفنظ میکنیم. بنابراین معادلات حاکم به صورت زیر خواهند بود:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{CS} \vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\forall + \int_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

معادله مومنتم در جهت x :

$$F_{S_x} = \int_{CS} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{F_{B_x} = 0 \quad \text{and} \quad u_2 = 0\}$$

$$p_{1_g}A_1 + R_x = \int_{A_1} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$R_x = -p_{1_g}A_1 + \int_{A_1} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$
$$= -p_{1_g}A_1 + u_1(-\rho V_1 A_1)$$
$$R_x = -p_{1_g}A_1 - \rho V_1^2 A_1$$

معادله بقای جرم:

$$\int_{CS}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$
$$\therefore(-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0$$

$$V_1 = V_2\frac{A_2}{A_1} = 16\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0.0025}{0.01} = 4\,\text{m/s}$$

بنابراین:

$$R_x = -p_{1_g}A_1 - \rho V_1^2 A_1$$
$$= -1.19\times 10^5\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\times 0.01\,\text{m}^2 - 999\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 16\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\times 0.01\,\text{m}^2\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$
$$R_x = -1.35\,\text{kN} \longleftarrow R_x$$

معادله مومنتم در جهت y:

$$F_{S_y} + F_{B_y} = R_y + F_{B_y} = \int_{CS} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$R_y = -F_{B_y} + \int_{A_2} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$
$$= -F_{B_y} + v_2(\rho V_2 A_2)$$
$$R_y = -F_{B_y} - \rho V_2^2 A_2$$

در این رابطه $v_2$ مولفه سرعت در جهت y است که : $v_2 = -V_2$

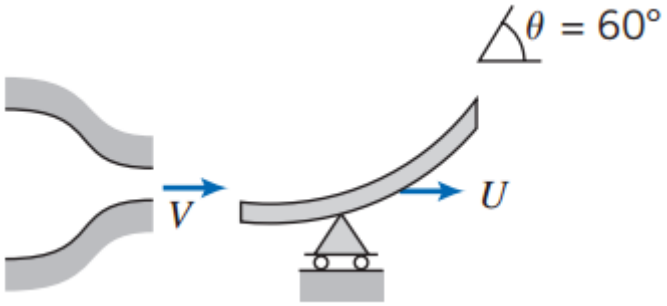
$$R_y = -F_{B_y} + -\rho V_2^2 A_2$$
$$= -F_{B_y} - 999\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times(16)^2\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\times 0.0025\,\text{m}^2\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$
$$= -F_{B_y} - 639\,\text{N} \longleftarrow R_y$$

با صرفنظر از نیروی بدنی در جهت y داریم:

$$R_y = -639\,\text{N} \longleftarrow R_y$$

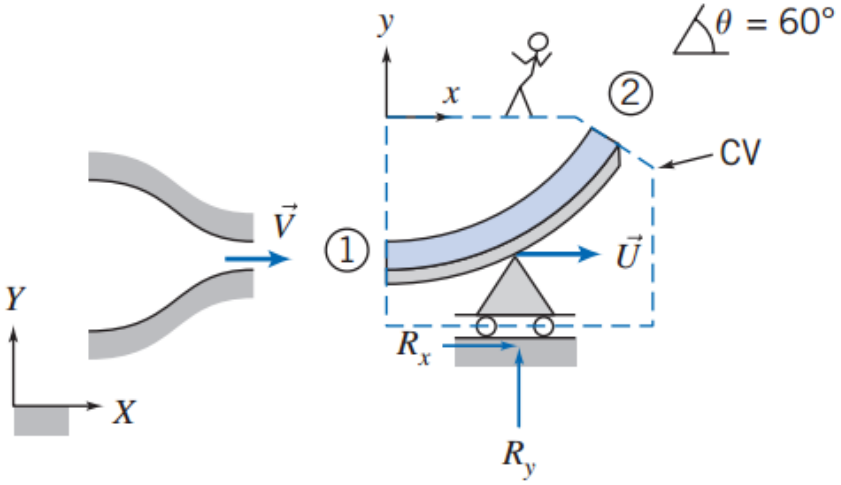
**سوال ۴:**

در شکل زیر یک انحراف دهنده جریان (Vane) نشان داده شده است که راستای جریان را با زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق تغییر می دهد. این انحراف دهنده، خود با سرعت ثابت $U = ۱۰\frac{m}{s}$ حرکت میکند و جریان آبی با سرعت $V = ۳۰\frac{m}{s}$ از یک نازل ساکن به آن وارد می شود. سطح مقطع خروجی نازل $۰/۰۰۳m^۲$ است. مولفه های نیرویی که روی انحراف دهنده وارد می شود را محاسبه کنید.




**پاسخ:**

مطابق شکل زیر یک حجم کنترل متحرک اطراف انحراف دهنده انتخاب می کنیم که با سرعت ثابت U حرکت میکند. همه سرعتها در معادلات اصلی باید نسبت به حجم کنترل( $V_{xyz}$) اندازه‌گیری شوند. $R_x, R_y$ مولفه های نیروی مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن سرعت حجم کنترل به میزان ۱۰ متر بر ثانیه هستند.




معادلات حاکم:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{CS} \vec{V}_{xyz}\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\, d\forall + \int_{CS} \rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = 0$$

جریان را تراکم ناپذیر، پایا، فاقد نیروهای بدنی و با خواص یکنواخت در مقطع ۱ و ۲ در نظر می‌گیریم.

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{CV} u_{xyz}\,\rho\, d\forall + \int_{CS} u_{xyz}\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

از آنجایی که فشار اتمسفر روی تمام سطوح CV وارد می شود، نیروی ناشی از فشار نخواهیم داشت. پس:

$$R_x = \int_{A_1} u(-\rho V dA) + \int_{A_2} u(\rho V dA) = +u_1(-\rho V_1 A_1) + u_2(\rho V_2 A_2)$$

همه سرعتها نسبت به دستگاه مختصات متحرک xyz اندازه گیری می شوند.

از معادله پیوستگی داریم:

$$\int_{A_1} (-\rho V dA) + \int_{A_2} (\rho V dA) = (-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0$$

که از آن:

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$$

بنابراین:

$$R_x = (u_2 - u_1)(\rho V_1 A_1)$$

از آنجایی که همه سرعتها باید نسبت به دستگاه مختصات متحرک xyz اندازه گیری شوند:

$$V_1 = V - U \qquad V_2 = V - U$$
$$u_1 = V - U \qquad u_2 = (V - U)\cos\theta$$

با جایگذاری مقدار نیروی افقی بدست می آید:

$$R_x = [(V-U)\cos\theta - (V-U)](\rho(V-U)A_1) = (V-U)(\cos\theta - 1)\{\rho(V-U)A_1\}$$
$$= (30-10)\frac{\text{m}}{\text{s}} \times (0.50-1) \times \left(999\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}(30-10)\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.003\,\text{m}^2\right) \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$R_x = -599\text{N}\ \{\text{to the left}\}$$

برای محاسبه نیروی عمودی کافی است که معادلات مومنتم در جهت y نوشته شوند:

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{CS} v_{xyz}\rho\, \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$R_y = \int_{CS} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{v_1 = 0\}$$
$$= \int_{A_2} v(\rho V dA) = v_2(\rho V_2 A_2) = v_2(\rho V_1 A_1)$$
$$= (V-U)\sin\theta\{\rho(V-U)A_1\}$$
$$= (30-10)\frac{\text{m}}{\text{s}} \times (0.866) \times \left((999)\frac{\text{kg}}{\text{n}^3}(30-10)\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.003\text{m}^2\right) \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$
$$R_y = 1.04\,\text{kN} \qquad \{\text{upward}\}$$

بردار نیروی خالص روی انحراف دهنده برابر است با:

$$\vec{R} = -0.599\hat{i} + 1.04\hat{j}\,\text{kN} \longleftarrow \vec{R}$$

**سوال ۵:**

میدان سرعت با رابطه $\vec{V} = Ax\vec{i} - Ay\vec{j}$ داده شده است. اگر A=0.3 باشد مطلوبست:

الف) معادله خط جریان در صفحه xy

ب) معادله خط جریانی که از نقطه (۸و۲) می گذرد.

ج) سرعت ذره در نقطه (۸و۲)

د) موقعیت ذره ای که در لحظه صفر در (۸و۲) بوده پس از گذشت ۶ ثانیه.

ه) سرعت ذره در موقعیت یافته شده از بند ((د))

و) معادله خط مسیر ذره واقع بر (۸و۲) در t=0

**پاسخ):**

**الف)** خطوط جریان، خطوطی در میدان جریان هستند که در یک لحظه مشخص مماس بر جهت جریان در هر نقطه می باشند. در نتیجه:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{streamline}} = \frac{v}{u} = \frac{-Ay}{Ax} = \frac{-y}{x}$$

جدا سازی متغیرها و انتگرال گیری:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

انتگرال گیری:

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

این رابطه را می توان به شکل $xy = c$ نیز نوشت.

**ب)** برای خط جریانی که از نقطه $(x_0,y_0)=(2,8)$ میگذرد ، مقدار ثابت c برابر ۱۶ است. پس معادله خط جریان گذارا از این نقطه به صورت زیر است.

$$xy = x_0 y_0 = 16\,\mathrm{m}^2$$

**ج)** در نقطه داده شده سرعت برابر است با:

$$\vec{V} = A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0.3\mathrm{s}^{-1}(2\hat{i} - 8\hat{j})\mathrm{m} = 0.6\hat{i} - 2.4\hat{j}\,\mathrm{m/s}$$

**د)** برای ذره ای که در میدان جریان در حال حرکت است، میدان سرعت برابر است با:

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$$

بنابراین سرعت افقی و عمودی ذره برابر خواهد بود با:

$$u_p = \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{and} \quad v_p = \frac{dy}{dt} = -Ay$$

در هریک از معادلات بالا از روش جداسازی متغیرها و انتگرال گیری استفاده می کنیم:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t A\,dt \quad \text{and} \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t -A\,dt$$

بنابراین:

$$\ln\frac{x}{x_0} = At \quad \text{and} \quad \ln\frac{y}{y_0} = -At$$

که می توان نوشت:

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{and} \quad y = y_0 e^{-At}$$

در ثانیه ۶:

$$x = 2\,\mathrm{m}\; e^{(0.3)6} = 12.1\,\mathrm{m} \quad \text{and} \quad y = 8\,\mathrm{m}\; e^{-(0.3)6} = 1.32\,\mathrm{m}$$

**ه)** در موقعیت فوق (۱/۳۲ و ۱۲/۱) سرعت دره برابر است با:

$$\vec{V} = A(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0.3\,\mathrm{s}^{-1}(12.1\hat{i} - 1.32\hat{j})\mathrm{m}$$
$$= 3.63\hat{i} - 0.396\hat{j}\,\mathrm{m/s} \longleftarrow$$

**و)** برای تعیین معادله خط مسیر از معادلات پارامتریک استفاده می‌کنیم:

$$x = x_0 e^{At} \quad \text{and} \quad y = y_0 e^{-At}$$

بین دو معادله t را حذف می کنیم:

$$e^{At} = \frac{y_0}{y} = \frac{x}{x_0}$$

در نتیجه معادله خط مسیر برابر است با:

$$xy = x_0 y_0 = 16\ \mathrm{m}^2$$

**سوال ۶)** جریانی را در نظر بگیرید که حرکت خالص مماسی دارد ( خطوط جریان آن دایروی است). در این جزیان $V_r=0, V_\theta=f(r)$ است.

**الف) مطلوبست محاسبه چرخش، ورتیستی** اگر $f(r) = r\omega$ باشد .

**ب)** انتخاب f(r) به صورتی که جریان چرخشی نباشد.

پاسخ)

الف) برای حرکت در صفحه $r\theta$ ، تنها مولفه چرخش و ورتیستی در جهت z خواهد بود. پس:

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

از انجاییکه $V_r=0$ است، خواهیم داشت:

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}.$$

با توجه به $V_\theta = r\omega$

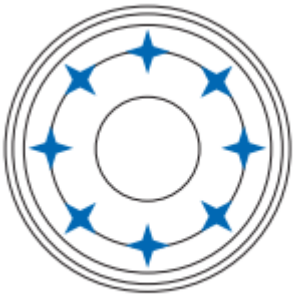
$$\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\omega r^2 = \frac{1}{2r}(2\omega r) = \omega \quad \text{and} \quad \zeta_z = 2\omega.$$

ب) برای جریان غیرچرخشی $\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = 0$:

یعنی:

$$rV_\theta = \text{constant} \quad \text{or} \quad V_\theta = f(r) = \frac{C}{r}$$

تفاوت جریان الف و ب



Rigid-body motion

Irrotational motion