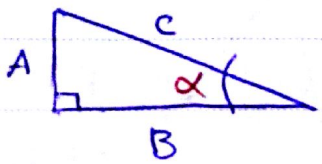
Subject ۹۳/۷/۱۸
Date جلسه اول

علم مکانیک، براساس ثابت یا متحرک بودن اجسام بصورت زیر تقسیم بندی می‌شود

- مکانیک
  - استاتیک
  - دینامیک
    - ذره
      - سینماتیک
      - سینتیک
    - سیستم ذرات
      - سینماتیک
      - سینتیک

سینماتیک ـ علم بررسی حرکت اجسام بدون در نظر گرفتن عوامل ایجاد حرکت

سینتیک ـ " " " " " با " " " " "



$$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{A}{C}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{B}{C}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{A}{B}$$

$$\text{cotan}\,\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{B}{A}$$

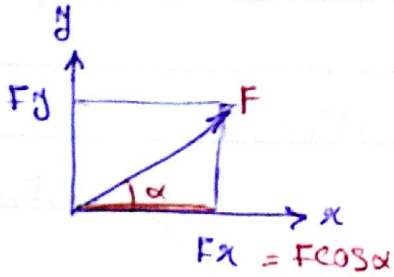
		n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
		0	30	45	60	90
$\frac{\sqrt{n}}{2}$	sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
	cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\frac{\sin}{\cos}$	tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
	cotan	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

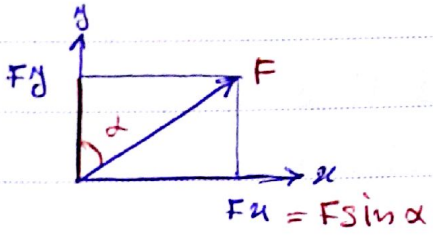
$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$ $\quad$ $\frac{2}{2}=1$ $\quad$ $\frac{1}{0}=\infty$

Pdfcc

Subject
Date

زاویه حسبیده به α برابراست با $\cos\alpha$ -



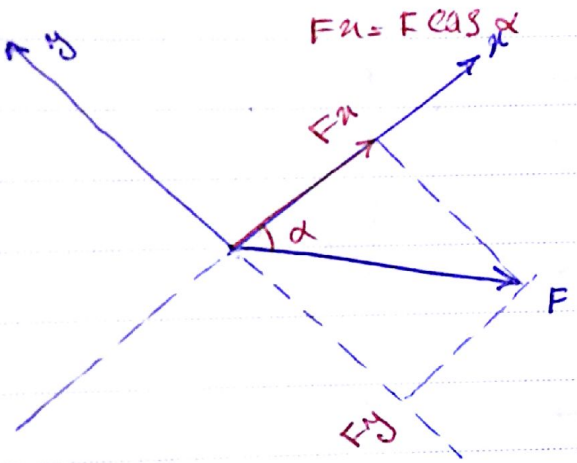


$F_y = F\sin\alpha$

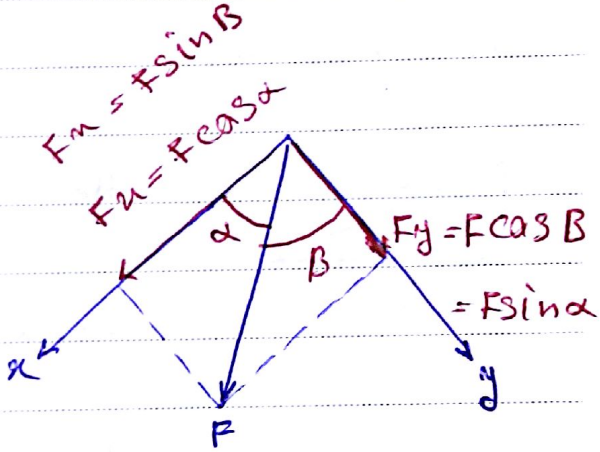
$F_y = F\cos\alpha$

$F_x = F\cos\alpha$

$F_x = F\sin\alpha$



$F_y = F\sin\alpha$



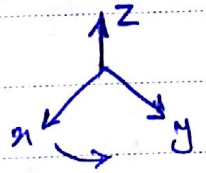
دراین معادر یکی از زوایا را نادیده می گیریم -

پس ضلع چسبیده به زاویه α = cos

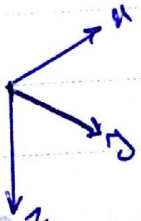
cos = B

زاویه مکمل α برابر B - باهمین قانون درنظر گرفته شود





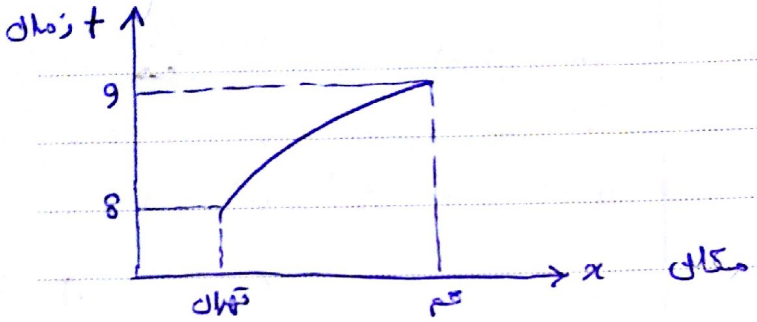
گردش زوایا طبق قانون دست راست



Scanned by CamScanner

Subject
Date

یادآوری مشتق و انتگرال



مشتق هر عدد ثابت = ۰

" " برخودش = ۱

$$\text{سرعت } V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{تغییرات مکان}}{\text{تغییرات زمان}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

✓ سرعت برابر است با تغییرات مکان تقسیم بر تغییرات زمان

$$x^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} n x^{n-1} \qquad x^3 \longrightarrow 3x^2$$

$$\sin u \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u' \cos u \qquad \sin x \longrightarrow \cos x$$

$$\sin 5x \longrightarrow 5\cos x$$

$$u^n \xrightarrow{\frac{d}{dt}} n u' u^{n-1} \qquad \sin^2 x \longrightarrow 2\cos x \sin x^{2-1}$$

$$xy \xrightarrow{\frac{d}{dy}} x \times 1 = x$$

$$x^2 y \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2xy \qquad 3y^6 \xrightarrow{\frac{d}{dy}} 18y^5$$

$$x^3 y^2 \xrightarrow{\frac{d}{dy}} x^3 2y \qquad 3y^6 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{d(3y^6)}{dx} = 0$$

$$x^3 y \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad x=2t \quad 6t^2$$

$$3y^6 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 3 \times 6 y^5 y^5$$

u ; n ; u' ; u^{n-1}

مشتق برحسب dt (مدات) $y^\circ = dt$

Scanned by CamScanner

Subject
Date ۹۳،۷،۲۵

جلسه ۲

خطی	زاویه‌ای
x	θ
$\dot{x} = v$	$\dot{\theta} = \omega$
$\ddot{x} = v^{\circ} = a$	$\ddot{\theta} = \omega^{\circ} = \alpha$
$\dddot{x} = v^{\circ\circ} = a^{\circ} = j$ جرک	

$x^3 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 3x^{\circ}x^2$

$3xy \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 3y$

$3xy \xrightarrow{\frac{d}{dy}} 3x$

$3x \xrightarrow{\frac{d}{dy}} 0$

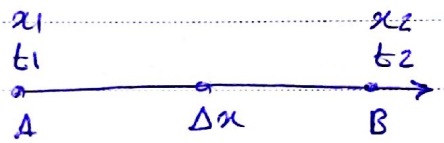
جسم صلب ـ

جسمی است که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل نمی‌دهد.

یادآوری : سرعت ـ حرکت ـ شتاب

سرعت

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



سرعت

شتاب

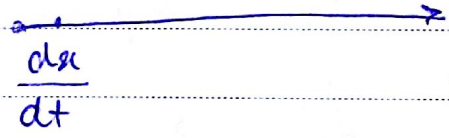
$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$



شتاب

سرعت لحظه‌ای

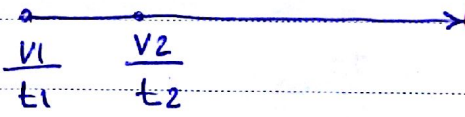
$$V = \frac{dx}{dt}$$



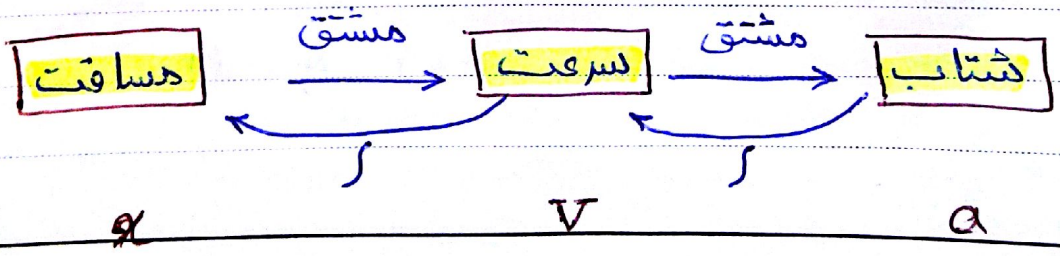
سرعت لحظه‌ای

شتاب لحظه‌ای

$$a = \frac{dv}{dt}$$

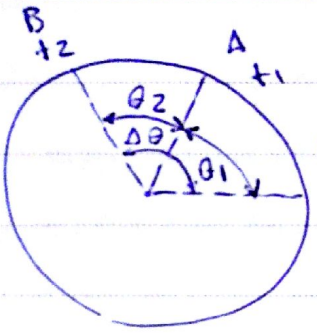


شتاب لحظه‌ای



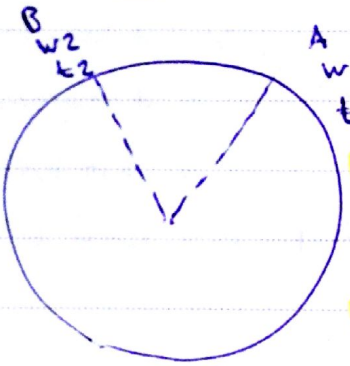
Scanned by CamScanner

Subject
Date



$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \bar{\omega}$$ سرعت زاویه‌ای متوسط

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$ سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای

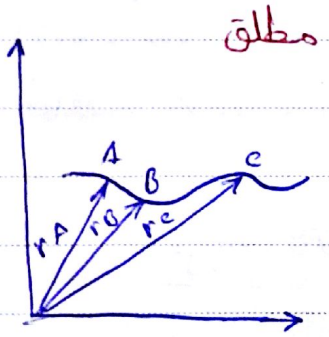


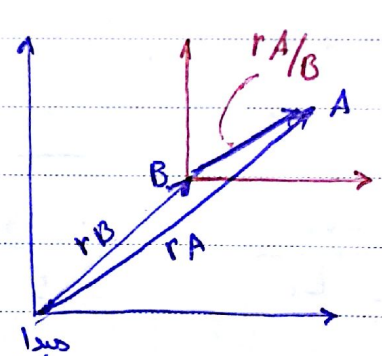
$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \bar{\alpha}$$ شتاب زاویه‌ای

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$$ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای

نکته: اگر حرکت نسبت به یک دستگاه ثابت بیان شود به آن حرکت مطلق می‌گوییم.

اگر دستگاه مختصاتی که سنجش نسبت به آن انجام می‌گیرد متحرک باشد به آن حرکت نسبی می‌گوییم





بردار A موقعیت A نسبت به مبدا (مطلق)

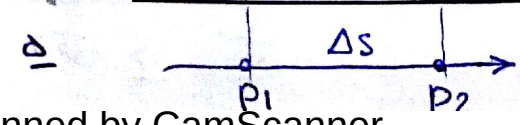
" B " B "

" AB " A نسبت به B

حرکت مستقیم الخط یا حرکت بر روی خط

ذره‌ای را بر روی یک خط مستقیم در نظر می‌گیریم که در حال حرکت می‌باشد مکان این ذره را با S نمایش دهیم. آنگاه داریم:

سرعت متوسط $V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \rightarrow V = S' = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$



Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال 1

متحرکی تحت رابطه زیر حرکت می کند -

الف - فرض می کنیم در ثانیه پنجم این متحرک در مکانی قرار دارد و پس از 4 ثانیه به مکان جدیدی می رسد - سرعت متوسط این متحرک را پیدا کنید .

$$x = 2t^3 + 3t^2$$

$t_1 = 5$ ← زمان را در رابطه حساب می کنیم

$x_1 = 2(5)^3 + 3(5)^2 = \boxed{325}$ ← مکان ها را پیدا می کنیم

$t_1 = 9$ ← زمان ها را از هم کم می کنیم

$x_2 = 2(9)^3 + 3(9)^2 = \boxed{1701}$ ← سرعت متوسط حساب می شود

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1701 - 325}{9 - 5} = \boxed{344} \quad m/s$$

ب - این متحرک در ثانیه پنجم چه سرعتی خواهد داشت .

$$V = \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 6t$$ ← مشتق از رابطه اول

V_1 (5 ثانیه) $= 6(5)^2 + 6(5) = \boxed{180\ m/s}$ V_2 (9 ثانیه) $= 6(9)^2 + 6(9) = \boxed{540\ m/s}$

ج - می خواهیم شتاب متوسط این متحرک را بین ثانیه های 5 و 9 پیدا کنیم . (شتاب متوسط)

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{540 - 180}{9 - 5} = \boxed{90\ m/s^2}$$

د - شتاب را در ثانیه 5 و 9 بدست آورید . (لحظه ای)

از سرعت متوسط مشتق می گیریم

$$a = \frac{dV}{dt} = 12t + 6$$

a (5 ثانیه) $= 12(5) + 6 = \boxed{66}\ m/s^2$

a (9 ثانیه) $= 12(9) + 6 = \boxed{114}\ m/s^2$

PAPCO

وقتی dt می آید به معنی لحظه ای است .

Scanned by CamScanner

Subject
Date

بررسی روابط سرعت و شتاب

یادآوری از انتگرال

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C_1$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

$$\int 1\,dx = x$$

مشتق: $x \longrightarrow 1$ ، انتگرال: $1 \longrightarrow x$

$$\int 1\,dy = y$$

$$\int 1\,du = u$$

$$\int x\,dy = x\int dy = xy$$

$$\int y\,dx = y\int dx = yx$$

انتگرال سرعت

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad ds = v\,dt \longrightarrow \int_1 ds = \int_1 v\,dt$$

$$s = vt$$

$$\boxed{x = vt}$$

$$s_2 - s_1 = \int v\,dt$$

انتگرال شتاب

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a\,dt$$

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int a\,dt$$

$$\boxed{v = at}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳،۸،۲
Date
جلسه ۳

$\dot{x} = v$ | $\dot{\theta} = \omega$
$\ddot{x} = \dot{v} = a$ | $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$

برای حل مسائل مربوط به مکان و سرعت و شتاب چنین حالت ایجاد می گردد.

۱- شتاب ثابت باشد

هنگامی که a ثابت است می توانیم از معادله‌های اصلی مستقیماً انتگرال گیری کنیم و روابط زیر را بدست آوریم

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v^{\circ} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$v\,dv = a\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = a\int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$v_1 - v_0 = a(t_1 - t_0) \rightarrow \boxed{v = at + v_0} \qquad \Delta t$$

اثبات فرمول

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x^{\circ}}{1} \qquad 1 \times dx = \dot{x}\,dt \qquad dt = \frac{dx}{x^{\circ}}$$

دو طرف dt برابر می شود

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v^{\circ}}{1} \qquad 1 \times dv = \dot{v}\,dt \qquad dt = \frac{dv}{v^{\circ}}$$

$$\frac{dx}{x^{\circ}} = \frac{dv}{v^{\circ}}$$

$$x^{\circ}\,dv = v^{\circ}\,dx$$

$$v\,dv = v^{\circ}\,dx \rightarrow v\,dv = a\,dx$$

$$\int v\,dv = \int a\,dx \rightarrow \frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v_1} = ax\Big|_{x_0}^{x_1}$$

معادله شتاب ثابت مستقل از زمان

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x_1 - x_0)$$

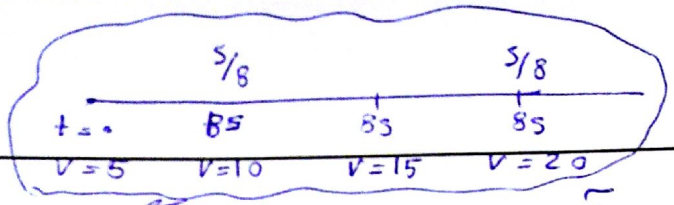
حذف ۲

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = a\,\Delta x \qquad \boxed{v_1^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

شتاب ثابت



حال اگر عبارت بدست آمده را در معادلات قبلی جایگذاری کنیم - عبارتهای جدیدی بصورت زیر بدست می آید.

$$v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = v\,dt$$

$$\int dx = \int v\,dt$$

$$\int dx = \int (at + v_0)\,dt \longrightarrow x = \frac{at^2}{2} + v_0 t$$

$$x_1 - x_0 = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0}$$ ✓

۲ - شتاب تابعی از زمان باشد. $a = F(t)$

$a = t^2 + 1$

$t_{0.0} \longrightarrow a = 1$

$t_{0.1} \longrightarrow a = 2$

$t_{0.2} \longrightarrow a = 5$

$t_{0.3} \longrightarrow a = 10$

$t_{0.4} \longrightarrow a = 17$

اگر در معادلات قبلی شتاب را تابعی از زمان قرار دهیم روابط جدیدی به صورت زیر خواهیم داشت. $a = F(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a\,dt \longrightarrow \int dv = \int a\,dt$$

$$\int dv = \int F(t)\,dt \longrightarrow v - v_0 = \int F(t)\,dt$$

$$\boxed{v = v_0 + \int F(t)\,dt}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ۲

سرعت متحرکی با سرعت اولیه 5 m/s و شتاب $a = t^2 + 1$ حرکت می‌کند. معادله شتاب را بدست آورید

$t = 4$

$v_0 = 5\ m/s$

$a = t^2 + 1$

$$v = 5 + \int t^2 + 1\, dt$$

$$v = 5 + \frac{t^3}{3} + t$$

$$v = 5 + \frac{4^3}{3} + 4$$

— اگر در این شرایط که شتاب تابعی از زمان است بخواهیم مکان را بدست آوریم،

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad dx = v\,dt \longrightarrow \int dx = \int v\,dt$$

شتاب

$$x - x_0 = \int v\,dt$$

$$\longrightarrow \boxed{x = x_0 + \int v\,dt}$$

$a = \frac{dv}{dt}$

$a = F(t)$

$\frac{dv}{dt} = F(t)$

۳ شتاب تابعی از سرعت $a = F(v)$

در این شرایط با قرار دادن این تابع در معادلات اصلی می‌توانیم بنویسیم

خودرو را با سرعت کم می‌کند به سرعت بالاتر برسد به ۲۰ برسد بالاتر

$v = 10$ $\qquad$ $v = 20$

$a = 50$ $\qquad$ $a = 70$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_0} F(v)\,dt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)}$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad F(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{F(v)} \longrightarrow \int dt = \int \frac{dv}{F(v)}$$

$$\int \frac{v\,dv}{F(v)} = \int dx \longrightarrow x = x_0 + \int \frac{v\,dv}{F(v)}$$ اصلی

۴ـ شتاب تابع جابجایی $a = F(x)$

در این شرایط می توانیم از معادله اصلی استفاده کنیم و رابطه زیر را قرار دهیم

$$a = F(x)$$

$$v\,dv = a\,dx$$

$$\int v\,dv = \int a\,dx$$

$$\int v\,dv = \int F(x)\,dx \longrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int F(x)\,dx$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\int F(x)\,dx$$

PaPCo

Scanned by CamScanner

Subject
Date ۹۳/۸/۹
جلسه ۴

$\frac{Km \times 10^3}{h \times 3600} = \frac{Km \times 1}{3,6}$ تبدیل m/s ۲

۳ـ مثال: یک متحرک با سرعت 120 Km - خط ترمز آن 10m شتاب منفی آن چقدر است.

$V = 120\ Km$

$\Delta x = 10\ m$

$\frac{120\ Km \times 10^3}{h \times 3600} = \frac{120}{3,6} = 33,3\ m/s$

$V_1^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$

$0 - (33,3)^2 = 2a \times 10 \Rightarrow \frac{-1108,8}{20} = -55,4\ m/s$

۴ـ مثال

مقاومت هوا در مقابل حرکت یک خودرو با تقریب خوبی متناسب با توان دوم سرعت آنست و نیروی اصطکاکی دیگر نیز ثابت می باشد. پس می توانیم بگوییم شتاب خودرو هنگام خلاص بودن آن برابر است با $a = -c_1 - c_2 v^2$ آنرا هنگامی که خودرو خلاص می شود سرعت آن v_0 باشد مسافت لازم برای توقف خودرو را محاسبه کنید.

توضیح: چون شتاب تابعی از سرعت است پس طبق حالت سوم مسئله را حل می کنیم

$a(t) = F(v) = c_1 - c_2 v^2$

$v_2 - v_1 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)} = -1/2c \int_{v_0}^{v} \frac{(-2c)v\,dv}{-c_1 - c_2 v^2}$

$-1/2c\ Ln(c_1 - c_2 v^2)\Big|_{v_0}^{v}$

$-1/2\ Ln(-c_1) - (-1/2c)\ Ln(-c_1 - c_2 v_0^2)$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ۵

شتاب یک فنر با رابطه زیر بدست می آید - $a = 5x^2 + 3x$

در این شرایط اگر سرعت اولیه فنر $5\ m/s$ باشد محاسبه کنید سرعت ثانویه آن پس از طی مسافت $5\ cm$ چقدر خواهد بود -

$a = 5x^2 + 3x$

$v_0 = 5\ m/s$

$x = 5\ cm \rightarrow 0.05\ m$

$V = ?$

$a = F(x)$

$$\int v\,dv = \int a\,dx \rightarrow \int v\,dv = \int 5x^2 + 3x\,dx$$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = 5\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \left(\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) - \left(\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)$$

($v_0^2 = (5)^2$, $x^3 = (0.05)^3$, $x_0 = 0$)

$$\frac{v^2}{2} - \frac{25}{2} = \frac{5\times(0.05)^3}{3} + \frac{3\times(0.05)^2}{2}$$

$\Rightarrow$

PAPCO

Scanned by CamScanner

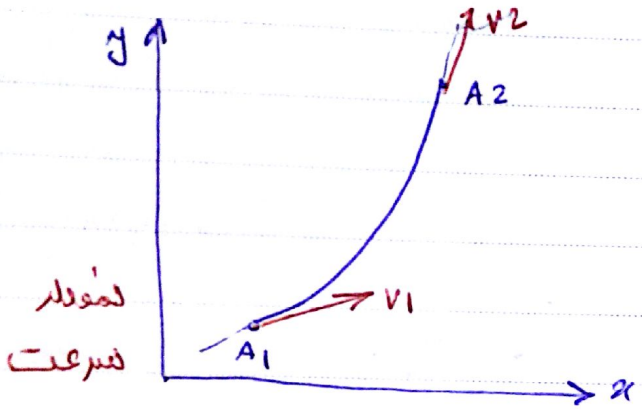
Subject
Date

حرکت در صفحه -

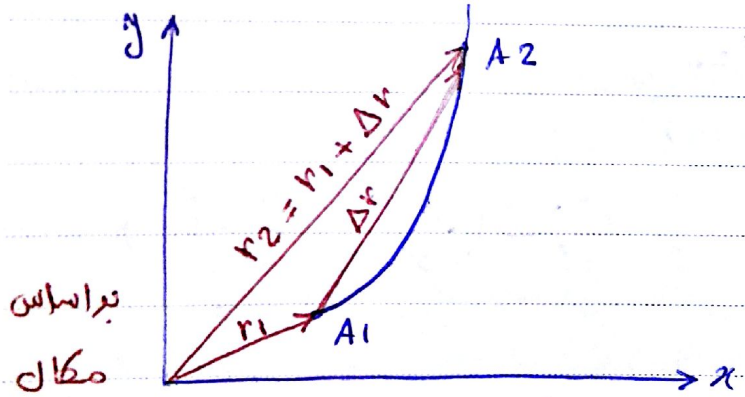
اگر حرکت بروی صفحه و هر مسیر دلخواه و خمیده‌ای انجام گیرد به آن حرکت صفحه‌ای می گوییم این حرکت را در ۳ دستگاه مختصات بررسی خواهیم کرد.

۱- دستگاه مختصات دکارتی

V = مشتق مکان = شیب خط مماس



نمودار سرعت



براساس مکان

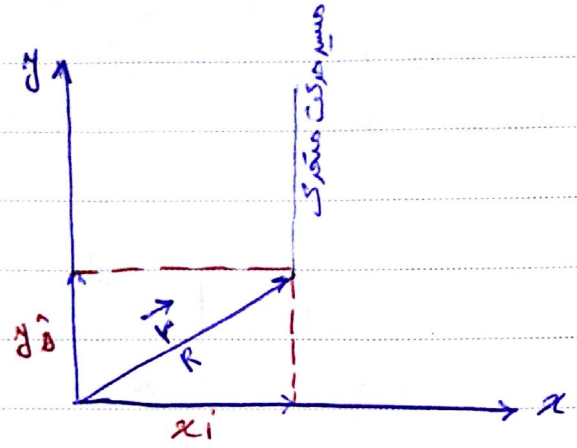
بردار سرعت هر لحظه بر مسیر حرکت مماس است بنابر این بردارهای V_2 و V_1 مماس موقعیت های A_1 و A_2 نشان دهنده سرعت متحرک در این نقاط می باشد.

همچنین بردار مکان r_1 موقعیت متحرک را در نقطه A_1 نمایش می‌دهد و بردار r_2 موقعیت مکان A_2 ~~(Δr جابجایی بین دو نقطه A1 و A2)~~

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳،۸،۱۶
Date
جلسه ۵

بررسی دستگاه مختصاتی دکارتی و روابط آن



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}^{\cdot} = \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

$$v_x \quad v_y$$

$$v = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$a = v^{\cdot} = r^{\cdot\cdot} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

$$a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

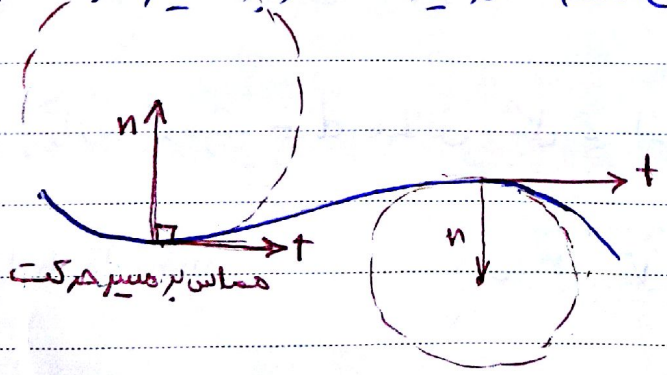
دستگاه مختصات قائم مماس (عمود tangential _ مماس & normal)

مبانی دستگاه مختصات از دو محور عمود بر هم به نام‌های t و n استفاده می‌شود

با این شرط که در هر نقطه از مسیر حرکت جرم را مماس تا ترسیم می‌کنیم و آنرا محور t

نامگذاری می‌کنیم همچنین در همان نقطه محور دیگری عمود بر مسیر حرکت ترسیم و آنرا

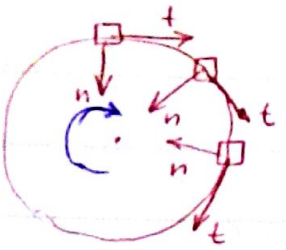
n نامگذاری می‌کنیم



موارد استفاده

* در مواردی که شعاع ثابت باشد.

Scanned by CamScanner

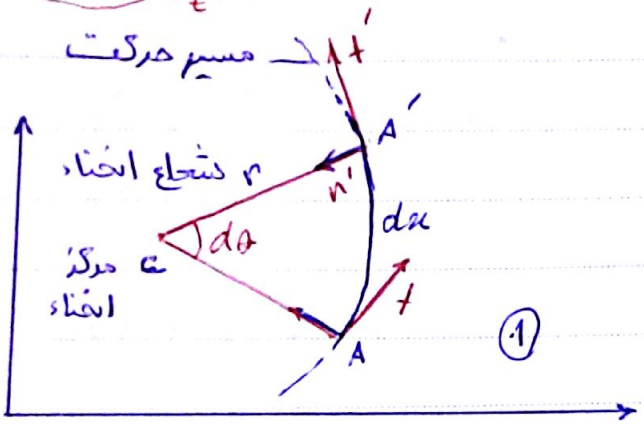


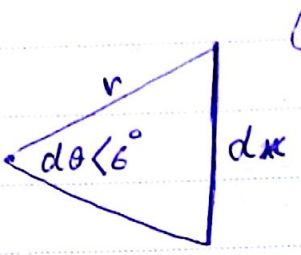
③

$\theta < 6^\circ$

$\sin\theta \simeq \theta$

$\tan\theta \simeq \theta$





اگر θ کوچکتر از 6° باشد می توان وتر را مانند مثلث در نظر گرفت شود.

در حالت کلی $dx = r\,d\theta$

$dx = r\,d\theta$

$2\pi^\circ = r\,\theta^\circ$

«رابطه طلایی»

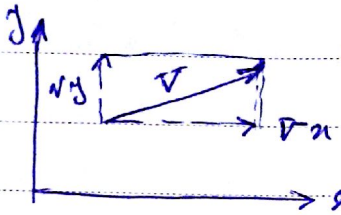
سرعت خطی را به سرعت زاویه‌ای تبدیل می کند

$$V = r\omega$$

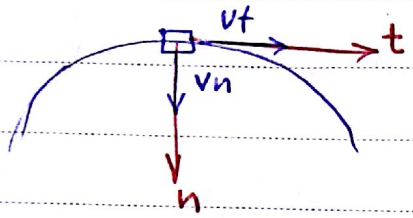
در شکل شماره 1 متحرک از نقطه A به A' حرکت می کند و در این مسیر که حرکت خمیده خطی داشته است طبق شعاع انحنا، آن طی مسیر نموده است. مسیر طی شده dx با توجه به زاویه کوچک $d\theta$ مطابق شکل 2 از روابط هندسی قابل محاسبه است

از این دو رابطه رابطه طلایی $V = r\omega$ که تبدیل کننده سرعت های خطی و زاویه‌ای به یکدیگر می باشند بدست می آید.

Scanned by CamScanner



بردار یکه در راستای t : e_t



برداری

$$\vec{V} = \vec{V}_t e_t + \vec{V}_n e_n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t e_t + \vec{a}_n e_n$$

عددی

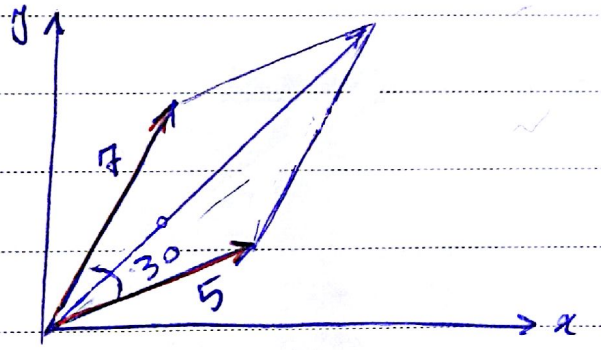
$$V = \sqrt{V_t^2 + V_n^2 + 2 V_t V_n \cos\theta}$$

زاویه 90° : $\cos 90 = 0$

$$V = \sqrt{V_t^2 + V_n^2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

یادآوری:



$$x = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2(5 \times 7)\cos 30^\circ}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_t e_t + \vec{V}_n e_n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t e_t + \vec{a}_n e_n$$

$$x = V \qquad \frac{V^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = V\dot{\theta}$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{V} = V_t\, e_t + V_n\, e_n$$

V_t: $\dot{x}$ ، V_n: $r\omega$ ، $r\dot{\theta}$

برای بدست آمدن شتاب نیز می‌توانیم از معادله سرعت مشتق بگیریم اما مشتق گیری نسبت به شعاع خواهد بود زیرا تغییرات شتاب وابسته به شعاع مسیر است و

نیز می‌باشد.

$$\vec{V} = V_t\, e_t + V_n\, e_n \longrightarrow \vec{a} = \ddot{x}\, e_t + r\dot{\theta}\, e_n$$

V° ، $\frac{V^2}{r} = \left(\frac{r\omega}{r}\right)^2 = r\omega^2 = r\dot{\theta}^2$

$V\dot{\theta}^2$

$r\dot{\theta}\dot{\theta} = V\dot{\theta} = V\omega$ (V)

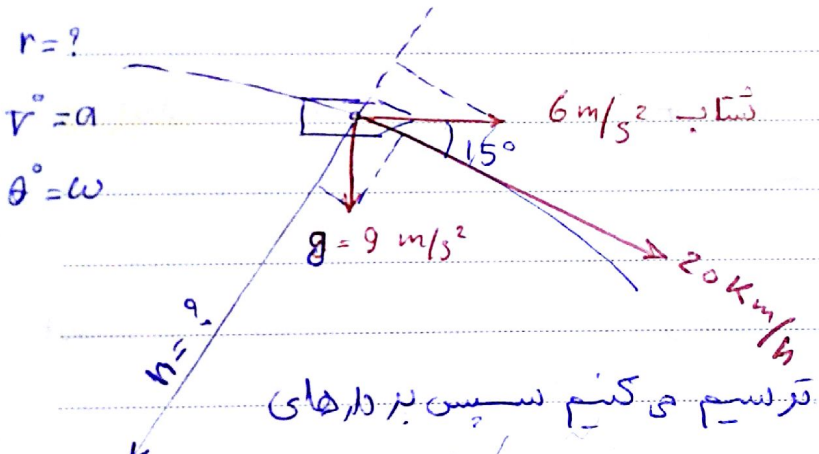
فرمول ها -

سرعت	$V = r\dot{\theta} = r\omega$
	$a_t = V^{\circ}$
	$a_n = \frac{V^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = V\dot{\theta}$
	$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$
	$V = \sqrt{V_t^2 + V_n^2}$

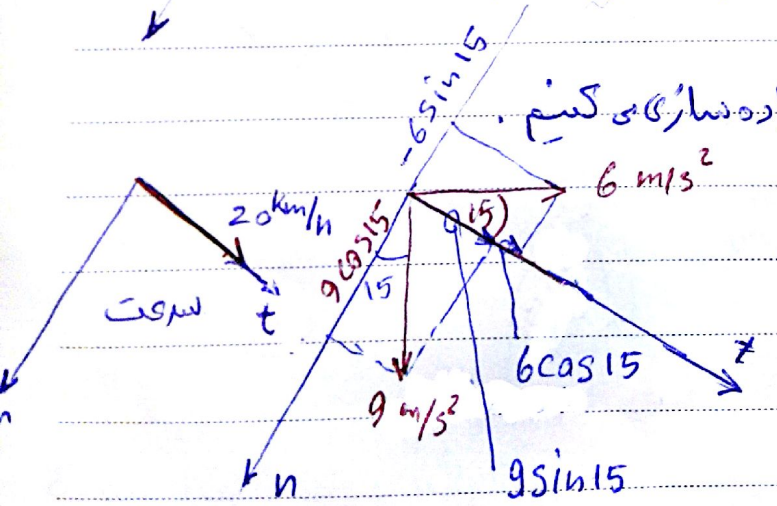
طایی $\boxed{V = r\omega}$

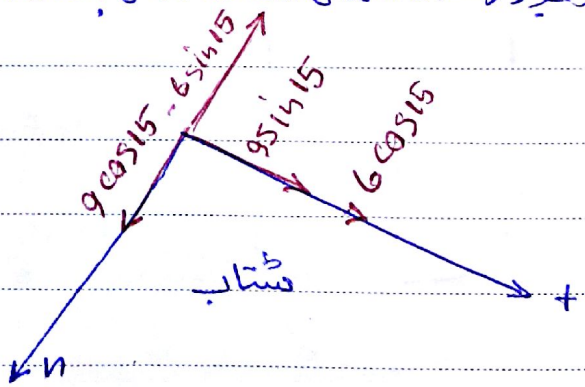
Scanned by CamScanner

موشکی در حال حرکت خود با صدور روش در ارتفاع زیاد طوری حرکت می کند که محور آن بصورت افقی باقی می ماند نیروی رانش موشک مولفه شتاب افقی برابر $6m/s^2$ ایجاد می کند و مولفه شتاب رو به پایین آن نیز همان شتاب گرانش زمین برابر $9m/s^2$ می باشد در لحظه نشان داده شده سرعت مرکز جرم موشک در امتداد راستای 15° مسیر آن برابر $V = 20\ Km/h$ می باشد در این شرایط شعاع حمیدگی مسیر پرواز موشک و آهنگ افزایش اندازه سرعت و آهنگ تغییر زاویه را محاسبه کنید.



ابتدا دستگاه مختصات t,n را ترسیم می کنیم سپس نیروهای موجود را که داده های مسئله ما می باشد پیاده سازی می کنیم.





$$a_t = 6\cos 15 + 9\sin 15 = 8,1$$

$$a_n = 9\cos 15 - 6\sin 15 = 7,2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳،۸،۲۳
Date جلسه ۴

$Km/3,6 = m/s$

$\frac{20\ km}{h} = \frac{\times 10^3}{3600} = \frac{m}{s}$ $\qquad \frac{1000}{3600} = \frac{1}{3,6}$

$a_n = 9\cos 15 - 6\sin 15 = 7,2 = \frac{v^2}{r}$

$a_n = \frac{(5,55)^2}{r} = 7,2 \qquad r = 4,3\ m$

$a_n = r\dot{\theta}^2 = 4,3 \times \dot{\theta}^2$

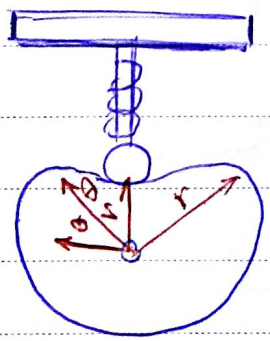
$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{7,2}{4,3}} = 1,2\ rad/s$

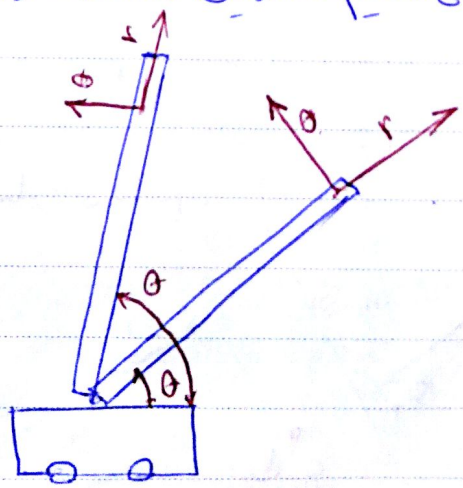
$\vec{a} = 8,1\, e_t + 7,2\, e_n$

$a = \sqrt{8,1^2 + 7,2^2} \qquad a = 10,8\ m/s^2$

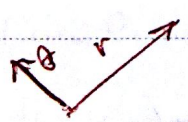
دستگاه مختصات قطبی $(r\theta)$

در این مختصات از دو متغیر r و θ برای محرفی موقعیت ذره در فضای موجود استفاده می کنیم - در این دستگاه روابط سرعت و شتاب به صورت زیر می باشد





کاربرد - وقتی شعاع تغییر می کند .



$\vec{v} = (\dot{r})\, e_r - (r\dot{\theta})\, e_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, e_\theta$

PqPCO

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

Scanned by CamScanner

e_r , e_θ نمایشگر راستای r

Subject
Date

$\vec{v} = v_r e_r + v_\theta e_\theta \rightarrow \vec{v} = (\dot{r})e_r + (r\dot{\theta})e_\theta$ (تعطی)

$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$\vec{a} = a_r e_r + a_\theta e_\theta \rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

در شکل زیر موقعیت لحظه‌ای P در بازوی شیار دار چرخان OA توسط یک پیچ

انتقال قدرت کنترل می‌شود برای موقعیت نشان داده شده داریم:

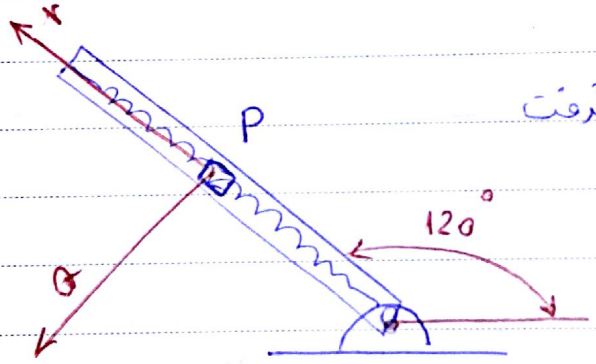
$\dot{\theta} = 0.1 \ rad/s$

$\ddot{\theta} = -0.04 \ rad/s^2$

$r = 300 \ mm$

$\dot{r} = 40 \ mm/s$ پیچ با سرعت ثابت می‌پیچد بطرف O

مقادیر سرعت و شتاب لحظه‌ای را در لحظه‌ای که $\theta = 120^\circ$ باشد بدست آورید



برای بدست آوردن $\vec{v}$ نیاز به انتگرال گرفت فقط در حال داشتن t

mm/s mm/s rad/s

$\vec{v} = (\dot{r})e_r + (r\dot{\theta})e_\theta \rightarrow \vec{v}_p = 40e_r + 300 \times 0.1 e_\theta =$

$= 40e_r + 30e_\theta \qquad v = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \ mm/s$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) =$ چون گفته سرعت ثابت پس شتاب مذا ست

$\vec{a}\ (0 - 300(0.1)^2)e_r + (300(-0.04) + 2 \times 40 \times 0.1)e_\theta$

-3 -4

PAPCO

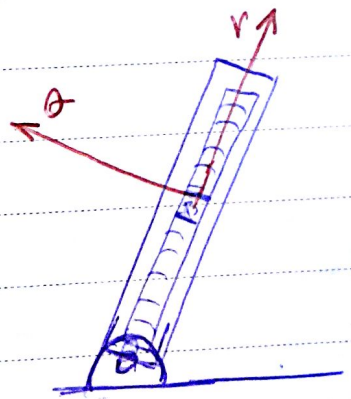
Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\vec{a} = -3e_r - 4e_\theta$$

$$a = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \quad mm/s^2$$

در شکل زیر بازوی دستیار داریم که طبق رابطه $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ حول محور خود دوران می‌کند در اینجا θ برحسب rad و t برحسب ثانیه می‌باشد همزمان با این حرکت پیچ داخل بازو چرخیده و لغزنده B با چه سرعت چگونه حرکت می‌دهد بطوریکه فاصله لغزنده از نقطه O مطابق رابطه $r = 0.2 + 0.04t^2$ زیاد می‌شود در این رابطه r برحسب متر و θ برحسب rad می‌باشد. مقادیر سرعت و شتاب لغزنده را در لحظه $t = 3\ sec$ محاسبه کنید.



$$\vec{v} = (\dot{r})e_r + (r\dot{\theta})e_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta$$

از رابطه θ مشتق می‌گیریم چون $\dot{}$ مشتق اول است

$$\dot{\theta} = 0.2 + 0.06t^2$$

$$\ddot{\theta} = 0 + 0.12t$$

$$\dot{r} = 0 + 0.08t$$

$$\ddot{r} = 0 + 0.08$$

$t = 3$

P4PCO
Scanned by CamScanner

$\dot{\theta} = 0.2 + 0.54 = 0.74$

$\ddot{\theta} = 0.36$

$\dot{r} = 0.24$

$\ddot{r} = 0.08$

$\theta = 0.2t + 0.02t^3 \rightarrow 0.6 + 0.54 = 1,14$

$r = 0.2 + 0.04t^2 = 0.56$

$\vec{V} = (0.24)\, e_r + (0.56 * 0.74)\, e_\theta = \sqrt{0.24^2 + 0.41^2}$ جابجایی در دو ثانیه $= 0.479\ m/s$

$\vec{a} = -0.227 e_r + 0.557 e_\theta = \sqrt{-0.227 + 0.557^2} = 0.601\ m/s^2$

مثال: در شکل زیر موشکی را نشان داده‌ایم که پس از اتمام سوخت خود در حال حرکت به خارج از جو است و در صفحه قائم یک راه در حال دریابی آن می‌باشد. در لحظه $\theta = 30^\circ$

اطلاعات دریابی عبارتند از:

$r = 8 \times 10^4\ m$

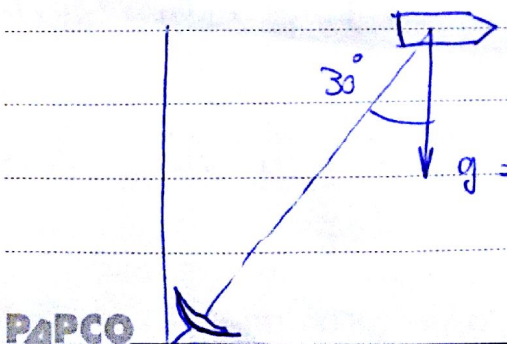
$\dot{r} = 1200\ m/s$

$\dot{\theta} = 0.8\ deg/s$

$g = 9,2\ m/s^2$

شتاب موشک فقط ناشی از جاذبه زمین است، جهت آن به سمت زمین باشد

برای این شرایط: الف: سرعت $V = ?$ موشک ب: $\ddot{r}, \ddot{\theta}$ را محاسبه کنید



PAPCO

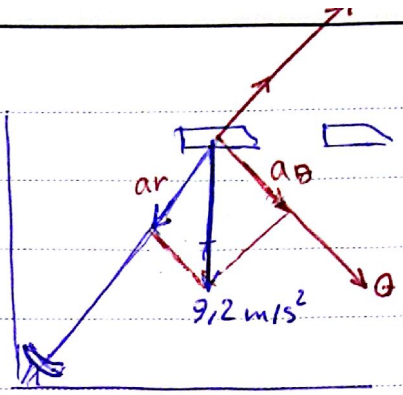
Scanned by CamScanner

$r = 8 \times 10^4$

$\dot{r} = 1200$ m/s

$\dot{\theta} = 0.8$ deg/s

$\theta = 30$



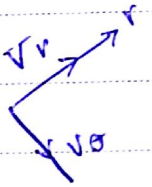
واحدرا حسب Rad/Sec

جاذبه بر اینکه موشک در خلأ می باشد و سوختی ندارد فقط یک نوع شتاب بر آن وارد می شود

که این شتاب همان جاذبه زمین می باشد. برای بدست آوردن سرعت ها نیز از رابطه

$$\vec{V} = \underbrace{\dot{r}}_{V_r} e_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{V_\theta} e_\theta$$

سرعت در مختصات قطبی استفاده می کنیم

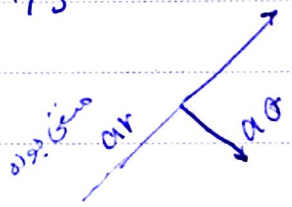


$$\dot{\theta} = 0.8 \text{ deg/s} \times \frac{\pi}{180} \Rightarrow \text{rad/s}$$

$$\vec{V} = \underbrace{1200}_{\dot{r}} e_r + (\underbrace{8 \times 10^4}_{r}) \times (\underbrace{0.8 \times \frac{\pi}{180}}_{\dot{\theta}}) e_\theta$$

$$\vec{V} = 1200\, e_r + 1116\, e_\theta$$

$$V = \sqrt{1200^2 + 1116^2} = 1639 \text{ m/s}$$



$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$a_\theta = 9.2 \sin 30 = 4.6$ $\quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$a_r = 9.2 \cos 30^\circ = 7.96$ $\quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a = -7.96\, e_r + 4.6\, e_\theta$

$a = \sqrt{4.6^2 + (-7.9)^2} = 9.19$

Scanned by CamScanner

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4.6 \quad 8\times10^{4}\times\ddot{\theta} + 2\times0.8\times\frac{\pi}{180}\times1200 = 4.6$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta} = -31.6\times10^{4}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^{2} = -7.96$$

$$\ddot{r} - 8\times10^{4}\times\left(0.8\times\frac{\pi}{180}\right)^{2} = -7.96$$

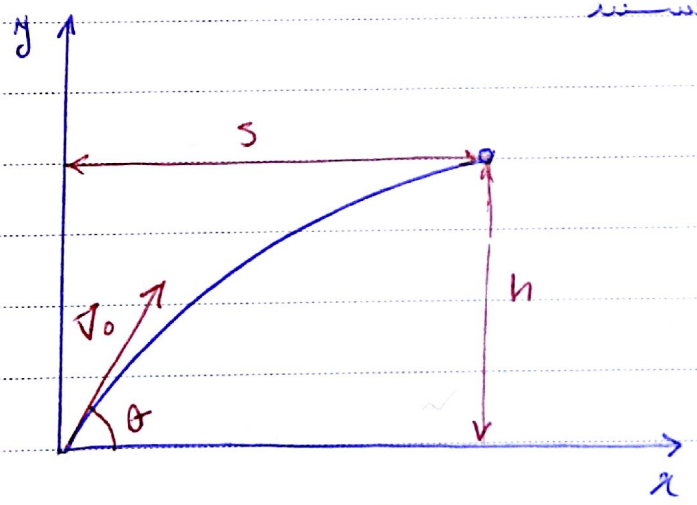
$$\ddot{r} = 7.63$$

حرکت پرتابه‌ای

این حرکت یعنی پرتاب یک ذره مادی از یک نقطه با سرعت اولیه V_0 و زاویه θ

که این حرکت آمیخته‌ای است از حرکت با سرعت ثابت و شتاب یکنواخت می‌باشد

روابط زیر در این نوع حرکت صادق هستند



معادله حرکت پرتابه در هر لحظه

$$y = x\tan\theta - \frac{g x^{2}}{2V_0^{2}\cos^{2}\theta}$$

زمان اوج $\quad t = \dfrac{V_0 \sin\theta}{g}$

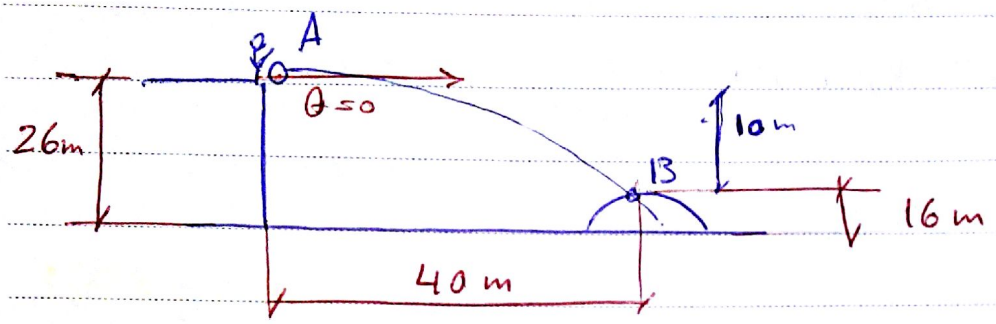
ارتفاع اوج $\quad h = \dfrac{V_0^{2}\sin^{2}\theta}{2g}$

مسافت اوج $\quad s = \dfrac{V_0^{2}\sin 2\theta}{2g}$

Scanned by CamScanner

*۱

مثال: شخصی مطابق شکل زیر سنگی را از نقطه A به صورت افقی و با سرعت V_0 پرتاب می کند. حداقل سرعت پرتاب برای اینکه سنگ دقیقاً از روی مانع B بگذرد چقدر است.



موقعیت A: 0 , 0
موقعیت B: 40 , -10

$$y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2V_0^2\cos^2\theta}$$

$$-10 = 0 - \frac{9.8 \times 40^2}{2V_0 \times 1}$$

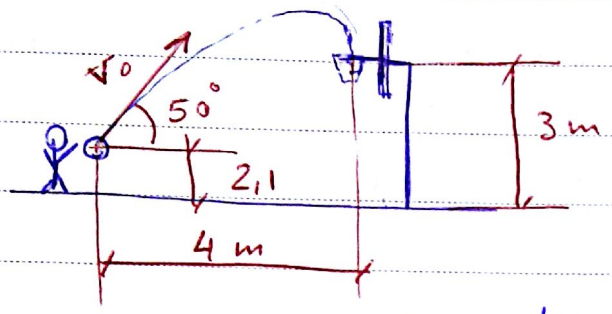
$$-20V_0 = -9.8 \times 40^2$$

$$V_0 = \frac{-9.8 \times 1600}{-20} = 784 \quad m/s$$

DABCO

Scanned by CamScanner

مثال : بازیکن بسکتبال توپ را مطابق شکل زیر تحت زاویه 50° نسبت به افق شوت پرتاب می کند - برای آنکه توپ از مرکز حلقه بگذرد مقدار سرعت V_0 چقدر باید باشد



$$(4 , 0.9) \quad (x , y)$$

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 V_0 \cos^2\theta}$$

$$0.9 = 4 \tan 50 - \frac{9.8 \times 4^2}{2 V_0 \cos^2 50}$$

$$V_0 =$$

مختصات استوانه ای (جهت اطلاع)

اگر توصیف حرکت صفحه ای با مختصات قطبی $r\theta$ با گسترش دهیم دستگاه مختصات جدیدی به نام دستگاه مختصات استوانه ای ایجاد می شود و روابط آن به صورت زیر می باشد

$$v = \dot{r} e_r + r\dot{\theta} e_\theta + \dot{z} k$$

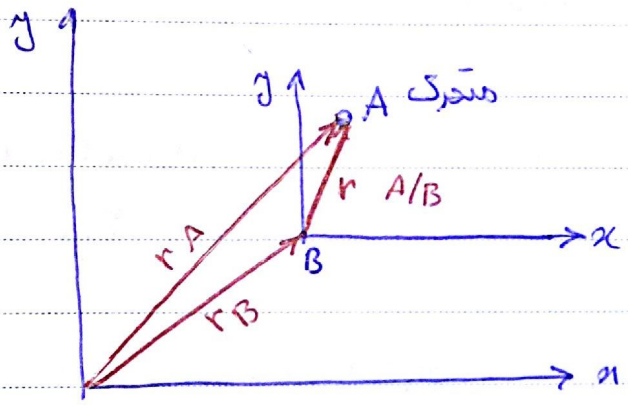
$$a = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r} e_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta} e_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z} k$$

DADCO

Scanned by CamScanner

در بحث های قبل حرکت ذره را با استفاده از دستگاه مختصاتی که آن‌ها را ثابت فرض می کردیم توصیف نمودیم - جابجایی ها - سرعت ها و شتاب هایی را که نسبت به چنین دستگاه‌هایی بدست می آیند را مطلق می گفتیم.

بطور کلی دستگاه مختصات ثابت برای حل مسائل واقعی و بسیاری از حرکت ها مناسب نمی باشند پس لازم است دستگاه مختصات متحرکی را نیز با دستگاه مختصات ثابت ترکیب کنیم -



$r_{A/B} = r_A - r_B$ آنگاه در صورت است اول نوشته می شود - A/B

$r_A = r_{A/B} + r_B$

$r^{\circ}_A = r^{\circ}_{A/B} + r^{\circ}_B$

$v_A = v_{A/B} + v_B$

$a_A = a_{A/B} + a_B$

PaPCO

Scanned by CamScanner

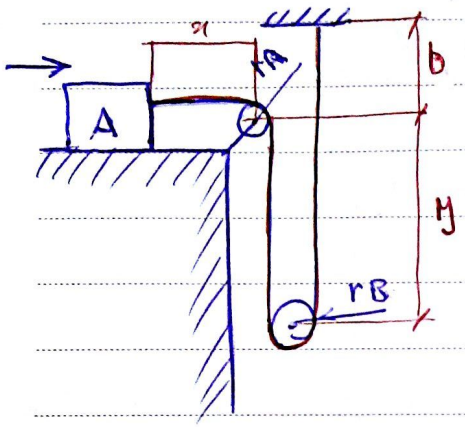
Subject ۹۳.۹.۷
Date جلسه ۸

حرکت مقید ذرات متصل به هم

گاهی اوقات می‌توانیم با استفاده از قیدهای اعمال شده بر مسئله حرکت ذره را تحلیل کنیم

در این روش از اجسام ثابتی که وجود دارند کمک می‌گیریم تا روند حرکتی آنها را پیش بینی

کنیم - به عنوان مثال در شکل زیر:



در این گونه مسائل که حرکت به طول جسمی که ثابت

است وابسته می گردد می‌توانیم از خواص آن جسم استفاده

کنیم در این شکل طول طناب ثابت است بنابراین می‌توانیم به عنوان حل مسئله از

آن استفاده کنیم.

طول طناب $L = b + y + \frac{2\pi r_b}{2} + y + \frac{2\pi r_a}{4} + x$

$$0 = 0 + \dot{y} + 0 + \dot{y} + 0 + \dot{x} \longrightarrow$$

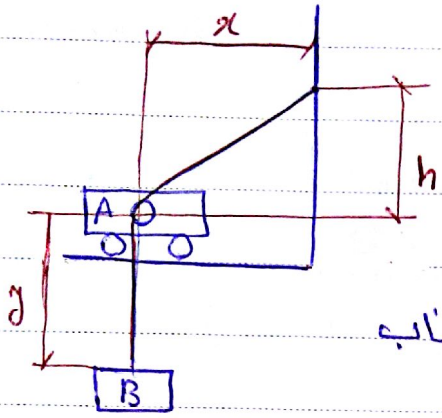
$$\longrightarrow \dot{x} + 2\dot{y} = 0 \longrightarrow v_x + 2v_y = 0 \longrightarrow \boxed{v_x = -2v_y}$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \longrightarrow a_x + 2a_y = 0 \longrightarrow \boxed{a_x = -2a_y}$$

Scanned by CamScanner

مثال - در شکل زیر ارتباط اندازه سرعت جسم A و B را بدست آورید.



$$\text{وتر}^2 = x^2 + h^2$$

$$\text{وتر} = \sqrt{x^2+h^2} = (x^2+h^2)^{1/2}$$

$$\text{طول طناب} = y + (x^2+h^2)^{1/2} + \text{ثابت}$$

از اندازه قدرمطلق چون مشتق می‌گیریم برابر صفر خواهد شد -

$$L = y + (x^2+h^2)^{1/2} + 0$$

مشتق

$$u^n = n u' u^{n-1}$$

$$(x^2+h^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+h^2)^{-1/2}$$

مشتق نسبت به x است باید برحسب t باشد.

$$u^n = n u' u^{n-1}$$

$$(x^2+h^2)^{1/2} = 1/2\,(2x\cdot x')(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

u'

باید بر حسب t باشد

$x^2 \xrightarrow{t} 2x\cdot x'$

$$0 = y' + \frac{1}{2}\,2x\cdot x'\,(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{0 = V_y + V_x\, x\,(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$V_y = \frac{-V_x\, x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$x^2 \xrightarrow{x} 2x$

$x^2 \xrightarrow{y} 0$

$(x^2) \xrightarrow{t} 2x\cdot x^{2-1}$

u^4

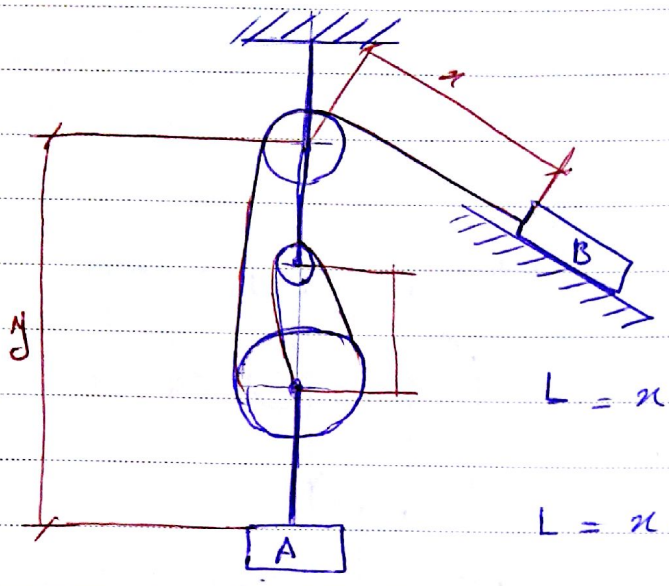
P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

#1

مثال: در سیستم شکل زیر رابطه‌ای بین سرعت جسم A و وزنه B را محاسبه کنید.



$$L = x + y + y + y$$

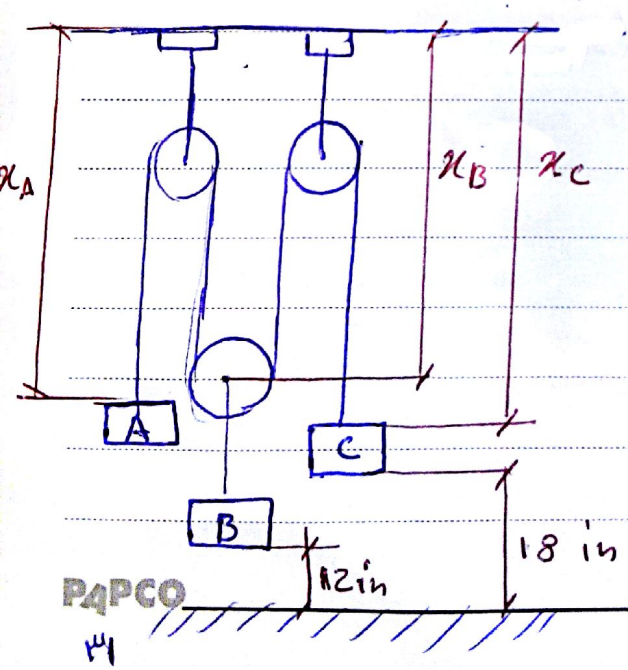
$$L = x + 3y$$ مشتق می‌گیریم

$$0 = \dot{x} + 3\dot{y}$$

$$0 = V_x + 3V_y \rightarrow V_x = -3V_y$$

مثال:

با دانستن اینکه بلوک های B و C یک ثانیه بعد از حرکت پشت سر همدیگر به زمین برخورد می‌کنند سرعت شتاب نقطه A را پیدا کنید.



P4PCO

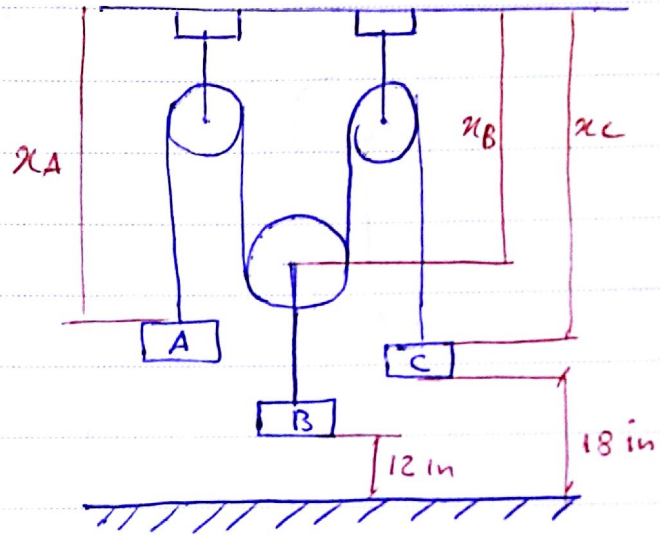
Scanned by CamScanner

$$L = x_A + 2x_B + x_C$$

$$0 = v_A + 2v_B + v_C$$

$$0 = a_A + 2a_B + a_C$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + v_0$$



$$x_B = \frac{1}{2}at^2$$

$$12 = \frac{1}{2}a_B(1)^2$$

$$a_B = 24 \text{ in/s}^2$$

$$x_C = \frac{1}{2}a_C t^2$$

$$18 = \frac{1}{2}a_C(1)^2 \qquad a_C = 36 \text{ in/sec}^2$$

تعجيل $\qquad a_A = -84 \text{ in/sec}^2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳/۹/۱۴
Date جلسه ۹

نیروشناسی ـ سینتیک ذره

در این قسمت قانون دوم نیوتن بررسی می‌گردد و به کمک آن ارتباط بین بردار شتاب از یک سو و بردار نیرو از سوی دیگر را بدست می‌آوریم ـ می‌دانیم قانون دوم نیوتن بصورت برداری است و ارتباط بین جرم و وزن را نیز نمایش می‌دهد ـ همچنین این قانون در دستگاه‌های مختلف مطالعه شده نیز کاربرد دارد ـ

دستگاه x,y

$$\Sigma F = ma \quad \begin{cases} \Sigma F_x = ma_x \\ \Sigma F_y = ma_y \\ \Sigma F_z = ma_z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = v^{\cdot} = a_x i + a_y j + a_z k \\ F = F_x i + F_y j + F_z k \end{cases}$$

دستگاه n,t عمود مماس

$$\begin{cases} \Sigma F_n = ma_n \\ \Sigma F_t = ma_t \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = r\dot{\theta}^2 \rightarrow \frac{v^2}{r} = v\dot{\theta} \\ a_t = v^{\cdot} \rightarrow v = r\dot{\theta} \end{cases}$$

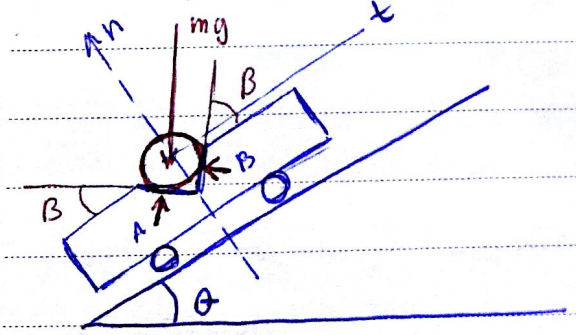
دستگاه مختصات قطبی

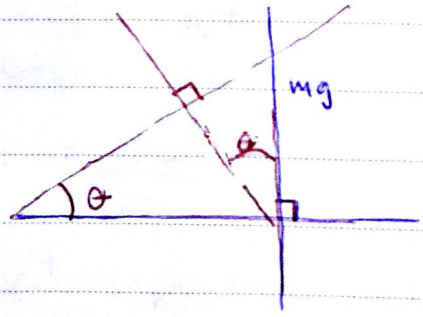
$$\begin{cases} \Sigma F_r = ma_r \\ \Sigma F_\theta = ma_\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

مثال: یک استوانه به جرم m و درون مقطع ای با شیار V شکل بروی سطح شیداری

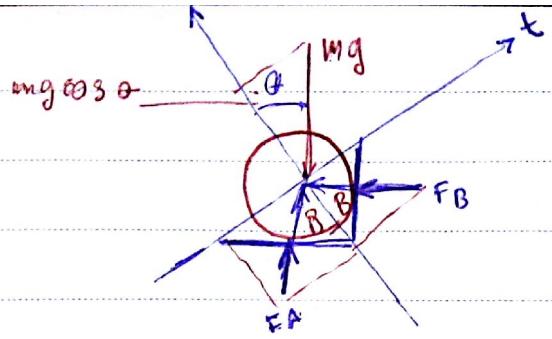
اگر زاویه پهلوی شیار β و زاویه سطح شیدار θ باشد آنگاه بزرگترین شتابی را که می‌توان

قطع را با آن به سطح بالا انتقال داد تا تماس استوانه با جسم قطع نشود را محاسبه کنید ـ





Scanned by CamScanner



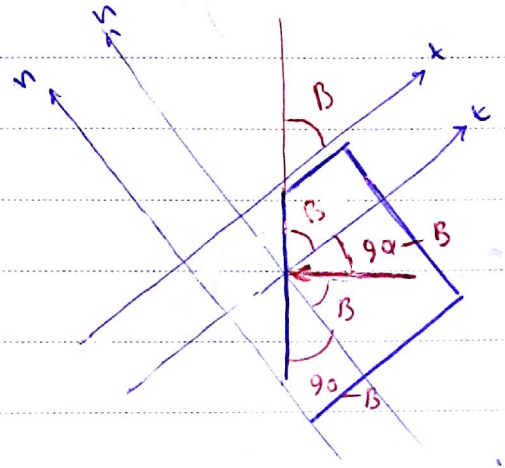
طبق گفته مسئله استوانه باید درون شیار قرار

داشته باشد لذا در یکی از راستاها حق حرکت

ندارد - لذا خواسته مسئله $a_n = 0$

$\Sigma F_n = m a_n$

$\Sigma F_n = 0$



۱- نقطه انتخاب شود.

۲- محورها به نقطه انتقال داده شود

$\Sigma F_n = 0$

$mg\cos\theta - F_A\cos\beta - F_B\cos\beta = 0$

توضیح:

هنر تماس زمانی است که نیروی وارد شده از طرف استوانه

با نیروی وارد شده از طرف سطح باهم برابر باشند - لذا فرض می کنیم در یک لحظه تماس در

نقطه B قطع شود آنگاه معادله بالا بصورت زیر تبدیل می شود.

در لحظه قطع تماس $F_B = 0$

$mg\cos\theta - F_A\cos\beta - F_B\cos\beta = 0$

$$F_A = \frac{mg\cos\theta}{\cos\beta}$$

$\Sigma F_t = ma_t$ $\quad -F_B\sin\beta + F_A\sin\beta - mg\sin\theta = ma_t$

در لحظه قطع تماس $F_B = 0$

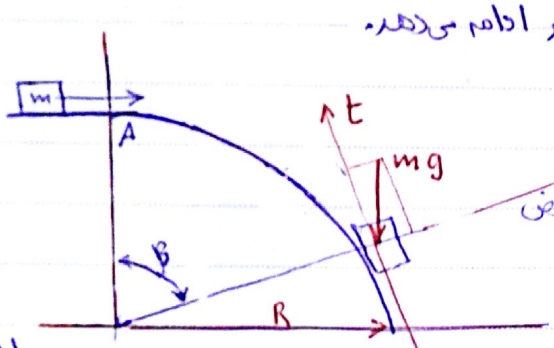
پس نقطه B نیروی F_B وارد نمی کند $\quad a_t = \frac{F_A\sin\beta - mg\sin\theta}{m} = \frac{\frac{mg\cos\theta}{\cos\beta}\sin\beta - mg\sin}{m}$

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳/۹/۲۱
Date جلسه ۱۰

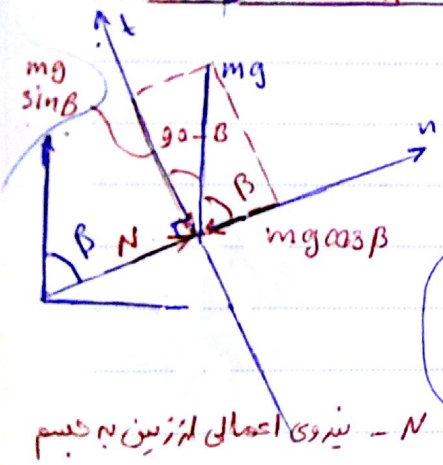
مثال:

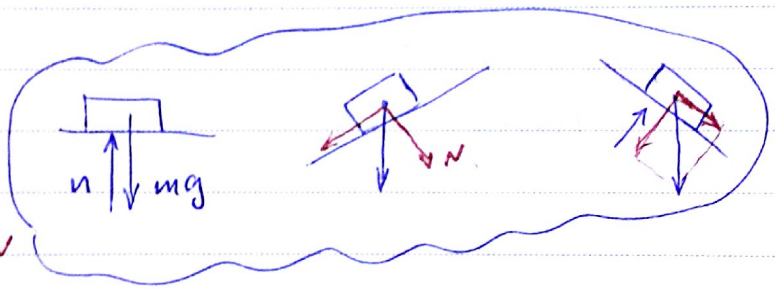
جسمی به سرعت v_0 از نقطه A وارد یک مسیر دایره‌ای می‌شود. در هنگام حرکت بر است با این سرعت آن افزایش پیدا می‌کند. مطلوب است زاویه β که در آن جسم از سطح زمین جدا شده و پس از آن مانند یک پرتابه به حرکت خود ادامه می‌دهد.



توضیح:
در لحظه جدایی جسم به زمین نیروی وارد نمی‌کند و در عوض از سطح زمین نیز نیروی به جسم وارد نمی‌شود.

با استفاده از این اطلاعات داریم





N - نیروی اعمالی از زمین به جسم

$$n,t\begin{cases}\Sigma F_n = ma_n = -mg\cos\beta + N & (1)\\ \Sigma F_t = ma_t = -mg\sin\beta & (2)\end{cases}$$

توضیح:
تا قبل از رسیدن به نقطه جدایش جسم حق حرکت در راستای محور n را ندارد بنابراین تا این لحظه می‌توانیم بگوییم شتاب a_n برابر صفر است. اما در تمامی لحظات جسم در راستای محور t حرکت و شتاب خواهد داشت. در لحظه جدایش نیروی که از جسم به زمین وارد می‌شود حذف شده و در نتیجه آن نیروی وارده از زمین به جسم نیز از بین می‌رود بنابراین داریم

Scanned by CamScanner

$$-mg\cos\beta + N = m a_n \qquad a_n = v^2/r \qquad (1)'$$

لحظه جدایش

$$\rightarrow -mg\cos\beta = mv^2/r$$

$$v = \sqrt{-gr\cos\beta} \qquad \boxed{v^2 = -gr\cos\beta}$$

$$-mg\sin\beta = ma_t \qquad (2)'$$

$$\downarrow$$

$$a_t = \frac{-mg\sin\beta}{m} = -g\sin\beta$$

از روابط قبلی سرعت و شتاب می دانیم $v dv = a_t dx$

از دو طرف این رابطه انتگرال گیری می کنیم - بنابراین رابطه شتاب و سرعت به صورت زیر بدست می آید -

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int a dx$$

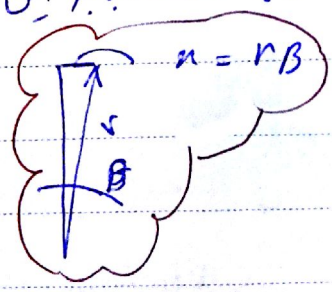
$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = ax$$

g و r اهمیت ندارد -

$$-\frac{1}{2} gr\cos\beta = -g\sin\beta\, x$$

می دانیم در زوایای کوچکتر از 6° می توانیم به جای مقدار مسافت شعاع را در زاویه ضرب کنیم

فرض می کنیم زاویه این مسئله نیز در شرایط کوچکتر از 6° قرار داشته باشد - بنابراین



$$-\frac{1}{2} \not{g} \not{r} \cos\beta = -\not{g}\sin\beta\,(x = r\beta)$$

$$-\frac{1}{2} = \beta\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \rightarrow -\frac{1}{2} = \beta\tan\beta$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

می دانیم برای بدست آوردن طول قطاع یک دایره روابط مثلثاتی دیگری نیز وجود دارد که به جای α می توانیم از آنها استفاده کنیم -

طول قطاع یک دایره را بدست آورده در رابطه فوق جایگذاری می کنیم. $-1/2 \rho \cos\beta/3$

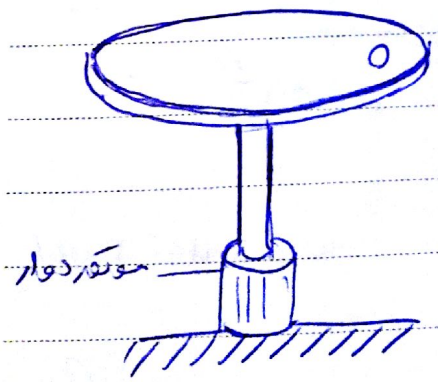
مثال :

یک قطعه کوچک روی یک میز دوار قرار گرفته است میز از حالت سکون به گونه ای حرکت می کند که قطعه دارای شتاب مماسی ثابت $a_t = 6\ Ft/s^2$ وشتاب زاویه ای برابر $\theta'' = 3\ rad/s^2$ با فرض اینکه بدانیم ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = 0.6$ باشد.

مطلوبست : زمان لازم برای شروع به لغزش

ب - سرعت قطعه هنگام آغاز لغزش

ج - تعداد دورهایی که پس از آن قطعه شروع به لغزش می کند.



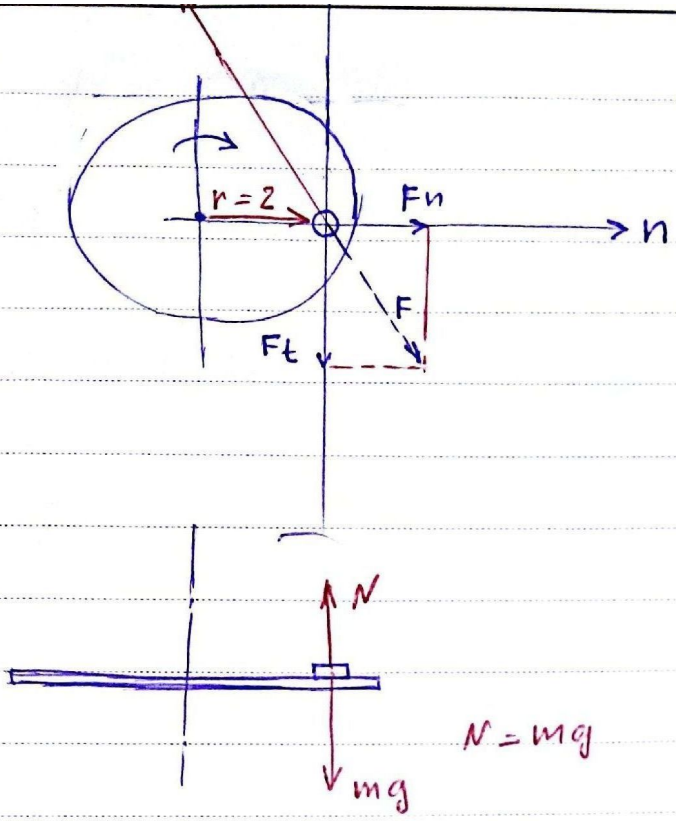
برای حل مسئله از دستگاه مختصات قطبی وعمود مماس می توان استفاده کرد- با توجه به سه بعدی بودن بهتر است آنرا در یکی از زوایا در نظر بگیریم و پس از حل در آن زاویه در صورت نیاز مسئله را تعمیم دهیم -

Scanned by CamScanner

در لحظه لغزش سکه نیروی اصطکاک

با نیروی گریز از مرکز F برابر شده است -

بنابر این داریم



$N = mg$

$F_N = \mu N = \mu mg = 0.6\ mg$

$F_F = F$

$F_F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2}$

$0.6\ mg = \sqrt{F_n^2 + F_t^2}$

$F_t = ma_t = mr\ddot{\theta}$

$F_n = ma_n = mr\dot{\theta}^2$

$v = r\omega$

$v = r\dot{\theta}$

$a = r\ddot{\theta}$

لحظه جدایش $F_F = F$

$0.6\ mg = \sqrt{(mr\dot{\theta}^2)^2 + (mr\ddot{\theta})^2}$

داده شده $r\ddot{\theta} = 6$

$a_t = r\ddot{\theta} = 6$

$\frac{2}{} = 3$

$0.6\ mg = m\sqrt{(r\dot{\theta}^2)^2 + (6)^2}$

$\dot{\theta} = 3,11\ rad/s$ $\quad \omega = 3,11\ rad/s$

Scanned by CamScanner

ب -

سرعت قطعه هنگام لغزش

$V = r\omega$

لحظه شروع / 2

3 rad/s

ج -

به سرعت زاویه ای تبدیل شود.

$V = at \rightarrow \omega = \alpha t$

$\theta^\circ = \theta^{\circ\circ} t \rightarrow t = \frac{\theta^\circ}{\theta^{\circ\circ}} = \frac{3,11}{3} = 1,03$ s

جسم شروع می کند به پرتاب شدن

چند دور -

$T = 2\pi n$

$1,03 = 2\pi n$

$n = 0,16$

۹۳/۹/۲۸

اندازه حرکت

در بخش های قبل دیدیم که حاصلضرب جرم × شتاب نیرو گفته می شود اما مفهوم جدیدی برای حاصلضرب سرعت و جرم نیز وجود دارد که به آن اندازه حرکت خطی می گوییم روابط زیر برای تعریف

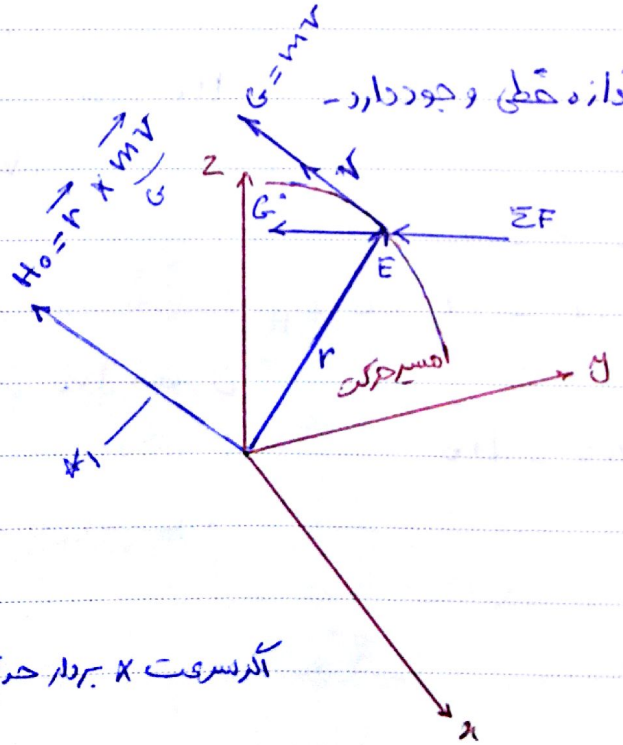
مفاهیم اندازه خطی وجود دارد -

$\Sigma F = ma$

$\Sigma F = mv^\circ$

$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv)$

$\Sigma F = G^\circ$ اندازه حرکت خطی



اگر سرعت × بردار حرکت = اندازه حرکت

Scanned by CamScanner

Subject
Date

در دستگاه SI واحد اندازه حرکت Kgm/s یا N/S می باشد چون رابطه برداری آمده

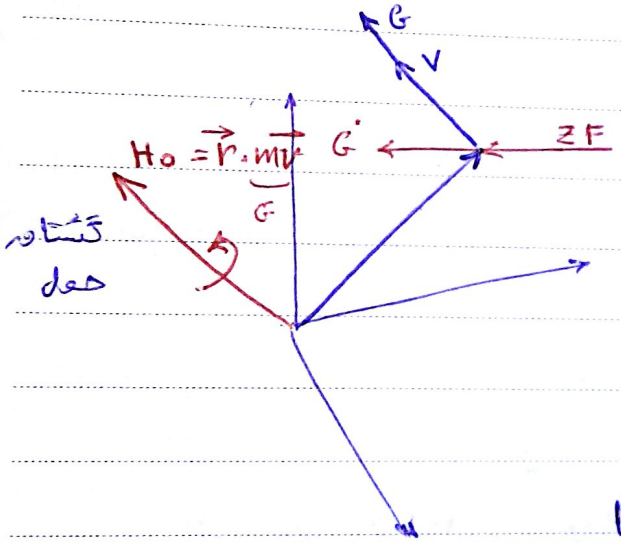
برداری است راستا و سوی برآیند نیروهای وارد شده بر ذره با راستا و سوی G برابر است

اندازه حرکت و ممنتم زاویه‌ای

اگر ذره P به جرم m را در فضا و بر روی مسیر به شکل زیر در نظر بگیریم آنگاه اندازه

گشتاور اندازه حرکت خطی ذره حول یک محور دلخواه مانند O اندازه حرکتی ذره‌ای

آن ذره نامیده می‌شود و رابطه آن به صورت زیری باشد (مطابق شکل قبل H_O (*1



از رابطه زیری توانیم حاصلضرب خارجی رابیدا کنیم

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x i + \vec{V}_y j + \vec{V}_z k$$

$$H_O = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\Sigma F = G^{\cdot}$$

$$\Sigma F \cdot r = (r \cdot G^{\cdot})_H$$

نکته:

برآیند گشتاور نیروهای وارد شده بر یک ذره حول محور O

$$\Sigma M_O = H_O^{\cdot}$$

با آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه ای یکی است.

مشتق

آگر از دو طرف رابطه با انتگرال بگیریم رابطه جدیدی بدست می‌آید.

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

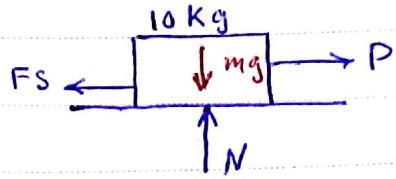
مثال:

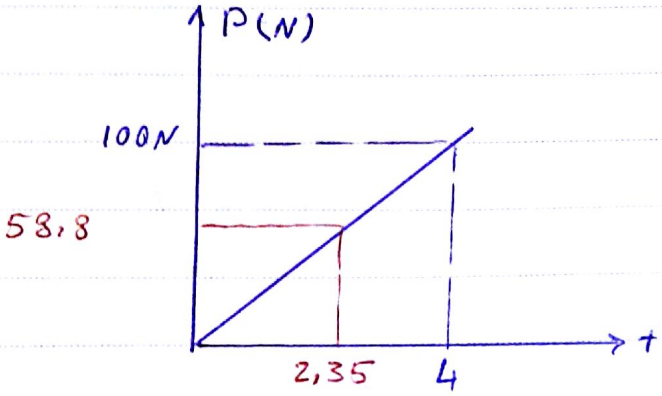
نیروی P به قطعه 10 Kg ساکنی وارد می‌شود. ضرایب تغییرات خطی به صورت زیر می‌باشد.

معلوم است: سرعت قطعه بعد از 4 sec

ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = 0.6$

$\mu_K = 0.4$





با توجه به اینکه جسم باید حرکت کند می‌بایستی نیروی لازم برای مقابله با نیروی اصطکاک استاتیکی را ایجاد کنیم - ۲*

*۲ $F_s = \mu N$

$F_s = 0.6 \times 10 \times 9.8$ $\quad F_s = 58,8$

از راه گرفتن تناسب -

S	P
4	100
□	58,8

$\rightarrow S = \frac{4 \times 58,8}{100} = 2,35\ S$ شروع حرکت

$\Sigma F = G^{\cdot}$ $\quad \Rightarrow \int \Sigma F = \int_1^2 G^{\cdot}$

$(mv)^{\cdot}$

حرکت از سکون

$\int \Sigma F = G_2 - G_1 = m v_2 - m v_1$

$\int \Sigma F = m v_2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$$y - 100 = \frac{100 - 0}{4 - 0}(x - 4) \rightarrow y = 25x - 100 + 100$$

$$\downarrow$$

$$y = 25x$$

$$p = 25t$$

$$F = 25t$$

$$\int \Sigma F = mv_2$$

$$\int_{2,35}^{4} 25t - \mu_k mg = mv_2$$

$$\int_{2,35}^{4} (25t - \mu mg)\,dt = mv_2$$

$$25t^2/2 - \mu mg t \Big|_{2,35}^{4} = mv_2$$

$$\left(\frac{25 \times 4^2}{2} - 0.4 \times 10 \times 9,8 \times 4\right) - \left(\frac{25 \times 2,35^2}{2} - 0.4 \times 10 \times 9.8 \times 2,35\right)$$

$$= 10 v_2$$

$$\boxed{v_2 = 6,6 \text{ m/s}}$$

- پایستاری اندازه حرکت

اگر در یک مدت زمان معلوم برآیند نیروهای وارد بر یک ذره ۰ باشد آنگاه اندازه حرکت خطی آن ذره در مدت ذکر شده ثابت خواهد ماند - همچنین اگر در مدت معلومی برایند گشتاورها

Scanned by CamScanner

Subject
Date

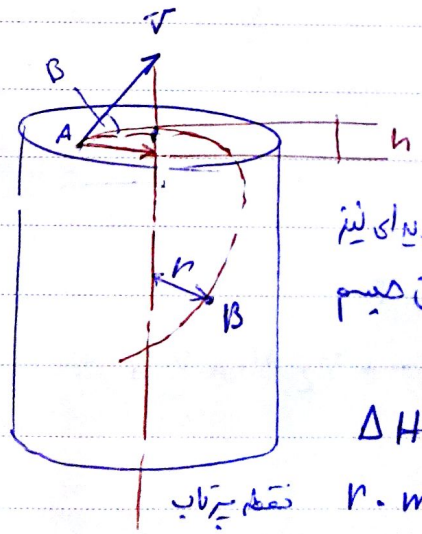
حول یک نقطه مانند O وارد شده بر ذره ۰ باشد آنگاه اندازه حرکت زاویه ای آن ذره حول آن نقطه ثابت خواهد ماند - فرض کنید ۲ ذره P و Q در یک زمان منتخص نیروهای F و -F را به یکدیگر وارد کنند که این دو نیرو باهم برابرند - آنگاه می توان گفت ممنه وارد شده به ذره P قرینه ممنه وارد شده به ذره Q است یعنی اندازه حرکت کل سیستم ثابت می ماند - این رابطه را اصل بقای اندازه حرکت خطی می گوئیم -

تغییرات حرکت ذره ای نقطه P $\quad \Delta G_P = -\Delta G_Q$

$$\Sigma(\Delta G_P + \Delta G_Q) = 0$$

مثال:

ذره ای با سرعت اولیه V_0 که با افق زاویه β می سازد درون سطح همواره دیواره یک استوانه از نقطه A پرتاب می شود بیشترین ارتفاعی که ذره می تواند به آن برسد را محاسبه کنید همچنین سرعت ذره در آن نقطه را بدست آورید.



نقطه پرتاب

می دانیم همانند اندازه حرکت خطی یا بستاری اندازه حرکت زاویه ای نیز وجود دارد - دنبا بر این مجموع اندازه حرکت های زاویه ای این جسم برابر ۰ خواهد بود -

$$\Delta H_{sys} = 0$$

نقطه اوج $\quad r_0 \cdot mV = r' \cdot m'V$

$$V_0 \cos\beta = V_{اوج}$$

$$V = V_0 \cos\beta$$

Scanned by CamScanner

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

جنبشی پتانسیل

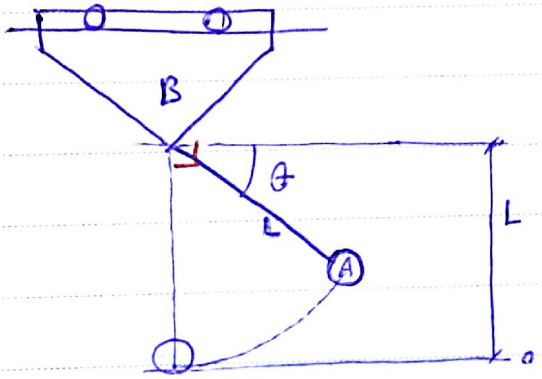
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m (v_0 \cos\beta)^2 + mgh$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g}$$

$$1/2\, v_0^2 = 1/2\, v_0^2 \cos^2\beta + gh$$

مثال ۱:

یک آونگ ساده به جرم M و طول L از جرم متحرک B آویزان شده است اگر سیستم از حالت سکون در زاویه $\theta = 0^\circ$ رها شود سرعت جرم B را هنگامی که $\theta = 90^\circ$ است را محاسبه کنید:



آنرا از اصطکاک چشم پوشی کنیم و نیروی خارجی افقی وارد شده بر A و B را در نظر بگیریم مشاهده می شود هیچ نیروی خارج از این سیستم به آن وارد نمی شود - پس می توانیم بگوییم اندازه حرکت خطی در راستای افق ثابت است بنابراین می توانیم بنویسیم -

$$\Delta G = 0 \qquad \text{پایستاری حرکت}$$

$$G_1 + G_2 = 0 \qquad \text{پایستاری انرژی}$$

$$m_A v_A + m_B v_B = 0$$

$$v_A = \frac{-m_B v_B}{m_A}$$

$$v_B = \frac{-m_A v_A}{m_B}$$

اول دوم

$$U + T = U + T$$

$$mgL + 0 + 0 + 1/2\, m_A v_A^2 + 1/2\, m_B v_B^2$$

$v_A^2 = \left(\frac{-m_B v_B}{m_A}\right)^2$

Scanned by CamScanner

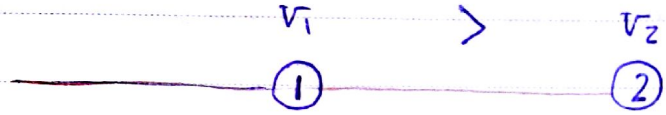
$$mgL = \frac{1}{2} m_A \left(\frac{-m_B}{m_A} V_B \right)^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

$$mgL = \frac{1}{2} V_B^2 m_B \left(\frac{-m_B}{m_A} + 1 \right)$$

$$V_B = \sqrt{\frac{mgL}{\frac{1}{2} m_B \left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right)}}$$

برخورد

در بررسی برخورد ها اصل مقدار و اندازه حرکت بسیار مهم است - در شکل زیر سرعت دو ذره قبل و بعد از برخورد را در نظر می گیریم



قبل از برخورد



لحظه برخورد - بیشترین تغییر شکل



بعد از برخورد

چون برخورد دو گوی به صورتی است که نیروهای تمامی آنها مخالف هم هستند و نیروی خارجی بر این سیستم وارد نمی شود بنابراین می توانیم بگوییم اندازه حرکت خطی در راستای مستقیم بدون تغییر باقی می ماند -

$$\Delta G = 0$$

حالت دوم $G = G$ حالت اول

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

PqPCO

Scanned by CamScanner

ضریب جهش یا بازگشت

به نسبت سرعت نسبی جدایش به سرعت نسبی نزدیکی ضریب بازگشت می گوییم

که فرمول آن عبارت است از:

$$e = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}$$

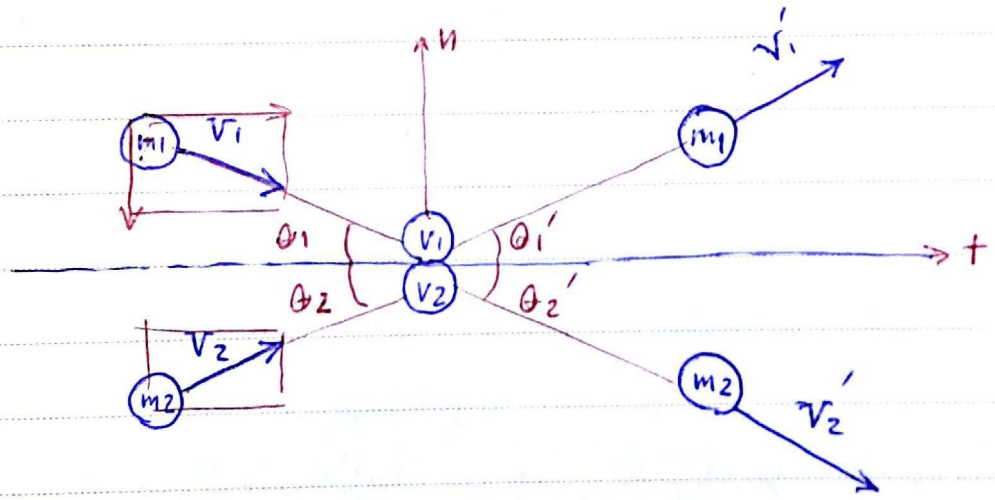
(ضریب جهش) — (جدایش) / (نزدیکی)

برخورد زاویه دار -

در برخورد زاویه دار برخلاف برخورد مستقیم سرعت های پیش از برخورد و پس از آن با هم

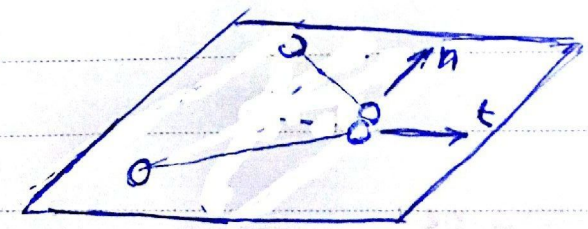
هم راستا نیستند طبق شکل زیر جرم های m_1 و m_2 با سرعت های v_1 و v_2

با زاویه های θ_1 و θ_2 به هم برخورد می کنند



با توجه به این موضوع که در جسم در لحظه برخورد در راستای n به یکدیگر نیروی وارد می کنند -

می توانیم بگوییم یا بستاری اندازه حرکتی خطی وجود دارد



Scanned by CamScanner

Subject
Date

در راستای محور n $G = G$

بعد از برخورد قبل از برخورد

$$(m_1 v_1)_n + (m_2 v_2)_n = (m_1 v_1')_n + (m_2 v_2')_n \quad \#1$$

اگر سرعت های قبل از برخورد را تجزیه کنیم

$$(m_1 v_1)_t = (m_1 v_1')_t$$

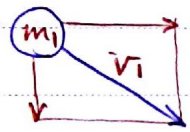
به اشکال زیر می رسیم - می بینیم هر

$$G = G$$

جزم در راستای حرکتی خواهد داشت

$$(m_2 v_2)_t = (m_2 v_2')_t$$

یکی از این راستاها به هم نیرو وارد می کنند ولی در راستای دیگر



نیروی به هم وارد نمی کنند - در راستای n که نیروی متقابل به

هم اعمال می کنند مجموعه دو گوی را یک سیستم می گیریم و

معادله #1 را می نویسیم

اما در راستای t که به هم نیروی وارد نمی کنند هر گوی به طور مجزا اندازه حرکتی خود را حفظ خواهد

کرد پس هر گوی را هم تنهایی یک سیستم فرض می کنیم.

مثال

در شکل زیر دو بازیکن به صورت همزمان دو توپ را با جرم های $m_1 = 200$ و $m_2 = 250\ g$

$\theta_1 = 30^\circ$ و $\theta_2 = 45^\circ$ به سمت هم پرتاب می کنند محاسبه کنید این دو توپ پس از برخورد

چه مسیری را با چه زاویه ای طی می کنند.

$v_1 = 100\ m/s$ $v_2 = 120\ m/s$

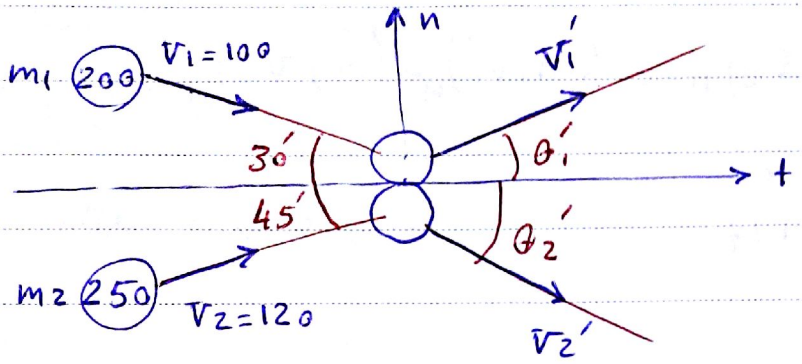
$e = 0.6$

P4PCO

Scanned by CamScanner

$$e = \frac{|(\vec{v}_2')_n - (\vec{v}_1')_n|}{|(\vec{v}_2)_n - (\vec{v}_1)_n|}$$

چون در راستای n برهم برخورد می‌کنند



در راستای t $G = G$

قبل از برخورد بعد از برخورد

$$(m_1 v_1)_t = (m_1 v_1')_t$$

$$0.2 \times 100 \cos 30 = 0.2\, v_1' \cos\theta_1 \quad (1)$$

در جهت دوم $G = G$

$$(m_2 v_2)_t = (m_2 v_2')_t$$

$$0.25 \times 120 \cos 45 = 0.25\, v_2' \cos\theta_2 \quad (2)$$

مجهول دارند

از راه ضریب جهش

$$0.6 = \frac{|v_2' \sin\theta_2' - v_1' \sin\theta_1'|}{|120 \sin 45 - 100 \sin 30|} \quad (4)$$

$(v_2')_n$ $(v_1')_n$ $(v_2)_n$ $(v_1)_n$

به حالت سیستمی

$$(m_1 v_1)_n + (m_2 v_2)_n = (m_1 v_1')_n + (m_2 v_2')_n$$

$$0.2 \times 100 \times \sin 30 + 0.25 \times 120 \times \sin 45 = 0.2 \times v_1' \sin\theta_1 + 0.25 \times v_2' \sin\theta_2 \quad (3)$$

Scanned by CamScanner

$20\cos 30 = 0.2\, v_1' \cos\theta_1' \rightarrow v_1' = \dfrac{20\cos 30^\circ}{0.2\cos\theta_1'}$

$30\cos 45 = 0.25\, v_2 \cos\theta_2' \rightarrow v_2' = \dfrac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}$

$0.6\,(120\sin 45 - 100\sin 30) = v_2' \sin\theta_2' - v_1' \sin\theta_1'$

$10 + 30 * \sin 45^\circ = 0.2\, v_1' \sin\theta_1' + 0.25\, v_2' \sin\theta_2'$

$$0.6\,(120\sin 45 - 100\sin 30) = \frac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}\sin\theta_2' - \frac{20\cos 30^\circ}{0.2\cos\theta_1'}\sin\theta_1'$$

$$10 + 30\sin 45 = 0.2\,\frac{20\cos 30}{0.2\cos\theta_1'} + 0.25\,\frac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}\sin\theta_2'$$

Scanned by CamScanner

Subject ۹۳/۱۰/۱۲
Date جلسه ۱۳

$$20\cos 30 = 0.2\, v_1' \cos\theta_1' \rightarrow v_1' = \frac{20\cos 30^\circ}{0.2\cos\theta_1'}$$

$$30\cos 45 = 0.25\, v_2 \cos\theta_2' \rightarrow v_2' = \frac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}$$

$$0.6\,(120\sin 45 - 100\sin 30) = v_2' \sin\theta_2' - v_1 \sin\theta_1$$

$$10 + 30 * \sin 45^\circ = 0.2\, v_1' \sin\theta_1' + 0.25\, v_2' \sin\theta_2'$$

$$0.6\,(120\sin 45 - 100\sin 30) = \frac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}\sin\theta_2' - \frac{20\cos 30^\circ}{0.2\cos\theta_1'}\sin\theta_1'$$

$$10 + 30\sin 45 = 0.2\,\frac{20\cos 30}{0.2\cos\theta_1'} + 0.25\,\frac{30\cos 45}{0.25\cos\theta_2'}\sin\theta_2'$$

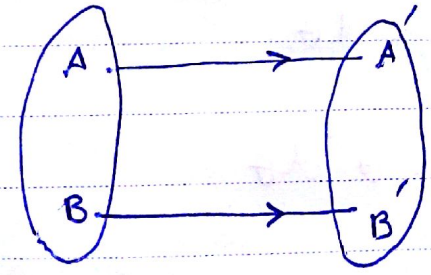
فصل ۵

۹۳/۱۰/۱۲

سینماتیک صفحه‌ای اجسام صلب

در فصل‌های قبل سینماتیک ذره بررسی شد در سینماتیک جسم صلب نیز از همان روابط استفاده می‌شود با این تفاوت که حرکت همانی جسم را هم در نظر می‌گیریم تا بر سینماتیک جسم صلب هم با کمیت‌های خطی سروکار داریم هم با کمیت‌های زاویه‌ای - انواع حرکت‌های جسم صلب عبارتند از:

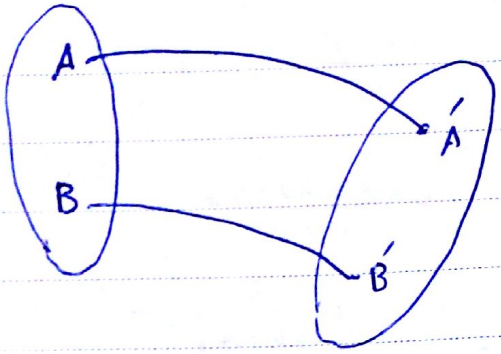
الف: انتقال مستقیم‌الخط



Scanned by CamScanner

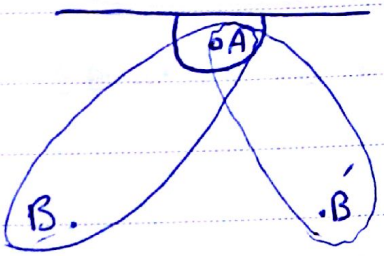
Subject
Date

ب:



انتقال مختص الخط

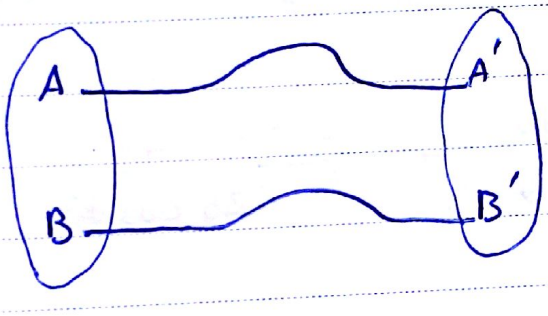
ج:



دوران حول محور ثابت

ترکیبی از دورانی و خطی

د:



$v = at + v_0 \rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + v_0 \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

$v\,dv = a\,dx \rightarrow \omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$

$\theta\,d\theta = \theta\,d\theta$

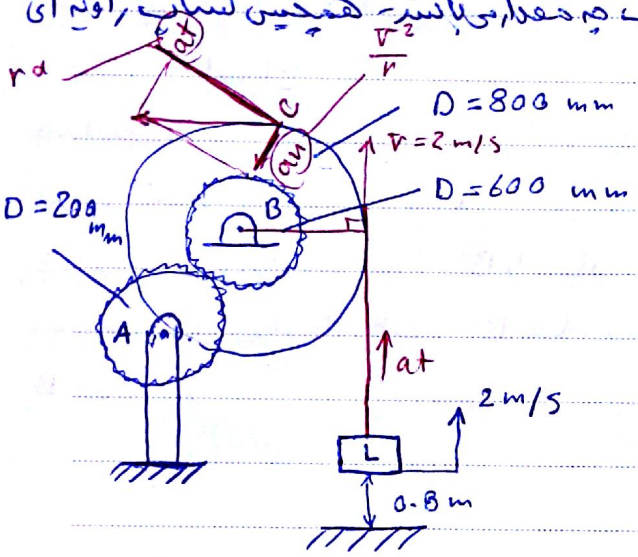
$x \rightarrow \theta$

$v \rightarrow \omega$

$a \rightarrow \alpha$

Scanned by CamScanner

در شکل زیر دیگ بالابر موتوری را نشان داده ایم که از یک طبلک چرخدنده B متصل به آن تشکیل شده است - چرخدنده A متصل به موتور است و باعث ایجاد چرخش چرخدنده B می گردد و بار L را از وضعیت سکون به سمت بالا می کشد. در حرکتی با شتاب ثابت پس از طی مسافت 0.8 متر سرعت بار به 2 m/s می رسد محاسبه کنید هنگام عبور از این موقعیت شتاب نقطه C روی کابل که با طبلک در تماس است چه مقداری باشد. همچنین شتاب زاویه ای و سرعت زاویه ای چرخدنده A را محاسبه کنید.



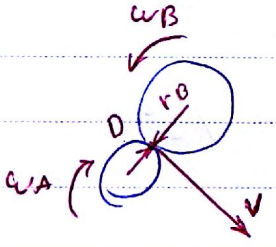
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0.4} = 10\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2.5 \backslash 10} = 10.31\ m/s^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$

$$2^2 - 0 = 2a \times 0.8$$

$$a = 2.5\ m/s^2$$



سرعت خطی در نقطه D یکی است.

$$r_B \omega_B = r_A \omega_A$$

2 m/s

$$v = r\omega$$

$$2\ m/s = 0.4\ \omega$$

طبق $\omega = \frac{2}{0.4} = 5\ rad/s$

طبق $\omega = \omega_B$

Scanned by CamScanner

$$r_B \omega_B = r_A \omega_A$$

$$0.3 \times 5 = 0.1\, \omega_A \qquad \omega_A = \frac{0.3 \times 5}{0.1} = 15 \ rad/$$

بین دو چرخ‌دنده در کل یک نقطه مشترک وجود دارد که فقط و فقط سرعت خطی این نقطه چه از چرخ‌دنده A چه از B باید آوریم بالهم برابر است - لکن این اتفاق نیفتد چرخ‌دنده‌ها با هم درگیر نخواهند بود یا حرکت خواهند شد

شتاب زاویه‌ای

همانطور که در بخش قبل سرعت زاویه‌ای را بدست آوردیم در اینجا نیز می‌توانیم از رابطه ترکیب شتاب خطی و زاویه‌ای استفاده کنیم و شتاب زاویه‌ای طبلک B را محاسبه کنیم طبق داده‌های مسئله شتاب زاویه‌ای طبلک B همان شتاب خطی طبلک B خواهد بود -

$$\alpha_B = \alpha \ \text{طبلک}$$

$$a = r\alpha \ \text{طبلک}$$

$$2.5 = 0.4\, \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2.5}{0.4} = 6.25$$

$$r\alpha_B = r\alpha_A$$

$$0.3 = 0.1\, \alpha_A \qquad 0.3 \times 6.25 = 0.1\, \alpha_A$$

$$\alpha_A = 18.25 \ rad/s^2$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

~~چرخ‌دنده اول~~ ~~چرخ‌دنده دوم~~

$$r_B \omega_B = r_A \omega_A$$

$$0.3 \times 5 = 0.1\, \omega_A \qquad \omega_A = \frac{0.3 \times 5}{0.1} = 15 \ rad/s$$

این دو چرخ‌دنده در یک نقطه مشترکی وجود دارد که فقط و فقط سرعت خطی این نقطه چه از چرخ‌دنده A چه از B باشد آوریم بلهم برابراست - لکن این اتفاق نیفتد چرخ‌دنده‌ها با هم درگیر نخواهند بود یا حرکت خواهند شد

شتاب زاویه‌ای

همانطور که در بخش قبل سرعت زاویه‌ای را بلد شدیم در اینجا نیز می‌توانیم از رابطه ترکیب شتاب خطی و زاویه‌ای استفاده کنیم و شتاب زاویه‌ای طبلک B را محاسبه کنیم طبق داده‌های مسئله شتاب زاویه‌ای طبلک B همان شتاب همانی طبلک B خواهد بود -

$$\alpha_B = \alpha \quad \text{طبلک}$$

$$a = r\alpha \quad \text{طبلک}$$

$$2.5 = 0.4\, \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2.5}{0.4} = 6.25$$

$$r\alpha_B = r\alpha_A$$

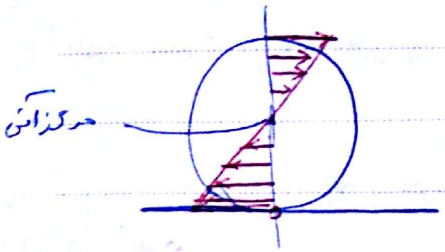
$$0.3 = 0.1\, \alpha_A \qquad 0.3 \times 6.25 = 0.1\, \alpha_A$$

$$\alpha_A = 18.25 \ rad/s^2$$

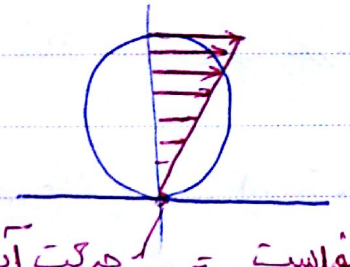
Scanned by CamScanner

نقطه ای است که سرعتش بصورت لحظه ای صفر می گردد - به محوری که از این نقطه عبور

می کند - محور آنی دوران می گوییم -



لغزش



غلتش

روش بدست آمدن مرکز آنی دوران -

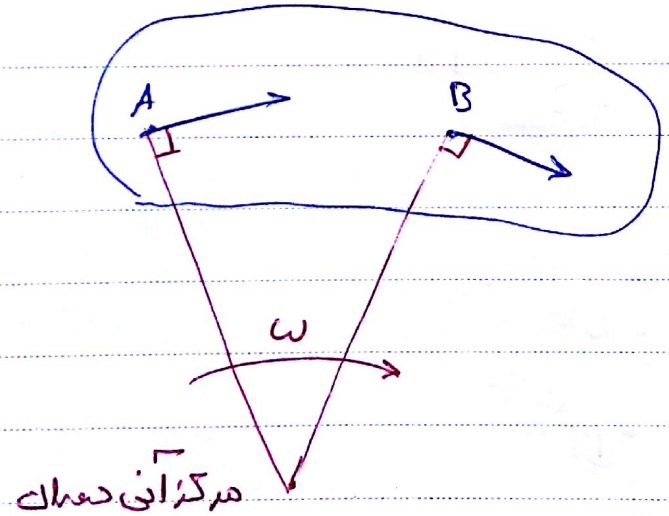
سرعتش صفر است = حرکت آنی دوران

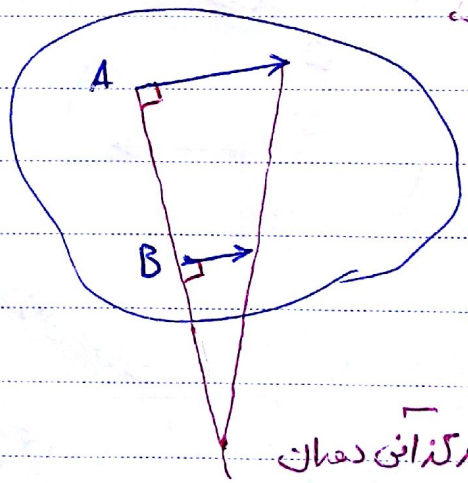
برای بدست آمدن مرکز آنی دوران خطی عمود بر ابتدای بردارهای سرعت یک جسم

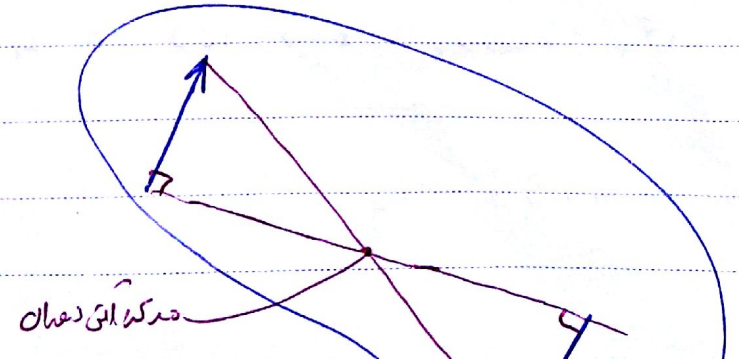
ترسیم می کنیم - این دو خط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند که آن مرکز آنی دوران می گوییم

در برخی موارد لازم است از انتهای بردارها نیز به یکدیگر وصل کرد تا نقطه آنی مرکز دوران

مشخص شود -







غلتش

Scanned by CamScanner

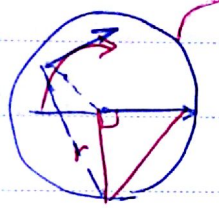
اهمیت مرکز آنی دوران در این است که اگر فاصله هر نقطه را تا مرکز دوران بدانیم همچنین

سرعت زاویه‌ای چرخش را داشته باشیم به راحتی سرعت خطی هر نقطه دلخواه از رابطه

$V = r\omega$ قابل بدست آوردن است.

مثال ۲۲

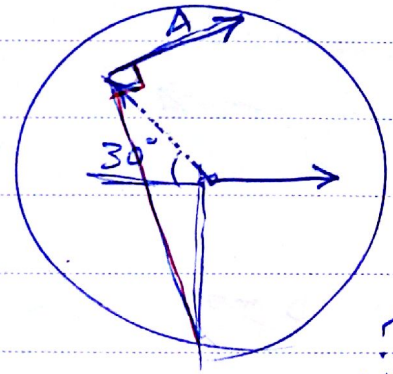
چرخی مطابق شکل بدون لغزش به سمت راست می غلتد. می‌دانیم که مرکز چرخ با سرعت 3 m/s در حال حرکت است. مرکز آنی دوران چرخ را پیدا کنید و با استفاده از آن سرعت نقطه A در وضعیت نشان داده شده را محاسبه نمایید.



$V = r\omega$

$3 = 0.3\omega$

$\omega = \frac{3}{0.3} = 10$



$V_A = r\omega$

(فاصله نقطه A تا مرکز آنی دوران) × (سرعت زاویه‌ای چرخ)

$A_C = \sqrt{200^2 + 300^2 + 2 \times 200 \times 30 \times \cos 120} = 436$

$V_A = 0/436 \times 10 = 4/3 \quad m/s$

PAPCO

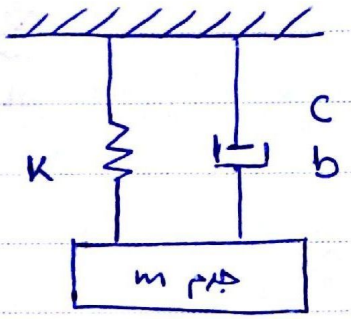
Scanned by CamScanner

Subject ۹۳/۱۰/۱۸
Date جلسه قبل ۱۴

ارتعاشات

اجزاء یک سیستم ارتعاشی عبارت است از: جرم، فنر، مستهلک کننده - نیروی محرک خارجی

اجزاء این سیستم به ساده‌ترین شکل ممکن قرار گرفته اند



فنر k خاصیت ارتجاعی دارد، معمولاً از جرم آن صرف نظری کنیم

مستهلک کننده c نیز فاقد جرم و خاصیت گشتاوری است و نیروی استهلاکی که در آن ایجاد می شود

با رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$F = \frac{b}{c} v$$

ارتعاشات را در حالت کلی به دو دسته طبقه بندی می کنند.

۱ـ ارتعاشات آزاد

۲ـ ارتعاشات اجباری

در ارتعاش آزاد سیستم در اثر نیروهای ذاتی داخلی خود نوسان می کند و نیروی خارجی به آن اعمال نمی شود

در ارتعاش اجباری سیستم در حالت طبیعی خود یا اصطلاحاً در مد طبیعی خود ارتعاش می کند

در ارتعاش اجباری در اثر تحریک یک نیروی خارجی که به سیستم اعمال می شود ارتعاشاتی خواهیم داشت

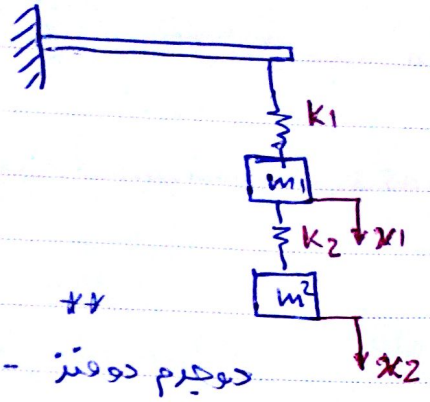
که سیستم مجبور است با فرکانس تحریک نیروی خارجی نوسان کند. اشکال زیر نمونه هایی از

سیستم های مرتعش را نمایش می دهند.

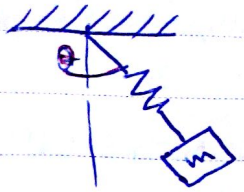
PaPCo

Scanned by CamScanner

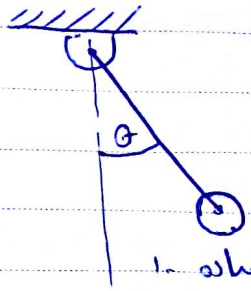
Subject
Date



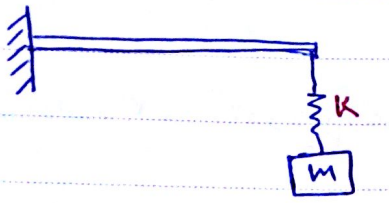
۲- دوجرم دو فنر



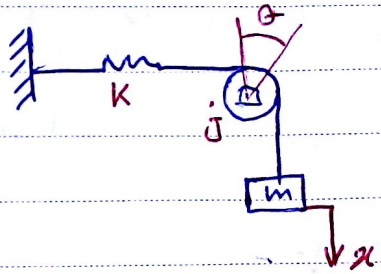
۳- جرم فنر



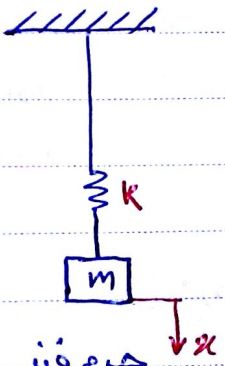
۱- آونگ ساده



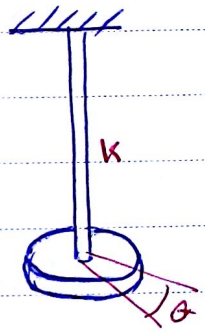
۴- تیر یک سر گیردار



۵- جرم - قرقره فنر



جرم فنر



۶- آونگ پیچی

۱ ثانیه 2 سیکل T تناوب - پریود یک سیکل کامل بدون تکرار -

$\omega = 2\pi \frac{1}{T}$ $\omega = 2\pi (f)$ f فرکانس یا بسامد

$\frac{1}{T}$

هر سیستم ۳ درجه آزادی دارد

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعریف درجه آزادی

در یک سیستم حداقل تعداد متغیرهای مستقل مکانی که برای مشخص کردن موقعیت جسم در فضا لازم می باشد. یک جسم صلب در فضا دارای ۶ درجه آزادی است زیرا ۳ مختصه موقعیت مرکز جرم و ۳ مختصه دورانی موقعیت جرم برایش قابل تصور است.

در اشکال قبل سیستم جرم فنر بصورت ۲ درجه آزادی می باشد و مابقی اشکال در حالت حالتی ۱ درجه آزادی دارند

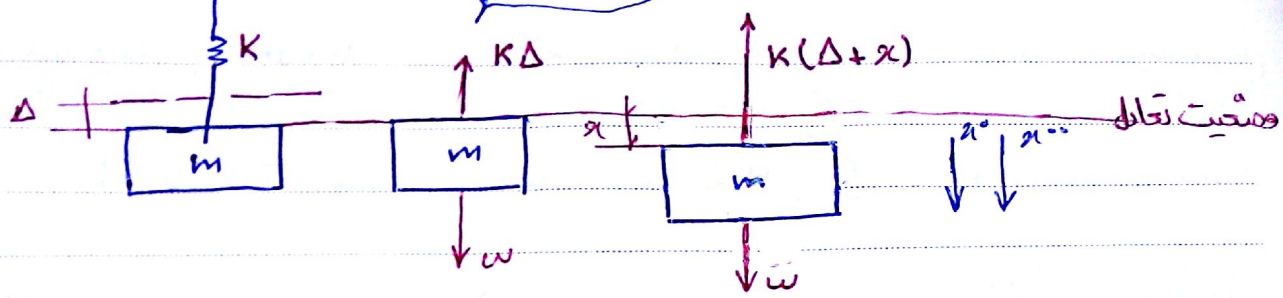
بدست آوردن معادلات حرکت و فرکانس طبیعی سیستم های ۱ درجه آزادی

شکل زیر یک سیستم بدون مستهلک کننده را نمایش می دهد که شامل جرم m و فنر k است به این سیستم اصطلاحاً نامیرا می گوییم زیرا مستهلک کننده ای وجود ندارد که حرکت نوسانی آزا مرکب کند بنابراین در شرایط ایده ال این سیستم تا بینهایت نوسان خواهد کرد درجه آزادی آن نیز ۱ است Δ را تغییر شکل فنر از حالت استاتیکی معرفی می کنیم و فرض می کنیم فنر حرکت خطی داشته باشد با این شرایط می خواهیم از معادلات تعادل استاتیکی، معادلات حرکت و فرکانس طبیعی سیستم را بدست آوریم.

P4PCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعادل
$\Sigma F_y = 0$
$mg - K\Delta = 0$
$mg = K\Delta$



$\Sigma F_y = 0$

$w - K\Delta = 0$

$w = K\Delta$

$my = K\Delta$

$\Sigma F = ma$

$mg - k(\Delta + x) = m(a) \xrightarrow{x^{\circ\circ}} mg - k(\Delta + x) = mx^{\circ\circ}$

اگر فرض کنیم جسم ما پس از طی مسافتی به حالت تعادل استاتیکی می رسد آنگاه می توانیم از شرط

تعادل استاتیکی استفاده کنیم - بنابراین داریم $x^{\circ\circ} + w_n^2 x = 0$

(اول معادله تعادل را برحسب x مرتب می کنیم ضریب x توان طبیعی سیستم است) به شرط $x^{\circ\circ}$ تنها بماند

$mx^{\circ\circ} \rightarrow \quad mg = K\Delta \rightarrow K\Delta - K\Delta - Kx = mx^{\circ\circ}$

$-mx^{\circ\circ} - Kx = 0$

فرکانس طبیعی سیستم

$x^{\circ\circ} + \frac{k}{m} x = 0$

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Scanned by CamScanner

از آنجاکه حالت استاتیک یک سیستم یک درجه آزادی به صورت زیر می‌باشد می‌توانیم بگوییم درستایی که $\omega = \omega_n$ تنها بماند ضریب M مجزور فرکانس طبیعی سیستم نامیده می‌شود.

معادله بدست آمده نیز برای حوزه پاسخ عمومی و خصوصی دارد - جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است - با دانستن این پاسخ می‌توانیم در هر لحظه ای که بخواهیم با قرار دادن زمان و فرکانس موقعیت جرم را پیدا کنیم -

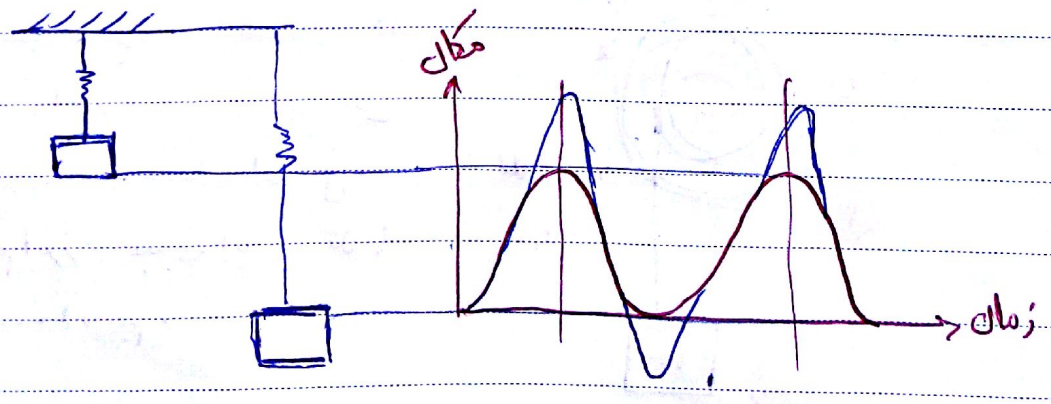
نکات مهم در ارتعاشات :

۱- هر قطعه ای یا جزئی از ماشین که دارای خاصیت ارتجاعی باشد قابلیت ارتعاش دارد

۲- هر قطعه ای یا جزئی از ماشین که به صورت آزاد به ارتعاش درآید با فرکانس طبیعی ارتعاش خواهد کرد.

۳- هرگاه قطعه ی یا جزئی از ماشین اجبارا به نوسان درآید با فرکانس تحریک اجباری ارتعاش خواهد کرد

۴- اگر فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی برابر شود قطعه ارتعاش کننده دائماً انرژی دریافت خواهد کرد و دامنه ارتعاش آن زیاد می‌شود به این شرایط ، تشدید یا رزونانس می گویند -



P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

برای تعیین فرکانس طبیعی یک سیستم باید ابتدا معادله حرکت آن را بدست آوریم

سپس بتوانیم ضریب x را که با مجذور فرکانس طبیعی سیستم برابر است پیدا کنیم

برای این کار دو روش استفاده می‌شود.

۱ـ روش انرژی ۲ـ روش نیوتن

در روش انرژی تمامی عواملی که دارای انرژی پتانسیل و جنبشی هستند را نوشته و از حاصل

جمع آنها نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و نتیجه را برابر ۰ قرار می‌دهیم.

$$\frac{d}{dt}(T+U)$$

T: جنبشی، U: پتانسیل

انرژی‌های جنبشی

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2$$

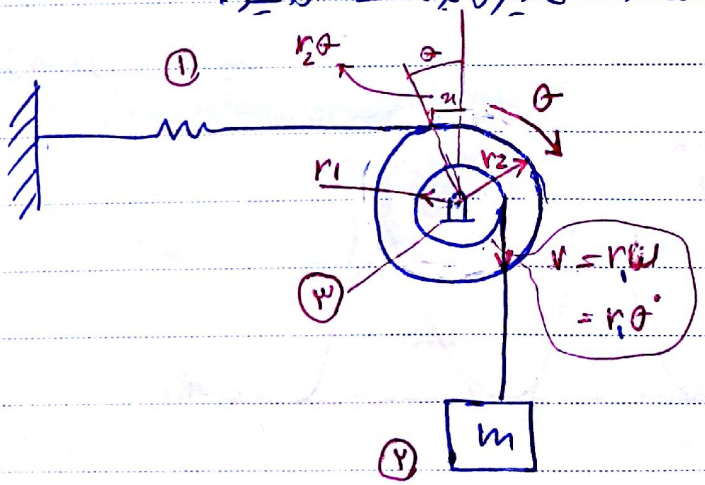
$$U = mgh$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

۲۳ مهر

مثال

فرکانس طبیعی سیستم نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید.



در این شکل با توجه به حضور یک جسم دایره‌ای و انرژی جنبشی این نوع شکل از مماس قطبی آن ل می‌توانیم انرژی جنبشی این شکل را نیز بدست آوریم.

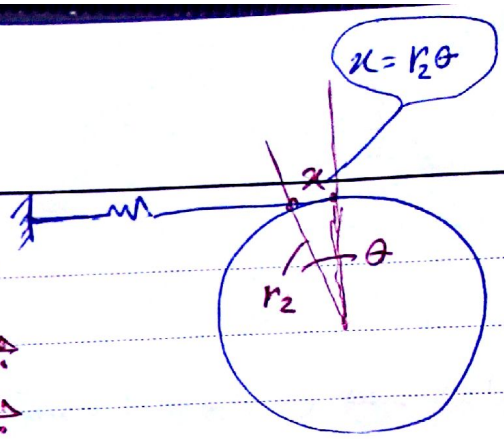
PdPCO

$x = r\theta$ ⇒ θ کمتر از ۶° $\quad v = r\omega = r\dot{\theta}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\frac{d}{dt}(T+U)$$



① $U = \frac{1}{2} k x^2$ — فنر

② $T = \frac{1}{2} m v^2$ — جرم

③ $T = \frac{1}{2} J \omega^2$ — جسم دایره‌ای شکل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(r_2\theta)^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}k r_2^2 2\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}m r_1^2 2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{1}{2}J 2\ddot{\theta}\dot{\theta} = 0$$

$$k r_2^2 \theta\dot{\theta} + m r_1^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} + J\ddot{\theta}\dot{\theta} = 0$$

دوطرف معادله $\ddot{\theta}\left(m r_1^2 + J\right) + k r_2^2 \theta = 0$

بابر θ تقسیم می‌کنیم

$$\ddot{\theta}\left(m r_1^2 + J\right) + k r_2^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k r_2^2}{m r_1^2 + J}\theta = 0$$

$$\omega_n^2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k r_2^2}{m r^2 + J}}$$

$\frac{d}{dt}(x^2)$

$u^n = n u' u^{n-1}$

$x^2 = 2\dot{x}\, x^{2-1}$

$\theta^2 \rightarrow 2\dot{\theta}\theta^{2-1} = 2\dot{\theta}\theta$

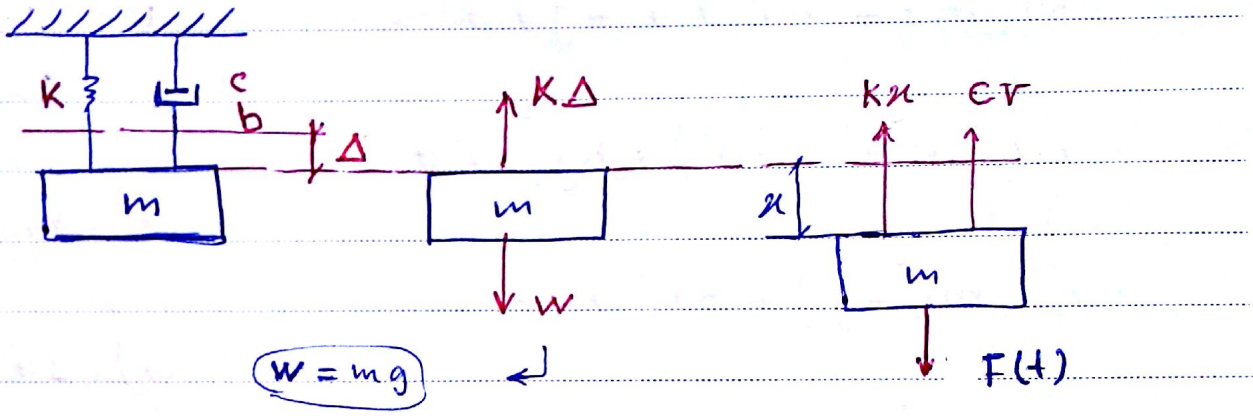
$(\dot{\theta})^2 = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}^{2-1}$

$= 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$

Scanned by CamScanner

- معرفی میرایی سیستم -

میرایی یا ζ زنا - هر سیستمی که دارای میراکننده (مستهلک) باشد بعد از یک بازه زمانی - دوسا ناشی از این خواهد رفت ضریب از بین رفتن میرایی را با ζ نمایش می‌دهیم و از معادلات حرکت نیوتن به صورت زیر بدست می‌آید.



حال معادله نیوتن را می‌نویسیم - در این سیستم نیروی F(t) به سیستم وارد می‌شود و آن را از حالت تعادل خارج می‌کند - طبق روابط نیوتن

$$\sum F = m\ddot{x}$$

(mg)

$$F(t) - Cv - Kx = m\ddot{x}$$

$$F(t) - c\dot{x} - Kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$\hookrightarrow s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

PAPCO

$$\rightarrow x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Scanned by CamScanner

ضریب میرایی کمک فنر = c

Subject
Date

در پاسخ بدست آمده عبارت $\sqrt{c^2 - 4Km}$ به وجود خواهد آمد که در

رادیکال نباید $=$ شود یا به عبارتی $c = \sqrt{4Km}$ شود وضعیت بحرانی است و به

ضریب میرایی بدست آمده $c_c = \sqrt{4Km}$ (critical) می گوییم.

با استفاده از c_c بدین می توانیم رابطه‌ای برای ζ (دمپینگ) بدست آوریم.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad \text{دمپینگ} = \frac{\text{میرایی}}{\text{بحرانی}}$$

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{4Km}}$$

$$c_c = 2\sqrt{Km}$$

$$c_c = \sqrt{4Km}$$

شرایط ζ

با توجه به پارامترهای تاثیرگذار در میرایی سیستم ۳ حالت برای ζ به وجود خواهد آمد

۱- $\zeta > 1$ در این حالت حرکت غیر تناوبی است و اصطلاحاً به آن شدیدا میرا یا فرامیرا می گوییم.

۲- $\zeta = 1$ در این حالت حرکت به صفر آرام تناوبی کاهش می یابد و به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود

۳ حالت قابل پیش بینی به شکل زیر می باشد.

Scanned by CamScanner

ضریب میرایی کمک فنر $= \zeta$

Subject
Date

$\sqrt{c^2 - 4km}$ به جذر عبارت فوق Δ گفته می‌شود

اگر $\Delta = 0$ شود یا به عبارتی $c = \sqrt{4km}$ شود وضعیت بحرانی است و به

ضریب میرایی بدست آمده $c_c = \sqrt{4km}$ (critical) می‌گوییم.

با استفاده از c_c بحرانی می‌توانیم رابطه‌ای برای ζ جدید زیر بدست آوریم.

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$ بحرانی / است

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{4km}}$$

$$c_c = 2\sqrt{km}$$

$$c_c = \sqrt{4km}$$

شرایط ζ

باتوجه به پارامترهای تاثیرگذار در میرایی سیستم ۳ حالت برای ζ به وجود خواهد آمد

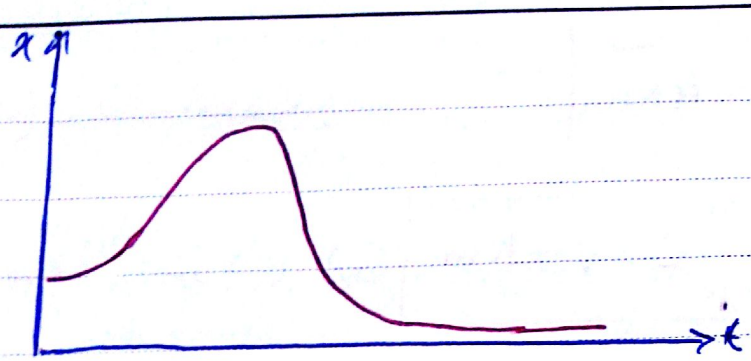
۱- $\zeta > 1$ در این حالت حرکت غیر نوسانی است و اصطلاحاً به آن فوق میرا یا فرا میرا می‌گوییم.

۲- $\zeta = 1$ در این حالت حرکت به صورت کاملاً نوسانی کاهش می‌یابد و هیچ نوسانی شکل نمی‌گیرد

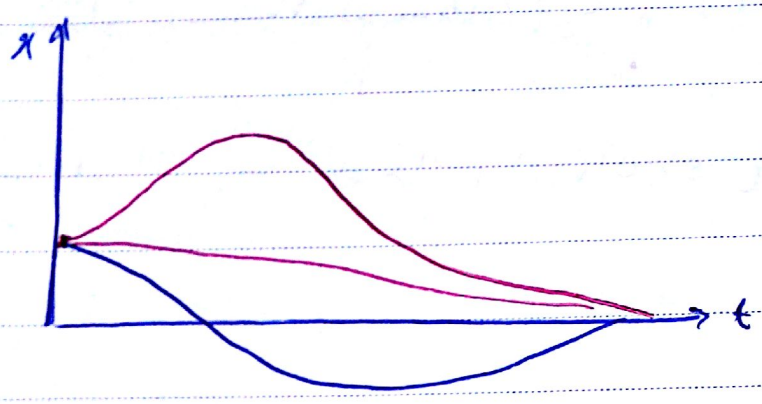
۳ حالت قابل پیش بینی به شکل زیر می‌باشد.

Scanned by CamScanner

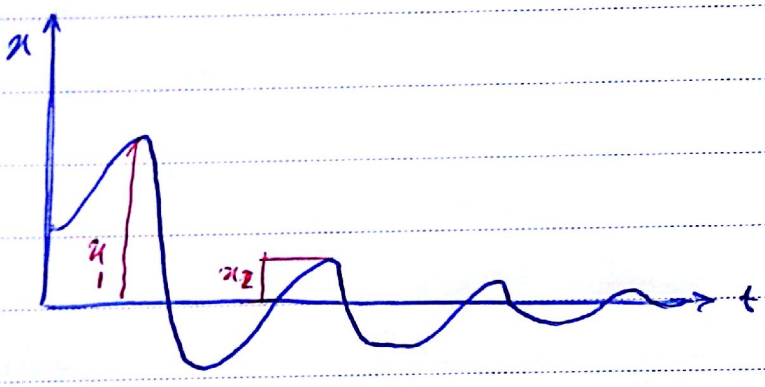
Date



$\xi > 1$



$\xi = 1$



$\xi < 1$

۳ـ $\xi < 1$ در این حالت سیستم ارتعاش طبیعی نوسانی از خود نشان می‌دهد و به صورت آرام و نوسانی به صفر نزدیک می‌شود ـ در این شرایط فرکانس جدیدی خواهیم داشت که به آن فرکانس طبیعی میرا می‌گوییم و آنرا ω_d نمایش می‌دهیم

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2}$ کاهه لگاریتمی

Scanned by CamScanner

Year. Month. Date. Subject :

در پاسخ بدست آمده عبارت $\sqrt{c^2 - 4km}$ بوجود خواهد آمد که اگر زیر رادیکال برابر صفر شود یا به A عبارتی $c_c = \sqrt{4km}$ شود می‌گوییم وضعیت بحرانی است و به ضریب میرایی بدست آمده c_c می‌گوییم

با استفاده از c_c بحرانی می‌توانیم رابطه‌ای برای ζ به صورت زیر بدست آوریم

$$c_c = 2m\omega_n$$

$$c_c = \sqrt{4km}$$

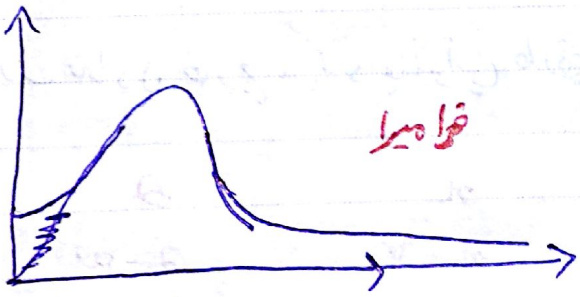
$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{4km}}$$

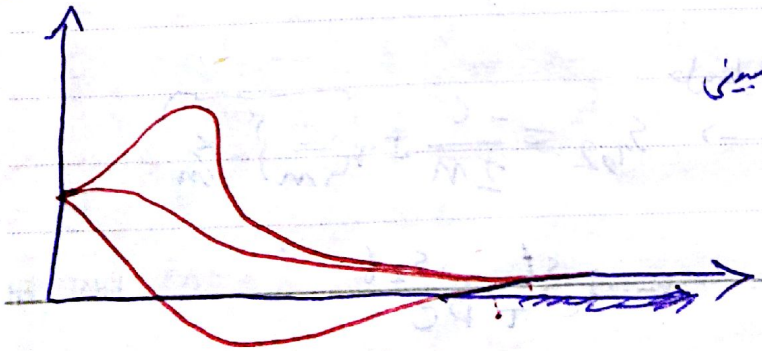
شرایط ζ

با توجه به پارامترهای تأثیرگذار در میرایی سیستم ۳ حالت برای ζ بوجود خواهد آمد

حالت اول $\zeta > 1$ در این حالت حرکت غیر تناوبی است و اصطلاحاً به آن حالت فوق میرا یا خیلی میرا می‌گوییم.



حالت دوم $\zeta = 1$ در این حالت حرکت به صورت آرام و تناوبی کاهش می‌یابد



به صفر نزدیک می‌شود سه حالت قابل پیش‌بینی

در شکل دو به دو می‌باشد

KHATEREH

Scanned by CamScanner