«بسمه تعالی»

ترم سوم

Subject: 1 دکتر سهرابی Year: Month: Date: ۹۰/۶/۲۱

۸۹۳۴۰۱۱ عبدالرضا گرکوندی

معادلات دیفرانسیل :

تعریف: هر رابطه بین متغیر و تابع و مشتقات تابع بصورت $f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$

یا $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ را یک معادله‌ی دیفرانسیل گوییم.

مثال :

$yy''+(1+x^2)y'=e^y$ ② / $(1-x^2)y''+2xy'+(x^2-4)y=x^5$ ② /

$y''+2y'+y=e^x$ ② / $y'=y$ ① / $y^{(5)}=0$ ⑤

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad / \quad \frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- توجه: شرط اینکه یک رابطه، معادله دیفرانسیل باشد، لازم است که حداقل یک مرتبه‌ی مشتق داشته باشد.

- تعریف: مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل عبارتست از بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله.

- معادلات دیفرانسیل به ۲ شاخه تقسیم می‌شوند: ۱- معادلات دیفرانسیل معمولی یک متغیره ۲- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی چند متغیره.

در این درس فقط حل معادلات دیفرانسیل معمولی را بررسی می‌کنیم.

Subject: Year: Month: Date: / /

معادلات دیفرانسیل معمولی به دو شاخه تقسیم می شوند:

۱- خطی: اگر بتوان معادله را بصورت $R(x)=a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_0(x)y$

نوشت معادله را خطی گوییم در غیر اینصورت معادله را غیرخطی گوییم . ۲- غیرخطی

- اگر در معادله ی خطی $R(x)=0$ باشد معادله را همگن گوییم .

خطی همگن $(1-x^2)y''+2xy'+x^2y=0$

خطی غیرهمگن $y''+2xy'+5y=\sin x$

غیرخطی $(1+y^2)y''+2xy'+y^2=e^x$

مفهوم جواب یک معادله دیفرانسیل :

$y=\phi(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ را جواب عمومی معادله $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ گوییم

هرگاه $\phi(x,c_1,\dots,c_n)$ همراه مشتقات مورد لزوم در معادله صدق کند.

مثال ۱) ثابت کنید $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ جواب عمومی معادله $y''+4y=0$ است.

تعریف: جوابی از معادله را که تحت شرایط خاصی بدست آمده باشد را جواب خصوصی گوییم.

مثال ۲) جوابی از معادله ی $y''+4y=0$ را بدست آورید که در شرایط زیر صدق کند:

$y(0)=0 \quad y'(0)=1$

حل: $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x \rightarrow x=0 \rightarrow y=c_1(0)+c_2\cos(0)=0 \rightarrow c_2=0$

$y'=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x \rightarrow x=0 \rightarrow y'=2c_1-0=1 \rightarrow c_1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\sin 2x$

فرم تشکیل معادلات دیفرانسیل : برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های

$f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ به تعداد پارامترها مشتق می‌گیریم و بین $n+1$ رابطه‌ی موجود

رابطه‌ای بدست می‌آوریم که پارامتر نداشته باشد.

مثال : $y^2 = 4ax \Rightarrow 2yy' = 4a \Rightarrow a = \frac{yy'}{2} \Rightarrow y^2 = 2yy'x$

$\Rightarrow y = 2y'x$ یا $y' = \frac{y}{2x}$

مثال : $y = A\sin 2x + B\cos 2x$

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \\ y'' &= -4A\sin 2x - 4B\cos 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'' = -4y \Rightarrow y'' + 4y = 0$$

مثال : $y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b \quad y'' = 2a \quad y^{(3)} = 0 \Rightarrow y''' = 0$

فصل ۱ حل معادلات مرتبه‌ی اول $f(x, y, y') = 0$

۱- جدایی‌پذیر ۲- کامل ۳- خطی ۴- خاص

۱) جدایی‌پذیر : $y' = f(x, y) = g(x)\, h(y)$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + c$$

مثال ۱) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+2y} \Rightarrow (1+2y)\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \int(1+2y)\,dy=\int 2x\,dx$

$$\Rightarrow y^2+y = x^2+c$$

مثال ۲) $y'\tan x - y = 1 \Rightarrow y'=\frac{1+y}{\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{\tan x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{\tan x}\Rightarrow \int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{dx}{\tan x}$$

$$\Rightarrow Ln|1+y| = Ln\,\sin x + \underbrace{Ln\,c}_{=c} = Ln\,c\sin x$$

$$\Rightarrow y = \pm c\sin x - 1$$

مثال ۳) $y' - xy^2(1+x^2)^{-1/2}=0 \quad y(0)=1$

$$y' = xy^2(1+x^2)^{-1/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=xy^2(1+x^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x(1+x^2)^{-1/2}dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int x(1+x^2)^{-1/2}dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = (1+x^2)^{1/2}+c \;,\; y(0)=1 \to x=0 \Rightarrow 1+c=-1 \to c=-2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = (1+x^2)^{1/2}-2$$

نکته: هر تابعی که در معادله‌ی دیفرانسیل صدق کند جواب معادله‌ی دیفرانسیل نام دارد.

- معادله‌ی دیفرانسیل: هر رابطه‌ی بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات نسبت به متغیر مستقل معادله‌ی دیفرانسیل نام دارد.

ب- حل معادلات بصورت $y' = f(ax+by+c)$

روش: $ax+by+c=z \rightarrow a+by' = \frac{dz}{dx} \rightarrow y' = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)$

$$\rightarrow \underbrace{f(ax+by+c)}_{f(z)} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right) \rightarrow \frac{dz}{bf(z)+a} = dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x$$

مثال ۱: $y' = \cos(x-y+1)$

$$x-y+1 = z \rightarrow 1-y' = z' \rightarrow y' = 1-z'$$

$$\rightarrow 1-z' = \cos z \rightarrow z' = 1-\cos z \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1-\cos z$$

$$\rightarrow \frac{dz}{1-\cos z} = dx \rightarrow \int \frac{dz}{1-\cos z} = x+c$$

$$\rightarrow \int \frac{(1+\cos z)}{\sin^2 z} dz = x+c \rightarrow -\cot z - \frac{1}{\sin z} = x+c$$

$$\rightarrow -\cot(x-y+1) - \frac{1}{\sin(x-y+1)} = x+c$$

روش ۲: $\tan z/2 = \theta \rightarrow \int \frac{2d\theta}{\cancel{1+\theta^2}} \Big/ 1-\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} = \int \frac{2d\theta}{2\theta^2} = \int \frac{d\theta}{\theta^2}$

$$= \frac{-1}{\theta} + c = -\frac{1}{\tan z/2} + c$$

مثال ۲: معادله‌ی روبرو را حل کنید * $y' = e^{2x-y+3}$ *

$$2x-y+3=z \Rightarrow 2-y'=z' \Rightarrow y'=2-z' \overset{*}{\Rightarrow} 2-z'=e^{z}$$

$$\Rightarrow z'=2-e^{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=2-e^{z} \Rightarrow \frac{dz}{2-e^{z}}=dx \Rightarrow \int \frac{dz}{2-e^{z}}=x+c$$

$$\Rightarrow x+c=\int \frac{e^{z}\,dz}{2e^{z}-e^{2z}}=\int \frac{du}{2u-u^{2}}, \quad e^{z}=u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2-u)u}=\frac{A}{2-u}+\frac{B}{u} \Rightarrow 1 \equiv Au+(2-u)B$$

$$\begin{aligned} u=0 &\Rightarrow B=1/2 \\ u=2 &\Rightarrow A=1/2 \end{aligned} \Rightarrow x+c=1/2\int\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{u}\right)du$$

$$x+c=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{u}{2-u}\right|=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{e^{2x-y+3}}{2-e^{2x-y+3}}\right|$$

مثال ۳: $y'=3(x-2y+4)^{2}-2(x-2y)$

$$z=x-2y+4 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=z'=1-2y' \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(1-z')$$

$$\Rightarrow 3z^{2}-2(z-4)=\frac{1}{2}(1-z')=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z'$$

$$\Rightarrow 3z^{2}-2z+\frac{15}{2}=-\frac{1}{2}z' \Rightarrow -6z^{2}+4z-15=z'=\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{-6z^{2}+4z-15}=dx \Rightarrow \int\frac{dz}{-6z^{2}+4z-15}=x+c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}\int\frac{dz}{(z^{2}-\frac{2}{3}z+\frac{5}{2})}=x+c \Rightarrow -\frac{1}{6}\int\frac{dz}{(z-\frac{1}{3})^{2}+\frac{43}{18}}$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{18}{43}}\tan^{-1}\left(\frac{z-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{43}{18}}}\right) \Rightarrow$$ حال z را جایگذاری می‌کنیم

ج- حل معادلات متجانس :

تعریف: عبارت $f(x,y)$ را متجانس گوییم هرگاه با تبدیل $x \to tx$ و $y \to ty$

آنگاه :

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

که در آن n درجه ی تجانس نام دارد .

مثال ۱) آیا $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{x^3}{y}$ متجانس است؟

$$f(tx, ty) = t^2x^2 + t^2xy + \frac{t^3x^3}{ty} = t^2 f(x,y)$$

درجه ی تجانس : ۲

مثال ۲) $g(x,y) = x \sin \frac{y}{x} + \sqrt{x^2+y^2}$

$$g(tx, ty) = tx \sin \frac{y}{x} + t\sqrt{x^2+y^2} = t\, g(x,y)$$

درجه ی تجانس : ۱

مثال ۳) $h(x,y) = x^2 + y + 1$

$$h(tx, ty) = t^2x^2 + ty + 1 \neq t^n h(x,y)$$

روش تشخیص عملی: درجه ی تک تک جمله ها را بررسی می کنیم اگر برابر بودند متجانس است .

* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ — M و N متجانس از درجه ی K هستند.

$$\to \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$ متجانس از درجه ی صفر

$$\to \frac{dy}{dx} = t^0 f(x,y) = f(tx, ty) = f(1, \frac{y}{x})$$

* $t = \frac{1}{x}$

$$\rightarrow \frac{y}{x}=z \rightarrow y=zx \rightarrow y'=z'x+z \rightarrow z'x+z=f(1,z)$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{f(1,z)-z}=\int \frac{dx}{x}+c$$

مثال ۱: معادله‌ی روبرو را حل کنید: $x^2dy=(y^2-xy+x^2)\,dx$

- معادله متجانس است از درجه ۲ پس داریم: $\frac{y}{x}=z \rightarrow y=zx$

$$y=zx \rightarrow dy=x\,dz+z\,dx \rightarrow x^2(x\,dz+z\,dx)=(z^2x^2-x^2z+x^2)dx$$

$$\rightarrow x\,dz+z\,dx=z^2dx-z\,dx+dx \rightarrow x\,dz=(z^2-2z+1)dx$$

$$\rightarrow \frac{dz}{(z-1)^2}=\frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dz}{(z-1)^2}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \frac{-1}{z-1}=\ln|x|+c \rightarrow \frac{1}{1-y/x}=\ln|x|+c$$

مثال ۲: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+2$

$$\frac{y}{x}=z \rightarrow z'x+z=z+\frac{1}{z}+2$$

- متجانس از درجه صفر

$$\rightarrow z'x=\frac{2z+1}{z} \rightarrow \int \frac{z\,dz}{2z+1}=\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2z+1}\right)dz=\ln|x|+c$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}z-\frac{1}{4}\ln|2z+1|=\ln|x|+c \rightarrow \dots$$

حال بجای z جایگزین آن ($\frac{y}{x}$) را قرار میدهیم

مثال ۳: معادله‌ی روبرو را حل کنید $y = (x - \sqrt{xy})\, y'$

- متجانس درجه‌ی ۱

حل: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$\Rightarrow \frac{y}{x - \sqrt{xy}} = z'x + z \Rightarrow \dots$$

$$(x - \sqrt{zx^2})(z'x + z) = zx \Rightarrow x(1 - \sqrt{z})(z'x + z) = zx$$

$$\Rightarrow (1 - \sqrt{z})(z'x + z) = z$$

$$\Rightarrow z'x + z - z'x\sqrt{z} - z\sqrt{z} = z \Rightarrow z'x(1 - \sqrt{z}) = z\sqrt{z}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \left(\frac{1 - \sqrt{z}}{z\sqrt{z}}\right) dz \Rightarrow \operatorname{Ln}|x| + c_1 = \int \left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - \frac{1}{z}\right) dz$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|x| + c = \frac{-2}{\sqrt{z}} - \operatorname{Ln}|z| \Rightarrow \operatorname{Ln}|x| + c = \frac{-2}{\sqrt{z}} - \operatorname{Ln}|z|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|x| + c_1 = \frac{-2}{\sqrt{y/x}} - \operatorname{Ln}\left|\frac{y}{x}\right|$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} \to$$

حالت I: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \to$ دو خط متقاطع اند

حالت II: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \to$ دو خط موازی اند

حالت I: تغییر متغیر $\begin{cases} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{cases}$

$$\frac{dv}{du}=\frac{au+bv+ax_0+by_0+c}{a'u+b'v+a'x_0+b'y_0+c'}$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \to \text{جوابها } (x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{au+bv}{a'u+b'v} \quad *$$

*که متجانس است و با تغییر متغیر $z=\frac{v}{u}$

حالت II:

$$ax+by+c=\alpha(a'x+b'y+c')$$

$$ax+by+c=a'x+b'y+c+K$$

$$z=ax+by+c$$

مثال ۱: $(x-y-1)dx+(4y-x-1)dy=0$

حل: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y-1}{x-4y+1}$

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-4y+1=0 \end{cases} \Rightarrow -3y+2=0 \to y_0=\frac{2}{3} \qquad x_0=\frac{5}{3}$$

تغییر متغیر $\to \begin{cases} x=u+\frac{5}{3} \\ y=v+\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dv}{du}=\dfrac{u-v}{u-4v}, \quad v=zu$

$$\to z'u + z = \frac{u - uz}{u - 4uz} = \frac{1-z}{1-4z} \to z'u = \frac{1-z}{1-4z} - z$$

$$\to z'u = \frac{1-2z+4z^2}{1-4z} \to \left(\frac{1-4z}{4z^2-2z+1}\right) dz = \frac{du}{u}$$

$$\to \int \frac{du}{u} = \int \frac{-4z+1}{4z^2-2z+1}\, dz$$

$$\to \ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|4z^2-2z+1| + c_1$$

$$u = x - \frac{5}{3}$$

$$v = y - \frac{2}{3} \Rightarrow \ln\left|x - \frac{5}{3}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|4\left(\frac{y-\frac{2}{3}}{x-\frac{5}{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{y-\frac{2}{3}}{x-\frac{5}{3}}\right) + 1\right|$$

مثال ۲: $(x-y+2)dx + (y-x-4)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+2}{x-y+4} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-y+2 = z \to 1-y' = z' \to y' = 1-z'$$

$$x-y = z-2 \to \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x-y+2}{x-y+4} \Rightarrow 1-z' = \frac{z}{z+2}$$

$$\to z' = 1 - \frac{z}{2+z} = \frac{z+2-z}{z+2} = \frac{2}{z+2} \to \frac{z+2}{2}dz = dx$$

$$\to \int \left(\frac{z}{2}+1\right)dz = \int dx = x + c \to \frac{z^2}{4} + z = x + c$$

با جایگذاری z: $\frac{(x-y+2)^2}{4} + (x-y+2) = x + c$

Subject: Year: Month: Date: / /

مثال ۳؟ $y' = \dfrac{y+2}{x+y+1}$

$\rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x+y+1} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{cases} y+2=0 \rightarrow y_0=-2 \\ x+y+1=0 \rightarrow x_0=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=u+1 & dx=du \\ y=v-2 & dy=dv \end{cases}$

$\rightarrow \dfrac{dv}{du} = \dfrac{(v-2)+2}{(u+1)+(v-2)+1} = \dfrac{v}{u+v}$

متجانس است در نتیجه از تغییر متغیر $z=\dfrac{v}{u}$ استفاده می‌کنیم؛

$\rightarrow v = zu \rightarrow v' = z'u + zu'_{u} \qquad dv = u\,dz + z\,du$

$\rightarrow \dfrac{u\,dz + z\,du}{du} = \dfrac{zu}{u(z+1)} = \dfrac{z}{z+1}$

$\rightarrow \dfrac{u\,dz}{du} = \dfrac{z}{z+1} - z = \dfrac{-z^2}{z+1} \rightarrow \int \dfrac{z+1}{z^2}\,dz = \int -\dfrac{du}{u}$

$\rightarrow \ln z - \dfrac{1}{z} = -\ln u + c$

$\rightarrow \ln \dfrac{y+2}{x-1} - \dfrac{x-1}{y+2} = -\ln|x-1| + c$

تمرین ۱) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x-2y+1}{2x-y+2}\right)^2$

میران

۴) حل معادلات کامل و قابل تبدیل به معادلات کامل :

تعریف : معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوییم هرگاه $f(x,y)=c$ موجود باشد بطوریکه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=M \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=N \end{cases}$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه $Mdx+Ndy=0$ کامل باشد آن است که $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ یا $M_y=N_x$

* دیفرانسیل کل در ریاضی ۲) $f(x,y)=c \rightarrow df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

$$f(x,y)=c \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

لزوم: فرض $Mdx+Ndy=0$ حکم $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\underset{\text{کامل}}{Mdx+Ndy=0} \rightarrow f(x,y)=c \quad \frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

یادآوری : $y'=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ $\left(\dfrac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{" " } y}\right)$ مثال : $x^2y+xy^3+5x+6y=0$

$$\rightarrow y'=-\frac{2xy+y^3+5}{x^2+3y^2x+6}$$

Subject: Year: Month: Date: / /

روش حل کفایت : فرض : $M_y = N_x$

حکم : $Mdx + Ndy = 0$ کامل

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow M_y = N_x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x M dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x M(x,y)\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x M(x,y)\,dx$$

$$= N_x - M_y \overset{\text{فرض}}{=} 0$$

$$\varphi(y) = \int_b^y N(a,y)\,dy - \int_b^y \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\int_a^a M(a,y)\,dx}_{=0}\,dy$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int_b^y N(a,y)\,dy + C_1$$

$$Mdx + Ndy = 0 \xrightarrow[\text{اگر کامل باشد}]{} M_y = N_x$$

$$\Rightarrow \int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy = C_1$$

اگر در حالتی $(a,b) = (0,0)$ مشکلی ایجاد نکند می توان $a = 0$, $b = 0$ گرفت.

مثال ۱: $(15x^2y^2-y^4)\,dx+(5y^4+10x^3y-4xy^3)\,dy=0$

M N

حل

$M_y=30x^2y-4y^3 \qquad N_x=30x^2y-4y^3$

$f(x,y)=\int(15x^2y^2-y^4)\,dx+\varphi(y)=5x^3y^2-y^4x+\varphi(y)$

$\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=10x^3y-4y^3x+\varphi'(y)=N_x=10x^3y-4y^3x+5y^4$

$\rightarrow \varphi'(y)=5y^4 \rightarrow \varphi(y)=y^5+c$

جواب $\rightarrow \quad 5x^3y^2-xy^4+y^5=c$

مثال ۲: $(ye^x-\sin y)\,dx+(e^x-x\cos y)\,dy=0$

$M_y=e^x-\cos y \qquad N_x=e^x-\cos y \qquad N_x=M_y\rightarrow$ معادله کامل است

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x-x\cos y\rightarrow f(x,y)=\int(e^x-x\cos y)\,dy+\varphi(x)$

$\rightarrow f(x,y)=e^xy-x\sin y+\varphi(x)$

$\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=e^xy-\sin y+\varphi'(x) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=M=ye^x-\sin y$

$\rightarrow e^xy-\sin y+\varphi'(x)=e^xy-\sin y \Rightarrow \varphi'(x)=0\rightarrow \varphi(x)=c$

جواب $ye^x-x\sin y+c=0$

مثال ۳: $2x(ye^{x^2}-1)\,dx+e^{x^2}\,dy$

$M=2x(ye^{x^2}-1)\rightarrow \quad M_y=\dfrac{\partial M}{\partial y}=2($

$N=e^{x^2}\rightarrow N_x=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2xe^{x^2}$

$\rightarrow \quad M_y = 2x e^{x^2}$
$N_x = 2x e^{x^2} \quad \rightarrow$ معادله کامل است

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2} \rightarrow f(x,y) = \int e^{x^2} dy + \varphi(x) = e^{x^2} y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy e^{x^2} + \varphi'(x) = 2xy e^{x^2} - 2x \rightarrow \varphi'(x) = 2x$$

$$\varphi'(x) = -2x \rightarrow \varphi(x) = -x^2 + c$$

جواب : $y e^{x^2} - x^2 + c = 0$

روش ۲ : $\displaystyle\int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy = c$

$$\int_0^x (2xy e^{x^2} - 2x)\,dx + \int_0^y dy = c$$

$$\rightarrow (y e^{x^2} - x^2)\Big|_0^x + y\Big|_0^y = c \rightarrow y e^{x^2} - x^2 - y - 0 + y - 0 = c$$

$$\rightarrow \quad y e^{x^2} - x^2 = c$$

مثال ۳

$(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 8y)\,dy = 0 \rightarrow M_y = N_x = 2x$

$\rightarrow f(x,y) = \int (2xy + 3)\,dx + h(y) \Rightarrow f(x,y) = x^2 y + 3x + h(y)$

$\rightarrow f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = N \rightarrow x^2 + h'(y) = x^2 + 8y \rightarrow h'(y) = 8y$

$\rightarrow h(y) = 4y^2 + c$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2 y + 3x + 4y^2 + c \Rightarrow x^2 y + 3x + 4y^2 = c$

امتحان جواب $\leftarrow$ $\quad 2xy\,dx + x^2\,dy + 3dx + 8y\,dy = 0$

$\downarrow$

$(2xy + 3)\,dx + (x^2 + 8y)\,dy = 0$

$Mdx + Ndy = 0$

* روش تستی حل معادلات دیفرانسیل کامل :

۱) $f(x,y) = \int M^{*} dx + \int N dy$

جملاتی که مشتقشان نسبت به y صفر است یعنی شامل x هستند

x دار

مثال: معادله‌ی روبرو را حل کنید :

$(x^2 + xy\sin 2x + y\sin^2 x)dx + (x\sin^2 x)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = x\sin 2x + \sin^2 x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin^2 x + 2\sin x\cos x \times x$

$= \sin^2 x + \sin 2x \cdot x$

$\rightarrow M_y = N_x \Leftarrow$ معادله کامل است

$\Rightarrow f(x,y) = \int M^{*} dx + \int N dy = \int x^2 dx + \int x\sin^2 x\, dy$

$= \frac{x^3}{3} + xy\sin^2 x$

۲) $f(x,y) = \int M dx + \int N^{*} dy$

تمام جملاتی که مشتقشان نسبت به x صفر است

علاوه بر حالت I می‌توان از فرمول روبرو نیز استفاده کرد بسته به اینکه کدام انتگرال راحت‌تر است.

مثال: معادله‌ی روبرو را حل کنید

$(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\, dy = 0$

Subject: Year: Month: Date: / /

$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3 \sin^2 y \cos y - 2\cos y \cdot x$ ، $N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = (12x^3 \sin^2 y - 2x)\cos y$

معادله ی قبل کامل است زیرا $M_y = N_x$ در نتیجه از روش زیر میتوان استفاده کرد :

$f(x,y) = \int M dx + \int \overset{*}{N} dy = \int (4x^3 \sin^3 y - 2x\sin y)\, dx + \int 0\, dy =$

$\Rightarrow f(x,y) = \int (4x^3 \sin^3 y - 2x\sin y)\, dx = x^4 \sin^3 y - x^2 \sin y$

روش ۲

- در روش دوم معادله را دسته بندی می کنیم :

$4x^3 \sin^3 y\, dx - 2x\sin y\, dx + 3x^4 \sin^2 y \cos y\, dy - x^2 \cos y\, dy = 0$

$\rightarrow (4x^3 \sin^3 y\, dx + 3x^4 \sin^2 y \cos y\, dy) + (-2x\sin y\, dx - x^2 \cos y\, dy) = 0$

$= d(x^4 \sin^3 y) + d(-x^2 \sin y) = 0$

حال از طرفین انتگرال می گیریم $\rightarrow \int d(\quad) + \int d(\quad) = c$

$\downarrow$

$x^4 \sin^3 y - x^2 \sin y = c$

* فاکتور انتگرال (عامل انتگرال گیری):

$y\,dx - x\,dy = 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases}$ معادله کامل نیست

معادله را کامل کنیم ← معادله x عبارت

$\rightarrow \frac{1}{x^2}(y\,dx - x\,dy) = 0 \rightarrow \frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$

تعریف: اگر $M\,dx + N\,dy = 0$ کامل نباشد و بتوانیم $\mu(x,y)$ را پیدا کنیم که $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ کامل شود آنگاه $\mu(x,y)$ را فاکتور انتگرال گوئیم.

* روش پیدا کردن فاکتور انتگرال:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

شرط: $M_y \neq N_x$

$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \rightarrow \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$

$\rightarrow \mu_y \cdot M + M_y \cdot \mu = \mu_x \cdot N + N_x \cdot \mu$

حالت الف) μ فقط تابعی از x باشد ← $\mu = \mu(x)$

$\mu = \mu(x) \rightarrow \mu_x = \frac{d\mu}{dx}, \quad \mu_y = 0$ ← مشتق نسبت به y

$\rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx \rightarrow \quad g(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

اگر تابعی از x باشد

Subject: Year: Month: Date: / /

$\Rightarrow$ فاکتور انتگرال = $\mu = e^{\int g(x)\,dx}$

تمرین ۲) $y e^{-x^2} dx + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) dy = 0$ $y(1)=1$

تمرین ۳) a و b را طوری تعیین کنید که معادلات زیر کامل شوند سپس آنها را حل کنید

1) $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x+y)\,x^2\,dy = 0$ $b=3$

2) $(ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$ $b=1$

حالت الف) $\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(x)\,dx \rightarrow \ln\mu = \int g(x)\,dx$

$\Rightarrow \mu = e^{\int g(x)\,dx}$

*

$M\,dx + N\,dy = 0 \rightarrow M_y \neq N_x$ کامل نیست

$\rightarrow \mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \rightarrow (\mu M)_y = (\mu N)_x$

$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$

الف) $\mu = \mu(x) \Leftarrow$ μ تابعی از x باشد $\mu_y = 0$

$\Rightarrow \mu_x = \frac{d\mu}{dx} \rightarrow \mu M_y = \frac{d\mu}{dx} N + \mu N_x$

$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) dx \xrightarrow{\text{اگر}} g(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

$$\Rightarrow \ln\mu = \int g(x)dx \rightarrow \mu = e^{\int g(x)dx}$$ فاکتور انتگرال

مثال ۱)

$$(3x^2-y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

$$M_y = -2y \quad N_x = 2y \quad M_y \neq N_x$$

$$\Rightarrow \frac{M_y-N_x}{N} = \frac{-2y-2y}{2xy} = -2/x \Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x}$$

$$\rightarrow \mu = e^{-2\ln x} = +\frac{1}{x^2}$$

معادله کامل : $(3-\frac{y^2}{x^2})dx + \frac{2y}{x}dy = 0$

$$\rightarrow 3dx + (-\frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy) = 0$$

$$\rightarrow \int 3dx + \int -\frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2y}{x}dy = 0 \rightarrow \int 3dx + \int d(\frac{y^2}{x})$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{y^2}{x} = C$$

مثال ۲)

$$(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$$

$M_y = x \quad N_x = 2x-y \rightarrow M_y \neq N_x$: معادله کامل نیست

کامل سازی $\rightarrow \frac{M_y-N_x}{N} = \frac{x-2x+y}{x(x-y)} = \frac{y-x}{x(x-y)} = \frac{-1}{x}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}$: تابعی از x است

$$\rightarrow \mu = e^{\int g(x)dx} = e^{\int -1/x\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$\mu = \frac{1}{x} \rightarrow \mu($ معادله $) = (y - \frac{1}{x})dx + (x-y)dy = 0$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = M = y - \frac{1}{x} \Rightarrow f(x,y) = \int (y - \frac{1}{x})dx + \phi(y)$

$\rightarrow f(x,y) = yx - \ln x + \phi(y)$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = x + \phi'(y) = N = x - y \rightarrow \phi'(y) = -y$

$\rightarrow \phi(y) = -\frac{y^2}{2}$

جواب معادله: $f(x,y) = yx - \ln x - \frac{y^2}{2} = C$

روش ۲: $\underbrace{y\,dx + x\,dy}_{d(xy)} - \frac{1}{x}dx - y\,dy = 0 \Rightarrow xy - \ln x - \frac{y^2}{2} = C$

ب- $\mu = \mu(y)$: μ تابعی از y باشد

$\mu_y = \frac{d\mu}{dy} \rightarrow \frac{d\mu}{dy} M + \mu M_y = \mu N_x$

$\rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = (\frac{M_y - N_x}{-M})dy$ اگر $h(y) = \frac{M_y - N_x}{-M}$

فاکتور انتگرال $\Rightarrow \mu = e^{\int h(y)dy}$

مثال ۱) $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$

$M_y = 0 \quad N_x = -(x+1)e^x \rightarrow M_y - N_x = (x+1)e^x$

$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{-M} = -1 \Rightarrow h(y) = -1$

$\rightarrow \mu = e^{-\int dy} = e^{-y}$

تکمیل سازی $\rightarrow \mu$ (معادله)

معادله: $e^{x-y}(x+1)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$

دسته بندی $\rightarrow$ $(e^{x-y}(x+1)dx - xe^{x-y}dy) + ydy = 0$

$\rightarrow d(xe^{x-y}) + ydy = 0 \rightarrow xe^{x-y} + \frac{y^2}{2} = c$

مثال ۲) $0 = (2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy$

$M_y = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \qquad M_y \neq N_x$

$N_x = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$

$\rightarrow M_y - N_x = 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4 = 4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)$

$\rightarrow \dfrac{M_y - N_x}{-M} = \dfrac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{-y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -\dfrac{4}{y} = h(y)$

$h(y) = -\frac{4}{y} \Rightarrow \mu = e^{\int h(y)dy} = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = e^{-4\ln y} = y^{-4}$

$\rightarrow \mu = y^{-4}$

$\rightarrow$ معادله: $(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3})dx + (x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4})dy = 0$

$(2xe^y dx + x^2e^y dy) + (\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy) + (\frac{1}{y^3}dx - \frac{3x}{y^4}dy) = 0$

$\rightarrow d(x^2e^y) + d(\frac{x^2}{y}) + d(\frac{x}{y^3}) = 0 \rightarrow x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$

Subject: Year: Month: Date: / /

$xy = z$ $\quad \mu - z <^{x}_{y} \Rightarrow \mu_x = \frac{d\mu}{dz} \times \frac{\partial z}{\partial x}$ $\quad \mu = \mu(x \cdot y)$ -۲.

$\rightarrow \mu_x = y \frac{d\mu}{dz} \qquad \mu_y = x \frac{d\mu}{dz}$

$$xM \frac{d\mu}{dz} + \mu M_y = yN \frac{d\mu}{dz} + \mu \cdot N_x$$

$\rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{M_y - N_x}{yN - xM}\right) dz$ اگر $h(z) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$

فاکتور انتگرال $\rightarrow \mu = e^{\int h(z)\, dz}$

مثال ۱) $(2xy^2 + y)\,dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)\,dy = 0$

$M_y = 4xy + 1 \qquad N_x = 1 + 4xy - 4x^3y^3 \qquad M_y \neq N_x$: معادله کامل نیست

$M_y - N_x = 4x^3y^3 \rightarrow \quad g(x) \neq \frac{M_y - N_x}{N} \qquad h(y) \neq \frac{M_y - N_x}{-M}$

$\rightarrow \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{-4}{xy} = \frac{-4}{z}$ $\quad \boxed{z = xy}$

$\rightarrow \mu = e^{\int h(z) dz} = \frac{1}{z^4} = \frac{1}{x^4y^4}$

کامل سازی $\rightarrow$ معادله : $\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y^3}\right) dx + \left(\frac{1}{x^3y^4} + \frac{2}{x^2y^3} - \frac{1}{y}\right) dy = 0$

دسته بندی دیفرانسیلی $\rightarrow \left(\frac{2}{x^3y^2} dx + \frac{2}{x^2y^3} dy\right) + \left(\frac{1}{x^4y^3} dx + \frac{1}{x^3y^4} dy\right) - \frac{1}{y} dy = 0$

میران

$$\Rightarrow d\left(\frac{-1}{x^2y^2}\right)+d\left(-\frac{1}{3x^3y^3}\right)-d(\ln y)=0$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم $\Rightarrow \dfrac{-1}{x^2y^2}-\dfrac{1}{3x^3y^3}-\ln y=c$

مثال ۲) $x\,dy+y\,dx+3x^3y^4\,dy=0$

$M_y=1 \qquad N_x=1+9x^2y^4 \qquad M_y\neq N_x$

$$\rightarrow M_y-N_x=-9x^2y^4 \rightarrow \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=\frac{-9x^2y^4}{xy+3x^3y^5-xy}=\frac{-3}{xy}$$

$\rightarrow h(z)=-\dfrac{3}{z}$ فرض: $z=xy$ $\rightarrow \mu=\dfrac{1}{z^3}$

$$\rightarrow \mu=e^{\int h(z)dz}=z^{-3}=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{x^3y^3}$$

کامل‌سازی $\Rightarrow \dfrac{1}{x^2y^3}dy+\dfrac{1}{x^3y^2}dx+3y\,dy=0$ (معادله × فاکتور انتگرال)

دسته‌بندی: $\left(\dfrac{1}{x^2y^3}dy+\dfrac{1}{x^3y^2}dx\right)+3y\,dy=0$

$$\rightarrow d\left(\frac{-1}{2x^2y^2}\right)+d\left(3y^2/2\right)=0 \rightarrow \frac{-1}{2x^2y^2}+\frac{3y^2}{2}=c$$

$d(uv)=u\,dv+v\,du$

روش

مثال : $(4xy+3y^4)dx+(2x^2+5xy^3)dy=0$

$$\mu = x^{\alpha} y^{\beta} \rightarrow (4x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+3x^{\alpha}y^{4+\beta})dx+(2x^{\alpha+2}y^{\beta}+5x^{\alpha+1}y^{\beta+3})dy=0$$

$$\rightarrow M_y = 4x^{\alpha+1}(\beta+1)y^{\beta}+3x^{\alpha}(\beta+4)y^{\beta+3}$$

$$\rightarrow N_x = 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta}+5(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

$\rightarrow$ شرط کامل بودن : $M_y = N_x \rightarrow \begin{cases} 2(\alpha+2)=4(\beta+1) \\ 3(\beta+4)=5(\alpha+1) \end{cases}$

$$M_y = N_x \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 4\beta \rightarrow \alpha = 2\beta \\ 5\alpha = 3\beta+7 \longrightarrow \beta=1 \ , \ \alpha=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu = x^2 y \rightarrow$ معادله کامل : $(4x^3y^2+3x^2y^5)dx+(2x^4y+5x^3y^4)dy=0$

$$\rightarrow (4x^3y^2\,dx+2x^4y\,dy)+(3x^2y^5\,dx+5x^3y^4\,dy)=0$$

$$\rightarrow d(x^4y^2)+d(x^3y^5)=0 \rightarrow x^4y^2+x^3y^5=c$$

مثال: فاکتور انتگرال بصورت $\mu=\mu(x^2+y^2)$ را برای معادله‌ی زیر پیدا کرده و سپس آن را حل کنید:

$$(x+x^4+2x^2y^2+y^4)\,dx+y\,dy=0$$

$$\to \mu=\mu(x^2+y^2) \quad , \quad x^2+y^2=z \Rightarrow \mu=\mu(z)$$ μ تابعی از z است

- حال با μ فرضی معادله را کامل می‌کنیم و شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\mu(x+x^4+2x^2y^2+y^4)\,dx+\mu y\,dy=0 \to M_y=N_x$$: شرط کامل بودن

$$\Rightarrow M_y=(\mu(x+x^4+2x^2y^2+y^4))_y \qquad N_x=(\mu y)_x$$

$$\to M_y=\mu_y(x+x^4+2x^2y^2+y^4)+\mu(0+0+4x^2y+4y^3)$$

$$\to N_x=\mu_x y+0(\mu)$$ ⇐ مشتق دومی در اولی + مشتق اولی در دومی

$$\Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow \mu_y(x+x^4+2x^2y^2+y^4)+\mu(4x^2y+4y^3)=\mu_x y \quad *$$

$$\mu-z\begin{matrix} x \\ y\end{matrix} \qquad \Rightarrow \mu_y=\frac{d\mu}{dz}\times\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad \mu_x=\frac{d\mu}{dz}\times\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z=x^2+y^2 \to z_x=2x \, , \, z_y=2y \qquad \mu_y=\frac{d\mu}{dz}(2y) \qquad \mu_x=\frac{d\mu}{dz}(2x)$$

$*$ ادامه $$\Rightarrow \frac{d\mu}{dz}(2y)(x+x^4+2x^2y^2+y^4)+\mu(4x^2y+4y^3)=\frac{d\mu}{dz}(2xy)$$

$$\to \frac{d\mu}{dz}(2xy+2y(x^4+2x^2y^2+y^4)-2xy)=-(4x^2y+4y^3)\mu$$

$$\to \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{4y(x^2+y^2)}{2y(x^2+y^2)^2}dz=-\frac{2}{x^2+y^2}dz=-\frac{2}{z}dz$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{z}\,dz \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{2}{z}\,dz \Rightarrow Ln\,\mu = -\int \frac{2}{z}\,dz$$

$$\Rightarrow Ln\,\mu = -2\,Ln\,z \Rightarrow \mu = z^{-2} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

- حال چون فاکتور انتگرال مناسب را یافتیم معادله را کامل کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^2} + dx = 0 \Rightarrow d\left(\frac{-1}{2(x^2+y^2)}\right) + d(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2(x^2+y^2)} + x = C_1$$ جواب معادله:

- مثال ۱ (صفحه‌ی بعد):

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y - \sin x}{x}\right)dx + dy = 0$$

$$\Rightarrow M_y = \frac{1}{x} \quad N_x = 0 \Rightarrow M_y - N_x = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x} = g(x)$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int g(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{Ln\,x} = x \Rightarrow \mu = x$$

$$\Rightarrow (y - \sin x)\,dx + x\,dy = 0 \Rightarrow (x\,dy + y\,dx) - \sin x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow d(xy) + d(\cos x) = 0 \Rightarrow xy + \cos x = C_1$$

۳) حل معادلات خطی و معادلات قابل تبدیل به خطی :

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x) \to y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{R(x)}{a_1(x)}$$

$$\to y' + P(x)y = Q(x)$$

$$dy + (P(x)y - Q(x))dx = 0 \to M = P(x)y - Q(x), \quad N = 1$$

$$\to M_y = P(x) \qquad N_x = 0$$

$$\to \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{P(x)}{1} = P(x) \to \mu = e^{\int P(x)dx}$$

معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم ←

$$y' e^{\int P(x)dx} + P(x) e^{\int P(x)dx} y = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$\downarrow$$

$$\left(y e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$\to y e^{\int P(x)dx} = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} + c_1$$

مثال ۱)

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x} \qquad x \neq 0$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \to \mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{Lnx} = x \quad \leftarrow \text{فاکتور انتگرال}$$

$$\to xy' + y = \sin x \to (xy)' = \sin x \to \int (xy)' = \int \sin x\, dx$$

$$\to xy = -\cos x + c_1$$

مثال ۱) را می‌توان از طریق کامل سازی نیز حل کرد (رجوع شود به صفحه‌ی قبل)

مثال ۲

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 3$$

$$\to y' + (\cot x)y = 2\cos x \qquad P(x) = \cot x$$

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ln\sin x} = \sin x$$

$$\to (\sin x)y' + (\cot x)\sin x(y) = 2\sin x\cos x$$

$$\to (\sin x)y' + (\cos x)y = 2\sin x\cos x \to (y\sin x)' = 2\sin x\cos x$$

جواب $\to \quad y\sin x = \sin^2 x + c$ یا $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$

تعیین c $\to \quad 3\sin\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + c \to c = 2$

جواب نهایی $\to \quad y\sin x = \sin^2 x + 2$

مثال ۳

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2} \to P(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\to \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$$

$$\to (1+x^2)y' + (2x)y = 1 \to ((1+x^2)y)' = 1 \to ((1+x^2)y)' = \int dx$$

$$\to (1+x^2)y = c + x$$

$$\to y = \frac{x+c}{1+x^2}$$

مثال ۴

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x} \qquad y > 0$$

حل: $\begin{matrix} x \to y \\ y \to x \end{matrix}$ تبدیل $\Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{2x\ln x + x - y}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\ln x + x - y}{x} = 2\ln x + 1 - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2\ln(x) + 1 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

$$\Rightarrow xy' + y = 2x\ln x + x \Rightarrow (xy)' = 2x\ln x + x$$

$$\Rightarrow xy = \underset{*}{\int (2x\ln x + x)\, dx} = 2\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{2} + c$$

$$* \quad \int x \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx$$

جواب $\Rightarrow xy = x^2 \ln y + c \Leftarrow$ حال جای x و y را عوض می‌کنیم چون در ابتدا x و y را تبدیل کرده بودیم

تمرین ۱) معادله‌ی روبرو را حل کنید $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

تمرین ۲) عامل انتگرال بصورت $\mu = \mu(x^2+y^2)$ برای معادله زیر پیدا کنید و آن را حل کنید

$$(x^2 + y^2 - x)\,dx - y\,dy = 0$$

تمرین ۳) عامل انتگرال بصورت $\mu = \mu(xy)$ برای معادله زیر پیدا کنید و آن را حل کنید

$$(2xy^2 + y)\,dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)\,dy = 0$$

۲) حل معادله‌ی برنولی

معادله برنولی $\Leftarrow y' + P(x)y = Q(x)y^n$

اگر $n=0 \leftarrow$ معادله خطی

اگر $n=1 \leftarrow$ معادله جدایی پذیر

اگر $n \neq 0, 1 \leftarrow$ معادله برنولی

$$z = y^{1-n} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot y^n$$

$$\rightarrow (1-n)y^{-n}\left(\frac{1}{1-n}y^n\frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n\right)$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)\cdot z = (1-n)Q(x)$$

مثال ۱) $x^2y' + 2xy - y^5 = 0$

$$\rightarrow y' + \frac{2}{x}y = y^5x^{-2} \Rightarrow z = y^{-4} \rightarrow y = z^{-1/4}$$

$$y = z^{-1/4} \rightarrow y' = -\tfrac{1}{4}z^{-1-1/4}z' = -\tfrac{1}{4}z^{-5/4}z'$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4}z'z^{-5/4} + \frac{2}{x}z^{-1/4} = z^{-5/4}\cdot x^{-2}$$

$$\rightarrow z' - \frac{8}{x}z = -4x^{-2} \rightarrow P(x) = -\frac{8}{x}$$

به معادله‌ی خطی تبدیل شد

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = \frac{1}{x^8}$$

فاکتور انتگرال

$\rightarrow \frac{z'}{x^8} - \frac{8}{x^9} z = -\frac{4}{x^{10}} \rightarrow \left(\frac{z}{x^8}\right)' = -\frac{4}{x^{10}}$

$\rightarrow \frac{z}{x^8} = \frac{4}{9x^9} + c \rightarrow \frac{1}{x^8 y^4} = \frac{4}{9x^9} + c$

مثال ۲) $y' - 4y = 2e^x\sqrt{y}$ $\quad y(0) = 2$

حل: $* \; y' - 4y = 2e^x y^{1/2} \rightarrow n = 1/2 \Rightarrow z = y^{1-n} = y^{1/2}$

$\rightarrow z = y^{1/2} \rightarrow (z)^2 = (y^{1/2})^2 \rightarrow y = z^2 \rightarrow y' = 2zz'$

$* \rightarrow 2zz' - 4(z^2) = 2e^x z \Rightarrow z' - 2z = e^x$

$\rightarrow P(x) = -2 \rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$

$\rightarrow e^{-2x} z' - 2z e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow (e^{-2x} z)' = e^{-x}$

از طرفین انتگرال می‌گیریم $\rightarrow (e^{-2x} . z) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$

حال به جای z قرار میدهیم $y^{1/2}$:

$\rightarrow e^{-2x} y^{1/2} = -e^{-x} + c$ و $y(0) = 2$

$\rightarrow e^{-2(0)} \times 2^{1/2} = -e^{-(0)} + c \rightarrow \sqrt{2} = -1 + c \rightarrow c = 1 + \sqrt{2}$

معادله $\Rightarrow e^{-2x} . \sqrt{y} = -e^{-x} + 1 + \sqrt{2}$

د) حل معادله ی ریکاتی:

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

اگر $R(x)=0$ ← خطی

اگر $P(x)=0$ ← معادله ی برنولی

- برای حل این معادله یک جواب معلوم را باید داشته باشیم و فرض کنید y_1 یک جواب معادله باشد:

$$y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

$$\Rightarrow y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x) + Q(x)y_1 + \frac{R(x)}{z} + R(x)y_1^2 + \frac{R(x)}{z^2} + \frac{2R(x)y_1}{z}$$

$$y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$$

$$\Rightarrow z' = -Q(x)z - R(x) - 2R(x)y_1 z$$

$$\Rightarrow z' + (Q(x) + 2R(x))z = -R(x) \quad *$$

معادله خطی است و آن را باید حل کرد

مثال ۱: معادله ی روبرو $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ را با فرض $y_1 = -x^2$ حل کنید:

$$\Rightarrow y_1 = -x^2 \Rightarrow y_1' = -2x \Rightarrow -2x = x^3 - 2x - x^3$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 0$$

$$y = -x^2 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -2x - \frac{z'}{z^2}$$

$$\Rightarrow -2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{z}\right)^2$$

$\to -2x - \frac{z'}{z^2} = x^3 - 2x + \frac{2}{xz} - x^3 - \frac{1}{xz^2} + \frac{2x}{z} \to -z' = \frac{2z}{x} - \frac{1}{x} + 2xz$

$\to z' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)z = \frac{1}{x}$ ← معادله خطی است

$\to P(x) = \frac{2}{x} + 2x \to \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\ln x^2 + x^2} = x^2 e^{x^2}$

$\to x^2 e^{x^2}\left(z' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)z\right) = x e^{x^2}$

$\to x^2 e^{x^2} z' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)x^2 e^{x^2} z = x e^{x^2}$

$\to (x^2 e^{x^2} z)' = x e^{x^2} \to x^2 e^{x^2} z = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

$\to z = \frac{1}{2x^2} + \frac{c e^{-x^2}}{x^2}$

$\to y = -x^2 + \cfrac{1}{\frac{1}{2x^2} + \frac{c e^{-x^2}}{x^2}}$

مثال ۲ $\quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 \quad , \quad y_1 = \frac{1}{x}$

$y_1 = \frac{1}{x} \to y_1' = \frac{-1}{x^2} \to$ جایگذاری در معادله $\to -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$

$\to 0 = 0$

جایگذاری در معادله $\to y_1' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y_1}{x} + y_1^2$

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \to y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

$\to -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}$

$\rightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{}{xz} + \frac{1}{z^2} \rightarrow -z' = \frac{z}{x} + 1$

$\Rightarrow z' + (\frac{1}{x})z = -1 \rightarrow$ معادله خطی است ($y' + P(x)y = Q(x)$)

$\rightarrow P(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \mu = e^{\int P(x)dx} = e^{Ln x} = x \rightarrow \mu = x$

کامل سازی

$\rightarrow \mu(z' + \frac{1}{x}z) = -\mu \rightarrow xz' + z = -x$

غلط حل شده

$\rightarrow (x^3 z)' = -x^3 \rightarrow x^3 z = \int -x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + c$

$\rightarrow xz = -\frac{x^2}{2} + c_1 \rightarrow z = -\frac{x}{2} + c$ *

$\rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{-x}{2} + c}$

$$* \begin{cases} y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \rightarrow \frac{1}{z} = y - \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-x/2 + c} \\ y = y_1 + \frac{1}{z} \end{cases}$$

د) حل معادلات خاص

۱- حل معادله کلرو : $y = xy' + \varphi(y')$

$$y' = p \to \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx \to y = xp + \varphi(p)$$

$$\Rightarrow \cancel{dy} = x\,dp + \cancel{p\,dx} + \varphi'(p)\,dp \Rightarrow x\,dp + \varphi'(p)\,dp = 0$$

$$\to dp\,(x + \varphi'(p)) = 0 \to \begin{cases} dp = 0 \to p = c & \text{I} \\ x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow x = -\varphi'(p) & \text{II} \end{cases}$$

I $p = c \to y = cx + \varphi(c)$ جواب عمومی

II $x = -\varphi'(p) \to y = -p\varphi'(p) + \varphi(p)$ جواب استثنایی

مثال ۱) $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$

$$y' = p \to y = xp - \frac{1}{p^2} \to \cancel{dy} = \cancel{p\,dx} + x\,dp + \frac{2}{p^3}\,dp$$

$$\to dp\left(x + \frac{2}{p^3}\right) = 0 \to \begin{cases} dp = 0 \to p = c \to y = cx - \frac{1}{c^2} \\ x + \frac{2}{p^3} = 0 \to x = -\frac{2}{p^3} \; * \end{cases}$$

$$* \quad x = -\frac{2}{p^3} \to y = -\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^2} = -\frac{3}{p^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-2/p^3}{-\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^2}} = \frac{-2/p^3}{-3/p^2} = \frac{2}{3p}$$

مثال ۲) معادله‌ی روبرو را حل کنید. $y = xy' + \ln y'$

$y' = p \Rightarrow y = xp + \ln p \Rightarrow dy = x\,dp + p\,dx + \frac{1}{p}dp$

و

$y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$\Rightarrow dy = x\,dp + p\,dx + \frac{1}{p}dp \Rightarrow x\,dp + \frac{1}{p}dp = 0$

$$\Rightarrow dp\left(x + \frac{1}{p}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} dp = 0 \Rightarrow p = c_1 & \text{I} \\ x + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{p} & \text{II} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I) $p = c_1 \Rightarrow y = c x + \ln c_1$

II) $x = -\frac{1}{p} \Rightarrow y = -1 + \ln p$

۲- حل معادلات مرتبه‌ی دوم ناقص:

$f(x, y', y'') = 0$ I

$f(y, y', y'') = 0$ II

علت این که به معادلات روبرو ناقص می‌گویند این است که اول y ندارد و معادله‌ی دوم x ندارد

حل I

$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow f(x, y', y'') = f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$

$\Rightarrow p = h(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x, c_1) \Rightarrow dy = h(x, c_1)\,dx$

$\Rightarrow y = \int h(x, c_1)\,dx + c_2$

مثال ۱) $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0$ ← معادله‌ی مرتبه‌ی دوم ناقص چون y ندارد

$\Rightarrow x^2p' + 2xp - 1 = 0 \Rightarrow p' + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$

$\Rightarrow x^2p' + 2xp = 1 \Rightarrow (x^2p)' = 1 \Rightarrow x^2p = \int 1\,dx = x + c_1$

$$Px^2 = x + c \Rightarrow P = \frac{x+c}{x^2} \quad , \quad P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+c}{x^2} \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}\right)dx \Rightarrow y = \ln x + \left(-\frac{c}{x}\right) + D$$

$$\Rightarrow y = \ln x + \left(\frac{-c}{x}\right) + D$$

مثال ۲) $y'' = y'(1+y')$

$y' = P \Rightarrow y'' = P' \Rightarrow$ جایگذاری : $P' = P(1+P) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = P + P^2$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P^2+P} = dx \Rightarrow \int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}\right) dP = \int dx$$

$$\Rightarrow \ln P - \ln(P+1) = x + c \Rightarrow \ln \frac{P}{P+1} = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P+1} = e^{x+c} = e^x \cdot e^c = c_1 e^x \Rightarrow P = (P+1)e^x \cdot c_1$$

$$\Rightarrow P(1 - c_1 e^x) = c_1 e^x \quad , \quad P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1 e^x}{1 - c_1 e^x} \Rightarrow dy = \left(\frac{c_1 e^x}{1 - c_1 e^x}\right) dx$$

$$\Rightarrow y = -\ln(1 - c_1 e^x) + c''$$

حل II : حل معادله‌ی مرتبه‌ی دوم ناقص : $f(y, y', y'') = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = P \qquad y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy}\cdot P$$

$$\to f\left(y, P, \frac{dP}{dx}\right) = 0 \to f\left(y, P, P\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

$$P = g(y, c_1) \to \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \to \frac{dy}{g(y, c_1)} = dx$$

$$\to \int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + D$$

مثال ۱) معادله‌ی $y'^2 + yy'' = 1$ را حل کنید.

$$y' = P \to P^2 + yP\frac{dP}{dy} = 1 \to \frac{dP}{dy} + \frac{P}{y} = \frac{1}{yP} = \frac{1}{y}P^{-1}$$

$$z = P^{1-(-1)} = P^2 \to P = z^{1/2} \to P' = \frac{1}{2}z' z^{-1/2}$$

$$\to \frac{1}{2}z' z^{-1/2} + \frac{1}{y}z^{1/2} = \frac{1}{y}z^{-1/2} \to z' + \frac{2z}{y} = \frac{2}{y}$$

معادله‌ی خطی

$$\to \mu = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

$$\to z'y^2 + 2zy = 2y \Rightarrow (zy^2)' = 2y \to zy^2 = y^2 + c_1$$

$$\to P^2y^2 = y^2 + c_1 \to P = \pm\frac{\sqrt{c + y^2}}{y} \to \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{c + y^2}}{y}$$

$$\to \int \frac{y\,dy}{\sqrt{c + y^2}} = \int \pm dx \to \sqrt{c + y^2} = \pm x + D$$

مثال ۲) $yy''-y'^{2}=y'$ ، $y(1)=4$ و $y'(1)=1$.

روش ①

$$\to yP\frac{dP}{dy}-P^{2}=P \to P\left(y\frac{dP}{dy}-P-1\right)=0 \to P=0$$

یک جواب : $P=0 \Rightarrow y=c_1 \Rightarrow y=4$

$$\to y\frac{dP}{dy}-P=1 \to \frac{dP}{dy}-\frac{P}{y}=\frac{1}{y}$$

$$\to \mu=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y^{-1}}=\frac{1}{y}$$

$$\to \frac{1}{y}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{P}{y}\right)=\frac{1}{y^{2}} \to \frac{1}{y}\frac{dP}{dy}-\frac{P}{y^{2}}=\frac{1}{y^{2}}$$

$$\to \left(\frac{P}{y}\right)'=\frac{1}{y^{2}} \to \frac{P}{y}=\int\frac{1}{y^{2}}dy \Rightarrow \frac{P}{y}=-\frac{1}{y}+c_1$$

$$\to \frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+c_1 \to c_1=1/2$$

$$\to \frac{P}{y}=-\frac{1}{y}+\frac{1}{2} \to P=-1+\frac{y}{2} \to \frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{2}$$

$$\to \frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{2} \to \int\frac{2dy}{y-2}=\int dx \to 2\ln|(y-2)|=x+c_1$$

$$\to 2\ln|y-2|=x+2\ln 2-1 \to \quad 2\ln 2=1+c_1 \Rightarrow c_1=2\ln 2-1$$

$$\to 2\ln\left|\frac{y-2}{2}\right|=x-1 \to \frac{y-2}{2}=e^{\frac{x-1}{2}}$$

$$\to y=2e^{\frac{x-1}{2}}+2$$

روش ②

$$y'=P \to y''=P\frac{dP}{dy} \to y\left(P\frac{dP}{dy}\right)-P^{2}=P \to \frac{yPdP}{dy}=P+P^{2}$$

$$\to \frac{PdP}{P(P+1)}=\frac{dy}{y} \to \ln(P+1)=\ln y+c_1=\ln y+\ln c_1=\ln yc_1$$

$$\to P+1=yc_1 ,\ y'=P \to y'=yc-1 \to \frac{dy}{yc-1}=dx \to \frac{1}{c}\ln(yc-1)=x+D$$

Subject: Year: Month: Date: / /

$y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$ $\qquad yy'' = y'^{2} + y'y^{2}$ مثال س

$\Rightarrow yp\frac{dp}{dy} = p^{2} + py^{2} \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy} - p - y^{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c_1 \\ y\frac{dp}{dy} - p - y^{2} = 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = y^{2} + p \end{cases}$$

$\Rightarrow y\frac{dp}{dy} - p = y^{2} \Rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = y \Rightarrow \mu = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y^{2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{p}{y}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{p}{y} = y + c_1$

$\Rightarrow p = y^{2} + cy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^{2} + cy \Rightarrow \int \frac{dy}{y^{2} + cy} = \int dx$

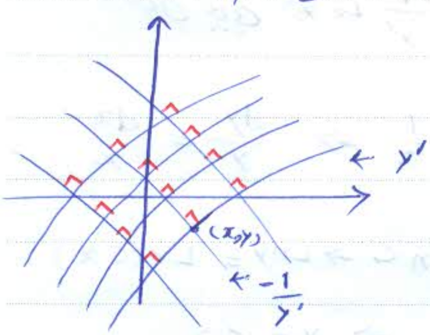
$\Rightarrow \int \frac{dy}{(y + c/2)^{2} - c^{2}/4} = x + c_1 \Rightarrow \frac{2}{c_1}\tanh^{-1}\left(\frac{y + c/2}{c/2}\right) = x + c_1$

$\int \frac{dx}{x^{2} + a^{2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c_1$

$\int \frac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + c_1$

کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول :

۱- مسیرهای قائم : فرض کنید $f(x, y, c) = 0$ مسیرهایی در صفحه باشند می‌خواهیم معادله‌ی مسیرهایی را بدست آوریم که بر این مسیرها در نقاط تقاطع قائم هستند.



- ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل مسیرها را بدست می‌آوریم :

$$g(x, y, y') = 0$$

سپس بجای y' ما $-\frac{1}{y'}$ را قرار میدهیم :

$y' \to -\frac{1}{y'}$ $$g(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$$

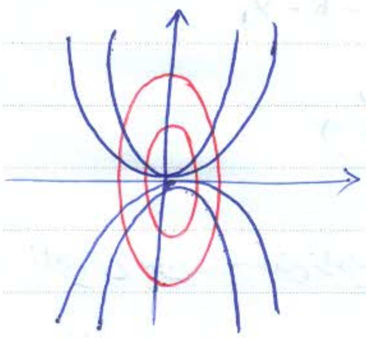
این معادله دیفرانسیل دسته مسیرهای قائم است.

مثال : مطلوبست محاسبه‌ی معادله دسته مسیرهای قائم بر منحنی $y = cx^2$.

$$y = cx^2 \to y' = 2cx \to c = \frac{y'}{2x} \to y = \left(\frac{y'}{2x}\right)x^2 = \frac{y'x}{2}$$

$$\to y' = \frac{2y}{x} \to -\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x} \to 2yy' = -x \to y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

⇐ معادله دسته مسیرهای قائم $y^2 + \frac{x^2}{2} = c$ (بصورت بیضی است)



مثال ۲) مطلوبست معادله دسته مسیرهای قائم بر $x^2+y^2=a^2$.

$$x^2+y^2=a^2 \to 2x+2yy'=0 \to x+yy'=0$$

معادله‌ی دایره به شعاع a

معادله‌ی دیفرانسیل دایره فوق

- حال بجای y' ما $-\frac{1}{y'}$ را قرار میدهیم:

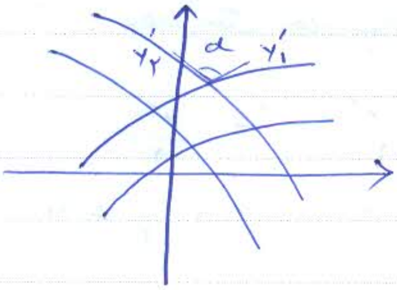
$$\to x+y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0$$

$$\to x=\frac{y}{y'} \to \frac{y'}{y}=\frac{1}{x} \to \frac{dy}{y\,dx}=\frac{1}{x} \to \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

$$\to \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \to \ln y=\ln x+\ln c \to \ln y=\ln(cx)$$

معادله‌ی شعاعهای دایره است که از مرکز می‌گذرند و بر دایره عمود هستند. $\leftarrow y=cx$

۲- معادله‌ی دسته مسیرهایی که با مسیرهای اولی در نقاط تقاطع زاویه‌ی α بسازد؟



معادله دیفرانسیل $\to g(x,y,y')=0$

$$\tan\alpha = K = \frac{y_2'-y_1'}{1+y_1'y_2'}$$

$$\to K+Ky_1'y_2' = y_2'-y_1' \to y_2'(Ky_1'-1)=-K-y_1'$$

$$\to y_2'=\frac{-K-y_1'}{Ky_1'-1} \to g\left(x,y,\frac{-K-y'}{Ky'-1}\right)$$

جای‌گذاری

زاویه‌ی بین دو منحنی زاویه‌ی بین مماسهای دو منحنی در یک نقطه می‌شود.

مثال: مطلوبست معادله دسته مسیرهایی که با مسیرهای $x^2-y^2=c^2$ زاویه $\frac{\pi}{4}$ بسازد.

$x^2-y^2=c^2 \to 2x-2yy'=0 \to x-yy'=0$

$\to 1=\dfrac{m-y'}{1+my'} \to 1+my'=m-y' \to m(1-y')=y'+1$

$y'_2=m$ درواقع

$\to m=\dfrac{1+y'}{1-y'}$

$\to x-y\left(\dfrac{1+y'}{1-y'}\right)=0 \to x(1-y')-y(1+y')=0$

$\to y'(-x-y)=-x+y \to y'=\dfrac{y-x}{-y-x} \to y'=\dfrac{x-y}{x+y}$

$y=zx \to z'x+z=\dfrac{x-zx}{x+zx} \to x\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1-z}{1+z}-z$

$\to \int \dfrac{1+z}{-z^2-2z+1}dz=\int\dfrac{dx}{x} \to -\dfrac{1}{2}\ln|z^2+2z-1|=\ln|x|+c$

$\to -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{2y}{x}-1\right|=\ln|x|+c$

۳ - مسائل رشد و زوال :

مثال : اگر جمعیت کره ی زمین در سال ۱۹۷۰ مساوی ۳/۶ میلیارد نفر فرض شود و نرخ رشد جمعیت ۲ ٪ باشد در چه سالی جمعیت کره ی زمین ۵۰ میلیارد نفر خواهد شد ؟

زمان	جمعیت
t	Q
$t+nt$	$Q+nQ$

افزایش متوسط : $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$

$\to \dfrac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=0/02Q \to \dfrac{dQ}{Q}=0/02\,dt$

$\Rightarrow \ln Q = \%02t + C \Rightarrow \ln 33 = \%02 \times 0 + C \Rightarrow C = \ln 33$

$\Rightarrow \ln Q = \%02t + \ln 33 \Rightarrow Q = 33e^{\%02t}$

$\Rightarrow 50 = 33e^{\%02t} \Rightarrow \ln 50 = \ln 33 + \%02t$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 50 - \ln 33}{\%02} \Rightarrow t = \dfrac{100 \ln \frac{50}{33}}{2} = 50 \ln \dfrac{50}{33}$

$\Rightarrow t = 13.59$ سال طول می‌کشد

مثال ۲) نیم عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۱۵۰۰ سال است الف- پس از ۴۵۰۰ سال چند درصد از ماده‌ی رادیواکتیو باقی می‌ماند ب- پس از چند سال $\frac{1}{10}$ از مقدار اصلی ماده باقی می‌ماند؟

زمان t — مقدار Q ← در زمان t مقدار ماده رادیواکتیو Q می‌باشد

$t + \Delta t \qquad Q + \Delta Q \qquad \Delta Q < 0$: تجزیه می‌شود

$\Rightarrow \Delta t \rightarrow \Delta Q$

مقدار متوسط $= \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ $\qquad \dfrac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = -kQ$

$\Rightarrow \dfrac{dQ}{dt} = -kQ \Rightarrow \dfrac{dQ}{Q} = -k\,dt \Rightarrow \ln Q = -kt + C$

$\Rightarrow \ln Q_0 = -k(0) + C$

$\Rightarrow C = \ln Q_0$

$\Rightarrow Q = Q_0 e^{-t} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-kt}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-k(1500)} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -1500k \Rightarrow k = \dfrac{\ln 2}{1500}$

$$\Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{1500} t} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{1500} \times 4500} = Q_0 e^{-3\ln 2}$$

پس از ۴۵۰۰ سال

$$= \frac{Q_0}{8}$$

$$Q = \frac{Q_0}{8}$$

$$1500 \qquad \frac{1500}{8}$$

$$100 \qquad x \qquad \Rightarrow x = 12.5\ \%$$

ب

$$\Rightarrow \frac{1}{10} Q_0 = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{1500} \times t} \Rightarrow -\ln 10 = -\frac{\ln 2}{1500} \times t$$

زمان لازم برای باقی ماندن ۱۰٪ از ماده $\Rightarrow t = \dfrac{\ln 10}{\frac{\ln 2}{1500}} = 1500 \log_2 10$

جواب قسمت ب $\Rightarrow t = 1500 \log_2 10$

مثال: (قانون خنک سازی نیوتون) ظرفی با دمای ۷۰ درجه ی فارنهایت را در اتاقی با دمای ۱۰ درجه ی فارنهایت قرار میدهیم بعد از ۳ دقیقه دمای ظرف به ۲۳ درجه ی فارنهایت می رسد دمای ظرف را بصورت تابعی از زمان تعیین کنید.

زمان t دما T در زمان t دما T است

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - \underbrace{T_0}_{\text{دمای محیط}}) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -K(T-10) \Rightarrow \frac{dT}{T-10} = -K\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-10} = -kt + C \Rightarrow \ln|T-10| = -kt + C$$

$$t = 0 \Rightarrow \ln|70-10| = -K(0) + C \Rightarrow C = \ln 60$$

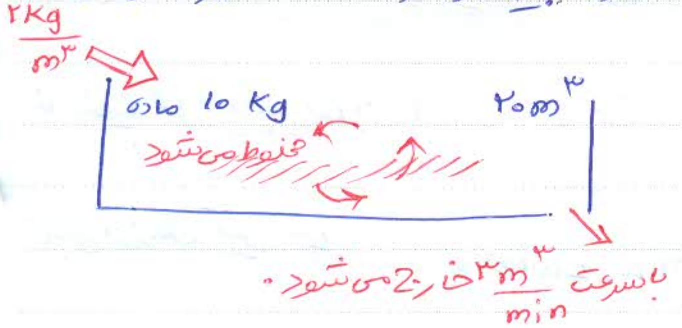
$$\to \ln\left|\frac{T-10}{60}\right| = -kt \to \frac{T-10}{60} = e^{-kt} \to T = 60e^{-kt}+10$$

$$T = 60e^{-kt}+10 \to t=3 \to T=23 \to 23 = 10 + 60e^{-k(3)}$$

$$\to 13 = 60e^{-3k} \to \ln 13 = \ln 60 - 3k \to k = \frac{1}{3}\ln\frac{60}{13}$$

$$\to k = \frac{1}{3}(\ln 60 - \ln 13)$$

مثال: فرض کنید مخزنی شامل ۲۰ مترمکعب از محلول یک ماده‌ی شیمیایی است و ۱۰ کیلوگرم از این ماده در محلول وجود دارد. در یک لحظه‌ی معین محلولی از همان ماده با غلظت $2\frac{kg}{m^3}$ با سرعت ۳ مترمکعب در دقیقه وارد مخزن می‌شود و محلول با همان سرعت خارج می‌گردد بطوریکه حجم محلول در مخزن ثابت می‌ماند. چند مترمکعب از محلول باید وارد مخزن شود تا مقدار ماده‌ی حل شده ۱۵ کیلوگرم شود؟



Q مقدار ماده‌ی شیمیایی در زمان t

$t \quad Q \to$ غلظت ماده موجود در مخزن (ماده حل شده) $= \frac{Q}{20}$

مقدار ماده در هر مترمکعب

$$\frac{dQ}{dt} = 3\times 2 - 3\times\frac{Q}{20} = 6 - \frac{3}{20}Q \to \frac{20\,dQ}{120-3Q} = dt$$

سرعت — مقدار — سرعت — مقدار خارج شده

$$\rightarrow \int \frac{20\,dQ}{120-3Q} = \int dt \rightarrow -\frac{20}{3} Ln|120-3Q| = t + c$$

$t = 0 \rightarrow$ مقدار ماده شیمیایی در مخزن : $-\frac{20}{3} Ln|120-3(10)| = 0 + c$

$$\rightarrow c = -\frac{20}{3} Ln\, 90$$

$$\rightarrow -\frac{20}{3} Ln|120-3Q| = t - \frac{20}{3} Ln 90$$

$$\rightarrow -\frac{20}{3} Ln\left|\frac{120-3Q}{90}\right| = t \rightarrow \frac{120-3Q}{90} = e^{-\frac{3}{20}t}$$

$\rightarrow 120 - 3Q = 90e^{-\frac{3}{20}t} \rightarrow Q = 40 - 30e^{-\frac{3}{20}t} \leftarrow$ ماده موجود در مخزن در زمان t

$$15 = 40 - 30e^{-\frac{3}{20}t} \rightarrow 25 = 30e^{-\frac{3}{20}t} \rightarrow \frac{25}{30} = e^{-\frac{3}{20}t}$$

$$\rightarrow Ln5 - Ln6 = -\frac{3}{20}t \rightarrow t = \frac{20}{3} Ln\frac{6}{5}$$

زمانی که طول می‌کشد تا ۱۵ کیلوگرم ماده در مخزن باشد

حال حجم محلول را حساب می‌کنیم : $\frac{20}{3} Ln\frac{6}{5} \times 3 \ \frac{m^3}{min}$

در هر دقیقه ۳ مترمکعب محلول وارد مخزن می‌شود.

Subject: Year: Month: Date: / /

فصل ۲ حل معادلات خطی مرتبه دوم

خطی مرتبه دوم $\Leftarrow$ $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$

قضیه (وجود و یکتایی): اگر در معادله ی $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$ توابع $a_0(x)$ ، $a_1(x)$ ، $a_2(x)$ و $R(x)$ در فاصله ی $[a, b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in (a, b)$ و y_0 و y'_0 اعداد دلخواهی باشند آنگاه معادله جواب منحصر بفردی مانند $y = \varphi(x)$

$y_0 = \varphi(x_0)$

$y'_0 = \varphi'(x_0)$

قضیه: اگر y_1 و y_2 جواب های معادله ی $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ باشند آنگاه

$y = \alpha y_1 + \beta y_2$ نیز جواب معادله است.

ترکیب خطی y_1 و y_2 $\quad$ $i = 1, 2$ $\quad$ $a_2(x)y''_i + a_1(x)y'_i + a_0(x)y_i = 0$

$\rightarrow a_2(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$

$= \alpha$

مثال: $y'' - 4y = 0$ $\quad$ جوابها $\quad$ $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = e^{-2x}$

$\rightarrow y = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} \Leftarrow$ جوابها

توجه: اگر معادله خطی و یا همگن نباشد ممکن است قضیه برقرار نباشد.

مثال ۲: $yy'' = y'^2$ ← غیرخطی دو جواب مثلاً $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$

$\Rightarrow (e^x)(e^x) = (e^x)^2$ یا $e^{-x} \times e^{-x} = (e^{-x})^2$

ترکیب خطی: $y = e^x + e^{-x} \Rightarrow (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) \neq (e^x - e^{-x})^2$

یا

$2 \neq -2$

مثال ۳: $y'' + y = 2$ $y_1 = \sin x + 2$ $y_2 = \cos x + 2$

$y_1' = \cos x$ $y_2' = -\sin x$

$y_1'' = -\sin x$ $y_2'' = -\cos x$

$I \Rightarrow -\sin x + \sin x + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2$

$II \Rightarrow -\cos x + \cos x + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2$

ترکیب خطی: $y = \sin x + \cos x + 4 \Rightarrow y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x$

$\Rightarrow (-\sin x - \cos x) + \sin x + \cos x + 4 \neq 2 \Rightarrow 4 \neq 2$

تعریف: توابع y_1 و y_2 را مستقل خطی گوییم هرگاه؛ $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

توابع y_1 و y_2 را وابسته‌ی خطی گوییم هرگاه؛ $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$

باشد ولی هردو α و β صفر نباشند

Subject: Year: Month: Date: / /

قضیه: شرط کافی برای آنکه y_1 و y_2 مستقل خطی باشند آن است که $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

دترمینان رونسکی

$$\begin{cases} \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha y_1' + \beta y_2' = 0 \end{cases} \qquad \alpha=\beta=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال: نشان دهید $\{\sin x, \cos x\}$ مستقل خطی هستند.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

مثال: $\{1, x, x^2\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$$ مستقل خطی هستند

$\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$

$$\Rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \alpha(1) + \beta(\sin^2 x) + \gamma(\cos^2 x) = -1 + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه y_1 و y_2 وابسته‌ی خطی باشند آنست که $W \equiv 0$

$$y_2 = \alpha y_1 \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & \alpha y_1 \\ y_1' & \alpha y_1' \end{vmatrix} = \alpha y_1 y_1' - \alpha y_1 y_1' \equiv 0$$

$$W \equiv 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 \Rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \alpha$$

$$\Rightarrow y_2 = \alpha y_1$$

تعریف: y_1 و y_2 را دو جواب اساسی معادله‌ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ گوییم هرگاه جوابهای مستقل خطی باشند.

قضیه: جواب عمومی معادله‌ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ بصورت ترکیب خطی دو جواب اساسی معادله است.

$$V = \{ y \mid y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \}$$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ — $\{V, +, \cdot\}$ یک فضای برداری

y_1 و y_2 اساسی هستند — $y \in V$ — $\underset{\text{بُعد}}{\dim} V = 2$ خطی

حل معادلات مرتبه دوم خطی همگن: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

الف- یک جواب معادله معلوم است $y_1 \rightarrow y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$

$y_2 = v y_1$ — v تابعی از x است

$$\downarrow$$

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \rightarrow y_2'' = v''y_1 + v'y_1' + v'y_1' + vy_1''$$

$$\rightarrow v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(x)y_1'v + Q(x)vy_1 + P(x)v'y_1 = 0$$

$$\rightarrow v(\underbrace{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1}_{=0}) + v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1}{v'y_1} = 0 \rightarrow \frac{v''}{v'} + \frac{2y_1'}{y_1} + P(x) = 0$$

$$\ln v' + 2\ln y_1 + \int P(x)dx = 0 \rightarrow \ln v' y_1^2 = -\int P(x)dx$$

$$\rightarrow v' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} \rightarrow v = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$$

مثال ۱) $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ و جواب $y_1 = e^x$.

بررسی جواب اول: $y_1 = e^x \rightarrow y_1' = y_1'' = e^x \rightarrow xe^x + 2(1-x)e^x + (x-2)e^x = 0$

$$\rightarrow 0 = 0$$

$$\rightarrow y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{(x-2)y}{x} = 0 \rightarrow P(x) = \frac{2(1-x)}{x}$$

$$\rightarrow v = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$$

$$\rightarrow v = \int \frac{e^{-\int \frac{2(1-x)}{x}dx}}{e^{2x}}dx = \int \frac{e^{-2\ln x + 2x}}{e^{2x}}dx$$

$$\rightarrow v = \int e^{-2\ln x}dx = -\frac{1}{x} \rightarrow y_2 = -\frac{1}{x}e^x$$

$$\rightarrow \text{جواب کلی}: \quad y = c_1e^x + c_2\frac{e^x}{x}$$

مثال ۲) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ و $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

$$\rightarrow y_1 = x^{-1/2}\cos x \rightarrow y_1' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\sin x$$

$$\rightarrow y_1'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}\cos x + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x + \frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x - x^{-1/2}\cos x$$

جای‌گذاری در معادله :

$$\Rightarrow x^{2}\left(\tfrac{3}{4}x^{-5/2}\cos x + x^{-3/2}\sin x - x^{-1/2}\cos x\right) + x(\dots) + (x^{2}-\tfrac{1}{4})y = 0$$

پس از جاگذاری و ساده‌سازی $\Rightarrow\ 0=0 \Rightarrow$ y_1 جواب معادله است

- حال جواب دوم را باید پیدا کرد ؛ $y_2 = v y_1$

$$v = \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^{2}}\,dx \quad , \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0$$

$$\downarrow$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

$$\rightarrow v = \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\frac{\cos^2 x}{x}}\,dx = \int \frac{e^{-\ln x}}{\frac{\cos^2 x}{x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos^2 x}{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x \rightarrow y_2 = v y_1 \rightarrow y_2 = \tan x\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$\rightarrow$ جواب کلی : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

مثال ۳) معادله ی روبرو را با فرض $y_1 = x^2$ حل کنید $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

$$y_1 = x^2 \rightarrow y_1' = 2x \ , \ y_1'' = 2 \rightarrow x^2(2) + x(2x) - 4(x^2) = 0$$

$$\rightarrow 0 = 0$$

پس y_1 جواب معادله است حال باید جواب دوم را یافت ؛

$$y_2 = v y_1 \quad , \quad v = \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^{2}}\,dx$$

$x^2y'' + xy' - 4y = 0 \rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0 \rightarrow P(x) = \frac{1}{x}$

$$v = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx = \int \frac{e^{-\int 1/x\, dx}}{(x^2)^2}dx = \int \frac{1/x}{x^4}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} \rightarrow v = \frac{-1}{4x^4}$$

$$\rightarrow y_2 = vy_1 \rightarrow y_2 = \frac{-1}{4x^4} \times x^2 = \frac{-1}{4x^2}$$

$\rightarrow$ جواب کلی : $y = c_1y_1 + c_2y_2 \rightarrow y = c_1x^2 + c_2\left(-\frac{1}{4}x^{-2}\right)$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = c_1x^2 + c_2' x^{-2}$$

ب * حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم همگن با ضرایب ثابت :

$ay'' + by' + cy = 0$ a و b و c ثابت هستند

$y = e^{rx} \rightarrow y' = re^{rx} \rightarrow r^2e^{rx} = y''$

$\rightarrow ar^2 + br + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

معادله‌ی مفسر

$\Delta > 0 \quad r_1 \neq r_2 \qquad y_1 = e^{r_1x} , \; y_2 = e^{r_2x}$

$$\rightarrow y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

مثال ۱) معادله‌ی $y'' - 5y' + 6y = 0$.

معادله را به معادله‌ی مفسر تبدیل می‌کنیم ⇐ $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = 2, 3$

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

مثال ۲) معادله‌ی $y'' - 4y = 0$ را حل کنید.

$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = -2, +2$

$\Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

مثال ۳) معادله‌ی $y'' + y' = 0$ را حل کنید.

$\Rightarrow r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0$

$\Rightarrow r = 0 , r = -1$

$\Rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{(-1)x} = c_1 + c_2 e^{-x}$

مثال ۴) معادله‌ی $y'' + 3y' + 2y = 0$ را حل کنید.

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$\Rightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1 , r_2 = -2$

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

Subject: Year: Month: Date: / /

$\Delta=0$ $b^2-4ac=0 \rightarrow r=\frac{-b}{2a}$ $y_1=e^{-\frac{b}{2a}x}$

$$v=\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{(e^{\frac{-b}{2a}x})^2}dx=\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}}dx=\int dx=x$$

$$\rightarrow y_2=v\,y_1 \rightarrow y_2=xe^{\frac{-b}{2a}x}$$

$$\rightarrow y=c_1e^{\frac{-b}{2a}x}+c_2xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

مثال ۱) $y''-4y'+4y=0$

$$\rightarrow r^2-4r+4=0 \rightarrow (r-2)^2=0 \rightarrow r=2$$

$$\rightarrow y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

مثال ۲) $y''+6y'+9y=0$

$$r^2+6r+9=0 \rightarrow (r+3)^2=0 \rightarrow r=-3$$

$$\rightarrow y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

مثال ۳) $4y''-4y'+y=0$

$$4r^2-4r+1=0 \rightarrow (2r-1)^2=0 \rightarrow r=1/2$$

$$\rightarrow y=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2xe^{\frac{1}{2}x}$$

مثال ۴) $y''=0$

$$r^2=0 \rightarrow r=0$$

$$\rightarrow y=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}=c_1+c_2x$$

$\Delta<0$ $\quad ar^2+br+c=0 \Rightarrow \Delta<0 \quad r=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow r=\underbrace{\dfrac{-b}{2a}}_{\alpha}\pm\underbrace{\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a}}_{\beta} \Rightarrow r=\alpha\pm i\beta$

$y=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow y=e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x})$

$\Rightarrow y=e^{\alpha x}(c_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_2(\cos\beta x-i\sin\beta x))$

$y=e^{\alpha x}(\underbrace{(c_1+c_2)}_{A}\cos\beta x+\underbrace{(ic_1-ic_2)}_{B}\sin\beta x)$

$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

از فرمول اویلر داریم:

$r=\alpha\pm i\beta$

مثال ۱) $y''-y'+y=0$

$r^2-r+1=0 \Rightarrow r=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow y=e^{\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

مثال ۲) $y''+y=0$

$r^2+1=0 \Rightarrow r^2=-1 \Rightarrow r=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

$y=A\cos x+B\sin x$

مثال ۳) $y''+2y'+4y=0$

$r^2+2r+4=0 \Rightarrow r=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$

Subject: Year: Month: Date: / /

$r = -1 \pm \sqrt{3}\, i \qquad y = e^{-x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$

مثال ۲) $y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow y = A\cos 2x + B\sin 2x$

* حل معادلات مرتبه ی دوم خطی که میتوان آنها را به مرتبه ی دوم با ضرایب ثابت تبدیل کرد ؛

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$z = u(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$

یا $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\left(P(x)\frac{d^2z}{dx^2} + P(x)\frac{dz}{dx}\right) + Q(x)y = 0$

$\Rightarrow \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{Q(x)} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{P\,d^2z/dx^2 + P\,dz/dx}{Q(x)}\, dy/dz + y = 0$

$\frac{(dz/dx)^2}{q(x)} = c_1 \Rightarrow \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = c_1 q(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{c_1 q(x)}$

$\Rightarrow z = \int c\sqrt{q(x)}\, dx \Rightarrow \frac{P \cdot c/2\, q'(x)\, q(x)^{-1/2} + Pc\,q(x)}{q(x)}$

$= c\,\frac{q'(x) + 2pq}{2q^{3/2}} = \alpha$

میران

$$\rightarrow c_1 \frac{d^2y}{dz^2} + \alpha \frac{dy}{dz} + y = 0$$

مثال ۱) $xy'' + (x^3-2)y' + x^5 y = 0$

$$\rightarrow y'' + \left(\frac{x^3-2}{x}\right)y' + x^4 y = 0 \quad \rightarrow z = \int \sqrt{q(x)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{x^4}\,dx = \int x^2\,dx$$

$$= x^3/3$$

$$\rightarrow \frac{4x^3 + 2\left(\frac{x^3-2}{x}\right)x^4}{2x^6} = \frac{4x^3 + 2x^6 - 4x^3}{2x^6} = \frac{2x^6}{2x^6} = 1 = \text{مقدار ثابت}$$

$$\rightarrow z = x^3/3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot x^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2x\frac{dy}{dz} + x^2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2x\frac{dy}{dz} + x^4\frac{d^2y}{dz^2}$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow x\left(2x\frac{dy}{dz} + x^4\frac{d^2y}{dz^2}\right) + (x^3-2)\left(x^2\frac{dy}{dz}\right) + x^5 y = 0$

$$\rightarrow x^5 \frac{d^2y}{dz^2} + x^5\frac{dy}{dz} + x^5 y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y = 0$$

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت

$$\rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \rightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\rightarrow y = e^{-z/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2} z + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2} z\right)$$

$$y = e^{-x^3/6}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{6} x^3 + B\sin\frac{\sqrt{3}}{6} x^3\right)$$

- برای حل معادله‌ی قبل ابتدا z را از طریق فرمول $Z=\int c\sqrt{q(x)}\,dx$ محاسبه می‌کنیم و

اگر c یعنی $\frac{cq'(x)+2pq(x)}{2q^{3/2}}$ ثابت شد آن گاه معادله را به معادله‌ی مرتبه ۲ با

ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم.

مثال ۲) $\frac{d^2y}{dx^2}\cos x+\frac{dy}{dx}\sin x-2y\cos^3 x=0$

$$\rightarrow \quad y''+y'\tan x-2y\cos^2 x=0 \rightarrow \quad q(x)=+2\cos^2 x$$

$$\rightarrow Z=\int c\sqrt{q(x)}\,dx=\int \sqrt{2}\cos x\,dx=\sqrt{2}\sin x$$

حال معادله‌ی قبل را محاسبه می‌کنیم: $\frac{q'+2pq}{2q^{3/2}}=\frac{-4\sin x\cos x+2\tan x(+2\cos^2 x)}{2(\cos^2 x)^{3/2}}=0$

پس عبارت $\frac{q'+2pq}{2q^{3/2}}$ عدد ثابت ۰ شد.

$$Z=\sqrt{2}\sin x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\sqrt{2}\cos x$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-\sqrt{2}\sin x\frac{dy}{dz}+(\sqrt{2}\cos x)\left(\frac{d^2y}{dx\,dz}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\sin x\frac{dy}{dz}+\sqrt{2}\cos x\left(\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\sin x\frac{dy}{dz}+2\cos^2 x\frac{d^2y}{dz^2}$$

حال جایگذاری می‌کنیم: $\cos x\left(-\sqrt{2}\sin x\frac{dy}{dz}+2\cos^2 x\frac{d^2y}{dz^2}\right)+\sqrt{2}\sin x\cos x\frac{dy}{dx}-2y\cos^3 x=0$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} - y = 0 \rightarrow y'' - y = 0 \rightarrow$ معادله مشخصه را تعیین می‌کنیم $\rightarrow r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1$

$\rightarrow y = c_1 e^{z} + c_2 e^{-z} = c_1 e^{\sqrt{2}\sin x} + c_2 e^{-\sqrt{2}\sin x}$

مثال ۳) حل معادله کوشی - اویلر؟

$(ax+b)^2 y'' + \alpha(ax+b)y' + \beta y = 0$

$\rightarrow$ مثال: $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \rightarrow y'' + \frac{\alpha}{x} y' + \frac{\beta}{x^2} y = 0 \;,\; q(x) = \frac{\beta}{x^2}$

$\rightarrow z = \int \sqrt{\frac{1}{x^2}}\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dz^2}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0 \rightarrow r^2 + (\alpha-1) r + \beta = 0$

مثال ۴) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\rightarrow r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0 \rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \rightarrow r = 1, 2 \qquad z = \ln x$

$\rightarrow y = c_1 e^{z} + c_2 e^{2z} \rightarrow y = c_1 e^{\ln x} + c_2 e^{2\ln x} = c_1 x + c_2 x^2$

مثال ۵) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

$\rightarrow z = \ln x$

$\rightarrow r^2 + (5-1) r + 4 = 0 \rightarrow (r+2)^2 = 0 \rightarrow y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} (\ln x)$

مثال ۶ $x^2y'' + xy' + y = 0$ ← $r^2 + (1-1)r + 1 = 0 \to r^2 = -1$

$\to r = \pm i$

$\to y = c_1 \cos z + c_2 \sin z = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

* همچنین معادلات کوشی را می‌توان با تغییر متغیر $y = x^r$ حل کرد.

* حل معادلات مرتبه‌ی دوم خطی غیرهمگن:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ * $R(x) \neq 0$

قضیه: جواب عمومی معادله‌ی * بصورت حاصل جمع جواب عمومی همگن با یک جواب خصوصی غیرهمگن

$y_g = y_h + y_p \to$ خصوصی غیرهمگن

y_g عمومی غیرهمگن، y_h عمومی همگن

برهان: فرض کنید y_g و y_p به ترتیب جوابهای عمومی و خصوصی معادله‌ی * باشند که پس باید در معادله صدق کنند:

$$\begin{cases} \to y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = R(x) \\ y_g'' + P(x)y_g' + Q(x)y_g = R(x) \end{cases} \to (y_g - y_p)'' + P(x)(y_g - y_p)' + Q(x)(y_g - y_p)$$

$\to (y_g - y_p)'' + P(x)(y_g - y_p)' + Q(x)(y_g - y_p) = 0$ ← همگن درجه ۲

$\to y_g - y_p = y_h \to \boxed{y_g = y_h + y_p}$

مثال: معادله‌ی روبرو را حل کنید؛ $x^2y''+5xy'+4y=0$

$\downarrow$

شکل معادله‌ی اویلر $\Leftarrow$ $(ax+b)^2y''+\alpha(ax+b)y'+\beta y=0$

← معادله‌ی فوق اویلر است پس از تغییر متغیر $z=\ln x$ استفاده می‌کنیم؛

روش حل $\Rightarrow$ $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$

← معادله‌ی مفسر

$\Rightarrow r^2+(5-1)r+4=0 \Rightarrow r^2+4r+4=0 \Rightarrow \Delta=0$ و $r=-2$

اگر $\Delta=0$ آنگاه جواب معادله بصورت $y=c_1y_1+c_2xy_1$ خواهد بود

← متغیری که نسبت به آن مشتق گرفته شده

$\Rightarrow r=-2 \rightarrow$ جواب معادله: $y=c_1y_1+c_2zy_2$

$=c_1e^{r_1z}+c_2ze^{r_1z}$

← متغیری که نسبت به آن مشتق گرفته شده

$\Rightarrow \begin{cases} y=c_1e^{-2z}+c_2ze^{-2z} \\ z=\ln x \end{cases} = \Rightarrow y=c_1e^{-2\ln x}+c_2(\ln x)e^{-2\ln x}$

$=c_1x^{-2}+c_2(\ln x)x^{-2}$

جواب نهایی معادله $\rightarrow$ $y=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2\ln x}{x^2}$

۲- روش کلی برای حل معادله‌ی کوشی ـ اویلر بصورت زیر است؛

- از تغییر متغیر $y=x^r$ استفاده می‌کنیم تا بتوانیم به معادله‌ی مُفسّر برسیم

$y=x^r \Rightarrow y'=rx^{r-1}$ و $y''=r(r-1)x^{r-2}$

$\Rightarrow r(r-1)\times x^2\times x^{r-2}+5x\times rx^{r-1}+4x^r=0$

$\Rightarrow r(r-1)x^2 + 5rx^2 + 4x^2 = x^2(r(r-1)+5r+4) = 0$

$\Rightarrow r(r-1) + 5r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 - r + 5r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$

که درواقع همان روش $r^2 + (\alpha-1)r + \beta$ است.

* روش تغییر پارامتر: $y''' + y' = \sec x$

$y''' + y' = 0 \Rightarrow r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = 0 , r = \pm i$

$\Rightarrow y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

$y_1 = 1 \quad y_2 = \cos x \quad y_3 = \sin x \leftarrow$ جوابها

(4) $y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \sin x \Rightarrow y'_p = v'_1 + v'_2 \cos x - v_2 \sin x + v'_3 \sin x + v_3 \cos x$

$v'_1 + v'_2 \cos x + v'_3 \sin x = 0 \rightarrow$ آنهایی که عامل v' دارد مساوی صفر قرار میدهیم

(3) $\Rightarrow y'_p = -v_2 \sin x + v_3 \cos x \Rightarrow y''_p = -v'_2 \sin x - v_2 \cos x + v'_3 \cos x - v_3 \sin x$

$-v'_2 \sin x + v'_3 \cos x = 0 \rightarrow$ آنهایی که عامل v' دارد $= 0$

(2) $\Rightarrow y''_p = -v_2 \cos x - v_3 \sin x \Rightarrow y'''_p = -v'_2 \cos x + v_2 \sin x - v'_3 \sin x - v_3 \cos x$ (1)

$-v'_2 \cos x - v'_3 \sin x = 0 \rightarrow$ آنهایی که عامل v' دارد $= 0$

۱و۲و۳و۴ را در معادله‌ی اصلی قرار میدهیم:

$v'_1 = \sec x \Rightarrow v_1 = \ln|\sec x + \tan x|$

$v'_2 = -1 \Rightarrow v_2 = -x$

$-v'_3 = \tan x \Rightarrow v'_3 = \ln \cos x$

$\Rightarrow y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x \cos x + \sin x \ln \cos x$

$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + y_p$

مثال: $y''+4y=x$ ← مرتبه‌ی ۲ غیرهمگن

$y''+4y=0 \rightarrow r^2+4=0 \rightarrow r=\pm 2i \rightarrow y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

همگن مرتبه ۲

$y_p=x/4 \qquad \rightarrow y_p=x/4$

جواب خصوصی فرضی *

$y'_p=1/4$

$y''_p=0 \rightarrow 0+4(x/4)=x$

$\rightarrow y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}x$

* روش بدست آوردن جوابهای خصوصی معادلات مرتبه دوم خطی غیرهمگن:

۱- روش ضرایب نامعین ۲- روش تغییر پارامتر (روش برای حل کل معادلات).

۱- روش ضرایب نامعین: $y''+ay'+by=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin$

$\rightarrow y''+ay'+by=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x)$

b و a ثابت هستند

$y_p=x^K e^{\alpha x}(A_n(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x)$

K مرتبه تکرار $r=\alpha\pm i\beta$ بعنوان ریشه معادله‌ی $1r^2+ar+b=0$ است

مثال ۱) $y''+3y'+2y=-3e^x$

ابتدا معادله‌ی ناهمگن فوق را همگن کرده و حل می‌کنیم ← $y''+3y'+2y=0$

Subject: Year: Month: Date: / /

$\to y'' + 3y' + 2 = 0 \to r^2 + 3r + 2 = 0 \to r = -2, -1$ *

$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0 = 1 \to$ * ۱ ریشه معادله‌ی
$K = 0 \leftarrow$ نیست

جواب خصوصی $\leftarrow y_p = x^0 e^{1 \times x}(A) = Ae^x \to y'_p = Ae^x ,\ y''_p = Ae^x$

$\to Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = -3e^x \to 6A = -3 \to A = -1/2$

$\to y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - 1/2\, e^x ,\ y_g = y_h + y_p$

مثال ۳ $\quad y'' - 4y = 2e^{2x} \leftarrow$ غیرهمگن است.

$y'' - 4y = 0 \to r^2 - 4 = 0 \to r = \pm 2$
$\to y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$r = \alpha \pm i\beta = 2 \pm 0i = 2 \to K = 1$

$y_p = Axe^{2x} \to y'_p = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} \to y''_p = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

$\to$ جواب خصوصی را در معادله قرار می‌دهیم $\Rightarrow 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 4Axe^{2x} = 2e^{2x}$
$\downarrow$
$4A = 2 \to A = 1/2$

$\to y_p = x/2\, e^{2x} \to y_g = y_p + y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x}{2} e^{2x}$

میران

مثال ۱: $y''-y'=3e^{x}$

$\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0 = 1$

$y''+ay'+by = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

$y''-y'=0 \rightarrow r^2-r=0 \rightarrow r=0,1 \rightarrow y_p = xe^{x}A$

$y'=Ae^{x}+xe^{x}A$

$y''=2Ae^{x}+Axe^{x} \rightarrow Axe^{x}+2Ae^{x}-Axe^{x}-Ae^{x}=3e^{x}$

$A=3 \rightarrow y_p = 3xe^{x}$

$y=c_1+c_2e^{x}+3xe^{x}$

$y_p = x^{k}e^{\alpha x}(A_n(x)\cos\beta x + B_n(x)\sin\beta x)$

k مرتبه تکرار $\alpha \pm i\beta$ در معادله‌ی مفسر است.

مثال ۲) $y''+2y'+y=x^2+3x+5$

$y''+2y'+y=0 \rightarrow r^2+2r+1=0 \rightarrow (r+1)^2=0 \rightarrow r=-1$

$y_h = c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$\alpha \pm i\beta = 0$

$y_p = x^0(Ax^2+Bx+C)$

$\rightarrow y_p' = 2Ax+B$, $y_p''=2A$

$\rightarrow 2A+4Ax+2B+Ax^2+Bx+C = x^2+3x+5$

$$\rightarrow \begin{cases} A=1 \\ 4A+B=3 \\ 2A+2B+C=5 \end{cases} \rightarrow B=-1 , C=5 \rightarrow y_p = x^2-x+5$$

$\Rightarrow y_g = c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+(x^2-x+5)$

Subject: Year: Month: Date: / /

مثال ۳: $y''+y'=x+5$

همگن: $y''+y'=0 \xrightarrow{\text{مفسر}} r^2+r=0$

$\downarrow$

$r=0, -1 \rightarrow y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}$

جواب همگن

$\alpha \pm i\beta = 0 \pm 0 = 0 \rightarrow$ جواب معادله $\rightarrow y_p = x e^{0x}(Ax+B)\cos 0x$

مفسر است $= x(Ax+B)$

$y_p = Ax^2 + Bx \Rightarrow y_p' = 2Ax + B \Rightarrow y_p'' = 2A$

در معادله جایگذاری می‌کنیم $\Rightarrow 2A + 2Ax + B = x + 5 \rightarrow A = 1/2$ و $B = 4$

$\Rightarrow y_p = x(1/2\, x + 4)$

جواب کلی معادله: $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + 4x$

مثال ۴: $y''+5y'+6y = e^{x}\sin x$

حل همگن: $y''+5y'+6y=0 \rightarrow r^2+5r+6=0 \rightarrow r=-2, -3$

جواب همگن: $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

پیدا کردن جواب خصوصی: $e^{x}\sin x = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta + Q_n(x)\sin\beta x)$

$\downarrow$

$\alpha = 1$ و $\beta = 1 \rightarrow \alpha \pm i\beta = 1 \pm i$

$\rightarrow y_p = e^{x}(A\sin x + B\cos x)$

$y_p' = e^{x}(A\sin x + B\cos x) + (A\cos x - B\sin x)e^{x}$

$y_p'' = e^{x}(A\sin x + B\cos x + A\cos x - B\sin x + \cdots - A\cos x)$

$$\Rightarrow e^{x}(2A\cos x - 2B\sin x + 5A\sin x + 5B\cos x + 5A\cos x - 5B\sin x + \cdots) =$$

$$= e^{x}\sin x \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{11}{170} \\ B = -\frac{7}{170} \end{cases} \Rightarrow y_p = e^{x}\left(\frac{11}{170}\sin x - \frac{7}{170}\cos x\right)$$

جواب معادله : $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + e^{x}\left(\frac{11}{170}\sin x - \frac{7}{170}\cos x\right)$

مثال ۵ : صورت جواب خصوصی معادله‌ی زیر را بنویسید . (محاسبه ضرایب لازم نیست)

$$y'' + 4y' - 5y = \underbrace{x^2 e^{x}\cos x}_{I} + \underbrace{x e^{-5x}}_{II} + \underbrace{e^{-5x}\sin x}_{III}$$

همگن : $y'' + 4y' - 5y = 0 \to r^2 + 4r - 5 = 0 \to r = 1, -5$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x}$

$I \quad \alpha \pm i\beta = 1 \pm i$

$II \quad \alpha \pm i\beta = -5$

$III \quad \alpha \pm i\beta = -5 \pm i$

$$y_p = e^{x}\left((A_1x^2 + A_2x + A_3)\cos x + (B_1x^2 + B_2x + B_3)\sin x\right)$$

$$+ x e^{-5x}(c_1x + c_2) + e^{-5x}(F_1\cos x + F_2\sin x)$$

مثال ۶ : صورت جواب خصوصی معادله‌ی زیر را بنویسید .

$$y'' - 2y' + y = x e^{x} + e^{-2x}\cos x + x e^{3x}\sin^2 x$$

$y'' - 2y' + y = 0 \to r^2 - 2r + 1 = 0 \to r = 1 \to y_h = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

$x e^{x}: \quad \alpha \pm i\beta = 1$

$e^{-1x}\cos x: \quad \alpha \pm i\beta = -1 \pm i$

$$x e^{3x}\sin^2 x = x e^{3x}\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2} x e^{3x} - \frac{1}{2} x e^{3x}\cos 2x$$

$$\rightarrow y'' - 2y' + y = xe^{x} + e^{-2x}\cos x + \tfrac{1}{2} xe^{3x} - \tfrac{1}{2} xe^{3x}\cos 2x$$

$xe^{x}: \quad \alpha \pm i\beta = 1 \quad \rightarrow$ ریشه معادله مُفشّر

$e^{-2x}\cos x: \quad \alpha \pm i\beta = -2 \pm i = -2 \pm i$

$x\tfrac{1}{2}e^{3x}: \quad \alpha \pm i\beta = 3 \pm 0i = 3$

$-\tfrac{1}{2} xe^{3x}\cos 2x: \quad \alpha \pm i\beta = 3 \pm 2i$

$$\rightarrow y_p = x^2 e^{x}(A_1 x + A_2) + e^{-2x}(B_1 \cos x + B_2 \sin x) + e^{3x}(C_1 x + C_2) +$$
$$e^{3x}\left((E_1 x + E_2)\cos 2x + (F_1 x + F_2)\sin 2x\right)$$

۲- روش تغییر پارامتر: $\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

- ابتدا معادله‌ی همگن را حل می‌کنیم؛ $\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$\downarrow$

جواب: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \Rightarrow$ که y_1 و y_2 جوابهای اساسی هستند

- سپس بجای c_1 و c_2 متغیرهای v_1 و v_2 را قرار میدهیم؛

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \quad (3)$$

- و v_1 و v_2 را طوری تعیین می‌کنیم که y_p جواب خصوصی معادله‌ی غیرهمگن باشد.

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' \qquad \begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \end{cases}$$

$\downarrow$

$$(2)\ y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \Rightarrow \quad y_p'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' \quad (1)$$

$1+2+3 \Rightarrow$ در معادله‌ی غیرهمگن قرار میدهیم

$$\Rightarrow v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' + P(x) v_1 y_1' + P(x) v_2 y_2' +$$

$$+ Q(x) v_1 y_1 + Q(x) v_2 y_2 = R(x)$$

$$\Rightarrow v_1 \underbrace{(y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1)}_{0} + v_2 \underbrace{(y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2)}_{0}$$

$$+ v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x)$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow v_1' = \frac{-y_2 R(x)}{w} \qquad v_1 = -\int \frac{y_2 R(x)}{w} dx$$

$$\Rightarrow$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow v_2' = \frac{y_1 R(x)}{w} \qquad v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{w} dx$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{w} dx$$

که y_1 و y_2 جوابهای اساسی هستند

مثال ۱) $y'' + y = \sec x$ از روش قبل حل نمی‌شود چون شرایط روش ۲ را ندارد

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin x}_{y_2} \Rightarrow w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow w = 1$$

$$\Rightarrow y_p = -\cos x \int \frac{\sin x \sec x}{1}\,dx + \sin x \int \frac{\cos x \sec x}{1}\,dx$$

$$\Rightarrow y_p = -\cos x \,\mathrm{Ln}|\sec x| + x \sin x$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x - \cos x \,\mathrm{Ln}|\sec x|$$

مثال ۲) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \mathrm{Log}\, x$

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1$$

$$\Rightarrow y = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{x e^{-x}}_{y_2} \Rightarrow y_1 = e^{-x}, \; y_2 = x e^{-x}$$

$$\Rightarrow w = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x) e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}(1-x) + x e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p = -e^{-x} \int \frac{x e^{-x} \cdot e^{-x} \mathrm{Log}\, x}{e^{-2x}}\,dx + x e^{-x} \int \frac{e^{-x} \cdot e^{-x} \mathrm{Log}\, x}{e^{-2x}}\,dx$$

$$\Rightarrow y_p = -e^{-x} \int x \log x \,dx + x e^{-x} \int \log x \,dx$$

$$= -e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}\right) + x e^{-x}(x \mathrm{Log}\, x - x)$$

$$= (e^{-x} \log x)\left(\frac{x^2}{2}\right) + e^{-x}\left(-\frac{3}{4} x^2\right)$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} \mathrm{Log}\, x - \frac{3}{4} x^2\right)$$

معادله‌ی کوشی اویلر: $(ax+b)^2y'' + (ax+b)y' + By = 0$

$z = \ln(ax+b)$ $\qquad y = (ax+b)^r$

مثال: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

$y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$\Rightarrow x^2(r(r-1)x^{r-2}) - 2x(rx^{r-1}) + 2x^r = 0$

$\Rightarrow x^r(r(r-1) - 2r + 2) = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1,\ r = 2$

$r = 1 \Rightarrow y_1 = x$

$r = 2 \Rightarrow y_2 = x^2$

$\Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2x^2$

مثال ۲) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

$y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$\cdots \Rightarrow x^r(r(r-1) - 3r + 4) = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2$

$r = 2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2\ln x$

$\Rightarrow y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$

Subject: Year: Month: Date: / /

مثال ۳) $x^2y''+xy'+y=0$ $\qquad y=x^r$

$\rightarrow x^r(r(r-1)+r+1)=0 \rightarrow r^2+1=0 \rightarrow r^2=-1 \rightarrow r=\pm i$

$\rightarrow y=c_1x^{i}+c_2x^{-i}=c_1e^{i\,Lnx}+c_2e^{-i\,Lnx}$

$=A\cos Lnx+B\sin Lnx$

* حل معادلات مرتبه ی دوم خطی با شرایط مرزی:

مثال: $y''+2y'-3y=9x \qquad y(0)=1 \qquad y'(1)=2$

همگن: $y''+2y'-3y=0 \rightarrow r^2+2r-3=0 \rightarrow r=-3$ و 1

$\rightarrow y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x} \rightarrow y=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

$\alpha+i\beta=0 \rightarrow y_p=Ax+B$

$\rightarrow 0+2A-3Ax-3B=9x \rightarrow \begin{cases}-3A=9 \rightarrow A=-3\\ 2A-3B=0 \rightarrow B=-2\end{cases}$

$\rightarrow y=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}+(-3x-2)$ و $y'(1)=2$

$\rightarrow y'=-3c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-3$ $\qquad y(0)=1$

$\rightarrow \begin{cases}1=c_1+c_2-2\\ 2=-3c_1e^{-3}+c_2e-3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}c_1+c_2=3\\ -3c_1e^{-3}+c_2e=5\end{cases}$

$\rightarrow c_1=3-c_2$ و $c_2(e+3e^{-3})=5+9e^{-3}$

c_1 و c_2 را محاسبه کرده و در معادله قرار میدهیم:

$$y = \frac{3e - 18e^{-3} + 5}{e - 3e^{-3}} e^{-3x} + \frac{5 + 9e^{-3}}{e - 3e^{-3}} e^{x} - 3x - 2$$

مثال ۲) $y'' = 0$ $y(-1) = 0$ $y(1) - 2y'(1) = 0$

$$y'' = 0 \rightarrow r^2 = 0 \rightarrow r = 0 \rightarrow y = c_1 + c_2 x$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 - c_2 \\ 0 = (c_1 + c_2) - 2c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2$$

$$\rightarrow y = c_1 (1 + x)$$

* مقادیر ویژه و توابع ویژه:

$$Lx + \lambda r(x) y = 0$$

$$a_{11} y(a) + a_{12} y'(a) + a_{13} y(b) + a_{14} y'(b) = 0$$

$$a_{21} y(a) + a_{22} y'(a) + a_{23} y(b) + a_{24} y'(b) = 0$$

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(P(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y$$

$$\begin{cases} p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p'(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y + \lambda r(x) y = 0 \\ u_1(a) = a_{11} y(a) + a_{12} y'(a) + a_{13} y(b) + a_{14} y'(b) \\ u_2(a) = a_{21} y(a) + a_{22} y'(a) + a_{23} y(b) + a_{24} y'(b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ly = -\lambda(x)y \\ u_1(a)=0 \\ u_2(a)=0 \end{cases}$$

تعریف: مقداری از λ که مسئله فوق دارای جواب غیر بدیهی باشد یک مقدار ویژه و جواب

متناظر با آن تابع ویژه نامیده می‌شود.

مثال: مطلوبست مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله ی زیر:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(0)=0 \quad y'(\pi)=0$$

① $\lambda = 0 \Rightarrow y''=0 \Rightarrow \underbrace{r^2=0}_{\text{معادله مفسر}} \Rightarrow r=0 \Rightarrow y = c_1 + c_2 x \ , \ y' = c_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 x = 0 \ , \ x=0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = c_1 + c_2 x = 0 \Rightarrow \text{جواب بدیهی}$$

② $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = p^2 \Rightarrow r^2 + p^2 = 0 \Rightarrow r = \pm pi \Rightarrow y = c_1 \cos px + c_2 \sin px$

$$y' = -c_1 p \sin px + c_2 p \cos px$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ 0 = -c_1 p \sin(p\pi) + c_2 p \cos(p\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 p \cos(p\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \Rightarrow \text{جواب بدیهی} \Rightarrow y=0 \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow \cos(p\pi)=0 \Rightarrow p\pi = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad n=1,2,\dots \end{cases} \end{cases}$$

$$p = \frac{(2n-1)}{2} \quad n=1,2,\dots \Rightarrow \underbrace{\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه}} = \frac{(2n-1)^2}{4} \quad n=1,2,\dots$$

$y_n = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x$ ⇐ توابع ویژه

$y = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)$ و $c_1 = 0$

③ $\lambda < 0 \to \lambda = -p^2 \to r^2 - p^2 = 0 \to r = \pm p$

$\to y = c_1 e^{-px} + c_2 e^{+px} \to y' = -c_1 p e^{-px} + c_2 p e^{px}$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 0 = -c_1 p e^{-pk} + c_2 p e^{pk} \end{cases} \qquad c_1 = c_2 = 0 \downarrow$$

جواب منحصر به فرد دارد ← $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -pe^{-pk} & pe^{pk} \end{vmatrix} \neq 0 \to y = 0$ بدیهی

مثال ۲ مطلوبست مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله‌ی زیر:

$y'' + \lambda y' = 0$

$y(0) + y'(0) = 0$

$y'(1) = 0$

$y'' + \lambda y' = 0 \to r^2 + \lambda r = 0 \to r(r+\lambda) = 0$

$\to r = 0$ و $r = -\lambda$

$\to y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-\lambda x} = c_1 + c_2 e^{-\lambda x}$

$y = c_1 + c_2 e^{-\lambda x} \to y' = -c_2 \lambda e^{-\lambda x}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \lambda c_2 = 0 \\ -\lambda c_2 e^{-\lambda} = 0 \end{cases} \qquad ① \ \lambda = 0 \to \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \to c_1 = -c_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \to c_1 = -c_2 \to y = c_1 - c_1 e^{-\lambda x} = c_1 - c_1 = 0 \to y = 0$

جواب بدیهی

وقتی جواب بدیهی شد λ مقدار ویژه نیست

Subject: Year: Month: Date: / /

(۲) $\lambda \neq 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - \lambda c_2 = 0 \\ -\lambda c_2 e^{-2} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\lambda \neq 0]{} c_2 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow y = 0$

جواب بدیهی است

تمرین ۱) مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله‌ی زیر را پیدا کنید؟

$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \ ، \ y(1) + y'(1) = 0$

تمرین ۲) مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله‌ی زیر را پیدا کنید؟

$y'' + \lambda y = 0 \quad ; \quad y(-a) = y(a) \ ، \ y'(-a) = y'(a)$

اپراتور؟

$D = \dfrac{d}{dx} \qquad D_y = y'$

$D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2} \qquad D^2_y = y''$

میران

فصل ۳) حل معادلات مرتبه‌ی n اُم خطی :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = R(x)$$

الف- حل معادلات خطی همگن مرتبه‌ی n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

۱- الف : کاهش مرتبه : اگر y_1 یک جواب معادله باشد می‌توان با فرض $y = vy_1$ مرتبه‌ی معادله را حداقل یک واحد کاهش داد.

مثال ۱) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \rightarrow$ مرتبه‌ی ۳

$y_1 = e^{-x}$

$\downarrow$

$y_1' = -e^{-x}$ $\qquad y = vy_1 = ve^{-x} \Rightarrow y' = -ve^{-x} + v'e^{-x}$

$\downarrow$

$y_1'' = e^{-x}$ $\Rightarrow y'' = v''e^{-x} - 2v'e^{-x} + ve^{-x}$

$\downarrow$

$y_1''' = -e^{-x} \Rightarrow -e^{-x} + 3(e^{-x}) + 3(-e^{-x}) + e^{-x} = 0 \checkmark$ یک جواب معادله است

و $y''' = v'''e^{-x} - 3v''e^{-x} + 3v'e^{-x} - ve^{-x}$

$\Rightarrow v + (v''' - 3v'' + 3v' - v) + 3(v'' - 2v' + v) + 3(v' - v) = 0$

$\Rightarrow v''' = 0 \Rightarrow$ فرض : $v' = p$ و $v''' = (v')'' = 0$

$v''' = (v')'' = (p'') = 0 \Rightarrow p'' = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$

$p = c_1 + c_2x \Rightarrow v' = p \Rightarrow v' = c_1 + c_2x \Rightarrow v = c_1x + c_2\frac{x^2}{2} + c_3$

$$\begin{cases} v = c_1x + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 \\ y = vy_1 \end{cases} \Rightarrow y = e^{-x}\left(c_1x + c_2\frac{x^2}{2} + c_3\right)$$

Subject: Year: Month: Date: / /

مثال ۲) $x^3 y''' - 2x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0$ و $y_1 = x$

$y_1 = x \Rightarrow y_1' = 1$ و $y_1'' = y_1''' = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 8x - 8x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$

$\Leftarrow$ y_1 یک جواب معادله است

$y = vy_1 = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

$y'' = v''x + v' + v' = v''x + 2v'$

$y''' = v'''x + v'' + 2v'' = v'''x + 3v''$

$\Rightarrow x^3(v'''x + 3v'') - 2x^2(v''x + 2v') + 8x(v'x + v) - 8vx = 0$

$x^4 v''' + x^3 v'' + 4x^2 v' = 0 \Rightarrow v' = p \Rightarrow v'' = p'$

$\Rightarrow v''' = p'' \Rightarrow x^2 p'' + xp' + 4p = 0 \Leftarrow$ معادله کوشی اویلر

منظور P

$y = x^r \Rightarrow r(r-1) + r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow p = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)$

$\Rightarrow v = \int [c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)]\, dx + c_3$

و $y = vy_1 = vx$

$\Rightarrow y = x\left(\int [c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)]\, dx + c_3\right)$

$\int \underbrace{\cos(2\ln x)}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\cos(2\ln x)}_{u} + \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{2}{x} \sin(2\ln x)\, dx}_{du}$

$= x\cos(2\ln x) + 2\int \underbrace{\sin(2\ln x)}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$

میران

$$\Rightarrow \int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx = x\cos(2\operatorname{Ln}x) + 2\,«\int \sin(2\operatorname{Ln}x)\,dx»$$

$$«\int \sin(2\operatorname{Ln}x)\,dx» = x\sin(2\operatorname{Ln}x) - 2\int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx = x\cos(2\operatorname{Ln}x) + 2x\sin(2\operatorname{Ln}x) - 4\int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx$$

$$\Rightarrow 5\int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx = x\cos(2\operatorname{Ln}x) + 2x\sin(2\operatorname{Ln}x)$$

$$\Rightarrow * \int \cos(2\operatorname{Ln}x)\,dx = \frac{1}{5}x\cos(2\operatorname{Ln}x) + \frac{2}{5}x\sin(2\operatorname{Ln}x)$$

۲-الف: حل معادله‌ی $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ که a_iها ثابت اند.

$$y = e^{rx} \Rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx} \Rightarrow e^{rx}(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) = 0$$

معادله‌ی مفسر $\Rightarrow a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$

۱) تمام ریشه‌ها حقیقی و متمایز هستند $\quad r_1, r_2, \dots, r_n \in R$

$r_i \neq r_j \quad i \neq j \qquad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

مثال ۱) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$

$$r^3 - 5r^2 + 6r = 0 \Rightarrow r = 0, 3, 2 \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

مثال ۲) $y^{(5)} - 3y^{(3)} + 2y' = 0$ $\leftarrow$ مشتق مرتبه‌ی ۵

$$r^5 - 3r^3 + 2r = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{و} \quad r^4 - 3r^2 + 2 = 0 \Rightarrow (r^2 - 1)(r^2 - 2) = 0$$

$$r = \pm 1, \pm\sqrt{2}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{\sqrt{2}x} + c_5 e^{-\sqrt{2}x}$$

مثال ۳) $y^{(5)} - 5y''' + 6y' = 0$

$$r^5 - 5r^3 + 6r = 0 \Rightarrow r(r^4 - 5r^2 + 6) = 0 \Rightarrow r(r^2 - 3)(r^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow r = 0, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x} + c_4 e^{\sqrt{3}x} + c_5 e^{-\sqrt{3}x}$$

حل معادلات $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$

$$y = e^{rx} \Rightarrow r^n + (a_{n-1}) r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

حالت ۱) تمام ریشه‌ها حقیقی و متمایزند

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

مثال ۱) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

$$r^3 + 3r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r^2 + 3r + 2) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ و } -1, -2$$

$$\Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

۲ ب - تمام ریشه‌ها حقیقی هستند ولی بعضی از آنها مکرر هستند

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_k \ , \ r_{k+1}, \ldots, r_n \in R$$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} + \cdots + c_n x^{k-1} e^{r_1 x} + c_{k+1} e$$

مثال ۱) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (r-1)^2 (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1, r = -1 \text{ و } r = 1, r = -1$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

مثال ۲) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^3 = 0 \Rightarrow r = -1 \quad (r = -1, -1, -1)$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

۲- ج: بعضی از ریشه ها مختلط هستند

$r_1=\alpha+i\beta$

$r_2=\alpha-i\beta$

$r_3,\dots,r_n\in R$

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+c_3e^{r_3x}+\dots+c_ne^{r_nx}$$

مثال۱) $y^{(4)}-y=0$

$r^4-1=0\Rightarrow (r^2-1)(r^2+1)=0\Rightarrow r=\pm1$

$r=\pm i\Rightarrow \alpha=0,\ \beta=1$

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

مثال۲) $y^{(5)}+3y'''+2y'=0$

$r^5+3r^3+2r=0$

$\Rightarrow r(r^4+3r^2+2)=0\Rightarrow r(r^2+1)(r^2+2)=0$

$\Rightarrow r=0,\ \pm i,\ \pm\sqrt{2}i$

$$y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+c_4\cos\sqrt{2}x+c_5\sin\sqrt{2}x$$

۲- د: بعضی از ریشه ها مختلط مکرر هستند

$r_1=\alpha+i\beta$

- بازای هر تکرار یک x ضرب می کنیم

$r_2=\alpha-i\beta$

$r_3=\alpha+i\beta$

$r_4=\alpha-i\beta$

$r_5,\dots,r_n\in R$

$$\Rightarrow y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x)+c_5e^{r_5x}+\dots+c_ne^{r_nx}$$

مثال: $y^{(6)}+4y^{(4)}+4y''=0$

$\Rightarrow r^6+4r^4+4r^2=0$

$\Rightarrow r^2(r^4+4r^2+4)=0\Rightarrow r^2(r^2+2)^2=0\Rightarrow r=0,\ r=\pm\sqrt{2}i$

$$\Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos\sqrt{2}\, x + c_4 \sin\sqrt{2}\, x + c_5 x \cos\sqrt{2}\, x + c_6 x \sin\sqrt{2}\, x$$

*حل معادلات اویلر مرتبه n :

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$$

$y = (ax+b)^r$ یا $z = Ln(ax+b)$

مثال ۱) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

$$y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1} \;,\; y'' = r(r-1) x^{r-2} \;,\; y''' = r(r-1)(r-2) x^{r-3}$$

$$\Rightarrow x^r \left(r(r-1)(r-2) - 3(r)(r-1) + 6r - 6 \right) = 0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r^2 - 2r - 3r + 6) = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0 \Rightarrow r = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$ یا $$y = c_1 e^z + c_2 e^{2z} + c_3 e^{3z} \;,\; z = Lnx$$

$$\downarrow$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

۱) $y = x^r \Rightarrow \begin{cases} y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + c_3 x^{r_3} \\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \end{cases}$

$\downarrow$

جوابهای معادله مفسر : r_1 و r_2 و r_3

* حل معادلات مرتبه nام خطی غیرهمگن :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x)$$

قضیه : جواب عمومی برابر است با حاصل جمع جواب عمومی همگن با جواب خصوصی غیرهمگن (y_p) ⇐

$$y_g = y_h + y_p$$

- روش بدست آوردن جوابهای خصوصی :

۱) ضرایب نامعین ۲) تغییر پارامتر

۱) ضرایب نامعین : $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

a_i ها ثابت هستند

$$y_p = x^k e^{\alpha x}(A_n(x)\cos\beta x + B_n(x)\sin\beta x)$$

k مرتبه تکرار $\alpha \pm i\beta$ در معادله مفسر است.

مثال ۱) $y''' + y'' + y' = x + e^{-x}$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

حل همگن : $y''' + y'' + y' = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r^2 + r + 1) = 0$

$\Rightarrow r = 0$ و $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

جواب همگن : $y = c_1 e^{0x} + e^{-\frac{1}{2}x}(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

$= c_1 + e^{-\frac{1}{2}x}(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

جوابهای خصوصی : $y''' + y'' + y' = x \quad (1)$

$y''' + y'' + y' = e^{-x} \quad (2)$

جواب خصوصی (۱) و جواب خصوصی (۲) را پیدا می‌کنیم و باهم جمع می‌کنیم:

$(1)\ y''' + y'' + y' = x \Rightarrow a \pm i\beta = 0 \Rightarrow y_{1p} = x(Ax+B)$

$\Rightarrow y'_{1p} = 2Ax + B \qquad y''_{1p} = 2A \qquad y'''_{1p} = 0$

$\Rightarrow 0 + 2A + 2Ax + B = x \Rightarrow A = 1/2 \ , \ B = -1$

$\Rightarrow y_{1p} = x(1/2\, x - 1)$

$(2)\ y''' + y'' + y' = e^{-x} \Rightarrow a \pm i\beta = -1 \Rightarrow y_{2p} = Ae^{-x}$

$\Rightarrow y'_{2p} = -Ae^{-x} \qquad y''_{2p} = Ae^{-x} \qquad y'''_{2p} = -Ae^{-x}$

$\Rightarrow -Ae^{-x} + Ae^{-x} - Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = -1$

$\Rightarrow y_{2p} = -e^{-x}$

جواب عمومی $\Rightarrow \quad y = c_1 + e^{-x/2}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - e^{-x}$

$0 = y(0) = y'(0) = y''(0) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2 - 1 \quad \mathrm{I}$

در ادامه از y (جواب عمومی) مشتق گرفتیم و $y''(0) = y'(0) = 0$ را محاسبه می‌کنیم:

$\ldots \quad 0 = -\frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 - 1 + 2 \quad \mathrm{II}$

و جوابهای c_1، c_2 و c_3 را محاسبه کرده و در معادله قرار می‌دهیم

مثال ۲) حل معادله $y''' + 2y'' = x^2 + \cos x$ تحت شرایط روبرو ؟

$y(0) = 0$
$y'(0) = 1$
$y''(0) = -1$

$$y''' + 2y'' = 0 \Rightarrow r^3 + 2r^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{r = 0}_{\text{۲ بار تکرار}} , \; r = -2$$

$$\Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}$$

جوابهای خصوصی :

$$\begin{cases} y''' + 2y'' = x^2 \\ y''' + 2y'' = \cos x \end{cases}$$

$$y''' + 2y'' = x^2 \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 0 \Rightarrow$$ ۰ جواب معادله مفسر است و درضمن در معادله‌ی مفسر ۲ بار تکرار شده

$$\Rightarrow y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$$

$$y'_p = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y''_p = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y'''_p = 24Ax + 6B$$

$\rightarrow$ جایگذاری در معادله‌ی اصلی $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{24}$, $B = -\frac{1}{12}$, $C = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow y_{1p} = x^2 \left(\frac{1}{24} x^2 - \frac{1}{12} x + \frac{1}{24} \right)$$

$$y''' + 2y'' = \cos x \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 0 \pm i\beta \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow$$ جزو جوابهای معادله مفسر نیست پس $K = 0$

$$\Rightarrow y_p = A\cos x + B\sin x$$

$$y'_p = -A\sin x + B\cos x$$

$$y''_p = -A\cos x - B\sin x$$

$$y'''_p = A\sin x - B\cos x$$

$\rightarrow$ جایگذاری در معادله‌ی اصلی $\Rightarrow$ $A =$, $B =$

$$\Rightarrow y_{2p} =$$

فصل ۴ حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری های توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

سری توانی حول $x = x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

سری توانی حول $x = 0$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad |x - x_0| < R$$

$$\sum_{K=n}^{K=m} a_K = \sum_{k=n\pm i}^{K=m\pm i} a_{k\mp i}$$

مثال ۱) $y' = y$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Leftarrow y' - y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1) - a_n \right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1}(n+1) - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

$$a_0 \neq 0 \qquad a_1 = a_0 \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{1\times 2\times 3} = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_2 = \frac{a_0}{1\times 2}$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3!} , \dots , a_n = \frac{a_0}{n!} \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n$$

$$\downarrow$$

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x$$

مثال ۲) $y'' + y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n) x^{n-1}$$

$$\rightarrow y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\rightarrow y'' + y = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underbrace{\equiv}_{\text{متحد با صفر}} 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n\right) x^n \equiv 0$$

$$\rightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n = 0 \rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_0 \neq 0 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{1 \times 2}$$

$$a_1 \neq 0 \rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{2 \times 3} , \quad a_4 = -\frac{a_2}{3 \times 4} = \frac{(-1)^2 a_0}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{4 \times 5} = \frac{(-1)^2 a_1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} , \quad a_6 = \frac{(-1)^3 a_0}{6!} , \quad a_7 = \frac{(-1)^3 a_1}{7!} , \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3$$

Subject: Year: Month: Date: / /

$$\to y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

مثال ۳ $\quad y' = 2xy$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \equiv 0$$

$$\to \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \equiv 0$$

برای فاکتور گرفتن باید شروع سری ها یکی باشد

$$\to a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2) a_{n+2} - 2a_n\right] x^{n+1} \equiv 0$$

متحد با صفر

صور عمومی $\forall x$

$$a_1 = 0 \quad \text{و} \quad (n+2) a_{n+2} - 2a_n = 0 \to a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

متحد با صفر قرار دادن یعنی به ازای تمام x ها باید صفر شود مثلاً $x=0$

$$\to a_1 + \sum (\cdots) 0^{n+1} = 0 \to \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_{n+2}=\frac{2a_n}{n+2}\ ,\quad a_0\neq 0 \Rightarrow a_2=\frac{2}{2}a_0=a_0 \qquad a_3=\frac{2}{3}a_1=0\cdots$$

$$a_3=\frac{2}{3}a_1=0\ ,\cdots,\ a_{2k+1}=0 \qquad a_4=\frac{2}{4}a_2=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}a_0$$

$$a_8=\frac{a_0}{4!} \qquad a_6=\frac{2}{6}a_4=\frac{1}{3}a_4=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{6}a_0$$

$$\Rightarrow y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$\Rightarrow y=a_0+0+a_0x^2+0+\frac{a_0}{2}x^4+0+\frac{a_0}{3!}x^6+0+\frac{a_0}{4!}x^8+\cdots$$

$$\Rightarrow y=a_0\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots\right)$$

$$y=a_0e^{x^2}$$

همواره از سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ استفاده می‌کنیم

* حل معادله‌ی $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ با استفاده از سری های توانی:

تعریف (۱): تابع f را در x_0 تحلیلی گوییم هرگاه f در x_0 سری تیلور داشته باشد

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

تعریف (۲): نقطه‌ی $x=x_0$ را یک نقطه‌ی عادی معادله‌ی $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ گوییم

هرگاه $P(x)$ و $Q(x)$ در $x=x_0$ تحلیلی باشد.

Subject: Year: Month: Date: / /

تعریف (۳): $x=x_0$ را نقطه‌ی غیرعادی معادله‌ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ گوییم هرگاه

نقطه‌ی عادی نباشد. نقاط غیرعادی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱) نقاط غیرعادی منتظم ۲) نقاط غیرعادی نامنتظم

۱) $\lim_{x \to x_0} (x-x_0) P(x) = P_0$ و $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) = q_0$

۲) موجود نباشند $\Leftarrow$ $\lim_{x \to x_0} (x-x_0) P(x)$ یا $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x)$

مثال ۱) نقاط عادی، غیرعادی منتظم و نامنتظم معادله‌ی زیر را مشخص کنید:

$$x^3(x^2-1)y'' + 3xy' + (x-1)y = 0$$

$$P(x) = \frac{3}{x^2(x^2-1)} \qquad Q(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$$

مجموعه‌ی نقاط عادی $= R - \{-1, 0, 1\}$

$x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{3}{x^2(x^2-1)} = \infty \Leftarrow$ نقطه غیرعادی نامنتظم

نقطه‌ی غیرعادی منتظم

$x_0 = -1 \Rightarrow \lim_{x \to -1} (x+1) \frac{3}{x^2(x^2-1)} = -\frac{3}{2}$ و $\lim_{x \to -1} (x+1)^2 \frac{1}{x^3(x+1)} = 0$

نقطه‌ی غیرعادی منتظم

$x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} (x-1) \frac{3}{x^2(x^2-1)} = \frac{3}{2}$ و $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \frac{1}{x^3(x+1)} = 0$

مثال ۲) نقاط عادی، غیرعادی منظم و نامنظم معادله‌ی زیر را بیابید؟

$$(x^2+1)(x+4)^2 y'' + (x-4)^2 y' + y = 0$$

$$P(x) = \frac{(x-4)^2}{(x^2+1)(x+4)^2} \qquad Q(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x+4)^2}$$

$R - \{-4\} =$ نقاط عادی

$$x=-4 \to \lim_{x \to -4} (x+4) \frac{(x-4)^2}{(x^2+1)(x+4)^2} = \infty \leftarrow$$ نقطه‌ی غیرعادی نامنظم

- نقاط غیرعادی ⇐ نقاطی که مشتق وجود ندارد.

* حل معادله‌ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ در نقطه‌ی عادی $x = x_0$

قضیه: معادله‌ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ در نقطه‌ی عادی $x = x_0$ جوابی به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ دارد.

مثال ۱) معادله‌ی $y'' + 3xy' + 3y = 0$ را حول $x_0 = 0$ حل کنید.

$P(x) = 3x \qquad Q(x) = 3 \leftarrow$ دو تابع P و Q در نقطه‌ی $x=0$ از هر مرتبه‌ای مشتق دارند پس

$x=0$ یک نقطه‌ی عادی است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=0}^{\infty} n(a_n) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Subject: Year: Month: Date: / /

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n \equiv 0$$

$$\rightarrow \sum_{\underset{0}{n=0}}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{\underset{1}{n=1}}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{\underset{0}{n=0}}^{\infty} 3a_n x^n \equiv 0$$

جمله ی شروع همه ی سری ها را باید یکسان کرد ؛

$$\rightarrow 2a_2 + 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3n a_n + 3a_n\right] x^n \underset{\text{صفر}}{\equiv} 0$$

$$\rightarrow 2a_2 + 3a_0 = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0 \rightarrow a_2 = -\tfrac{3}{2} a_0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_n = 0 \rightarrow a_{n+2} = -\frac{3a_n}{n+2} = -\frac{3}{n+2} a_n$$

$$a_1 \neq 0 \rightarrow a_3 = -a_1 \qquad a_4 = -\tfrac{3}{4} a_2 = -\tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{3}{2}\right) a_0 = \tfrac{9}{8} a_0$$

$$a_5 = -\tfrac{3}{5} a_3 = \tfrac{3}{5} a_1 \ \ldots$$

$$y = a_0 + a_1 x - \tfrac{3}{2} a_0 x^2 - a_1 x^3 + \tfrac{9}{8} a_0 x^4 + \tfrac{3}{5} a_1 x^5 + \cdots$$

$$y = a_0 \underbrace{\left(1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + \cdots\right)}_{y_1} + a_1 \underbrace{\left(x - x^3 + \tfrac{3x^5}{5} + \cdots\right)}_{y_2}$$

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

مثال ۲) حل معادله $(1+3x^2)y''+xy'-9y=0$ حول $x=0$

$P(x)=\frac{x}{1+3x^2}$ $\qquad Q(x)=\frac{-9}{1+3x^2}$

هر دو در $x=0$ مشتق پذیرند

پس $x=0$ یک نقطه‌ی عادی است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow (1+3x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 9\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n)(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 9 a_n x^n \equiv 0$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 9a_n x^n \equiv 0$$

$$\to 2a_2 + 6a_3 + a_1 x - 9a_0 - 9a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} + 3n(n-1)a_n$$

$$+ na_n - 9a_n\big)x^n \equiv 0$$

متحد با صفر $\Rightarrow 2a_2+6a_3+\cdots+\sum\cdots=0$

$\Rightarrow$

$$\to \begin{cases} 2a_2-9a_0=0 \\ 6a_3-8a_1=0 \end{cases}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+3n(n-1)a_n+na_n-9a_n=0$$

$a_0\neq 0 \qquad a_1\neq 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$a_2=\frac{9}{2}a_0 \qquad a_3=\frac{4}{3}a_1$

Subject: Year: Month: Date: / /

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{3n^2-2n-9}{(n+1)(n+2)}\,a_n \rightarrow a_4 = \frac{1}{12}a_2 = \frac{9}{24}a_0 = \frac{3}{8}a_0$$

$$a_5 = \frac{-3}{5}a_3 = -\frac{4}{5}a_1$$

$$\vdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \tfrac{9}{2}a_0 x^2 + \tfrac{4}{3}a_1 x^3 + \frac{3}{8}a_0 x^4 - \frac{4}{5}a_1 x^5 + \dots$$

$$y = a_0\underbrace{\left(1 + \tfrac{9}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots\right)}_{y_1} + a_1\underbrace{\left(x + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 + \dots\right)}_{y_2}$$

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

مثال ۳) حل معادله $(1+2x^2)y'' - 5xy' + 3y = 0$ در مجاورت $x_0 = -3$

$$P(x) = \frac{-5x}{1+2x^2} \quad Q(x) = \frac{3}{1+2x^2} \rightarrow$$ هر ۲ در $x_0=-3$ مشتق پذیرند

پس $x_0=-3$ یک نقطه‌ی عادی است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n$$

حال باید ضرایب y'' و y' را بر حسب $(x+3)$ بنویسیم

روش ۱) $1+2x^2 = 2x^2+1 = 2(x+3)^2 - 12x - 18 + 1$

$$= 2(x+3)^2 - 12(x+3) - 18 + 36 + 1$$

$$= 2(x+3)^2 - 12(x+3) + 19$$

روش ۲ $f(x) = f(-3) + \frac{f'(-3)}{1!}(x+3) + \frac{f''(-3)}{2!}(x+3)^2 \Leftarrow$ روش تیلور

$$f(x) = 19 - 12(x+3) + 2(x+3)^2$$

ادامه $\rightarrow \left[2(x+3)^2 - 12(x+3) + 19\right]\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x+3)^{n-2} + \left[-5(x+3) + 15\right]\sum \dots$

$$\cdots \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+3)^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n \equiv 0$$ ← متحد با صفر

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n (x+3)^n - \sum_{n=2}^{\infty} 12n(n-1) a_n (x+3)^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 19 a_n (x+3)^{n-2} \cdots$$

$$\cdots n(n-1) + \sum_{n=1}^{\infty} -5n(a_n)(x+3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 15 n a_n (x+3)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n (x+3)^n \equiv 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n (x+3)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 12(n+1)(n) a_n (x+3)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 19(n+2)(n+1) a_{n+2} (x+3)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 5n a_n (x+3)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 15(n+1) a_{n+1} (x+3)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n (x+3)^n \equiv 0$$

حالا باید همه سری ها از $n=2$ شروع شوند ⇐

$$-24 a_2 (x+3) + 38 a_2 + 6\times 19 a_3 (x+3) - 5a_1 (x+3) + 15 a_1 + 30 a_2 (x+3) + 3a_0 + 3a_1(x+3) + \sum \cdots *$$

$$* \sum \left[2n(n-1) a_n - 12n(n+1) a_{n+1} + 19(n+1)(n+2) a_{n+2} - 5n a_n + 15(n+1) a_{n+1} + 3a_n\right](x+3)^n \equiv 0$$

$$38a_2 + 15a_1 + 3a_0 = 0$$

$$-24a_2 + 6\times 19 a_3 - 5a_1 + 30a_2 + 3a_1 = 0$$

$$19(n+1)(n+2) a_{n+2} + (2n^2 - 2n - 5n + 3) a_n + (-12n^2 - 12n + 15n + 15) a_{n+1} \equiv 0$$

$$a_0 \neq 0 \quad a_1 \neq 0 \qquad a_2 = \frac{-3a_0 - 15a_1}{38}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$6\times 19\, a_3 = 2a_1 - 6a_2 = 2a_1 + \frac{18}{38}a_0 + \frac{90}{38}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{6\times 19}\left(\frac{166\, a_1}{38}\right) + \frac{1}{6\times 19}\left(\frac{18 a_0}{38}\right)$$

$$a_{n+2} = -\frac{(2n^2 - 7n + 3)\,a_n + (-12n^2 + 3n + 15)\,a_{n+1}}{19(n+1)(n+2)}$$

$$y = a_0 + a_1(x+3) + \left(-\frac{3a_0 - 15a_1}{38}\right)(x+3)^2 + \left[\left(\frac{166}{19\times 6}\times\frac{1}{38}a_1\right) + \left(\frac{1}{19\times 6\times 38}a_0\right)\right](x+3)^3 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{3}{38}(x+3)^2 + \frac{18}{19\times 6\times 38}(x+3)^3 + \cdots\right) + a_1\left((x+3) - \frac{15}{13}(x+3)^2 + \frac{166}{19\times 6\times 38}(x+3)^3 + \cdots\right)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

معادله چون مرتبه ی ۲ است باید دو جواب مستقل خطی بدست آوردیم (y_1 و y_2)

* حل معادله ی $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ در نقطه ی غیرعادی منتظم $x=x_0$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)=p_0$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=q_0$$

$$(x-x_0)^2y''+\big((x-x_0)P(x)\big)(x-x_0)y'+(x-x_0)^2Q(x)y=0$$

کل معادله را در $(x-x_0)^2$ ضرب کردیم .

$$(x-x_0)^2y''+\alpha(x-x_0)y'+\beta y=0$$ ← معادله ی کوشی ـ اویلر

$$* \to (x-x_0)^2y''+[\alpha+0(x-x_0)+0(x-x_0)^2+\cdots](x-x_0)y'+[\beta+0(x-x_0)+\cdots]y=0$$

$$\to (x-x_0)^2y''+[p_0+p_1(x-x_0)+p_2(x-x_0)^2+\cdots](x-x_0)y'+[$$

$$q_0+q_1(x-x_0)+q_2(x-x_0)^2+\cdots]y=0 \ \triangle$$

* جواب معادله ی کوشی ـ اویلر برابر بود با $y=x^r$

△ جواب برابر است با $y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

↓

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$$

هم باید r را مشخص کرد هم a_n ها

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: اگر $x=x_0$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد معادله

جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$ دارد.

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-x_0)^{n+r-1} \qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-x_0)^{n+r-2}$$

ضرب دو سری: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots) \underset{\text{متحد}}{\equiv} (c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)$$

$c_0=a_0b_0$

$c_1=a_0b_1+a_1b_0 \leftarrow$ ضریب x

$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \leftarrow$ ضریب x^2

$\vdots$

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0 \Rightarrow c_n=\sum_{K=0}^{n} a_K b_{n-K}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{K=0}^{n} a_K \cdot b_{n-K}\right)x^n$$

ادامه اثبات $\Rightarrow$ جایگذاری در فرمول معادله دیفرانسیل

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x-x_0)^{n+r-2}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x-x_0)^{n+r-1}\right)$$

$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}\right)\equiv 0$$

$$(x-x_0)^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{K=0}^{n}P_K(n-K+r)a_{n-K}+q_Ka_{n-K}\right\}(x-x_0)^n\right]\equiv 0$$

$$\rightarrow (n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{K=0}^{n}\left\{P_K(n-K+r)a_{n-K}+q_Ka_{n-K}\right\}=0$$

$a_0 \neq 0 \quad a_0 = 1 \qquad r(r-1) + r p_0 + q_0 = 0 \leftarrow$ معادله شاخص

$$a_n = - \frac{\sum_{k=0}^{n} \left\{ p_k (n-k+r) a_{n-k} + p_k a_{n-k} \right\}}{(n+r)(n+r-1)}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow r_1 - r_2 \notin I$

$r_1 - r_2 \in I$

$\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ بحث نمی‌کنیم

۹۰/۸/۲۳

مثال: معادله‌ی $2x^2y''+3xy'-(1+x)y=0$ را در مجاورت $x=0$ حل کنید.

$$P(x)=\frac{3x}{2x^2}=\frac{3}{2x} \qquad , \qquad Q(x)=\frac{-(1+x)}{2x^2}$$

$\Leftarrow$ $x=0$ نقطه‌ی غیرعادی است چون حدود روبرو موجود نیست $\lim_{x\to 0} P(x) , Q(x)$

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x\times\frac{3}{2x}=\frac{3}{2} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} x^2\times\frac{-(1+x)}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ $x=0$ نقطه‌ی غیرعادی منظم است

معادله‌ی مشخصه: $r(r-1)+\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$

$$2r^2+r-1=0 \Rightarrow r_1=-1,\quad r_2=\frac{1}{2} \Rightarrow r_1-r_2=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

تفاضل دو ریشه‌ی r_1 و r_2 عدد صحیح نیست:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$\Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}}=0$$

- جدا کردن جمله‌ی صفرم ۳ عبارت اول:

$$2r(r-1)a_0x^r+3ra_0x^r-a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-a_n-a_{n-1}\right]x^{n+r}=0$$

$a_0 = 1 \Rightarrow 2r(r-1) + 3r - 1 = 0 \Rightarrow 2r^2 + r - 1 = 0$ درست

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1}$$

* $r_1 = -1 \Rightarrow 2(n-1)(n-2) + 3(n-1) - 1 = 2n^2 - 6n + 4 + 3n - 4$
$= 2n^2 - 3n$

$r_1 = -1 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-3)}$ $\qquad a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{-1} = -1$

$a_2 = \frac{a_1}{2(4-3)} = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad a_3 = \frac{a_2}{9} = -\frac{1}{18}$

$a_4 = \frac{a_3}{20} = \frac{-1}{360}$

$$y_1 = x^{-1}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{18} - \frac{1}{360}x^4 + \cdots\right)$$

* $r_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{2(n+1/2)(n-1/2) + 3(n+1/2) - 1}$

$\Rightarrow 2(n^2 - 1/4) + 3n + 3/2 - 1 = 2n^2 + 3n \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$

$a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1\times 5} = 1/5$

$a_2 = \frac{a_1}{2\times 7} = \frac{1}{70}$

$a_3 = \frac{a_2}{3\times 9} = \frac{1}{1890}$

$$y_2 = x^{1/2}\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{} + \cdots\right)$$

جواب عمومی : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

مثال : $3x^2y'' - (x+x^2)y' + y = 0 \qquad x=0$

$$P(x) = \frac{-(x+x^2)}{3x^2} = \frac{-(1+x)}{3x} \qquad Q(x) = \frac{1}{3x^2}$$

$x=0$ نقطه‌ی غیرعادی است

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x \times \frac{-x-1}{3x} = -1/3 \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} x^2 \times \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$r(r-1) - \frac{1}{3}r + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow (r-1)(r-1/3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1/3 \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{2}{3} \notin I$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}$$

$$-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1}}_{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \equiv 0$$

$$\Rightarrow 3r(r-1)a_0x^r - ra_0x^r + a_0x^r = 0$$

$$a_0 x^r (r-1)(3r-1) = 0 \checkmark$$

$$r=1 \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{3n+3r-1} \overset{r=1}{=} \frac{a_{n-1}}{3n+2}$$

$$a_0 = 1,\quad a_1 = \frac{1}{5},\quad a_2 = \frac{\frac{1}{5}}{8} = \frac{1}{40} \qquad a_3 = \frac{1}{440}$$

$$y_1 = x\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{40} + \frac{x^3}{440} + \cdots + \cdots\right)$$

$r = \frac{1}{3}$ $a_n = \frac{a_{n-1}}{3n}$ $a_0 = 1$ و $a_1 = \frac{1}{3}$ و $a_2 = \frac{1}{18}$ و $a_3 = \frac{1}{162}$

$y_2 = \sqrt[3]{x}\,(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{162} + \cdots)$

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

⑦ $r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$ یا $r^2 + (P_0 - 1) r + q_0 = 0$ *

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ① $r_1 - r_2 \in I \leftarrow$

$r_1 - r_2 \notin I \leftarrow$ بحث

$\Delta = 0$ ② $\longleftarrow$ می‌کنیم

$\Delta < 0$ $\times$

حالت $\Delta = 0$

$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$

$x = x_0$ $a_0 (r(r-1) + P_0 r + q_0) x^r + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+r)(n+r-1) a_n \cdots$

$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (F(n+r) a_n + \sum_{k=1}^{n} P_k (n-r+1) + q_k) a_{n-k}) x^{n+r} \equiv 0$

ریشه مضاعف $r = r_1$ $a_n = - \frac{\sum_{k=1}^{n} (P_k (n-r+1) + q_k) a_{n-k}}{F(n+r)}$

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

برای بدست آوردن جواب دوم: ۱- اگر y_1 تابعی مقدماتی باشد از فرمول ۷ یک جواب دیگر

را بدست می‌آوریم:

$$v=\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\,dx \Rightarrow y_2 = v\,y_1$$

$\boxed{\checkmark}$ توابع مقدماتی مانند $\sin x$ ، $\cos x$ ، e^x ، $\ln x$ ، $\cosh x$ ، $\sinh x$ و ...

حالت دوم: تابع مقدماتی نیست و آن را نمی‌شناسیم:

$$L(y,r)=a_0(r-r_1)^2 x^r \Big|_{r=r_1}=0$$

$$L\left(\frac{dy}{dr},r\right)=a_0\left[2(r-r_1)x^r+\ln(x)\,x^r(r-r_1)^2\right]\Big|_{r=r_1}=0$$

از دو عبارت فوق می‌فهمیم که هم y جواب معادله است و هم $\frac{dy}{dr}$.

$$y_2=(y_1')_r=\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1)\,x^{n+r}+a_n(r_1)\ln(x)\,x^{n+r_1}$$

$$\Rightarrow y_2=(\ln x)\,y_1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1)\,x^{n+r_1}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

مثال: $xy''+y'-4y=0$ در نقطه‌ی $x_0=0$

حل: $p(x)=\frac{1}{x}$ $\quad q(x)=-\frac{4}{x}$

$x=0$ نقطه‌ی غیرعادی منظم

$$\lim_{x\to 0} x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\times -\frac{4}{x}=0 \Rightarrow r(r-1)+r=0 \to r^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=0$$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$\text{جایگذاری} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r}\equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1} x^{n+r-1}$$

$$\rightarrow a_0(r(r-1))x^{r-1}+ra_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n-4a_{n-1}\right]x^{n+r-1}\equiv 0$$

$$a_n=\frac{4a_{n-1}}{(n+r)^2} \qquad r=r=0 \qquad a_0=1 \qquad a_1=\frac{4}{1^2}=4$$

$$a_2=\frac{4}{4}\times 4=\frac{4^2}{1^2\times 2^2}$$

$$a_3=\frac{4^3}{1^2\times 2^2\times 3^2} \qquad \rightarrow a_n=\frac{4^n}{(n!)^2} \;*$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n!)^2}x^n$$

$$y_2=y_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(0)\,x^n=y_1\operatorname{Ln}(x)+\sum_{n=0}^{n}\frac{4^n\times -2}{n!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)$$

$$*\; a_n(r)=\frac{4a_{n-1}}{(n+r)^2} \qquad a_1=\frac{4a_0}{(1+r)^2}$$

$$a_2=\frac{4a_1}{(2+r)^2}=\frac{4^2}{(1+r)^2(2+r)^2}a_0=\frac{4^2}{(1+r)^2(2+r)^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow a_n = \frac{۴^n}{(۱+۲)^۲(۲+۲)^۲\cdots(n+۲)^۲}$$

$$\operatorname{Ln} a_n = \operatorname{Ln} ۴^n - \operatorname{Ln} (۱+۲)^۲(۲+۲)^۲\cdots(n+۲)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a_n'}{a_n} = -۲\left(\frac{۱}{۱+۲} + \frac{۱}{۲+۲} + \cdots + \frac{۱}{n+۲}\right)$$

$$a_n'(۰) = a_n(۰)(-۲)\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}\right)$$

$$a_n'(۰) = \frac{۴^n}{(n!)^۲}(-۲)\left(۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + \cdots + ۱/n\right)$$

$$y = c_۱ y_۱ + c_۲ y_۲$$

$$a_n = \frac{۴^n}{(n!)^۲} = \frac{۴^n}{[n(n-۱)!]^۲} = \frac{۴^n}{n^۲((n-۱)!)^۲} = \frac{۴\times ۴^{n-۱}}{n^۲\times((n-۱)!)^۲}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{۴ a_{n-۱}}{n^۲}$$

تمرین:

$y'' - xy' - y = ۰ \qquad x_۰ = ۱ \qquad x_۰ = ۱$

$y'' + x^۲ y' + y = ۰ \qquad x_۰ = ۰ \qquad x_۰ = ۰$

$۳x^۲ y'' - ۲xy' - (۲+x)y = ۰ \qquad x_۰ = ۰$

مثال: $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$ در $x_0 = 0$

براحتی حل شد

$$P(x) = -\frac{x(1+x)}{x^2} = -\frac{1+x}{x}$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow$$ $x_0 = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی است

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\left(-\frac{1+x}{x}\right) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$\Leftarrow$ $x_0 = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم است؛ معادله شاخص: $r(r-1) - r + 1 = 0$

$$\downarrow$$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$\Downarrow$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \equiv 0 \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r}\right)$$

$$\Rightarrow r(r-1)a_0 x^r - r a_0 x + a_0 x^r + \sum \left[(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n - (n+r-1)a_{n-1} + a_n\right] \cdots$$

$$\cdots x^{n+r} \equiv 0$$

$$a_0 = 1 \rightarrow r(r-1) - r + 1 = 0$$

$$a_n = \frac{(n+r-1)a_{n-1}}{(n+r-1)(n+r-1)} = \frac{a_{n-1}}{n+r-1}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$r=1 \quad a_0 = 1 \rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n} \qquad a_1 = \dfrac{1}{1} \qquad a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{1\times 2}$

$\vdots$

$$a_n = \frac{1}{n!} \rightarrow y_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$

$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r-1)} \qquad a_1 = \dfrac{a_0}{r} \qquad a_2 = \dfrac{a_1}{r+1} = \dfrac{1}{r(r+1)}$

$$a_3 = \frac{a_2}{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{1}{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \ln 1 - \left(\ln r + \ln(r+1) + \ln(r+2) + \cdots + \ln(r+n-1)\right)$$

$$\frac{a_n'}{a_n} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{r+n-1}\right)$$

$$a_n'(1) = a_n(1)\left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right)$$

$$a_n' = -\frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\rightarrow y_2 = xe^x \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حالت ۳) $r_1 - r_2 = N \in I \Leftarrow$ $r_1 + N = r_2$

ممکن است

$$a_0(r)(r-1)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=1}^{n}[(n-k+r)p_k + q_k]a_{n-k}\right)x^{n+r} \equiv 0$$

$$F_n(r)a_n = -\sum_{k=1}^{n}[(n-k+r)p_k + q_k]a_{n-k}$$

$$F_n(r) = (n+r)(n+r-1)$$

$$F(r+N) = 0 \Rightarrow 0 \times a_n = -\sum_{k=1}^{n}((N-k+r)p_k + q_k)a_{N-k}$$

$$0 \cdot a_N = 0 \Rightarrow a_N = 0$$ کافی است

ولی اگر

$$0 \times a_N = \alpha \qquad \alpha \neq 0$$

$$a_0 = r - r_1$$

$$a = \lim_{r \to r_1} \frac{(r-r_1)}{(r-r_1)(r-r_2)^2}$$

مثال ۱) در $x_0 = 0$ $\quad xy'' + (x-1)y' + y = 0$

$$p(x) = \frac{x-1}{x} \qquad q(x) = \frac{1}{x}$$

$x = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم است

$$\lim_{x \to 0} x\left(\frac{x-1}{x}\right) = -1 \qquad \lim_{x \to 0} x^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$r(r-1) - r = 0 \Rightarrow r^2 - 2r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \end{cases} \qquad 2 - 0 = 2 \in I$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{r+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \underset{\text{متحد}}{\equiv} 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \underset{\text{متحد}}{\equiv} 0$$

$$\rightarrow r(r-1)a_0 x^{r-1}-ra_0 x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+r+1)(n+r)a_{n+1}+(n+r)a_n-(n+r+1)a_{n+1}$$

$$-a_n\Big]x^{n+r}\equiv 0$$

$$\boxed{a_0=1}\rightarrow r(r-1)x^{r-1}-rx^{r-1}\equiv 0 \rightarrow r(r-1)-r=0$$

$$(n+r-1)(n+r+1)a_{n+1}=-(n+r-1)a_n$$

$$r=2 \rightarrow (n+3)a_{n+1}=-a_n \rightarrow a_{n+1}=-\frac{a_n}{(n+3)}$$

$$a_0=1 \quad a_1=-\frac{a_0}{3} \quad a_2=\frac{(-1)^2}{3\cdot 4} \quad a_3=\frac{(-1)^3}{5\cdot 4\cdot 3} \cdots a_n=\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}$$

$$\downarrow$$

$$a_n=\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$\Rightarrow y_1=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}x^n$$

$r=0 \Rightarrow (n-1)(n+1)\,a_{n+1} = -(n-1)a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+1)}$

$\xrightarrow{n=0} \quad a_1 = -a_0 \Rightarrow a_1 = -a_0 = -1$

$n=1 \Rightarrow 0 \times a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$

دلخواه می‌شود

$a_2 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad n \geq 2$

$y_2 = (1-x)x^0 = 1-x$

$\Rightarrow \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(1-x) + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+2)!} x^{n+2}$

حالت بعد؟ $a \neq 0$, $0 \times a_n = \alpha$ که ما a_n را تعریف می‌کنیم؟

$a_0 = r - r_1$

$F(r) = a_0 (r-r_1)(r-r_2) \Rightarrow F(r) = (r-r_1)^2 (r-r_2)$

$$a = \lim_{r \to r_1} \frac{a_0}{(r-r_1)(r-r_2)^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = a y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1)\, x^{n+r_1}$$

مثال: $x^2 y'' + 2xy' + xy = 0$ حول $x_0 = 0$

$P(x) = \frac{2}{x}$

$q(x) = \frac{1}{x}$

$P(x)$ و $q(x)$ هر دو در $x_0 = 0$ حد ندارند پس $x_0 = 0$ نقطه‌ی غیرعادی است

$\lim_{x \to 0} x \times \frac{2}{x} = 2 \qquad \lim_{x \to 0} x^2 \times \frac{1}{x} = 0$

پس $x_0 = 0$ نقطه‌ی غیرعادی منظم است.

$$\Rightarrow r(r-1)+2r=0 \Rightarrow r^2+r=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}$$

$$\Rightarrow r(r-1)a_0x^r+2ra_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+2(n+r)a_n+a_{n-1}\right]x^{n+r}\equiv 0$$

$$a_0=1 \Rightarrow r(r-1)+2r=0 \Rightarrow r^2+r=0$$

$$\Rightarrow (n+r)\left[(n+r-1)+2\right]a_n=-a_{n-1} \Rightarrow -a_{n-1}=(n+r)(n+r+1)a_n$$

$$r_1=0 \Rightarrow a_n=-\frac{a_{n-1}}{n(n+1)} \qquad a_0=1 \qquad a_1=\frac{-1}{1\cdot 2}$$

$$a_2=\frac{(-1)^2}{1\cdot2\cdot2\cdot3} \qquad a_3=\frac{(-1)^3}{1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$$

$$\Rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+0}}{n!(n+1)!}$$

$$r_2=-1 \Rightarrow (n-1)(n)a_n=-a_{n-1}$$

$$\downarrow$$

$$n=1 \Rightarrow 0\times a_1=-a_0 \Rightarrow 0\times a_1=-a_0$$

$$a=\lim_{r\to -1}\frac{(r+1)}{(r+1)(r-0)^2}=1$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r+1)}$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{(r+1)(r+2)}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2 a_0}{(r+1)(r+2)^2(r+3)}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 a_0}{(r+1)(r+2)^2(r+3)^2(r+4)}$$

$$\vdots$$

$$a_0 = r - r_1 = r+1$$

$$a_n = \frac{(-1)^n \cancel{a_0}}{\cancel{(r+1)}(r+2)^2(r+3)^2\cdots(r+n)^2(r+n+1)}$$

$$\operatorname{Ln} a_n = \operatorname{Ln}|(-1)^n| - 2\Big[\operatorname{Ln}(r+2) + \operatorname{Ln}(r+3) + \cdots + \operatorname{Ln}(r+n) + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(n+r+1)\Big]$$

$$\frac{a_n'}{a_n} = 0 - 2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} + \cdots + \frac{1}{r+n} + \frac{1}{2(n+r+1)}\right) \quad r=-1$$

$$a_n'(-1) = \frac{-2(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

$$y_2 = 1\cdot y_1 \operatorname{Ln} x + \sum \frac{2(-1)^{n+1}}{n!\,(n+1)!}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)}\right)x^{n-1}$$

۹۰/۸/۲۰

فصل ۵) تبدیل لاپلاس: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس

تعریف: فرض کنید f تابعی بر $[0, +\infty)$ باشد تبدیل لاپلاس $f(t)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

که در آن $s \in R^+ \cup \{0\}$

قضیه: تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد.

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))$$

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))$$

تعریف (تبدیل معکوس لاپلاس):

$$L(f(t)) = F(s) \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

قضیه: تبدیل معکوس لاپلاس خاصیت خطی دارد.

$$L^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha L^{-1}(F(s)) + \beta L^{-1}(G(s))$$

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

$$= \alpha L^{-1}(F(s)) + \beta L^{-1}(G(s))$$

$f(t)$	$Lf(t) = F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
t^a	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$ $s>a$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

$$L(y') = sL(y) - y(0)$$

$$L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0)$$

$$L(y^{(n)}) = s^nL(y) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

هم بجزاوی منفی هستند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱) $L(1)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$

۲) $L(t)=\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{dv}\cdot \underset{u}{t}\,dt=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt=0+\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}}=\lim\frac{1}{se^{st}}=0$

۳) $L(t^n)=\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}\cdot \underset{u}{t^n}}_{dv}\,dt=-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt$

لاپلاس $\quad = 0$

$\Rightarrow \quad L(t^n)=\frac{n}{s}L(t^{n-1})$

$L(t^{n-1})=\frac{n-1}{s}L(t^{n-2}) \quad \Rightarrow L(t^n)=\frac{n!}{s^n}\cdot\frac{1}{s}$

$\vdots$

$L(t)=\frac{1}{s}L(1)$

۴) تابع گاما $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad x>0$

$\Gamma(1)=1$

$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$

$\Gamma(n+1)=n!$

$(-\frac{1}{2})!=\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt=\int_0^\infty e^{-u^2}u^{-1}(2u)\,du$

$t=u^2 \qquad =2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\dots=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

PAPCO

$$L(t^{a}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^{a}\, dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{a} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{a}\, du$$

$u = st$

$x-1=\alpha$

$x=\alpha+1$

$$\rightarrow L(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

۵) $L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s-a} \qquad s>a$

۶) $L(\sin at) = L\left(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{s+ia-s+ia}{s^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

۷) $L(\cos at) = L\left(\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s+ia+s-ia}{s^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}$$

۸) $L(\sinh at) = L\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{-1}{s+a}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

۹) $L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$

مثال ۱) $L(\sin 5t \cos 2t)$

$$= \tfrac{1}{2}\left(L(\sin 7t) + \sin 3t\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{s^2+49} + \frac{3}{s^2+9}\right)$$

مثال ۲) $L^{-1}\left(\dfrac{s+3}{(s+1)(s+4)}\right)$

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4} \rightarrow s+3 = A(s+4) + B(s+1)$$

$$\Downarrow$$

$$s=-1 \rightarrow A = 2/3$$

$$s=-4 \rightarrow -1 = -3B \Rightarrow B = 1/3$$

$$= L^{-1}\left(\frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s+4}\right) = \tfrac{2}{3}e^{-t} - \tfrac{1}{3}e^{-4t}$$

مثال ۳) $L^{-1}\left(\dfrac{2s+3}{s^2+4}\right)$

$$= 2L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \tfrac{3}{2}L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = 2\cos 2t + \tfrac{3}{2}\sin 2t$$

مثال ۴) مطلوبست محاسبه ی $L(\sqrt{t})$

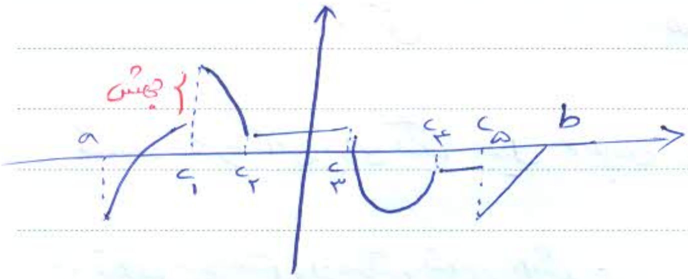
$$\overset{\text{لاپلاس}}{L}(\sqrt{t}) = L(t^{1/2}) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}$$

$$\underset{\text{تابع گاما}}{\Gamma}(3/2) = \tfrac{1}{2}\underset{\text{قبلاً محاسبه شد}}{\Gamma(1/2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \Rightarrow L(\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

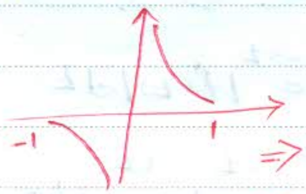
Subject:
Year. Month. Date. ( ) ۶۰

چه توابعی تبدیل لاپلاس دارند؟

تعریف ۱) تابع f را قطعه به قطعه پیوسته گوییم هرگاه در هر فاصله‌ی متناهی تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی یا جهشهای متناهی داشته باشد



مثال: $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad -1<x<1$



$\Rightarrow$ یک نقطه‌ی ناپیوستگی دارد ولی یک جهش نامتناهی

قطعه به قطعه پیوسته نیست

تعریف ۲) تابع f را از مرتبه‌ی نمایی گوییم هرگاه m و a موجود باشند بطوریکه

$$|f(t)| \le m e^{at}$$

مثال ۱: $\cos at$ و $\sin at$ از مرتبه‌ی نمایی هستند.

$$|\sin at| \le 1 \cdot e^{0t} \qquad m=1 \quad a=0$$

$$|\cos at| \le 1 \cdot e^{0t} \qquad m=1 \quad a=0$$

مثال ۲: $f(t)=t^n$ از مرتبه نمایی است.

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{t^n}{n!} < e^t \Rightarrow t^n < n!\,e^t$ $\qquad M = n!$, $\alpha = 1$

مثال ۳: $f(t) = e^{t^2}$ از مرتبه نمایی نیست

$e^{t^2} \le M e^{\alpha t} \Rightarrow e^{t^2 - \alpha t} \le M \qquad \infty \le M$

$t \to \infty$ تناقض

قضیه: شرط کافی برای آنکه تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود باشد آنست که $f(t)$ قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی باشد.

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_0^\infty e^{-st} M e^{\alpha t}\,dt = \frac{M}{s-\alpha}$$

چون $f(t)$ نمایی است

درضمن M را می‌توان بیرون آورد

$\sin s$ ، e^s ، $\cos s$ تبدیل لاپلاس بصورتهای $\Leftarrow \quad 0 \le |F(s)| \le \frac{M}{s-\alpha}$

$\tan s$ و $P_n(s)$ وجود ندارد $\qquad s \to 0$ آنگاه $F(s) \to 0$

چند جمله‌ای برحسب s

قضیه: اگر f و f' از مرتبه نمایی و پیوسته قطعه‌ای باشند و $f(0^+)$ موجود باشد آنگاه

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+)$$

اثبات:

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\,\underbrace{f'(t)\,dt}_{dv} = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L(f'(t)) = -f(0^+) + sL(f(t))$$

$$L(y'') = sL(y') - y'(0) = s[sL(y) - y(0)] - y'(0)$$

مثال ۱: $y'' + 4y = 0$ ، $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$

معادله ← جواب عمومی ← جواب خصوصی

لاپلاس

$$L(y'' + 4y) = L(0) \Rightarrow L(y'') + 4L(y) = 0 \Rightarrow s^2L(y) - sy(0) - y'(0) + 4L(y) = 0$$

$$\Rightarrow L(y)(s^2 + 4) - 1 = 0 \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \tfrac{1}{2}\sin 2t$$

مثال ۲: $y'' - 3y' + 2y = 0$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 2$

$$L(y'' - 3y' + 2y) = L(0) \Rightarrow L(y'') - 3L(y') + 2L(y) = 0$$

$$\Rightarrow s^2L(y) - sy(0) - y'(0) - 3(sL(y) - y(0)) + 2L(y) = 0$$

$$\Rightarrow L(y)(s^2 - 3s + 2) - s - 2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

از جدول $\Rightarrow y = e^{2t}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ آنگاه: $L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(s)}{s}$

یا معادل آن $\Leftrightarrow$ $L^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)=\int_0^t f(x)dx$

اثبات: $\int_0^t f(x)\,dx=g(t) \to L(g'(t))=sL(g(t))-g(0)$

$g(0)=0$

$L(f(t))=sL\left(\int_0^t f(x)dx\right)-0 \Rightarrow L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(s)}{s}$

مثال ۱) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)$

$=L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right)=\int_0^t \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^t=1-\cos t$

مثال ۲) لاپلاس روبرو را حل کنید $L\left(\int_0^t \sin 2x \cos x\,dx\right)$

$=L\left(\frac{1}{2}\int_0^t (\sin 3x+\sin x)\,dx\right)=\frac{1}{2s}\times\left(\frac{3}{s^2+9}+\frac{1}{s^2+1}\right)$

مثال ۳) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-3)}\right)$

$=L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s-3}}{s}\right)=L^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)=\int_0^t f(x)dx=\int_0^t e^{3x}dx$

$=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^t$

$=\frac{1}{3}(e^{3t}-1)$

مثال ۴) لاپلاس روبرو را حل کنید $L\left(\int_0^t e^{2x}\sinh 3x\,dx\right)$

$$L\left(\int_0^t e^{2x}\left(\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}\right)dx\right)=\tfrac{1}{2}L\left(\int_0^t e^{5x}dx\right)-\tfrac{1}{2}L\left(\int_0^t e^{-x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{s-5}}{s}-\frac{1}{2}\times\frac{1/s+1}{s}=\frac{1}{2s}\left(\frac{1}{s-5}-\frac{1}{s+1}\right)$$

قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ آنگاه $L(e^{at}f(t))=F(s-a)$

$$\Updownarrow$$

$$L^{-1}(F(s-a))=e^{at}.f(t)$$

اثبات: $L(e^{at}.f(t))=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}.f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$

$$=F(s-a)$$

مثال ۱) $L(e^{2t}\sin 3t)$

$$L(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}$$

$\Rightarrow L(e^{2t}\sin 3t) \Rightarrow$ هرجا به جای s قرار میدهیم $s-2$

$$L(e^{2t}\sin 3t)=\frac{3}{(s-2)^2+9}$$

مثال ۲) $L^{-1}\left(\frac{2s-3}{s^2+2s+2}\right)$

$$=L^{-1}\left(\frac{2(s+1)-5}{(s+1)^2+1}\right)=2L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)-5L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$=(2\cos t-5\sin t)e^{-t}$$

چون به جای s ما $s-a$ قرار داده‌ایم.

مثال ۳) $L(e^{t}\sin t\sin 4t)$ ← ابتدا باید حاصلضرب را به جمع تبدیل کرد

$$L\left(e^{t}\times \tfrac{1}{2}(\cos 3t-\cos 5t)\right)=\tfrac{1}{2}L(e^{t}\cos 3t)-\tfrac{1}{2}L(e^{t}\cos 5t)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(s-1)}{(s-1)^2+9}-\frac{1}{2}\times\frac{(s-1)}{(s-1)^2+25}$$

مثال ۴) $L^{-1}\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^4}\right)$

$$=L^{-1}\left(\frac{(s-1)^2+2s}{(s-1)^4}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)+2L^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^4}\right)$$

$$=te^{t}+2L^{-1}\left(\frac{s-1+1}{(s-1)^4}\right)$$

$$=te^{t}+2L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right)+\frac{2}{4!}L^{-1}\left(\frac{1\times 4!}{(s-1)^4}\right)$$

$$=te^{t}+t^2e^{t}+\frac{1}{\underset{3}{12}}t^{4^{3}}e^{t}$$

قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ آنگاه $L(tf(t))=-F'(s)$

$$L(t^n f(t))=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

اثبات: $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \Rightarrow F'(s)=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt$

مشتق نسبت به s

$$=\int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))\,dt$$

$$=-L(tf(t))$$

مثال ۱) $L(t\sin 3t)$ ← لاپلاس $\sin 3t$ را می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم

$$= -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

مثال ۲) $L(t^n e^{at})$

$$L(t^n e^{at}) = ? \qquad L(e^{at}) = \left(\frac{1}{s-a}\right)$$

حال n بار از آن مشتق می‌گیریم

$$= \frac{(-1)^n(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

روش ۲ : $L(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

لاپلاس t^n را می‌نویسیم و در آن به جای s قرار میدهیم $s-a$

$$L(tf(t)) = -F'(s) \Rightarrow tf(t) = L^{-1}(-F'(s))$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{-1}{t} L^{-1}(F'(s))$$

مثال: $F(s) = Ln\dfrac{s+3}{s+2}$ ← $f(t) = ?$

$$F(s) = Ln(s+3) - Ln(s+2)$$

$$f(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow f(t) = \frac{-1}{t}\left(e^{-3t} - e^{-2t}\right)$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال ۲ (نمونه سوال امیرکبیر) :

$$F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow F'(s) = \frac{-1/s^2}{1+1/s^2} = \frac{-1}{s^2+1} \rightarrow f(t) = \frac{-1}{t} L^{-1}(F'(s))$$

$$= \frac{-1}{t} L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{t} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{t} \sin t$$

قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ و $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آن گاه:

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty}F(u)du$$

اثبات: $F(s)=L(f(t))=L\left(t\cdot\frac{f(t)}{t}\right)=-\left(L\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)'_s$

مشتق نسبت به s

انتگرال گیری از طرفین $\Rightarrow -L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_{\infty}^{s}F(u)du \Rightarrow L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty}F(u)du$

مثال ۱) $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\int_s^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\operatorname{tg}^{-1}u\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

روش ۲

$s=0$ فرض برای محاسبه انتگرال $\Rightarrow =\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

مثال ۲) مطلوبست محاسبه $\int_0^{\infty}\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}dt$

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\left(\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\right)dt=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}\right)du=\operatorname{Ln}\left|\frac{u-\alpha}{u-\beta}\right|_s^{\infty}$$

$$=L\left(\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\right)=\int_s^{\infty}F(u)du \qquad =\operatorname{Ln}\left|\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right|$$

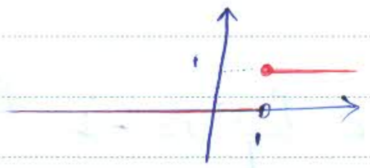
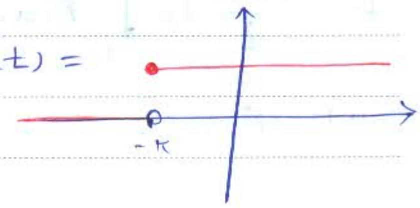
روش ۲

حل با فرض $s=0$ $\Rightarrow \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}\right)dt=\operatorname{Ln}\frac{\alpha}{\beta}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

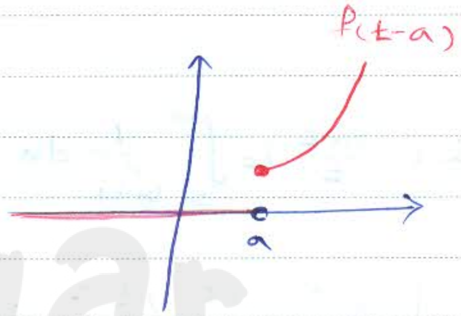
تعریف تابع پله ای واحد:

$$u_a(t)=\begin{cases}1 & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

مثال: $u_1(t)=$  $u_{-\pi}(t)=$ 

انتقال در توابع:

$$u_a(t)f(t-a)=\begin{cases}f(t-a) & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}$$



قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ آنگاه:

$$L(u_a(t)f(t-a))=e^{-sa}F(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad L^{-1}(e^{-sa}F(s))=u_a(t)f(t-a)$$

اثبات:

$$L(u_a(t)f(t-a))=\int_0^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt$$

$$=\int_0^a e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt+\int_a^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt$$

$=0$ چون $t<a$ $\qquad$ $t\geq a \to f(t-a)$

$$=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt=\int_0^\infty e^{-s(x+a)}f(x)\,dx=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

$t-a=x$

$$=e^{-sa}F(s)$$

PAPCO

مثال ۱)

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<2\pi\\ \cos x & x\geq 2\pi\end{cases}\qquad L(f(t))=?$$

بصورت تابع پله‌ای می‌نویسیم:

$$f(t)=\sin t\,(u_0(t)-u_{2\pi}(t))+\cos t\,(u_{2\pi}(t)-u_{\infty}(t))$$

$$=\sin t\,(1-u_{2\pi}(t))+\cos t\,(u_{2\pi}(t)-0)$$

$$=\sin t+u_{2\pi}(t)(\cos t-\sin t)$$

$$\rightarrow L(f(t))=L(\sin t)+L(u_{2\pi}(t)\underbrace{(\cos t-\sin t)}_{f(t-2\pi)})$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$f(t-2\pi)=-\sin t+\cos t=\cos t-\sin t$$

$$f(t)=\cos(t+2\pi)-\sin(t+2\pi)=\cos t-\sin t$$

مثال ۲)

$$L(f(t))=?$$

$$f(t)=\begin{cases}t^2 & 0\leq t<2\\ t-1 & 2\leq t<3\\ 7 & t\geq 3\end{cases}$$

$$f(t)=t^2(u_0(t)-u_2(t))+(t-1)(u_2(t)-u_3(t))+7(u_3(t)-0)$$

$$u_\infty(t)=0$$

$$f(t)=t^2+u_2(t)\underbrace{(-t^2+t-1)}_{f(t-2)}+u_3(t)(-t+8)$$

$$\to L(f(t)) = L(t^2) + L\big(u_2(t)(-t^2+t-1)\big) + L\big(u_3(t)(-t+8)\big)$$

$$= \frac{2!}{s^3} + e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2} - \frac{3}{s}\right) + e^{-3s}\left(-\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}\right)$$

$$f(t-2) = -t^2 + t - 1$$

$$f(t) = -(t+2)^2 + (t+2) - 1 = -t^2 - 3t - 3$$

حال باید از $f(t)$ لاپلاس گرفت

$$g(t-3) = -t+8 \to g(t) = -(t+3)+8 = -t+5$$

حال باید از $g(t)$ لاپلاس گرفت

مثال ۳ $\quad F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$

$$f(t) = L^{-1}\Big(\underbrace{e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}}_{F(s)}\Big) = u_2(t)\sin(t-2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \sin t$$

$$f(t-2) = \sin(t-2)$$

مثال ۴ $\quad f(t) = ? \Leftarrow F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2+4s+5}$

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{(s-2)e^{-s}}{s^2+4s+5}\right) = u_1(t)\left(e^{-2(t-1)}\right)\big(\cos(t-1) - 4\sin(t-1)\big)$$

$$F(s) = \frac{s-2}{s^2+4s+5} = \frac{s+2-4}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{4}{(s+2)^2+1}$$

$$g(t) = e^{-2t}(\cos t - 4\sin t)$$

طبق قضیه ی قبل

قضیه کانولوشن یا انتگرال تلفیقی) یا قضیه پیچش : اگر $L(f(t)) = F(s)$ و $L(g(t)) = G(s)$ آنگاه :

$$L^{-1}(F(s).G(s)) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx$$

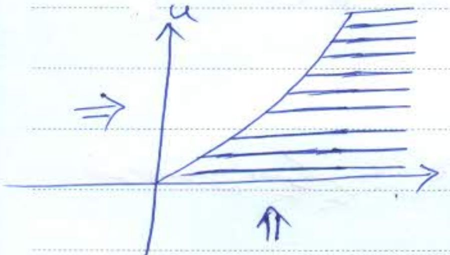
اثبات : $F(s)\,G(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \int_0^\infty e^{-su} g(u)\, du$

u برای این که با انتگرال قبل اشتباه نشود

$$= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s(t+u)} f(t)\, g(u)\, dt\, du$$

$u = 0$ تا ∞ $\quad t = 0$ تا ∞

فرض : $t+u = x \Rightarrow \int_{u=0}^{u=\infty}\int_{x=u}^{x=\infty} e^{-sx} f(x-u)\, g(u)\, dx\, du$



الان افقی را به قائم تبدیل می‌کنیم

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-sx} f(x-u)\, g(u)\, du\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du\right] dx$$

$$= L\left(\int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du\right)$$

مثال ۱) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$

$$L^{-1}\Big(\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\sin t} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\sin t}\Big) = \int_0^t \sin x \sin(t-x)\, dx$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2x-t)-\cos(t)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x-t)-x\cos t\right)\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\sin t-t\cos t\right)-\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin t-t\cos t]$$

مثال ۲) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s-1)}\right)$

$$L^{-1}\left(\underbrace{\frac{1}{s+2}}_{e^{-2t}}\cdot\underbrace{\frac{1}{s-1}}_{e^{t}}\right)=\int_0^t e^{-2x}e^{(t-x)}\,dx=e^{t}\int_0^t e^{-3x}\,dx$$

$$=e^{+t}\left(-e^{-3x}\right)\Big|_0^t=e^{t}\times\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(e^{t}-e^{-2t}\right)$$

نمونه سوال امیرکبیر: $\frac{t^3}{6}=\int_0^t y(x)y(t-x)\,dx$ $\Rightarrow$ معادله انتگرالی

از طرفین لاپلاس می‌گیریم $\Rightarrow L\left(\int_0^t y(x)y(t-x)\,dx\right)=L\left(\frac{t^3}{6}\right)$

$$\Rightarrow L(y)\cdot L(y)=\frac{1}{s^4}\Rightarrow[L(y)]^2=\frac{1}{s^4}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{\pm1}{s^2}\Rightarrow y=\pm t$$

حل معادلات انتگرالی:

مثال ۱) مطلوبست حل معادله‌ی انتگرالی روبرو:

$$y(t)=t+\frac{1}{6}\int_0^t (t-x)^3 y(x)\,dx$$

معادلات انتگرالی معادلاتی هستند که تابع مجهول داخل انتگرال قرار دارد

حل: از طرفین لاپلاس می‌گیریم $\Leftarrow$ $L(y)=L(t)+\frac{1}{6}L\left(\int_0^t (t-x)^3 y(x)\,dx\right)$

$$L(y)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{6}L(t^3)L(y)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{6}\times\frac{3!}{s^4}L(y)$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{s^4}\times L(y) \Rightarrow L(y)\left(1-\frac{1}{s^4}\right)=\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow L(y)\left(\frac{s^4-1}{s^4}\right)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow L(y)=\frac{s^2}{s^4-1}=\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}$$

$$* \quad \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)(s+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1} \Leftarrow \text{تجزیه کسر}$$

$$\Rightarrow s^2\equiv[A(s+1)+B(s-1)](s^2+1)+(Cs+D)(s^2-1)$$

$$s=-1 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-1/4$$

$$s=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=1/4$$

$$s=i \Rightarrow -1=(Ci+D)(-2) \Rightarrow \begin{cases}-2C=0 \Rightarrow C=0\\ -2D=-1 \Rightarrow D=1/2\end{cases}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{1/4}{s-1}+\frac{-1/4}{s+1}+\frac{1/2}{s^2+1}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow y = \tfrac{1}{4}e^{t} - \tfrac{1}{4}e^{-t} + \tfrac{1}{2}\sin t$$

مثال ۲) $y'(t) = y(t) + e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-x)} y(x)\,dx \quad , \quad y(0)=1$

- ابتدا از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$\Rightarrow L(y') = L(y) + L(e^{2t}) + L\left(\int_0^t e^{2(t-x)} y(x)\,dx\right)$$

$$\Rightarrow sL(y) - y(0) = L(y) + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-2}L(y)$$

$$\Rightarrow L(y)\left(s-1-\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{s-2} + 1 \Rightarrow L(y)\left(\frac{s^2-3s+2-1}{s-2}\right) = \frac{s-1}{s-2}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s-1}{s^2-3s+1} \Rightarrow L(y) = \frac{s-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s-\frac{3}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow y = \left(\cosh \frac{\sqrt{5}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh \frac{\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}t}$$

$$* \; L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$* \; L(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

تبدیل لاپلاس توابع متناوب؛ $f(t)=f(t+T)$

$$L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^T+\int_T^{2T}+\int_{2T}^{3T}+\cdots-(e^{-st}f(t)dt)$$

$$\Rightarrow L(f(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}e^{-st}f(t)\,dt$$

تغییر متغیر: $t=kT+x \Rightarrow dt=dx$

$$\Rightarrow L(f(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T e^{-s(kT+x)}\underbrace{f(kT+x)}_{=f(x)}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}\int_0^T f(x)e^{-sx}dx=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ksT}$$

$$\Rightarrow L(f(t))=\frac{\int_0^T e^{-sx}f(x)dx}{1-e^{-sT}}$$

* $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ksT}=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$ ⇐ سری هندسی

مثال ۱) مطلوبست تبدیل لاپلاس $f(t)=t-[t]$

$f(t)$ متناوب است و $T=1$ ⇐ $f(t+1)=f(t)$

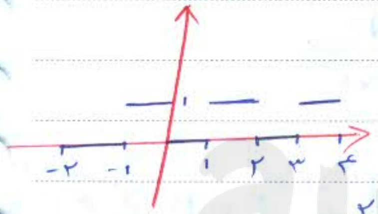
$$L(f(t))=\frac{\int_0^1(t-[t])e^{-st}dt}{1-e^{-s}}$$

$$0 \le t < 1 \Rightarrow [t]=0 \Rightarrow L(f(t))=\frac{\int_0^1 t e^{-st}\,dt}{1-e^{-s}}$$

$$\Rightarrow L(f(t))=\frac{\left(-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^1}{1-e^{-s}}=\frac{\left(-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}\right)}{1-e^{-s}}$$

$$\Rightarrow L(f(t))=\frac{1-se^{-s}-e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$$

مثال ۲) مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع زیر:



$$f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\end{cases}$$

$$* \; L(f(t))=\frac{\int_1^2 1\, e^{-sx}\,dx}{1-e^{-2s}}=\frac{\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_1^2}{1-e^{-2s}}$$ دوره تناوب = ۲

$$L(f(t))=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})}=\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{1}{s(e^{s}+1)}$$

صورت و مخرج را در e^{s} ضرب می‌کنیم

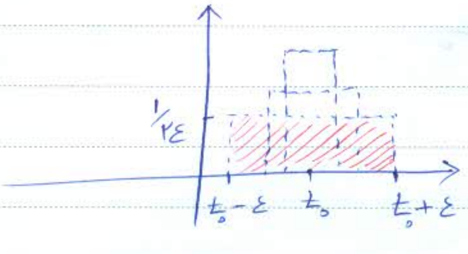
$$* \; L(f(t))=\frac{\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}f(t)\,dt+\int_1^2 e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-2s}}$$

$$0<t<1 \rightarrow f(t)=0$$

- تبدیل لاپلاس تابع ضربه‌ای دیراک ؛

- تابع ضربه‌ای دیراک (ریاضی‌دانی که در فیزیک جایزه نوبل گرفت) ؛

$$\delta_{\varepsilon}(t-t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$



$$\delta(t-t_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0 \\ \infty & t=t_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1 \\ \delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0 \\ \infty & t=t_0\end{cases}\end{cases}$$

$$* \quad L(\delta(t-t_0))=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

$$\rightarrow L(\delta(t-t_0))=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)e^{-st}\,dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow L(\delta(t-t_0)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2s\varepsilon}\left(e^{-s(t_0-\varepsilon)} - e^{-s(t_0+\varepsilon)}\right)$$

$$= e^{-st_0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{s\varepsilon} - e^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon}$$

$$\overset{H}{=} e^{-st_0} \times 1 = e^{-st_0}$$ از طریق هوپیتال

$$L(\delta(t-t_0)) = e^{-st_0}$$

$$L(\delta(t)) = 1$$

* قضیه: ثابت کنید
$$f(t_0) = \int_0^\infty \delta(t-t_0) f(t)\, dt$$

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \delta_\varepsilon(t-t_0) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(t)\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(f(c) \times 2\varepsilon\right) = f(t_0)$$

$$t_0 - \varepsilon < c < t_0 + \varepsilon$$

یادآوری: $$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a)$$

$$a < c < b$$

مثال ۱: $y''+y'+y=\delta(x-1)$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$L(y'')+L(y')+L(y)=L(\delta(x-1))$$

$$\Rightarrow s^2L(y)-s\underbrace{y(0)}_{=s}-\underbrace{y'(0)}_{=0}+sL(y)-\underbrace{y(0)}_{=1}+L(y)=e^{-s}$$

$$\Rightarrow L(y)(s^2+s+1)=s+1+e^{-s}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{s+1}{s^2+s+1}+\frac{e^{-s}}{s^2+s+1}=\frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}+\frac{e^{-s}}{(s+1/2)^2+3/4}$$

$$\Rightarrow y=\left(\cos\frac{\sqrt3}{2}t+\frac{1}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\right)e^{-\frac12 t}+u_1(t)(*)$$

ابتدا $s+1/2$ ها را s در نظر می‌گیریم و در نهایت در $e^{-\frac12 t}$ ضرب می‌کنیم

$$F(s)=\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \qquad f(t)=\left(\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\right)e^{-t/2}$$

$$\Rightarrow y=\left(\cos\frac{\sqrt3}{2}t+\frac{1}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\right)e^{-\frac12 t}+u_1(t)\left(\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}(t-1)\right)e^{-\frac{(t-1)}{2}}$$

یادآوری جلسه قبل:
$$\begin{cases} L^{-1}(e^{-as}F(s))=u_a(t)f(t-a) \\ \text{که در آن } F(s)=L(f(t)) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲) $y(0)=y'(0)=1$

$$y''+2y'+5y=2\,\delta(t-\pi)\cos t$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L(y'')+2L(y')+5\,L(y)=2\,L(\delta(t-\pi)\cos t)$$

$$\Rightarrow s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2sL(y)-2y(0)+5L(y)=-2e^{-\pi s}$$

$$*\ L(\delta(t-\pi)\cos t)=\int_0^\infty \delta(t-\pi)\cos t\, e^{-st}dt=\cos\pi\, e^{-s\pi}$$

طبق قضیه

$$\Rightarrow L(y)(s^2+2s+5)=s+3-2e^{-\pi s}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{s+3}{s^2+2s+5}-\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}=\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+4}-e^{-\pi s}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$\Rightarrow y=(\sin 2t+\cos 2t)e^{-t}-u_\pi(t)\sin 2(t-\pi)e^{-(t-\pi)}$$

$$*\ f(t_0)=\int_0^\infty \delta(t-t_0)f(t)dt$$

$\downarrow$

در اینجا

$$f(t)=\cos t\, e^{-st}\ ,\ t_0=\pi \rightarrow f(t_0)=\cos\pi\, e^{-s\pi}$$

فصل ۶: حل دستگاه معادلات خطی

تعریف: اگر $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ دستگاه * را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل گوییم.

$$
* \begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{cases}
$$

تعریف: $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ را یک جواب دستگاه گوییم هرگاه بطور همزمان در n معادله دستگاه صدق کند.

-
$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\
\vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t)
\end{cases}
$$

- دستگاه فوق را دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی گوییم. اگر $g_1(t) = \dots = g_n(t) = 0$ دستگاه را همگن گوییم.

- در این درس فقط حل دستگاه معادلات صفحه‌ای بعد را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

$$a_{ij} \in R \qquad i, j = 1, 2, \dots, n$$

روشهای حل ⇐ ۱- حذفی ۲- اپراتوری ۳- لاپلاس ۴- ماتریسی

۱- روش حذفی:

$$\begin{cases} \mathrm{I} \quad \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \mathrm{II} \quad \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}} by = \frac{dx}{dt} - ax - f(t) \Rightarrow y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right)$$

$\mathrm{I} + \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{II}$

در ۲ قرار میدهیم

$$\Rightarrow \frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} - f'(t)\right) = cx + \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) + g(t)$$

$$(۴) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + (-a-d)\frac{dx}{dt} + (-cb + da)x = f'(t) - d f(t) + b g(t)$$

معادله‌ی ۴ را حل می‌کنیم و x را بدست می‌آوریم سپس آن را در I قرار میدهیم تا y بدست آید.

مثال ۱) معادله‌ی $\begin{cases} y'=y+2x \\ x'=3y+2x \end{cases}$ را حل کنید (x و y تابعی از t هستند)

$x=x(t)$
$y=y(t)$

- معادله‌ی فوق یک معادله‌ی همگن است

$$y'=y+2x \rightarrow 2x=y'-y \rightarrow x=\tfrac{1}{2}(y'-y)$$

$$\rightarrow x'=\frac{1}{2}(y''-y')$$

جایگذاری در معادله دوم :
$$\frac{1}{2}(y''-y')=3y+(y'-y) \Rightarrow y''-y'=6y+2y'-2y$$

$$\rightarrow y''-3y'-4y=0 \rightarrow \underbrace{r^2-3r-4=0}_{\text{معادله مفسر}}$$

$$\rightarrow (r-4)(r+1)=0 \rightarrow r=4 \text{ و } -1$$

چون y تابعی از t است $\Leftarrow$ $y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{4t} \rightarrow y'=-c_1e^{-t}+4c_2e^{4t}$$

$$\rightarrow x=\tfrac{1}{2}\left(-c_1e^{-t}+4c_2e^{4t}-(c_1e^{-t}+c_2e^{4t})\right)$$

$$\rightarrow x=-c_1e^{-t}+\tfrac{3}{2}c_2e^{4t}$$

- حل معادله یعنی یافتن x و y که هر ۲ تابعی برحسب t هستند.

مثال ۲) $\begin{cases} y'=2y+x+3e^{2t} \\ x'=-4y+2x+te^{2t} \end{cases}$ $\Rightarrow$ یک معادله‌ی غیرهمگن است.

$$x = y' - 2y - 3e^{2t} \Rightarrow x' = y'' - 2y' - 6e^{2t}$$

جایگزاری

$$\Rightarrow (y'' - 2y' - 6e^{2t}) = -4y + 2y' - 4y - 6e^{2t} + te^{2t}$$

$$\to y'' - 4y' + 8y = te^{2t}$$

$$\to y'' - 4y' + 8y = 0 \to r^2 - 4r + 8 = 0 \to r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{1} = 2 \pm 2i$$

$$\begin{cases} r = 2 \pm 2i \to y = e^{2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \\ \alpha = 2 , \beta = 2 \end{cases}$$

$$\to y_p = (At + B)e^{2t}$$

$$y_p' = (A + 2At + 2B)e^{2t}$$

$$y_p'' = (2A + 2A + 4At + 4B)e^{2t}$$

$$\Rightarrow 4A + 4At + 4B - 4A - 8At - 8B + 8At + 8B \equiv t$$

متحد با t

$$\begin{cases} 4A = 1 \to A = 1/4 \\ 4B = 0 \to B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = \tfrac{1}{4} te^{2t}$$

$$\Rightarrow y = e^{2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + \left(\tfrac{1}{4} te^{2t}\right)$$

و

$$x = y' - 2y - 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow x = e^{2t}(2A\cos 2t + 2B\sin 2t - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + \tfrac{1}{4}e^{2t}$$
$$+ \tfrac{1}{2} te^{2t} - 2e^{2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) - \tfrac{1}{2} te^{2t} - 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad x = e^{2t}(2B\cos 2t - 2A\sin 2t) - \frac{11}{4} t e^{2t}$$

- حل معادله یعنی یافتن x و y که در اینجا هر دو تابعی از t هستند.

مثال ۳) معادلات $\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -x - y - 1 \end{cases}$ با شرایط $y(0) = x(0) = 0$ حل کنید.

$$x = -y' - y - 1 \Rightarrow x' = -y'' - y'$$

جایگذاری: $(-y'' - y') = (-y' - y - 1) - 2y + 1 \Rightarrow -y'' + 3y = 0$

$$y'' - 3y = 0 \Rightarrow r^2 - 3 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = Ay_1 + By_2 \Rightarrow y = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}$$

$$x = -y' - y - 1 = -(\sqrt{3}Ae^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3}Be^{-\sqrt{3}t}) - Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t} - 1$$

$$\Rightarrow x = -(\sqrt{3}+1)Ae^{\sqrt{3}t} + (\sqrt{3}-1)e^{-\sqrt{3}t} - 1$$

از طرفی: $x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow * \begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = -(\sqrt{3}+1)A + (\sqrt{3}-1)B - 1 \end{cases}$

از حل دستگاه $* \Rightarrow$ $A = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$ و $B = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((\sqrt{3}+1)e^{\sqrt{3}t} - (\sqrt{3}-1)e^{-\sqrt{3}t}\right) - 1$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}\right)$$

- حل معادله یعنی یافتن x و y که هر دو تابعی از t هستند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- روش تبدیل لاپلاس :

مثال ۱) معادلات

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + e^{t} \\ y' = 3x - 2y + e^{t} \end{cases}$$

را با روش لاپلاس و با شرایط زیر حل کنید. ($x(0)=y(0)=0$) .

$$\begin{cases} L(x') = 4L(x) - 3L(y) + L(e^{t}) \\ L(y') = 3L(x) - 2L(y) + L(e^{t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL(x) - x(0) = 4L(x) - 3L(y) + \frac{1}{s-1} & x(0)=0 \\ sL(y) - y(0) = 3L(x) - 2L(y) + \frac{1}{s-1} & y(0)=0 \end{cases}$$

داده های مسئله

$$* \begin{cases} L(x)(s-4) + 3L(y) = \frac{1}{s-1} \\ -3L(x) + (s+2)L(y) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

حال دستگاه * را به هر روشی که ممکن است حل می‌کنیم (روش دلخواه است)

$$L(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1} & 3 \\ \frac{1}{s-1} & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-4 & 3 \\ -3 & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{s-1}(s+2-3)}{s^2-2s+1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$L(y) = \frac{\begin{vmatrix} s-4 & \frac{1}{s-1} \\ -3 & \frac{1}{s-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-4 & 3 \\ -3 & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{s-1}(s-4+3)}{s^2-2s+1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$L(x)=\frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow x=te^{t}$$

$$L(y)=\frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow y=te^{t}$$

x و y هر۲ تابعی برحسب x هستند.

مثال ۲) معادله‌ی $\begin{cases} y'=2y+x+t \\ x'=y+2x+t^2 \end{cases}$ را به روش لاپلاس و بدون شرایط اولیه حل کنید.

$$\begin{cases} L(y')=2L(y)+L(x)+L(t) \\ L(x')=L(y)+2L(x)+L(t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL(y)-y(0)=2L(y)+L(x)+\frac{1}{s^2} & y(0)=a \\ sL(x)-x(0)=L(y)+2L(x)+\frac{2}{s^3} & x(0)=b \end{cases}$$

خودمان فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} L(y)(s-2)-L(x)=\frac{1}{s^2}+a \\ -L(y)+(s-2)L(x)=\frac{2}{s^3}+b \end{cases}$$

$$L(y)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2}+a & -1 \\ \frac{2}{s^3}+b & s-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix}}=\frac{(s-2)\left(\frac{1+as^2}{s^2}\right)+\frac{2+bs^3}{s^3}}{s^2-4s+3}$$

$$L(x)=\frac{\begin{vmatrix} s-2 & \frac{1}{s^2}+a \\ -1 & \frac{2}{s^3}+b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix}}=\frac{(s-2)\left(\frac{2+bs^3}{s^3}\right)+\frac{1+as^2}{s^2}}{s^2-4s+3}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} L(y) = \dfrac{s^2 - 2s + as^4 - 2as^3 + 2 + bs^3}{s^3(s^2 - 4s + 3)} \\[2ex] L(x) = \dfrac{2s - 4 + bs^4 - 2bs^3 + s + as^3}{s^3(s^2 - 4s + 3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(y) = \dfrac{as^4 + (b - 2a)s^3 + s^2 - 2s + 2}{s^3(s^2 - 4s + 3)} \\[2ex] L(x) = \dfrac{bs^4 + (a - 2b)s^3 + 3s - 4}{s^3(s^2 - 4s + 3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{as^4 + (b - 2a)s^3 + s^2 - 2s + 2}{s^3(s^2 - 4s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{(s^2 - 4s + 3)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( ) ۷۵

مثال ۱) معادله‌ی $y'' - 3y' - 4y = e^{3t}$ را حل کنید. $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$

$$y = -\frac{1}{4} e^{3t} + \frac{1}{3} e^{-t} + e^{4t}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲) $y'' - y = f(t) + 3\delta(t-1)$ و $y(0) = y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \\ t-1 & t > 1 \end{cases}$$

$$f(t) = 0(u_0(t) - u_1(t)) + (t-1)(u_1(t) - 0)$$

$$\Rightarrow f(t) = u_1(t)(t-1)$$

$$\Rightarrow y'' - y = u_1(t)(t-1) + 3\delta(t-1)$$

$$\Rightarrow L(y'') - L(y) = L(u_1(t)(t-1)) + 3L(\delta(t-1))$$

$$f(t-1) = t-1$$

$$\Rightarrow s^2 L(y) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} - L(y) = e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 3e^{-1.s}$$

$$\Rightarrow L(y)(s^2-1) = \frac{e^{-s}}{s^2} + 3e^{-s}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{e^{-s}}{s^2(s^2-1)} + \frac{3e^{-s}}{s^2-1}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2(s^2-1)}\right) + 3L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right)\right) + 3L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2-1}\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} \rightarrow f(t) = \sinh t - t$$

$$\Rightarrow y = u_1(t)\left(-(t-1)+\sinh(t-1)\right)+3u_1(t)\sinh(t-1)$$

$$\Rightarrow y = u_1(t)\left(-t+1+4\sinh(t-1)\right)$$

مثال ۳) $y''+y=g(t)$ و $y(0)=y'(0)=1$

$$g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\end{cases}$$

$g(t+2)=g(t) \Leftarrow$ تابع متناوب

- از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L(y'')+L(y)=L(g(t))$$

$$\Rightarrow s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+L(y)=\frac{\int_1^2 1\cdot e^{-sx}\,dx}{1-e^{-2s}}$$

در ضابطه‌ی اول چون $g(t)=0$ است انتگرال روبرو صفر می‌شود و ما آن را ننوشتیم

$$\int_0^1 0\cdot e^{-sx}\,dx=0$$

$$\Rightarrow L(y)(s^2+1)-s-1=\frac{-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_1^2}{1-e^{-2s}}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{s+1}{s^2+1}+\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})(1+s^2)}=\frac{s+1}{s^2+1}+\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})(1+s^2)}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\cdot\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)$$

$$y=\cos t+\sin t+L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right)$$

*

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$* \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ns} \qquad \Leftarrow \quad e^{-s}$$ بجای x قرار میدهیم

$$\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)s}$$

$$\Rightarrow \quad y = \cos t + \sin t + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n+1}(t)\,(1-\cos(t-(n+1)))$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = (1-\cos t)$$

مثال ۴) معادله $ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس و با شرایط $y(0) = y'(0) = 0$ حل کنید.

- از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L(ty'') + L(2(t-1)y') + L((t-2)y) = 0$$

$$\Rightarrow L(ty'') + 2L(ty') - 2L(y') + L((t-2)y) = 0$$

$$L(ty'') = \int_0^{\infty} y''(te^{-st})\,dt = -\frac{d}{ds} L(y'')$$

$$L(ty') = \int_0^{\infty} y'(te^{-st})\,dt = -\frac{d}{ds} L(y')$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روشن کردن مثال ۳؟

$$L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right)$$

$\downarrow$

چون $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ یک عدد می شود از لاپلاس وارون (L^{-1}) بیرون می آوریم پس

کافی است L^{-1} زیر را محاسبه کنیم؛

$$* \quad L^{-1}\left(e^{-(n+1)s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)\right)$$

$\downarrow$

چون $e^{-(n+1)s}$ در L^{-1} وجود دارد پس حتماً جواب یک تابع پله ای

خواهد شد.

$$L^{-1}(e^{-sa}F(s)) = u_a(t)f(t-a) \quad \text{که} \quad F(s)=L(f(t))$$

$\downarrow$

با * مقایسه می شود

$\downarrow$

$a=(n+1) \rightarrow$ a معین شد

$F(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right) \Rightarrow$ از طرفی ما برای جواب احتیاج به

$f(t)$ داریم تا بتوانیم آن را به $f(t-a)$ تبدیل کنیم

$$\Rightarrow f(t)=L^{-1}(F(s))$$

$\downarrow$

$$f(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)=1-\cos t$$

$\downarrow$

$$f(t-a)=1-\cos(t-a) \quad \text{و} \quad a=(n+1)$$

$\downarrow$

$$f(t-a)=1-\cos(t-(n+1))$$

$$\Rightarrow u_a(t)f(t-a)=u_{n+1}(t)(1-\cos(t-(n+1)))$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس جواب نهایی برابر است با: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n+1}(t)\big(1-\cos(t-(n+1))\big)$

P4PCO

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}L(y'') - 2\frac{d}{ds}L(y') - 2L(y') - \frac{d}{ds}L(y) - 2L(y) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}\left(s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\frac{d}{ds}\left(sL(y) - y(0)\right) -$$

$$2\left(sL(y) - y(0)\right) - \frac{d}{ds}L(y) - 2L(y) = 0$$

$$\Rightarrow -2sF(s) - s^2F'(s) + \underbrace{y(0)}_{0} - 2F(s) - 2sF'(s) - 2sF(s) +$$

$$2\underbrace{y(0)}_{0} - F'(s) - 2F(s) = 0$$

فرض: $L(y) = F(s)$

$$\Rightarrow F'(s)(-s^2 - 2s - 1) + F(s)(-2s - 2 - 2s - 2) = 0$$

$$\Rightarrow F'(s)\left((s+1)^2\right) + 4F(s)(s+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{4}{s+1} \Rightarrow \ln F(s) = -4\ln|s+1| + \ln c$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{c}{(s+1)^4} \Rightarrow f(t) = \frac{ce^{-t}}{3!}t^3$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{ce^{-t}}{6}t^3$$

مثال ۵) انتگرال روبرو را محاسبه کنید $\Leftarrow \int_0^\infty xe^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$

$$\int_0^\infty e^{-st}(t\cos\beta t)\,dt = -\frac{d}{ds}L(\cos\beta t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2} \right) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)}$$

در این انتگرال $s = \alpha$ و $x = t$

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

مثال ۶) انتگرال روبرو را حل کنید

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} \, dx$$

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

$$L\left(\frac{\sin bx}{x}\right) = \int_s^\infty \frac{b}{u^2+b^2}\, du = \tan^{-1}\frac{u}{b}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{b}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

۳- روش اپراتوری :

مثال ۱) معادلات روبرو را حل کنید

$$\begin{cases} y' = 2y + 4x + 2 \\ x' = y - x + 4 \end{cases}$$

$$D = \frac{d}{dt} \qquad D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \qquad D(\sin t + 2) = \cos t + 0$$

$$x' = Dx = \frac{dx}{dt} \qquad x'' = D^2 x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

اپراتور $\Rightarrow$
$$\begin{cases} Dy = 2y + 4x + 2 \Rightarrow (D-2)y - 4x = 2 \\ Dx = y - x + 4 \Rightarrow (D+1)x - y = 4 \end{cases}$$

اثر می‌کند

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -4 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{*(D+1)(2) + 16}{D^2 - D - 6} = \frac{0 + 2 + 16}{D^2 - D - 6}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -4 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix}} = \frac{(D-2)(4) + 2}{D^2 - D - 6} = \frac{0 - 8 + 2}{D^2 - D - 6}$$

$$\begin{cases} \rightarrow (D^2 - D - 6)x = -6 \rightarrow x'' - x' - 6x = -6 \\ \rightarrow (D^2 - D - 6)y = 18 \rightarrow y'' - y' - 6y = 18 \end{cases}$$

$*$ $(D+1)(2) = D2 + 2 = 0 + 2 = 2$

D روی ۲ اثر می‌کند

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$x'' - x' - 6x = -6 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ و } -2$$

$$\Rightarrow x_h = Ae^{3t} + Be^{-2t}$$

$$y'' - y' - 6y = 18 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ و } -2$$

$$-6A = 18 \qquad \Rightarrow y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

$$\downarrow$$

$$y_p = A = -3 \qquad x_p = 1 \Leftarrow -6A' = -6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = Ae^{3t} + Be^{-2t} + 1 \Leftarrow x = x_h + x_p \\ y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - 3 \end{cases}$$

در معادله I جایگذاری می کنیم

$$\Rightarrow 3c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-2t} = 2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-2t} - 6 + 4Ae^{3t} + 4Be^{-2t} + 4 + 2$$

$$\begin{cases} 3c_1 = 2c_1 + 4A \\ -2c_2 = 2c_2 + 4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4A \\ c_2 = -B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = Ae^{3t} + Be^{-2t} + 1 \\ y = 4Ae^{3t} - Be^{-2t} - 3 \end{cases} \Leftarrow$$

حل معادله یعنی یافتن x و y

مثال ۲) حل معادله $\begin{cases} y' = y + 2x \\ x' = 3y + 2x \end{cases}$ از روش اپراتوری

$$\begin{cases} Dy = y + 2x \\ Dx = 3y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-1)y = 2x \\ (D-2)x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-1)y - 2x = 0 \\ -3y + (D-2)x = 0 \end{cases}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & D-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-1 & -2\\ -3 & D-2\end{vmatrix}}=\frac{(D-2)(0)+0}{D^2-3D-4}=0 \qquad x=\frac{\begin{vmatrix}D-1 & 0\\ -3 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-1 & -2\\ -3 & D-2\end{vmatrix}}=\frac{(D-1)(0)+0}{D^2-3D+4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(D^2-3D-4)(y)=0 \rightarrow y''-3y'-4y=0 \rightarrow r^2-3r-4=0\\ (D^2-3D-4)(x)=0 \rightarrow x''-3x'-4x=0 \rightarrow r^2-3r-4=0\end{cases}$$

معادلهٔ مشخصه

معادلهٔ مشخصه

$$r^2-3r-4=0 \rightarrow (r-4)(r+1)=0 \rightarrow r=4 \text{ و } -1$$

$$y=Ae^{-t}+Be^{4t} \quad \text{و} \quad x=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow (-Ae^{-t}+4Be^{4t})=Ae^{-t}+Be^{4t}+2c_1e^{-t}+2c_2e^{4t}$

$$\begin{cases}-A=A+2c_1\\ 4B=B+2c_2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}c_1=-A\\ c_2=\frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=Ae^{-t}+Be^{4t}\\ x=-Ae^{-t}+\frac{3}{2}Be^{4t}\end{cases}$$

$\Leftarrow$ حل معادله یعنی یافتن x و y

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴- روش ماتریسی :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow X' = AX \quad *$$

$X = \alpha e^{\beta t}$ $\qquad \underbrace{\alpha}_{\text{بردار}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\qquad \beta$: اسکالر

$X' = \beta \alpha e^{\beta t} \rightarrow \beta \alpha e^{\beta t} = A \alpha e^{\beta t} \Rightarrow A\alpha = \beta\alpha$

جایگذاری در *

$A\alpha = \beta\alpha$ $\qquad x \neq 0 \qquad Ax = \lambda x$

مقدار ویژه $\quad$ بردار ویژه $\qquad\qquad$ مقدار ویژه $\quad$ بردار ویژه

$|A - \beta I| = 0 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$ مقدار ویژه بدست می‌آید

$A\alpha = \beta_i \alpha \rightarrow \alpha_i \rightarrow$ بردار ویژه بدست می‌آید

بدست می‌آید

$x_i = \alpha_i e^{\beta_i t}$ $i = 1, 2, \dots, n$ $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$

$X' = AX \Rightarrow$
(الف) A ماتریس متقارن است
(ب) A ماتریس غیرمتقارن است

- A متقارن $\leftarrow$ n مقدار ویژه حقیقی

- A غیرمتقارن $\leftarrow$ ممکن است مقادیر حقیقی نباشند

مثال ۱) معادلات روبرو را به روش ماتریسی حل کنید

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad |A - \beta I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\beta & 2 \\ 2 & 1-\beta \end{vmatrix} = 0$$

A: ماتریس متقارن است

$$(1-\beta)^2 - 4 = 0 \rightarrow 1 - \beta = \pm 2$$

مقدارهای ویژه $\rightarrow \beta = -1, 3$

I $\beta = 3 \rightarrow A\alpha = 3\alpha \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3\alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دو خط بر هم منطبق
و هر مقدار دلخواه غیر صفر
می توان برای آنها در نظر گرفت

$1 = \alpha_1 = \alpha_2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

II $\beta = -1 \rightarrow A\alpha = -\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_1 e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 e^{-t} \\ -c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

مثال ۲) دستگاه روبرو را حل کنید

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \qquad |A - \beta I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\beta & 1 & 0 \\ 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 1 & 1-\beta \end{vmatrix} = 0$$

↓ ماتریس متقارن

$$\Rightarrow (1-\beta)(-\beta)(1-\beta) - ((1-\beta) + (1-\beta)) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\beta)(\beta^2 - \beta - 2) = 0 \Rightarrow \beta = 1 \text{ و } 2, -1 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -1 \\ \beta_3 = 2 \end{cases}$$

I $\beta_1 = 1 \qquad A\alpha = \alpha$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$\alpha_2=0 \quad \alpha_1+\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_1=-\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1=1 \quad \alpha_3=-1$

دلخواه

ماتریس دلخواه $\Leftarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

II $\beta_2=-1 \Rightarrow A\alpha=\beta\alpha=-\alpha \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=-\alpha_1\\ \alpha_1+\alpha_3=-\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=-\alpha_3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_2=0\\ \alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_3$ و $\alpha_2=-2\alpha_1$

بی نهایت جواب وجود دارد یکی را به دلخواه انتخاب می کنیم $\Rightarrow \alpha_1=1=\alpha_3$ و $\alpha_2=-2$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

III $\beta_3=2 \Rightarrow A\alpha=2\alpha \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_1\\ \alpha_1+\alpha_3=2\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=2\alpha_3\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1 \Leftarrow$ به دلخواه

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ یا $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ماتریس x

$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{t} \qquad X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\+1\end{pmatrix}e^{-t} \qquad X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ x_2 = c_3 e^{2t} - 2c_2 e^{-t} \\ x_3 = -c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \end{cases}$$

تمرین :

۱- $y''+2y'+5y = 3e^{-t}\sin t$ ← تبدیلات لاپلاس

$y(0)=0$ و $y'(0)=3$

۲- $y''+2y'+y = u_1(t)e^{-t} + \delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t$

$y(0)=y'(0)=0$

۳- انتگرال روبرو را حل کنید $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos bt - e^{pt}\cos qt}{t}\,dt$

۱) $y(t) = \frac{3}{2}e^{-t}\left((-\frac{1}{2})(\cos 2t)(t) - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)$

۲) $L(u_1(t)\,e^{-t}) = e^{-s} \times \frac{e^{-a}}{s+1}$

$L(\delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t) = \int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t\,dt$

$= \int_0^\infty \delta(t-\frac{\pi}{2})\underbrace{(e^{-st}\sin t)}_{f(t)}\,dt = f(t_0)$

$= f(\frac{\pi}{2}) = e^{-s\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{s\pi}{2}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹۰/۹/۲۶

A نامتقارن

$$X' = AX$$

$$|A - \lambda I|$$

۱- تمام ریشه ها متمایز هستند (حقیقی)

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

مثال ۱) معادله ی روبرو را حل کنید

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ماتریس نامتقارن

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4-\lambda)\big((5-\lambda)(-3-\lambda)+1\big) - 1(-3-\lambda-1) = 0$$

$$\to (-4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 14 - 1) = 0 \to (-4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = 0$$

$$\to \lambda = -4, 5, -3$$

$$\lambda_1 = -4 \to A\alpha = -4\alpha \to \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ +1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha_1 \\ -4\alpha_2 \\ -4\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4\alpha_1 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 = -4\alpha_2 \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = -4\alpha_3 \end{cases} \to \alpha_2 = -\alpha_3, \quad \alpha_1 = 10\alpha_3$$

فرض می کنیم: $\alpha_3 = 1 \to \alpha_1 = 10 \quad \alpha_2 = -1 \to \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 5 \rightarrow \begin{cases} -4a_1 + a_2 + a_3 = 5a_1 \\ a_1 + 5a_2 - a_3 = 5a_2 \\ a_2 - 3a_3 = 5a_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از حل معادلات}} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -3 \rightarrow \begin{cases} -4a_1 + a_2 + a_3 = -3a_1 \\ a_1 + 5a_2 - a_3 = -3a_2 \\ a_2 - 3a_3 = -3a_3 \end{cases} \rightarrow a_2 = 0 \text{ و } a_1 = a_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

مثال ۲) حالت مختلط: یعنی بعضی از مقادیر ویژه مختلط هستند

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 2\right) = 0$$

$$1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

و

$$(1-\lambda)^2 + 2 = 0 \rightarrow \lambda - 1 = \pm\sqrt{2}\, i$$

$$\rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{2}\, i$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

← برای بدست آوردن جواب عمومی فقط یکی از ریشه های مختلط (یا مزدوج) آن را در نظر بگیرید

$$\lambda=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1 \\ 3a_1 + a_2 - a_3 = a_2 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 = a_3 \\ 3a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{خودمان جواب فرضی می‌گیریم}} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} e^{t}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2}\,i)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = (1+\sqrt{2}\,i)\,a_1 \Rightarrow a_1(1-1-\sqrt{2}\,i) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ 3a_1 + a_2 - a_3 = (1+\sqrt{2}\,i)\,a_2 \Rightarrow -a_3 = (\sqrt{2}\,i)\,a_2 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = (1+\sqrt{2}\,i)\,a_3 \Rightarrow 2a_2 = \sqrt{2}\,i\,a_3 \end{cases}$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = i \Rightarrow a_3 = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{(1+\sqrt{2}\,i)t}$$

قسمتهای حقیقی و موهومی را جدا می‌کنیم

$$\Rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t)$$

$$\Rightarrow X = \underbrace{e^{t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\cos\sqrt{2}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\right]}_{x_1} + i\,e^{t}\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\sin\sqrt{2}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\sqrt{2}t\right]}_{x_2}$$

$$x = c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}e^{t} + c_2 e^{t}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\cos\sqrt{2}t - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\right] + c_3 e^{t}\left[\ *\ \right]$$

$$* = \begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\sqrt{2}t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cos\sqrt{2}t$$

مثال ۳

$$x' = \begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}x \qquad |A-\lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\-1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \rightarrow (\lambda-1)^2 = -4$$

$$\downarrow$$

کافی است یکی از λ ها را در نظر بگیریم $\leftarrow \lambda = 1 \pm 2i$

$$\lambda = 1+2i \rightarrow A\alpha = \lambda\alpha \rightarrow A\alpha = (1+2i)\alpha$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 4\alpha_2 = (1+2i)\alpha_1\\ -\alpha_1 + \alpha_2 = (1+2i)\alpha_2\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$2\alpha_2 = i\alpha_1$$

و

$$-\alpha_1 = 2i\alpha_2$$

$$\alpha_1 = 2 \rightarrow \alpha_2 = i \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}$$

دو جواب دلخواه بدست می‌آوریم

$$x = \begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}e^{(1+2i)t} = e^{t}\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}i\right](\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$\rightarrow X = e^{t}\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin 2t\right] + i\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\sin 2t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos 2t\right]$$

$$X = c_1 e^{t}\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin 2t\right] + c_2 e^{t}\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\sin 2t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos 2t\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت ۳) یعنی ۲ از ریشه ها مکرر هستند

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \leftarrow$ مثلا α

الف - از دستگاه معادله مشخصه می‌توان جوابهای متمایز بدست آورد.

ب - 〃 〃 〃 نمی‌توان 〃 〃 〃 .

الف)

مثال ۱) معادله‌ی روبرو را حل کنید

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} X$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

قواعد محاسبه دترمینان

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -2+\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\big((5-\lambda)(-4-\lambda+2) - 6(1-3) \big) = 0$$

$$\lambda = 2 \;\text{و}\; \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \;\text{و}\; \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_1=1 \Rightarrow A\alpha=\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\alpha_1-6\alpha_2-6\alpha_3=\alpha_1 \\ -\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=\alpha_2 \\ 3\alpha_1-6\alpha_2-4\alpha_3=\alpha_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{از حل}} \begin{matrix} \alpha_1=\alpha_3 \\ 3\alpha_2=-\alpha_3 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2 \rightarrow A\alpha=2\alpha$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1-6\alpha_2-6\alpha_3=0 \rightarrow \\ -\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_1=2\alpha_2+2\alpha_3 \\ 3\alpha_1-6\alpha_2-6\alpha_3=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دو جواب مستقل خطی هستند

جوابهای مستقل $= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حالت ۳ - ب)

$x'=AX \qquad r_1=r_2=r \qquad x_1=\alpha e^{rt}$

$$x_2=(pt+q)e^{rt}$$

$$\downarrow$$

$$x_2'=(p+rpt+rq)e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad (p+rpt+rq)e^{rt}=A(pt+q)e^{rt}$$

$$\underbrace{p+rpt+rq \underset{t}{\equiv} Apt+Aq}_{\text{متحد قرار میدهیم}} \rightarrow \quad Ap=rp$$

$$Aq=p+rq$$

$$\begin{cases} Ap=rp \\ (A-r)q=p \end{cases} \qquad \begin{cases} A\alpha=r\alpha \\ (A-r)q=\alpha \end{cases} \qquad \begin{gathered} p=\alpha \\ x_2=(\alpha t+q)e^{rt} \end{gathered}$$

مثال ۱)

$$X'=\begin{pmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{pmatrix}X \qquad \underbrace{X(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\text{شرط اولیه}}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow (3-\lambda)(-9-\lambda)+36=0$$

$$\lambda^2+6\lambda+9=0$$

$$(r+3)^2=0 \rightarrow r=-3$$

$$A\alpha=\lambda\alpha=-3\alpha \qquad \lambda=-3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1-18\alpha_2=-3\alpha_1 \\ 2\alpha_1-9\alpha_2=-3\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=3\alpha_2 \qquad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad x_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$$

$$x_2=\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}t+q\right)e^{-3t}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(A-\lambda I)(q) = (\alpha)$

$$\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6q_1 - 18q_2 = 3 \\ 2q_1 - 6q_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{-3t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 = 3c_1 + \frac{1}{2}c_2 \\ 2 = c_1 \\ \frac{1}{2}c_2 = -5 \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} - 10\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{-3t}$$

مثال ۲

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1+\lambda)^2(2+\lambda) = 0$$

$\lambda = -1$ ریشه مضاعف دارد

$\lambda = -2$

$\lambda = -2 \rightarrow A\alpha = -2\alpha$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2=-2\alpha_1 \\ -\alpha_2-3\alpha_3=-2\alpha_2 \\ -2\alpha_3=-2\alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2=\alpha_1 \\ -\alpha_2-3\alpha_3=-2\alpha_2 \end{cases} \rightarrow \alpha_2=3\alpha_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$X_1=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}e^{-2t}$$

$\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2=-\alpha_1 \\ -\alpha_2-3\alpha_3=-\alpha_2 \\ -2\alpha_3=-\alpha_3 \end{cases}$$

$\alpha_3=0 \quad \alpha_2=0 \quad \alpha_1=1$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$X_3=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\right]e^{-t}$$

$(A-2I)q=\alpha$

$$\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}-q_2=1\\-3q_3=0\\-q_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow q_3=0,\ q_2=-1,\ q_1=\gamma \rightarrow \begin{pmatrix}\gamma\\-1\\0\end{pmatrix}$

دلخواه

$$X=c_1\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]e^{-t}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rightarrow c_1\begin{pmatrix}۳\\۳\\1\end{pmatrix}+c_۲\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_۳\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ۳c_1+c_۲+c_۳=1 & \rightarrow \quad c_۲=۷ \\ ۳c_1-c_۳=0 & \rightarrow \quad c_۳=-۳ \\ c_1=-1 & \rightarrow \quad c_1=-1 \end{cases}$$

$$X=-\begin{pmatrix}۳\\۳\\1\end{pmatrix}e^{-۲t}+۷\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-t}-۳\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)e^{-t}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹۰/۹/۲۸

فصل ۸ : توابع خاص

مثال : $x=0$ $\qquad (1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ معادله لژاندر

$$P(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \qquad Q(x)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\rightarrow (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(\alpha+1)a_n x^n=0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\rightarrow 2a_2+6a_3x-2a_1x+\alpha(\alpha+1)a_0+\alpha(\alpha+1)a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2}-$$

$$n(n-1)a_n-2na_n+\alpha(\alpha+1)a_n\Big]x^n \underset{\text{متحد}}{\equiv} 0$$

$a_0\neq 0 \qquad a_1\neq 0$

$2a_2+\alpha(\alpha+1)a_0=0$

$6a_3-2a_1+\alpha(\alpha+1)a_1=0$

$$a_{n+2}=\frac{n(n-1)+2n-\alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

$a_0\neq 0 \qquad a_2=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0$

$a_1\neq 0$

$a_3=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{6}a_1$

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1)+2n-\alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

$\downarrow$

$$n^2-n+2n-\alpha^2-\alpha = n^2+n-\alpha^2-\alpha = (n-\alpha)(n+\alpha)+(n-\alpha)$$

$\downarrow$

$$a_{n+2} = \frac{(n-\alpha)(n+\alpha+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3\times 4}\, a_2 = (-1)^2\frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}\, a_0$$

$$a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4\times 5}\, a_3 = (-1)^2\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}\, a_1$$

$$a_6 = (-1)^3\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}\, a_0$$

$$a_7 = (-1)^3\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}\, a_1$$

$$y = a_0\Big(1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}x^6+\cdots\Big)+a_1\Big(x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5-\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}x^7+\cdots\Big)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y_1 = a_0\left(1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - \cdots\right)$$

$$y_2 = a_1\left(x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

اگر $\underbrace{\alpha = 2k}_{\text{زوج}}$ ⇐ چندجمله ای با توانهای زوج (چندجمله ای لژاندر)

اگر $\underbrace{\alpha = 2k+1}_{\text{فرد}}$ ⇐ " " با " " فرد (" " ")

دیگر سری نیستند

- فرض می‌کنیم که ⇐ $a_0 = (-1)^{n/2}\dfrac{1\times 3\times\cdots(n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times n}$

برای این که چند جمله ایها از نقطه (۱و۱) بگذرند

$$a_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\times 3\times\cdots\times n}{2\times 4\times 6\times\cdots\times n-1}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

زوج $N = n/2$

فرد $N = \frac{n-1}{2}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k (0-2k)!}{2^0 k!(0-k)!(0-2k)!} x^{0-2k} = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$$

$N = \frac{n}{2} = 0$

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k (2-2k)!}{2^1 k!(1-k)!(1-2k)!} x^{1-2k} = \frac{2}{2}x \Rightarrow P_1(x) = x$$

PAPCO $N = \frac{n-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k(4-2k)!}{2^2\,k!\,(2-k)!\,(2-2k)!}\,x^{2-2k}=\frac{4!}{4\times2\times2}x^2-\frac{2!}{2^2\times1\times(2-1)!\,(2-2)!}x^{2-2}$$

$$N=\frac{n}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad =\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x^0=\tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$\rightarrow\; P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

حفظ شود * $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\times\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \Leftarrow$ تابع رودریگز

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0\times0!}\times\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0=1$$

$$P_1(x)=\frac{1}{2^1\times1!}\times\frac{d}{dx}(x^2-1)^1=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2\times2!}\times\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\dots=\frac{12x^2-4}{8}=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}$$

- خواص چند جمله ای های لژاندر :

$P_n(1)=1$

$P_n(-1)=(-1)^n \qquad P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

$$\begin{cases}P_n(0)=0\ ,\ \text{فرد } n\\ P'_n(0)=0\ ,\ \text{زوج } n\end{cases} \qquad \int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sin x \approx P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$ $\Leftarrow$ مرور

تقریب $\sin x$ با یک چندجمله‌ای برای بدست آوردن مقدار آن در یک نقطه

تابع $f(x)$

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - P_n(x)\right)^2 dx$$ $\Leftarrow$ می‌خواهیم تابعی مانند $P_n(x)$ را جایگزین تابع f کنیم

کمترین

هر تابعی که جایگزین کنیم باز هم با تابع اصلی اختلاف دارد و باید سعی کنیم تابعی انتخاب کنیم که کمترین اختلاف را داشته باشد

$$P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x)$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$$

تابع مولد:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n \; *$$

مشتق‌گیری از طرفین:

$$-\tfrac{1}{2}(2t-2x)(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x-t)(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x-t)(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-2xt+t^2) P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x-t)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n}_{*} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-2xt+t^2) P_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x)\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nx P_n(x)\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x)\, t^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x)\, t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x)\, t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nx P_n(x)\, t^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(x)\, t^n$$

$$\Rightarrow x P_0(x) + x P_1(x)\, t - P_0(x)\, t - P_1(x) - 2P_2(x)\, t + 2x P_1(x)\, t +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \left[x P_n(x) - P_{n-1}(x) - (n+1) P_{n+1}(x) + 2nx P_n(x) \quad (n-1) P_{n-1}(x) \right] t^n = 0$$

$$\Rightarrow x P_0(x) - P_1(x) = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} xP_1(x) - P_0(x) - 2P_2(x) + 2xP_1(x) = 0 \\ xP_n(x) - P_{n-1}(x) - (n+1)P_{n+1}(x) + 2nxP_n(x) - (n-1)P_{n-1}(x) = 0 \end{cases}$$

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)x}{n+1} P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{3} x P_2(x) - \frac{2}{3} P_1(x) = \frac{5}{3} x \left(\frac{1}{2}\right)(3x^2 - 1) - \frac{2}{3} x$$

$$= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$a_n = (f(x), P_n(x)) = \left(\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x) dx\right) \times \frac{2n+1}{2}$$

$$* \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

مثال ۱) تقریب کمترین مربعات لژاندر درجه ۲ تابع f را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

PAPCO

$$f(x) \simeq a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x) P_0(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(-1)\,dx + \int_0^1 x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(-(0-(-1)) + 1/2\right) = -\frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x) P_1(x)\,dx\right) = \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right]$$

$$= 3/2\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(0-(-1/2)^2 - 1/2\right) = \frac{5}{4}$$

$$a_2 = \frac{2\times2+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_2(x)\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\left(\int_{-1}^{0} -1(1/2)(3x^2-1)\,dx + \int_0^1 x \times 1/2\,(3x^2-1)\,dx\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(-1/2\,x^3 + 1/2\,x\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

$$f(x) \approx -\frac{1}{4}P_0(x) + \frac{5}{4}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x)$$
$$\approx -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}x + \frac{5}{16}\left(3/2\,x^2 - 1/2\right)$$

$f(x) = x^3$ مثال۲ انتگرال* زیر را محاسبه کنید؟

$$*\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx \underset{\text{روش ①}}{\Rightarrow} x^3 \simeq a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + \cdots$$

$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x \qquad P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$$x^3=\frac{2P_3(x)+3x}{5} \quad \leftarrow \quad P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

روش ۲ $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)\right)P_2(x)\,dx=$

$$=\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}P_3(x)P_2(x)\,dx+\frac{3}{5}\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{5}\times 0+\frac{3}{5}\times 0=0$$

$$*\ \int_{-1}^{1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\[4pt] \dfrac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

مثال ۳ اگر $f(x)=x^3+3x^2+2x+5$ آنگاه انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+2x+5)\,P_2(x)\,dx$$

$$x^3+3x^2+2x+5=\left(\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)\right)+\left(\frac{3}{5}P_1(x)+2P_2(x)\right)+P_0(x)$$

$$+2P_1(x)+5P_0(x)$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x+5=\frac{2}{5}P_3(x)+2P_2(x)+\frac{13}{5}P_1(x)+6P_0(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+2x+5)P_2(x)\,dx=\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_3(x)\,dx+2\int_{-1}^{1}P_2(x)P_2(x)\,dx$$

$$+\frac{13}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)\,dx}_{=0}+6\underbrace{\int_{-1}^{1}P_0(x)P_2(x)\,dx}_{=0}$$

$=$

$$\Rightarrow \int (x^3+3x^2+2x+5)P_2(x)\,dx = 2\times\frac{2}{4+1}=\frac{4}{5}$$

* توابع بسل:

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0 \Leftarrow$$ معادله بسل

عدد ثابت

- $P(x)=\frac{1}{x} \quad Q(x)=\frac{x^2-v^2}{x^2}$ $x=0$ یک نقطه غیرعادی است

- $\lim_{x\to 0} x\times\frac{1}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0} x^2\times\frac{x^2-v^2}{x^2}=-v^2 \Leftarrow$ نقطه‌ی غیرعادی منظم

- معادله شاخص: $r(r-1)+r-v^2=0 \to r^2-v^2=0 \to r=\pm v$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+$$

$$+(x^2-v^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}\equiv 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}}_{\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}}-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}v^2a_n x^{n+r}\equiv 0$$

$$\Rightarrow r(r-1)a_0x^r+(r+1)ra_1x^{1+r}+ra_0x^r+(1+r)a_1x^{1+r}-v^2a_0x^r-v^2a_1x^{1+r}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n+a_{n-2}-v^2a_n\right]x^{n+r}\equiv 0$$

$a_0 \neq 0 \qquad r(r-1)+r-\nu^2=0 \qquad \big(r(r+1)+(1+r)-\nu^2\big)a_1=0$

$$\Downarrow$$

$$\big((r+1)(r+1)-\nu^2\big)a_1$$

$$r=\nu \Rightarrow \big((\nu+1)^2-\nu^2\big)a_1=0 \Rightarrow \underbrace{(2\nu+1)}_{\neq 0}a_1=0 \Rightarrow a_1=0$$

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r-1)(n+r)+(n+r)-\nu^2}=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2-\nu^2}$$

$$\Rightarrow a_0\neq 0 \qquad a_1=0 \qquad a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2-\nu^2}$$

$*\ r=\nu \Rightarrow a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}$ جمله عمومی

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\nu)} \qquad a_3=0,\ a_5=0,\ \dots,\ a_{2k+1}=0$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\nu)}=(-1)^2\frac{a_0}{2\times4\,(2+2\nu)(4+2\nu)}$$

$$a_6=(-1)^3\frac{a_0}{2\times4\times6\,(2+2\nu)(4+2\nu)(6+2\nu)}$$

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2\times4\times\cdots\times2n\,(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2n+2\nu)}$$

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu)} \qquad a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}$$

$$\Rightarrow J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(n+\nu+1)}$$

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

$$y = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

نکته:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1} n a_n x^n$$

$$\downarrow$$

اگر $n=0$ باشد y' صفر می‌شود

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$\downarrow$$

اگر $n=0$ باشد y' صفر نمی‌شود

۹۰،۱۰،۵

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$$

$$J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+v)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$$

$$J_{-v}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-v)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}$$

$v\notin I$ integer $\Rightarrow \quad y=c_1J_v(x)+c_2J_{-v}(x)$

$m=v\in I \Rightarrow \quad J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x) \leftarrow$ وابسته خطی اند

v صحیح باشد

$$y_1=J_m(x)$$

$$y_2=vy_1=J_m(x)\int\frac{e^{-\int\frac{1}{x}dx}}{J_m^2(x)}dx=J_m(x)\int\frac{dx}{xJ_m^2(x)}$$

$$y_v(x)=Y_v(x)=\frac{J_v(x)\cos v\pi-J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$$

$$y=c_1J_v(x)+c_2Y_v(x)=c_1J_v(x)+c_2y_v(x)$$

نکته: اگر v صحیح باشد $Y_v(x)$ صفرصفرم $(\frac{0}{0})$ می‌شود و از حد آن استفاده می‌کنیم

$$Y_1(x)=\frac{J_1(x)\cos\pi-J_{-1}(x)}{\sin\pi}=\frac{-J_1(x)-J_{-1}(x)}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Y_1=\lim_{v\to1}\frac{J_v(x)\cos v\pi-J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$$

مثال: $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0 \Rightarrow y=c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$

$x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0 \Rightarrow y=c_1J_2(x)+c_2Y_2(x)$

مثال ۲ معادله‌ی $xy''+(1+2\nu)y'+xy=0$ را با فرض $y=x^{-\nu}u$ حل کنید

$y=x^{-\nu}u \Rightarrow y'=-\nu x^{-\nu-1}u+x^{-\nu}u'$

$y''=\nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u-2\nu x^{-\nu-1}u'+x^{-\nu}u''$

جایگذاری $\Rightarrow$ $x\left(\nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u-2\nu x^{-\nu-1}u'+x^{-\nu}u''\right)+(1+2\nu)(-\nu x^{-\nu-1}u+$

$+x^{-\nu}u')+x^{-\nu+1}u=0$

طرفین را در $x^{\nu+1}$ ضرب می‌کنیم $\Rightarrow$ $x^2u''+u'(-2\nu x+(1+2\nu)x)+(\nu(\nu+1)-\nu(1+2\nu)+$

$+x^2)u=0$

$\Rightarrow x^2u''+xu'+(x^2-\nu^2)u=0 \Leftarrow$ تبدیل به معادله‌ی بسل شد

جواب $\Rightarrow$ $u=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)$

$y=x^{-\nu}u \Rightarrow u=yx^\nu$

$\Rightarrow yx^\nu=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)$

جواب نهایی $\Rightarrow$ $y=x^{-\nu}\left(c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)\right)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال ۳) معادله ی $xy''-y'+xy=0$ را با فرض $y=xu$ حل کنید.

$y=xu \Rightarrow y'=u+xu'$ و $y''=u'+u'+xu''=2u'+xu''$

جایگذاری $\Rightarrow x(2u'+xu'')-(u+xu')+x(xu)=0$

$\Rightarrow x^2u''+2xu'-u-xu'+x^2u=0$

$\Rightarrow x^2u''+xu'+(x^2-1)u=0$: معادله ی بسل با ν صحیح

$$\Rightarrow \begin{cases} u=c_1J_1(x)+c_2Y_1(x) \\ y=xu \Rightarrow u=\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}=c_1J_1(x)+c_2Y_1(x)$$

جواب نهایی $\Rightarrow y=x\left(c_1J_1(x)+c_2Y_1(x)\right)$

$Y_1(x)$ همان $Y_\nu(x)$ است که بجای ν عدد یک را قرار داده ایم.

$$\text{اتحاد}\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\\[2ex]\dfrac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\end{cases}\Rightarrow$$ *

$$\Rightarrow\begin{cases}\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}J_{\nu}(x)+c\\[2ex]\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c\end{cases}$$

مثال ۱) انتگرال روبرو را محاسبه کنید: $\int J_{3}(x)\,dx=?$

$$\int J_{3}(x)\,dx=\int \underbrace{x^{2}}_{u}\underbrace{(x^{-2}J_{3}(x))\,dx}_{dv}$$

$$=x^{2}(-x^{-2}J_{2}(x))+\int 2x(x^{-2}J_{2}(x))\,dx$$

$$=-J_{2}(x)+2\int x^{-1}J_{2}(x)\,dx+c$$

$$=-J_{2}(x)+2(-x^{-1}J_{1}(x))+c$$

مثال ۲) انتگرال روبرو را محاسبه کنید: $\int x^{3}J_{2}(3x)\,dx=$

$$3x=u\Rightarrow 3dx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{3}$$

$$=\int\left(\frac{u}{3}\right)^{3}J_{2}(u)\frac{du}{3}=\frac{1}{81}\int u^{3}J_{2}(u)\,du$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{1}{81}\left(u^{3} J_{3}(u)\right) + c = \frac{1}{81}(3x)^{3} J_{3}(3x) + c$$

مثال ۳) انتگرال معین روبرو را حل کنید: $\int_0^1 x J_3(x)\,dx = ?$

$$\int_0^1 x J_3(x)\,dx = \int_0^1 x^{3}\left(x^{-2} J_3(x)\right)dx = x^{3}\left(-x^{-2} J_2(x)\right) - \int 3x^{2}\left(-x^{-2} J_2(x)\right)dx$$

$$= -x J_2(x) + 3\int J_2(x)\,dx \;*$$

$$* \int J_2(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\left(x^{-1} J_2(x)\right)dx}_{dv}$$

$$= x\left(-x^{-1} J_1(x)\right) + \int x^{-1} J_1(x)\,dx$$

$$= -J_1(x) + \int \underbrace{x^{-1}}_{u}\,\underbrace{J_1(x)\,dx}_{dv} = -J_1(x) - \int x^{-1} J_0(x)\,dx$$

P4PCO

رابطه ها

$$\begin{cases} x^{\nu} J_{\nu-1}(x) = \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{\nu} J'_{\nu}(x) \\ \\ -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) = -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{-\nu} J'_{\nu}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{\nu-1}(x) = \nu x^{-1} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) \\ \\ -J_{\nu+1}(x) = -\nu x^{-1} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oplus \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J'_{\nu}(x)$$

$$\Rightarrow \ominus \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\nu x^{-1} J_{\nu}(x)$$

$$J'_{\nu}(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \right)$$

$$J_{\nu}(x) = \frac{x}{2\nu}\left(J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \right)$$

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$J_{1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

$$J_{0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}$$

*

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}$$

$$* \quad \Gamma(n+1+1/2) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\, n!}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1/2}}{n!\,\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,n!}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}$$

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$$

$$\Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

مثال ۱) مطلوبست محاسبه‌ی $J_{\frac{3}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{x}{2\times\frac{1}{2}}\left(J_{-\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{3}{2}}(x)\right)\Rightarrow J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{\nu}(x)=\frac{x}{2\nu}\left(J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)\right)$$

* شعاع همگرایی :

مثال : شعاع همگرایی $(x^2-4)y''+2xy'+xy=0$ حول $x=1$

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

$$R=\min\left\{|2-1|,|-2-1|\right\}=1$$

حالت کلی :

$$(ax^2+by+c)y''+\cdots=0$$

$$ax^2+by+c=0\Rightarrow \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}$$ حول x_0

$$R=\min\left\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|\right\}$$ $|x-x_0|<R$