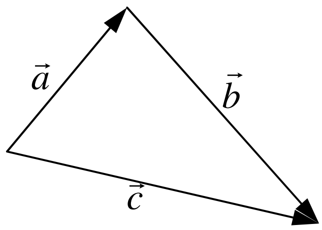
باسمه تعالی

فصل اول: بردار ها

۱ : در شکل مقابل، اندازه ی بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟(کنکور۱۳۸۰)



۱) ۲- ۲) ۱-

۳) ۱ ۴) ۲

حل : با توجه به شکل داریم، $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ لذا می توان نوشت:

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}.\vec{c}\rightarrow \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\vec{c}.\vec{c}\xrightarrow{\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}}|\vec{a}|^{۲}+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{۲}=|\vec{c}|^{۲}$$
$$\rightarrow ۹+۲\vec{a}.\vec{b}+۲۵=۳۶\rightarrow ۲\vec{a}.\vec{b}=۲\rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۱$$

***

۲ : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ آنگاه کسینوس زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ کدام است؟ (کنکور۱۳۸۱)

۱) $-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۲) $-\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$

حل :

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k})+(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}+۴\vec{j}$$

گیریم که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت :

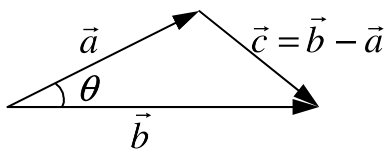
$$Cos\theta=\frac{(\vec{a}-\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}||\vec{b}|}=\frac{(۱)(۱)+(۴)(-۱)+(۰)(۱)}{\sqrt{۱+۱۶+۰}\times\sqrt{۱+۱+۱}}=\frac{-۳}{\sqrt{۱۷}\times\sqrt{۳}}=\frac{-\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۷}}=-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$$

***

۳ : دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول های ۵ و ۸ واحد مفروضند. مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه ی بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه ی تفاضل دو بردار کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۱)

۱)۵ ۲)۶ ۳)۶/۵ ۴) ۷/۵

حل:



$|\vec{c}|=?$

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|Sin\theta \to ۱۲=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۸\times Sin\theta \to Sin\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$Cos\theta=\sqrt{۱-Sin^۲\theta}=\sqrt{۱-(\frac{۳}{۵})^۲}=\frac{۴}{۵}$$

$$|\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|Cos\theta=۲۵+۶۴-۲(۵)(۸)(\frac{۴}{۵})=۲۵\to c=۵$$

***

۴ : تصویر قائم بردار $(۰,-۳,۶)$ روی امتداد بردار $(۲,-۱,-۲)$ کدام است؟ (کنکور۱۳۸۲)

۱) $(۲,-۱,-۲)$ ۲) $(-۲,۱,۲)$ ۳) $(۴,-۲,-۴)$ ۴) $(۲,۳,-۱)$

حل :

$\vec{a}=(۰,-۳,۶)$

$\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{(۰)(۲)+(-۳)(-۱)+(۶)(-۲)}{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}(۲,-۱,-۲)=\frac{-۹}{۹}(۲,-۱,-۲)=(-۲,۱,۲)$$

***

۵ : اگر $|\vec{a}|=۵$ و $|\vec{b}|=۲\sqrt{۶}$ و $|\vec{a}.\vec{b}|=۰$ اندازه ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

حل:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲=۲۵-۲(۰)+۲۴=۴۹$$
$$\to |\vec{a}-\vec{b}|=۷$$

***

۶ : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟(کنکور ۱۳۸۴)

۱) $\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$ ۲) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$ ۴) $(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b}$

حل: برای هر سه بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ غیر واقع در یک صفحه داریم.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

و چون ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد و با جابجا کردن دو بردار ضرب خارجی آنها قرینه می شود . خواهیم داشت:

$$\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b}$$

لذا $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ قرینه ی سه عدد دیگر (که مساوی هستند) می باشد و با سایرین متفاوت است.(گزینه ی ۲)

***

۷ : دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول های ۳ و۴ واحد با یکدیگر زاویه ی ۳۰ درجه می سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۳\vec{a}+۲\vec{b}$ تولید می شود، کدام است ؟(کنکور ۱۳۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

حل:

$$S=\frac{۱}{۲}|(۳\vec{a}+۲\vec{b})\times(\vec{a}-۲\vec{b})|=\frac{۱}{۲}|\underbrace{(۳\vec{a}\times\vec{a})}_{\vec{o}}-(۳\vec{a}\times۲\vec{b})+(۲\vec{b}\times\vec{a})-\underbrace{(۲\vec{b}\times۲\vec{b})}_{\vec{o}}|$$

$$=\frac{۱}{۲}|(-۶\vec{a}\times\vec{b})+(-۲\vec{a}\times\vec{b})|=\frac{۱}{۲}|-۸\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|-۸||\vec{a}\times\vec{b}|=۴|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|Sin\theta=۳\times۴Sin۳۰^\circ=۶} S=۴\times۶=۲۴$$

***

۸ :اگر $\vec{a}=(m,۲,-۱)$ و $|\vec{b}|=\sqrt{۴۱}$ و دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

(کنکور ۱۳۸۵) ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: چون دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود می باشند، پس : $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=۰$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=۰\rightarrow|\vec{a}|^۲-\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{b}-|\vec{b}|^۲=۰\rightarrow|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲=۰\rightarrow|\vec{a}|^۲=|\vec{b}|^۲$$

$$\rightarrow (m^{۲}+۴+۱)=\sqrt{۴۱}^{\,۲}=۰ \rightarrow m^{۲}=۳۶ \rightarrow m=۶$$

***

۹ : زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از ۹۰ درجه است. اگر $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۵$ و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=۱۸$ باشد، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۵)

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

حل :

$$|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=۱۸ \rightarrow |(\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}})+(\vec{a}\times\vec{b})|=۱۸ \rightarrow |۰+(\vec{a}\times\vec{b})|=۱۸ \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=۱۸$$

$$\rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\,Sin\theta=۱۸ \rightarrow ۶\times۵\times Sin\theta=۱۸ \rightarrow Sin\theta=\frac{۱۸}{۳۰}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow{Cos\theta=\sqrt{۱-Sin^{۲}\theta}} Cos\theta=\frac{۴}{۵}$$

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^{۲}+\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^{۲}+|\vec{a}||\vec{b}|\,Cos\theta=(۶)^{۲}+(۶)(۵)(\frac{۴}{۵})=۳۶+۲۴=۶۰$$

***

۱۰ : در کدام حالت حاصل ضرب عددی بردار غیر صفر $\vec{a}$ در مجموع دو بردار غیرصفر $\vec{x}$ و $\vec{y}$ صفر نمی شود؟(کنکور۱۳۸۶)

۱) بردار $\vec{x}$ قرینه ی بردار $\vec{y}$ باشد.
۲) بردار $\vec{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec{x}$ یا $\vec{y}$ عمود باشد.
۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم باشند.
۴) بردار $\vec{a}$ بر صفحه ی دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ عمود باشد.

حل: گزینه ی ۲ درست است. فرض کنیم که بردار $\vec{a}$ بر $\vec{x}$ عمود باشد و بر $\vec{y}$ عمود نباشد، لذا:

$$\vec{a}.(\vec{x}+\vec{y})=\vec{a}.\vec{x}+\vec{a}.\vec{y}=۰+\vec{a}.\vec{y}\neq۰$$

***

۱۱: اگر $\vec{a}=(۱,-۲,۳)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}+۵\vec{b}$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۷)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

حل :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-۲ & ۳\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۰\end{vmatrix}\right)=(-۲,۵,۴)$$

$$S=|(\vec{a}+۳\vec{b})\times(۲\vec{a}+۵\vec{b})|=|\underbrace{(\vec{a}\times۲\vec{a})}_{\vec{o}}+(\vec{a}\times۵\vec{b})+(۳\vec{b}\times۲\vec{a})+\underbrace{(۳\vec{b}\times۵\vec{b})}_{\vec{o}}|$$

$$=|(۵\vec{a}\times\vec{b})+(۶\vec{b}\times\vec{a})|=|(۵\vec{a}\times\vec{b})-(۶\vec{a}\times\vec{b})|=|-\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-۲)^۲+(۵)^۲+(۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

۱۲ : دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,۴,m)$ مفروضند. بـه ازاء کـدام مقـادیر m انـدازه ی $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است.(کنکور ۱۳۸۸)

۱) فقط $m=\pm۲$ ۲) فقط $m=-۲$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

حل:

دلیل اول:

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر صفحه ی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. در نتیجه بر بردار $\vec{a}+\vec{b}$ که بر همین صفحه واقـع اسـت ، نیـز عمـود می باشد. لذا همواره $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ می باشد و به m بستگی ندارد. (گزینه ی ۴)

دلیل دوم:

$$\vec{a}+\vec{b}=(۳,۶,-۱+m)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & m\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ m & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}\right)=(۲m+۴,-۲-m,۰)$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰\rightarrow(۳)(۲m+۴)+(۶)(-۲-m)+(-۱+m)(۰)=۰$$
$$\rightarrow ۶m+۱۲-۱۲-۶m=۰\rightarrow۰=۰$$

یعنی تساوی $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ به ازاء هر m برقرار است.

***

۱۳ : دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با تصویرهای $(۱,\alpha+۱,۲\alpha)$ و $(۲,۰,-۱)$ مفروض اند. به ازای کـدام مقـادیر α بردارهـای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمودند.(کنکور ۱۳۸۹)

۱) ۰/۴ و ۱− ۲) ۰/۶ و ۱ ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱−

حل:

$\vec{a}=(۱,\alpha+۱,۲\alpha)$

$\vec{b}=(۲,۰,-۱)$

$\vec{a}+\vec{b}=(۳,\alpha+۱\ ,۲\alpha-۱)$

$\vec{a}-\vec{b}=(-۱,\alpha+۱\ ,۲\alpha+۱)$

$$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})\rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=۰\rightarrow(۳)(-۱)+(\alpha+۱)(\alpha+۱)+(۲\alpha-۱)(۲\alpha+۱)=۰$$

$$\rightarrow-۳+\alpha^{۲}+۲\alpha+۱+۴\alpha^{۲}-۱=۰\rightarrow ۵\alpha^{۲}+۲\alpha-۳=۰\rightarrow\begin{cases}\alpha=-۱\\ \alpha=\frac{۳}{۵}=۰/۶\end{cases}$$

لذا گزینه ی ۴ درست است.

***

۱۴ : مساحت مثلث ABC با سه رأس $A(۱,-۲,۳)$ و $B(۲,۰,۱)$ و $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۹)

۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$ ۳) $\sqrt{۵۴}$ ۴) $\sqrt{۴۲}$

حل:

$\overrightarrow{AB}=(۱,۲,-۲)$

$\overrightarrow{AC}=(-۴,۴,-۲)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۴ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ -۲ & -۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۴ & ۴\end{vmatrix})=(۴,۱۰,۱۲)$$

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۱۶)+(۱۰۰)+(۱۴۴)}=\sqrt{۶۵}$$

لذا گزینه ی ۲ درست است.

***