۱۲۶ با توجه به مقادیر متناظر داریم:

n	a_n	S_n
۱	(۱)	$۱ = ۱^۳$
۲	(۳,۵)	$۸ = ۲^۳$
۳	(۷,۹,۱۱)	$۲۷ = ۳^۳$
۴	(۱۳,۱۵,۱۷,۱۹)	$۶۴ = ۴^۳$
⋮	⋮	⋮
۳۰	$(a,\dots,l)$	$۳۰^۳$

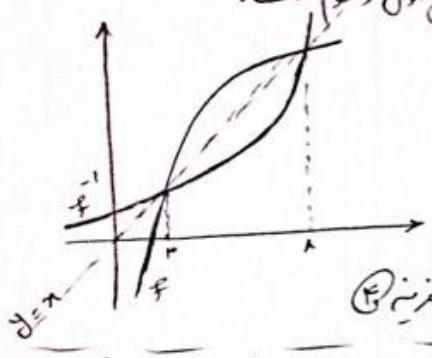
گزینه ۳) چون هر یک از nتایی‌ها تشکیل یک دنباله حسابی هستند، داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a+l)$$

$$\rightarrow ۲۰^۳ = \frac{۳۰}{۲}(a+l)$$

$$\rightarrow a+l = \frac{۲\times ۳۰^۳}{۳۰} = \boxed{۱۸۰۰}$$

۱۲۷ نمودار f^{-1} همان قرینه f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.



چون عبارت داده شده زیر رادیکال است، پس،

$$D: x - f^{-1}(x) \geq ۰ \rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

پس جاهایی که خط نیمساز ربع اول و سوم بالای نمودار f^{-1} قرار است و نظر است که با توجه به شکل $x \in [۳,۸]$

گزینه ۴)

۱۲۸

$$\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = \frac{\cos(۲۷۰+۱۵) - \sin(۲۷۰-۱۵)}{\sin(۵۴۰-۱۵) - \sin(۹۰+۱۵)}$$

گزینه ۱)

$$= \frac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ} \quad \text{صورت و مخرج} \div \cos ۱۵^\circ \quad \frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = \boxed{-\frac{۱۶}{۹}}$$

۱۲۹

$$A-B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A-B| = (۲)(۲) - (-۲)(۳) = ۴+۶ = ۱۰$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۲ \\ -۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$$

گزینه ۴)

۱۳۰

دسته / داده‌های قدیم	[۱۲,۱۵)	[۱۵,۱۸)	[۱۸,۲۱)	[۲۱,۲۴]
فراوانی	۱۲	۲۱	۱۷	۹
فراوانی داده‌های جدید	۱۲	۱۹	۱۷	۹

گزینه ۳)

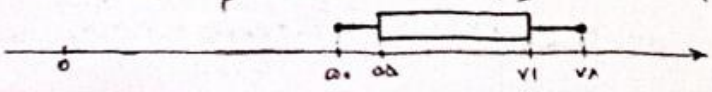
$$\alpha = \frac{۱۹}{۱۲+۱۹+۱۷+۹} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{۱۹}{۵۷} \times ۳۶۰^\circ = \boxed{۱۲۰^\circ}$$

۱۳۱

۵۰, ۵۱, ۵۱, ۵۲, ۵۴, ۵۴, ۵۴, ۵۷, ۵۹, ۵۹, ۶۰, ۶۰, ۶۲, ۶۳, ۶۳, ۶۵, ۶۵, ۶۶, ۷۱, ۷۱, ۷۲, ۷۲, ۷۴, ۷۷, ۷۸

$Q_1 = \frac{۵۴+۵۴}{۲} = ۵۴$ چارک اول — میانه — $Q_3 = \frac{۷۱+۷۱}{۲} = ۷۱$ چارک سوم



نمودار جعبه‌ای

گزینه ۱)

www.konkur-math.blog.ir

ادامه سوال ۱۳۱ : داده های داخل جعبه عبارتند از :

۵۶, ۵۷, ۵۹, ۵۹, ۶۰, ۶۰, ۶۲, ۶۳, ۶۳, ۶۵, ۶۵, ۶۶, ۷۱

توجه نمائید که عدد ۷۱ تکرار نشده است و دلیل آن اینست که چارک سوم جایی است که تعداد داده ها ۳ تا بیشتر است و بین آن عدد از میانه کمتر باشد، پس یک ۷۱ مربوط به سمت راست و ۷۱ دیگر مربوط به سمت چپ (داخل جعبه) است.

$$\bar{x} = 60 + \frac{-4-3-1-1+0+0+2+3+3+5+5+6+11}{13} = 6 + \frac{27}{13} = 62$$

برای اختلاف میانگین داده های داخل جعبه داریم:

$$62 - 62 = 0$$

تستی ۱۳۲ (۳)

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{\frac{3\times2}{2}+\frac{2\times1}{2}+\frac{5\times4}{2}}{\frac{10\times9}{2}} = 1 - \frac{3+1+10}{45} = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

تستی ۱۳۳ (۱)

$$\alpha - \beta \le \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha \le \frac{\pi}{4} + \beta$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right) = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \quad (I)$$

از اینجا به بعد کافیست مقدار $\cos\beta$ را از رابطه $\tan\beta = \frac{1}{2}$ بیابیم؛ که طبق اتحاد مثلثاتی زیر داریم:

$$1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{5} \quad (II)$$

$$(II),(I) \rightarrow 2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} = 0.6$$

تستی ۲

تستی ۱۳۴ (۴)

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_f : 4 - x \ge 0 \rightarrow x \le 4$$

اشتراک این دو حالت است

$$g(x) \in D_f \rightarrow \log_2(x^2+2x) \le 2 \rightarrow x^2+2x \le 8 \rightarrow x^2+2x-8 \le 0 \rightarrow (x+4)(x-2) \le 0$$

$$\Rightarrow x \in [-4, -2) \cup (0, 2]$$

تستی ۱۳۵

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n + 10}{3x - \sqrt{4x^2+10x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4}|x + \frac{10}{2\times4}|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{3x - 2\left[-(x+\frac{10}{8})\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{3x + 2x + \frac{10}{4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{5x} = -1 \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ n = 1 \end{cases}$$

تستی ۱

www.konkur-math.blog.ir

ادامه سوال ۱۳۵:

$$\lim_{x\to 3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 3}\frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}}\Rightarrow\frac{-5}{3-\frac{39}{2\times 9}}=\frac{-5}{\frac{15}{18}}=-6$$

۱۳۶

$$\lim_{x\to 6^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$a+\frac{4}{4}=\frac{1}{2}\rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

گزینه ۲

$$\lim_{x\to 6^+}a+\cos^2\frac{\pi x}{24}=a+\cos^2\frac{\pi\times 6}{24}=a+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a+\frac{2}{4}$$

۱۳۷

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(1.21)-f(1)}{1.21-1}=\frac{\sqrt{1.21}-\sqrt{1}}{0.21}=\frac{1.1-1}{0.21}=\frac{0.1}{0.21}=\frac{10}{21}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

گزینه ۱

$$\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{1}{42}$$

۱۳۸

گزینه ۲

$$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{12}{81}=\frac{4}{27}$$

$$\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

$$\rightarrow P(A)=\frac{4}{27}+\frac{6}{27}=\frac{10}{27}$$

۱۳۹

گزینه ۴

$$X=\frac{1}{x}-1\rightarrow\frac{1}{x}=X+1\rightarrow x=\frac{1}{X+1}$$

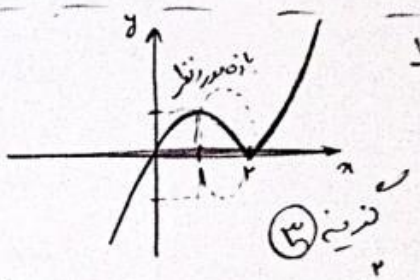
$$2x^2-3x-1=0\rightarrow 2\left(\frac{1}{X+1}\right)^2-3\left(\frac{1}{X+1}\right)-1=0\rightarrow\frac{2}{(X+1)^2}-\frac{3}{(X+1)}-1=0$$

$$\rightarrow 2-3(X+1)-(X+1)^2=0\rightarrow X^2+2X+1+2X+3-2=0\rightarrow X^2+5X+2=0$$

۱۴۰

$$y=x|x-2|=\begin{cases}x(x-2) & x\geq 2\\ x(2-x) & x<2\end{cases}$$

برای بازه صعودی تقعر داریم: $f(x)=-x^2+2x\ ;\ 1<x<2$



گزینه ۳

$$y=-x^2+2x\rightarrow -y=x^2-2x\rightarrow 1-y=x^2-2x+1\rightarrow 1-y=(x-1)^2$$

$$\rightarrow\sqrt{1-y}=|x-1|\ \underset{x>1}{\rightarrow}\ \sqrt{1-y}=x-1\rightarrow x=1+\sqrt{1-y}$$

$$1<1+\sqrt{1-y}<2\rightarrow 0<\sqrt{1-y}<1\rightarrow 0<1-y<1\rightarrow -1<-y<0\rightarrow 1>y>0$$

$$f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\ ;\ 0<x<1$$

www.konkur-math.blog.ir

۱۴۱ چون حدودات، پس حد اندازه است

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۷+۴^{n-1}}{۲+۴^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۴^{n-1}}{۴\times۴^{n-1}} = \frac{۱}{۴}$$

گزینه ۴

نزولی $a_۱ = \frac{۷+۴^{۰}}{۲+۴^{۱}} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$ ، $a_۲ = \frac{۷+۴^{۱}}{۲+۴^{۲}} = \frac{۱۱}{۱۸} \xrightarrow{\infty} \frac{۱}{۴}$

۱۴۲

$$V_۰ = ۹۰ - ۴۰e^{-۰/۰۲t} \longrightarrow -۲۰ = -۴۰e^{-۰/۰۲t} \longrightarrow \frac{۱}{۲} = e^{-۰/۰۲t}$$

گزینه ۱

$$\longrightarrow \ln\frac{۱}{۲} = \ln e^{-۰/۰۲t} \longrightarrow -\ln ۲ = -۰/۰۲t\times\ln e^{۱} \longrightarrow ۰/۶۹۸ = ۰/۰۲t$$

$$\longrightarrow t = ۳۴$$

۱۴۳

$$۲\cos^{۲}x + ۲\sin x\cos x = ۱ \longrightarrow ۲\cos^{۲}x - ۱ + ۲\sin x\cos x = ۰$$

$$\longrightarrow \cos ۲x + \sin ۲x = ۰ \longrightarrow \sin ۲x = -\cos ۲x \xrightarrow{\cos ۲x\neq ۰} \tan ۲x = -۱$$

$$\longrightarrow ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$$

گزینه ۱

۱۴۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}x & x\geq ۰ \\ \frac{۴}{۵}x + \frac{۱}{۵}x & x<۰ \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۵}x & x\geq ۰ \\ x & x<۰ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ۴x + x & x\geq ۰ \\ ۴x - x & x<۰ \end{cases} \longrightarrow g(x) = \begin{cases} ۵x & x\geq ۰ \\ ۳x & x<۰ \end{cases}$$

گزینه ۲

$$fog(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۵}\times(۵x) & x\geq ۰ \\ (۳x) & x<۰ \end{cases} \longrightarrow fog(x) = ۳x \longrightarrow (fog)'(x) = ۳$$

۱۴۵

$$\text{شیب خط مماس } m = y'\Big|_{x=۲} = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}}}e^{۲-x} - \sqrt{x^{۲}}e^{۲-x}\Big|_{x=۲} = \frac{۱}{۲}\times۱ - ۲\times۱ = -\frac{۳}{۲}$$

گزینه ۳

$A(۲,۲)$ $\quad y - ۲ = -\frac{۳}{۲}(x-۲)$ عرض نقطه تلاقی محور y‌ها $\longrightarrow y - ۲ = -\frac{۳}{۲}(۰-۲) \longrightarrow y = ۵$

۱۴۶ اگر نمودار تابع درجه ۳ خواهد محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کند باید دو نقطه اکسترمم داشته باشد (یا $\Delta > ۰$) تا یک نقطه اکسترمم در سمت راست محور y‌ها داشته باشد

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۲(m+۲)x + ۳ \qquad \Delta' = (-(m+۲))^{۲} - (۳)(۳) = (m+۲)^{۲} - ۹ > ۰$$

$$\longrightarrow (m+۲)^{۲} > ۹ \longrightarrow m+۲ > ۳ \longrightarrow m > ۱ \quad \text{یا} \quad m+۲ < -۳ \longrightarrow m < -۵$$

www.konkur-math.blog.ir

ادامه سؤال ۱۴۶ : از طرفی برای طول فقط عطف باید دقت شود تابع را بیابیم : پس،

$f''(x) = 6x - 2(m+2) = 0 \longrightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{m+2}{3}$　　گزینه ۳

$x_{\text{عطف}} \in [-1,1] \longrightarrow -1 \le \frac{m+2}{3} \le 1 \longrightarrow -3 \le m+2 \le 3 \longrightarrow -5 \le m \le 1$

۱۴۷

$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+8}{x^2+4} = f(0) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{x^2} = \frac{a(0)+b(0)+8}{(0)^2+4} \longrightarrow \boxed{a=2}$

$y' = \frac{(4x+b)(x^2+4) - 2x(2x^2+bx+8)}{(x^2+4)^2} = \frac{4x^3+16x+bx^2+4b-4x^3-2bx^2-16x}{(x^2+4)^2} = 0$

$\longrightarrow 4b - bx^2 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$　　طول نقاط اکسترم

بنابراین : $A(2,0) \in f \longrightarrow 0 = \frac{2(2)^2+b(2)+8}{(2)^2+4} \longrightarrow 2b+16=0 \longrightarrow \boxed{b=-8}$

$a+b = 2+(-8) = -6$

گزینه ۲

۱۴۸

چون معادله خط هادی $x = \frac{13}{4}$ داده شده است، پس کانونی با آن دو چون $F(-\frac{5}{4}, -2)$ مختصات کانون است و کانون سمت چپ خط هادی است، پس کانونی دوم چپ است

$2P = \frac{13}{4} - (-\frac{5}{4}) = \frac{18}{4} \longrightarrow P = \frac{9}{4}$　　$S(\frac{1}{2}(\frac{13}{4} + (-\frac{5}{4})), -2) = S(1,-2)$

گزینه ۳

$(y+2)^2 = -9(x-1) \xrightarrow[(y=0)\ \text{قرار دهید}]{\text{نقطه تقاطع محور}} (0+2)^2 = -9(x-1) \longrightarrow \frac{4}{-9} = x-1 \longrightarrow x = \frac{5}{9}$

۱۴۹

$5y^2 - 20y - 4x^2 = 0 \longrightarrow 5(y^2-4y) - 4x^2 = 0 \longrightarrow 5[(y-2)^2-4] - 4x^2 = 0$

$\longrightarrow 5(y-2)^2 - 20 - 4x^2 = 0 \longrightarrow 5(y-2)^2 - 4x^2 = 20 \longrightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

$b^2 = 5$ ، $a^2 = 4$ $\longrightarrow$ $c^2 = a^2+b^2 = 4+5 \longrightarrow c^2 = 9 \longrightarrow \boxed{c=3}$

یعنی : $a=3 \longrightarrow a^2=9$ ، $c=2 \longrightarrow c^2=4 \longrightarrow a^2 = b^2+c^2 \longrightarrow b^2 = 5$

$\frac{(y-2)^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1 \longrightarrow 5(y-2)^2 + 9(x^2) = 45 \longrightarrow 5(y^2-4y+4) + 9x^2 = 45$

$\longrightarrow \boxed{5y^2+9x^2-20y=25}$

گزینه ۱

www.konkur-math.blog.ir

۱۵۰

اتحاد مثلثاتی : $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow \frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = |\cos x| \Longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x\, dx = +\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= +(1-0) - (0-1) = +1+1 = +2$$

گزینه ۲

۱۵۱

$$\int \frac{7x^2 - 4x}{\sqrt[4]{x^2}}\, dx = \int \left(\frac{7x^2}{x^{\frac{2}{4}}} - \frac{4x}{x^{\frac{2}{4}}}\right) dx = \int \left(7x^{\frac{4}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}}\right) dx$$

گزینه ۳

$$= 7 \times \frac{1}{\frac{4}{4}+1} x^{\frac{4}{4}+1} - 4 \times \frac{1}{\frac{1}{4}+1} x^{\frac{1}{4}+1} + C = 7 \times \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} - 4 \times \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$$

$$= 4x^{\frac{7}{4}} - 4x\sqrt[4]{x} + C = 4\sqrt[4]{x}\,(x^2 - x) + C \longrightarrow \boxed{f(x) = x^2 - x}$$

۱۵۲ گزینه ۱

۱۵۳ گزینه ۴

۱۵۴ گزینه ۴

۱۵۵ گزینه ۴

www.konkur-math.blog.ir