



به نام خداوند بخشنده مهربان

در مسائل مقدار مرزی زیر: اول مقادیر ویژه و توابع ویژه هر مسئله را بیابید. دوم در فاصله مناسب سری فوریه هر تابع تکه‌ای پیوسته دلخواهی را بر حسب توابع ویژه هر مسئله (با توجه به تابع  $p(x)$ ) بنویسید.

$$1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 & , \quad 1 < x < l \\ y(1) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ 2y(0) + y'(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 & , \quad 1 < x < 2 \\ y(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0 & , \quad 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید:

$$10) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a & , \quad 0 < y < b \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0 & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = f(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases}$$

مقدار ویژه صفر را فراموش نکنید.

$$11) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a & , \quad 0 < y < b \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0 & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = f(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 12) & \left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < a \\ u(x, b) = g(x) & , \quad 0 < x < a \\ u_{tt} = a^2 u_{xx} & , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \end{array} \right. \\
 13) & \left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = u_x(l, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = g(x) & , \quad 0 < x < l \end{array} \right.
 \end{aligned}$$