# جزوه تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها

بهروز آدینه

# فهرست مطالب

# فصل ۲

# سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

## ۲-۱ مقدمه

دو تا از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان، به دو دلیل عمده در تحلیل سیگنال و سیستم نقشی اساسی ایفا می‌کنند. نخست این که بسیاری از فرآیندهای فیزیکی دارای این خواص هستند و بنابراین می‌توان آن‌ها را به صورت سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI [۲]) مدل‌سازی کرد. علاوه بر این، سیستم‌های LTI را می‌توان با جزئیات بیشتری تحلیل کرد که در نتیجه هم شناختی نسبت به ویژگی‌های آن‌ها حاصل می‌شود و هم مجموعه‌ای از ابزارهای توانمند که قسمت اصلی تجزیه و تحلیل سیگنال و سیستم را تشکیل می‌دهند، فراهم می‌گردد [۱].

یکی از دلایل اصلی این که سیستم‌های LTI قابل تجزیه و تحلیل می‌باشند آن است که این سیستم‌ها دارای خاصیت جمع آثار هستند. در نتیجه اگر بتوانیم ورودی یک سیستم LTI را برحسب ترکیب خطی مجموعه‌ای از سیگنال‌های اساسی نمایش دهیم، آنگاه می‌توانیم برای محاسبه خروجی سیستم برحسب پاسخ‌های آن به این سیگنال‌های اساسی از جمع آثار استفاده کنیم [۱].

یکی از مشخصه‌های ضربه واحد، چه در حالت زمان گسسته و چه در حالت زمان پیوسته، این است که سیگنال‌هایی بسیار کلی را می‌توان به صورت ترکیب‌های خطی از ضربه‌های تاخیر بیان کرد. این واقعیت، به همراه خواص جمع آثار و تغییرناپذیری با زمان، به ما امکان می‌دهد که توصیف کاملی از هر سیستم LTI را برحسب پاسخ آن به ضربه واحد بدست آوریم. چنین نمایشی که در زمان گسسته به عنوان جمع کانولوشن [۳] و در زمان پیوسته به عنوان انتگرال کانولوشن نامیده می‌شود، در بررسی سیستم‌های LTI سهولت تحلیل

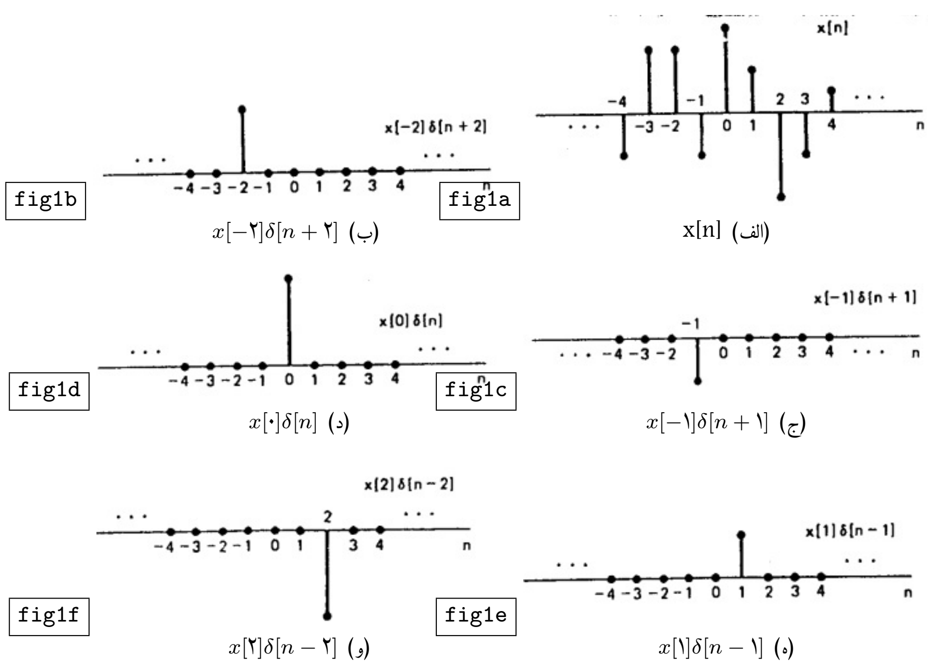
---
[2] Linear Time Invariant
[3] Convolution Sum

چشم‌گیری فراهم می‌کند. پس از بدست آوردن جمع کانولوشن و انتگرال کانولوشن، از این توصیف‌ها برای بررسی برخی دیگر از خواص سیستم‌های LTI استفاده می‌کنیم [۱].

## ۲-۲ سیستم‌های LTI زمان گسسته: جمع کانولوشن

### ۲-۲-۱ نمایش سیگنال‌های زمان گسسته برحسب ضربه‌ها

ایده کلیدی در تجسم این که چگونه می‌توان از ضربه واحد زمان گسسته برای ساختن هر سیگنال زمان گسسته‌ای استفاده کرد، این است که سیگنال زمان گسسته را به صورت دنباله‌ای از ضربه‌های جداگانه تصور کنیم. برای ملاحظه این که چگونه می‌توان این تصویر حسی را به یک بیان ریاضی تبدیل کرد، سیگنال $x[n]$ را که در شکل ۲-۱(الف) نشان داده شده، در نظر بگیرید. در بقیه قسمت‌های این شکل، پنج دنباله ضربه واحد انتقال یافته زمانی و تغییر مقیاس یافته نشان داده شده است که در آن‌ها تغییر مقیاس هر ضربه مساوی است با مقدار $x[n]$ در آن لحظه خاصی که نمونه واحد واقع می‌شود [۱].




(الف) x[n]

(ب) $x[-۲]\delta[n+۲]$

(ج) $x[-۱]\delta[n+۱]$

(د) $x[۰]\delta[n]$

(ه) $x[۱]\delta[n-۱]$

(و) $x[۲]\delta[n-۲]$

شکل ۲-۱: تجزیه یک سیگنال زمان گسسته به مجموع وزن‌دهی شده‌ای از ضربه‌های انتقال یافته

fig1

به عنوان مثال:

$$x[-1]\delta[n+1]=\begin{cases}x[-1] & n=-1\\ 0 & n\neq -1\end{cases},$$

$$x[0]\delta[n]=\begin{cases}x[0] & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases},$$

$$x[1]\delta[n-1]=\begin{cases}x[1] & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}.$$

بنابراین، برای $-2 \leqslant n \leqslant 2$، مجموع پنج دنباله‌ای که در شکل آمده، مساوی $x[n]$ است. در حالت کلی‌تر با در نظر گرفتن ضربه‌های انتقال یافته و تغییر مقیاس یافته دیگر می‌توان نوشت [۱]:

$$\begin{aligned}x[n]=\cdots&+x[-3]\delta[n+3]+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]\\&+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+x[3]\delta[n-3]+\cdots\end{aligned} \tag{۲-۱}$$

eq21-

به ازای هر مقدار $n$ فقط یکی از جملات سمت راست معادله (۲-۱) غیرصفر است و ضریب مقیاس مربوط به آن جمله نیز دقیقا برابر $x[n]$ است. با نوشتن این مجموع به صورت فشرده‌تر، داریم [۱]:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k] \tag{۲-۲}$$

eq22-

رابطه اخیر، نمایش دنباله‌ای دلخواه به صورت یک ترکیب خطی از ضربه‌های واحد انتقال یافته $\delta[n-k]$ است که در این ترکیب خطی، وزن‌ها برابر $x[k]$ می‌باشند. به عنوان مثال، پله واحد $x[n]=u[n]$ را در نظر بگیرید. در این حالت چون برای $k<0$، $u[k]=0$ و برای $k\geqslant 0$، $u[k]=1$ است، معادله (۲-۲) به صورت زیر در می‌آید [۱]:

$$u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

معادله (۲-۲) را خاصیت غربالی[1] ضربه واحد زمان گسسته می‌نامند. چون دنباله $\delta[n-k]$ فقط وقتی که $k=n$ باشد، غیر صفر است، مجموع در سمت راست معادله (۲-۲) دنباله مقادیر را غربال کرده و فقط مقدار متناظر با $k=n$ را نگه می‌دارد [۱].

## ۲-۲-۲ پاسخ ضربه واحد زمان گسسته و نمایش جمع کانولوشن برای سیستم‌های LTI

اهمیت خاصیت غربالی معادلات (۲-۱) و (۲-۲) در این واقعیت نهفته است که $x[n]$ را برحسب یک برهم نهی از نسخه‌های تغییر مقیاس یافته از مجموعه توابع مقدماتی بسیار ساده، یعنی ضربه‌های واحد انتقال

[1] Sifting Property

یافته $\delta[n-k]$، که هر کدام فقط در یک نقطه از زمان که با مقدار متناظر $k$ مشخص می‌شود غیر صفر (با مقدار ۱) هستند، بیان می‌کند. پاسخ یک سیستم خطی به $x[n]$ برابر با مجموع پاسخ‌های تغییر مقیاس یافته سیستم به هر یک از این ضربه‌های انتقال یافته خواهد بود. علاوه بر این، خاصیت تغییرناپذیری با زمان به ما می‌گوید که پاسخ‌های یک سیستم تغییرناپذیر با زمان به ضربه‌های واحد انتقال یافته زمانی، به سادگی، نسخه‌های انتقال یافته زمانی یکدیگر هستند. نمایش جمع کانولوشن برای سیستم‌های زمان گسسته‌ای که هم خطی و هم تغییرناپذیر با زمان هستند، از کنار هم گذاردن این دو واقعیت اساسی حاصل می‌شود [۱].

به طور مشخص‌تر، پاسخ یک سیستم خطی (اما احتمالا تغییرپذیر بازمان) را به ورودی دلخواه $x[n]$ در نظر بگیرید. با استفاده از معادله (۲-۲) می‌توانیم ورودی را به صورت یک ترکیب خطی از ضربه‌های واحد انتقال یافته نمایش دهیم. فرض کنید $h_k[n]$ نشان‌دهنده پاسخ سیستم خطی به ضربه واحد انتقال یافته $\delta[n-k]$ باشد. آنگاه بنا به خاصیت جمع آثار در سیستم خطی، پاسخ $y[n]$ سیستم خطی به ورودی $x[n]$ در معادله (۲-۲) به سادگی برابر ترکیب خطی وزن‌دهی شده‌ای از این پاسخ‌های اساسی است. یعنی، با بیان ورودی $x[n]$ به سیستم خطی به صورت معادله (۲-۲)، خروجی $y[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \tag{۲-۳}$$

eq23-

بنابراین، طبق معادله (۲-۳) اگر پاسخ یک سیستم خطی را به مجموعه ضربه‌های واحد انتقال یافته بدانیم، می‌توانیم پاسخ به هر ورودی دلخواهی را بدست آوریم. تفسیری از معادله (۲-۳) در شکل ۲-۲ به تصویر درآمده است. سیگنال $x[n]$ به عنوان ورودی به یک سیستم خطی اعمال می‌شود که پاسخ‌های آن به هر یک از سیگنال‌های $\delta[n+1]$، $\delta[n]$ و $\delta[n-1]$ به ترتیب $h_{-1}[n]$، $h_0[n]$ و $h_1[n]$ در شکل ۲-۲(ب) ترسیم شده‌اند. چون $x[n]$ را می‌توان برحسب ترکیب خطی از $\delta[n+1]$، $\delta[n]$ و $\delta[n-1]$ نوشت، جمع آثار به ما امکان می‌دهد که پاسخ $x[n]$ را به صورت ترکیب خطی از پاسخ‌های جداگانه به هر یک از ضربه‌های انتقال یافته بنویسیم. هر یک از ضربه‌های انتقال یافته و تغییر مقیاس یافته که $x[n]$ را تشکیل می‌دهند، در سمت چپ شکل ۲-۲(ج) نشان داده شده‌اند، در حالی که پاسخ‌ها به این سیگنال‌های مولفه در سمت راست تصویر شده‌اند. در شکل ۲-۲(د) ورودی واقعی $x[n]$ که برابر مجموع مولفه‌های در سمت چپ شکل ۲-۲(ج) است، به همراه خروجی واقعی $y[n]$ که بنا به جمع آثار برابر مجموع مولفه‌های در سمت راست شکل ۲-۲(ج) می‌باشد، آمده است. بنابراین، پاسخ سیستم خطی در زمان $n$ به سادگی برای مجموع پاسخ‌های ناشی از مقدار ورودی در هر لحظه از زمان است [۱].

البته در حالت کلی لزومی ندارد که پاسخ‌های $h_k[n]$ به ازای مقادیر مختلف $k$ به هم مربوط باشند. اما اگر سیستم خطی، تغییرناپذیر بازمان نیز باشد، آنگاه این پاسخ‌های به ضربه‌های واحد انتقال یافته زمانی، همگی

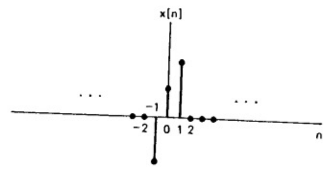



fig2a

x[n] (الف)

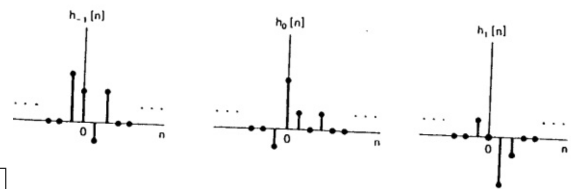



fig2b

h[n] (ب)

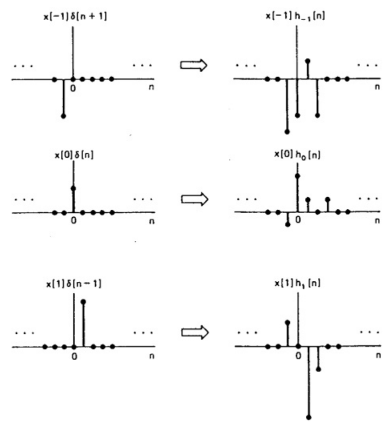



fig2c

$x[k]\delta[n-k]$ (ج)

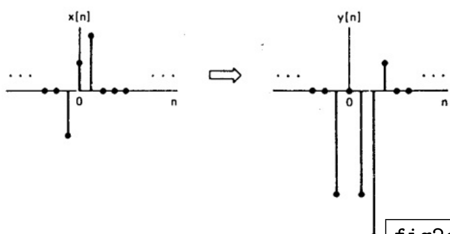



fig2d

$x[n] \rightarrow y[n]$ (د)

شکل ۲-۲: تعبیر ترسیمی از پاسخ سیستم خطی زمان گسسته که در معادله (۲-۳) بیان شده است fig2

نسخه‌های انتقال یافته زمانی یکدیگر هستند. بویژه، چون $\delta[n-k]$ نسخه انتقال یافته زمانی $\delta[n]$ است، پاسخ $h_k[n]$ نیز نسخه انتقال یافته زمانی $h.[n]$ است، یعنی [۱]:

$$h_k[n] = h.[n-k] \quad (۲-۴)$$ eq24-

برای سهولت نمادگذاری، زیرنویس روی $h.[n]$ را حذف کرده و پاسخ ضربه (نمونه) واحد را چنین تعریف می‌کنیم [۱]:

$$h[n] = h.[n] \quad (۲-۵)$$ eq25-

یعنی، $h[n]$ خروجی سیستم LTI به ازای ورودی $\delta[n]$ است. پس برای یک سیستم LTI معادله (۲-۳) به صورت زیر در می‌آید [۱]:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (۲-۶)$$

eq26-

این نتیجه را جمع کانولوشن یا جمع برهم‌نهی می‌نامند و عملیات سمت راست معادله (۲-۶) به عنوان کانولوشن دنباله‌های $x[n]$ و $y[n]$ خوانده می‌شود. عمل کانولوشن را به طور نمادین به صورت زیر نشان خواهیم داد [۱]:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (۲-۷)$$

توجه کنید که معادله (۲-۶) پاسخ سیستم LTI به یک ورودی دلخواه را برحسب پاسخ سیستم به ضربه واحد بیان می‌کند. از اینجا ملاحظه می‌کنیم که هر سیستم LTI به وسیله پاسخ آن به تنها یک سیگنال، یعنی پاسخ آن به ضربه واحد، کاملا مشخص می‌شود [۱].

تعبیر معادله (۲-۶) مشابه همانی است که برای معادله (۲-۳) ارائه شد. بدین صورت که برای سیستم LTI، پاسخ ناشی از ورودی $x[n]$ که در زمان $k$ اعمال شده برابر $x[k]\delta[n-k]$ است که یک نسخه انتقال یافته و تغییر مقیاس یافته (یک پژواک) از $h[n]$ می‌باشد. همانند قبل، خروجی واقعی برابر مجموع کلیه این پاسخ‌ها است [۱].

ex21- **مثال ۲-۱** یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی $x[n]$ که در شکل ۲-۳(الف) نشان داده شده‌اند، در نظر بگیرید. در این حالت، چون فقط $x[۰]$ و $x[۱]$ غیرصفر هستند، معادله (۲-۶) به صورت عبارت زیر ساده می‌شود:

$$y[n] = x[۰]h[n-۰] + x[۱]h[n-۱] = ۰/۵h[n] + ۲h[n-۱] \quad (۲-۸)$$

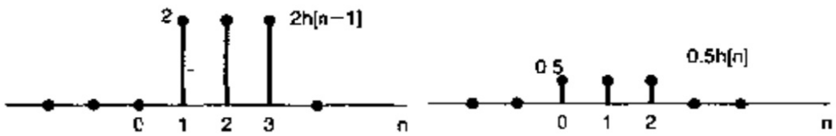
دنباله‌های $۰/۵h[n]$ و $۲h[n-۱]$ دو پژواک از پاسخ ضربه‌اند که در برهم‌نهی مربوط به ایجاد $y[n]$ مورد نیاز هستند. این پژواک‌ها در شکل ۲-۳(ب) نشان داده شده‌اند. با جمع این دو پژواک به ازای هر مقدار $n$، $y[n]$ بدست می‌آید که در شکل ۲-۳(ج) آمده است [۱].

با در نظر گرفتن اثر جمع برهم‌نهی برروی هر نمونه خروجی به طور جداگانه، روش بسیار مفید دیگری برای تجسم نحوه محاسبه $y[n]$ با استفاده از جمع کانولوشن بدست می‌آوریم. به خصوص محاسبه مقدار خروجی را در یک زمان خاص $n$ در نظر بگیرید. روش فوق‌العاده مناسبی برای نمایش ترسیمی این محاسبه با تلقی دو سیگنال $x[k]$ و $h[n-k]$ به صورت توابعی از $k$ حاصل می‌شود. با ضرب این دو تابع در یکدیگر،

fig3a

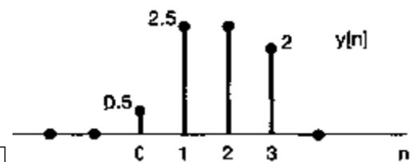

(الف) پاسخ ضربه $h[n]$ برای یک سیستم LTI و ورودی $x[n]$ به سیستم

fig3b




(ب) پاسخ‌های $۰/۵h[n]$ و $۲h[n-۱]$ به مقادیر غیرصفر ورودی؛ یعنی، $x[۰] = ۰/۵$ و $x[۱] = ۲$

fig3c




(ج) پاسخ کل $y[n]$ که مجموع پژواک‌ها در ب است

fig3

شکل ۲-۳: شکل‌های مثال ۲-۱

دنباله $g[k] = x[k]h[n-k]$ بدست می‌آید که در هر زمان $k$، نشان‌دهنده سهم $x[k]$ در خروجی در زمان $n$ است. نتیجه می‌گیریم که با جمع زدن همه نمونه‌ها در دنباله $g[k]$، مقدار خروجی در زمان انتخابی $n$ بدست می‌آید. بنابراین برای محاسبه $y[n]$ به ازای تمام مقادیر $n$، لازم است که این روند برای هر مقدار $n$ تکرار شود. خوشبختانه تغییر مقدار $n$ تعبیر ترسیمی بسیار ساده‌ای برای دو سیگنال $x[k]$ و $h[n-k]$، به عنوان توابعی از $k$، دارد [۱]. روش محاسبه جمع کانولوشن شامل مراحل زیر است [۲]:

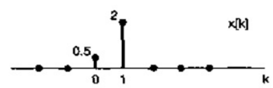
(۱) ابتدا تغییر متغیر $n$ به $k$ داده تا $x[k]$ و $h[k]$ بدست آیند.

(۲) یکی از دو سیگنال را ثابت نگه داشته و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم. در این مرحله $x[k]$ و $h[-k]$ (یا $x[-k]$ و $h[k]$) بدست می‌آیند.

(۳) سیگنال معکوس شده را به اندازه $|n|$ به سمت راست به ازای $n > ۰$ و به سمت چپ به ازای $n < ۰$ شیفت داده تا سیگنال‌های $x[k]$ و $h[n-k]$ (یا $x[n-k]$ و $h[k]$) حاصل شوند.

(۴) $n$ را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر داده و با محاسبه مجموع حاصل‌ضرب $x[k]h[n-k]$ (یا $h[k]x[n-k]$) مقدار $y[n]$ را به ازا تمام مقادیر $n$ بدست می‌آوریم.

ex22- **مثال ۲-۲** اکنون بار دیگر مساله کانولوشنی را که در مثال ۲-۱ با آن مواجه شدیم، در نظر بگیرید. دنباله $x[n]$ در شکل ۲-۴(الف) آمده و دنباله $h[n-k]$، برای $n$ ثابت و به عنوان تابعی از $k$، به ازای چند مقدار مختلف $n$ در شکل ۲-۴(ب) نشان داده شده است. در ترسیم این دنباله‌ها از این واقعیت استفاده شده که $h[n-k]$ (به عنوان تابعی از $k$ و با $n$ ثابت) نسخه معکوس شده در زمان و انتقال یافته از پاسخ ضربه $h[k]$ است. به خصوص با افزایش $k$، آرگومان $n-k$ کاهش می‌یابد که بیان کننده لزوم تشکیل یک وارون‌سازی زمانی از $h[k]$ است. پس از دانستن این نکته، برای ترسیم سیگنال $h[n-k]$ فقط لازم است که مقدار آن به ازای مقدار خاصی از $k$ تعیین شود. برای مثال، آرگومان $n-k$ به ازای $n=k$ برابر صفر خواهد بود. بنابراین اگر سیگنال $h[-k]$ را رسم کنیم، سیگنال $h[n-k]$ را می‌توانیم به سادگی با انتقال به راست (به اندازه $n$) در صورت مثبت بودن $n$، یا انتقال به چپ در صورت منفی بودن $n$، بدست آوریم. برای این مثال، نتیجه به ازای مقادیر $n<۰$، $n=۰,۱,۲,۳$ و $n>۳$ در شکل ۲-۴(ب) نشان داده شده است [۱].

fig4a



(الف) سیگنال $x[n]$

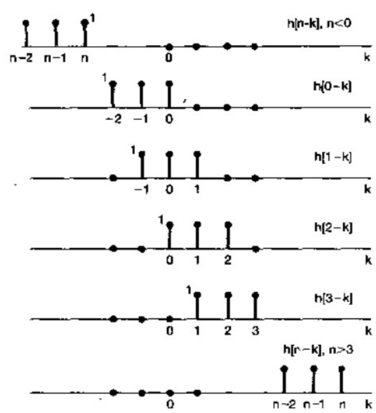



fig4b
(ب) سیگنال $h[n-k]$ (به عنوان تابعی از $k$ با $n$ ثابت) برای چند مقدار $n$

fig4
شکل ۲-۴: تعبیر معادله (۲-۶) برای سیگنال‌های $h[n]$ و $x[n]$ در شکل ۲-۳(الف)

با ترسیم $x[k]$ و $h[n-k]$ به ازای هر مقدار خاص $n$، این دو سیگنال را در هم ضرب کرده و روی تمام مقادیر $k$ جمع می‌زنیم. در این مثال، به ازای $n<۰$، از شکل ۲-۴ ملاحظه می‌کنیم که برای تمام مقادیر

$k$، $x[k]h[n-k]=۰$ است، زیرا مقادیر غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ همپوشانی ندارند. در نتیجه برای $n<۰$، $y[n]=۰$ است. به ازای $n=۰$، چون حاصل‌ضرب دنباله $x[k]$ و دنباله $h[۰-k]$ فقط یک نمونه غیرصفر با مقدار ۰/۵ دارد، نتیجه می‌گیریم که [۱]:

$$y[۰]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[۰-k]=۰/۵ \qquad (۲-۹)$$

حاصل‌ضرب دنباله $x[k]$ و دنباله $h[۱-k]$ دارای دو نمونه غیرصفر است که می‌توان آن‌ها را جمع کرده و بدست آورد:

$$y[۱]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[۱-k]=۰/۵+۲=۲/۵ \qquad (۲-۱۰)$$

به طور مشابه داریم:

$$y[۲]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[۲-k]=۰/۵+۲=۲/۵ \qquad (۲-۱۱)$$

و

$$y[۳]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[۳-k]=۲ \qquad (۲-۱۲)$$

در نهایت برای $n>۳$، حاصل‌ضرب $x[k]h[n-k]$ برای تمام مقادیر $k$ برابر صفر است که از اینجا نتیجه می‌شود که برای $n>۳$، $y[n]=۰$ است. مقادیر خروجی حاصل، با آن چه که در مثال ۲-۱ بدست آمده مطابقت دارد.

ex23- **مثال ۲-۳** ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه واحد $h[n]$ را که به صورت زیر داده شده‌اند، در نظر بگیرید [۱]:

$$x[n]=\alpha^n u[n],$$

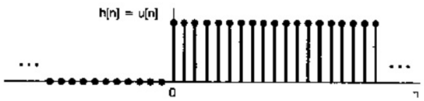
$$h[n]=u[n],$$

که $۰<\alpha<۱$ است. این سیگنال‌ها در شکل ۲-۵ رسم شده‌اند. همچنین برای کمک به تجسم و محاسبه کانولوشن این دو سیگنال، در شکل ۲-۶ سیگنال $x[k]$ و به دنبال آن $h[-k]$، $h[-۱-k]$ و $h[۱-k]$ (یعنی، $h[n-k]$ به ازای $n=۰,-۱,+۱$) و در نهایت $h[n-k]$ به ازای یک مقدار مثبت دلخواه $n$ و یک مقدار منفی دلخواه $n$ ترسیم شده‌اند. از روی این شکل متوجه می‌شویم که برای $n<۰$ بین نقاط غیرصفر $x[k]$ و $h[n-k]$ هیچ همپوشانی‌ای وجود ندارد. بنابراین به ازای $n<۰$ و برای تمام مقادیر $k$، $x[k]h[n-k]=۰$ است و از این رو از معادله (۲-۶) ملاحظه می‌کنیم که برای $n<۰$، $y[n]=۰$ است. برای $n\geqslant۰$ داریم:

fig5a



(الف) سیگنال $x[n]$

fig5b



(ب) سیگنال $h[n]$

fig5
شکل ۲-۵: سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n]$ برای مثال ۲-۳

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k & ۰ \leqslant k \leqslant n \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین برای $n \geqslant ۰$،

$$y[n] = \sum_{k=۰}^{n} \alpha^k$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$y[n] = \sum_{k=۰}^{n} \alpha^k = \frac{۱-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha}, \quad n \geqslant ۰ \quad \text{برای} \qquad (۱۳-۲)$$ eq213-

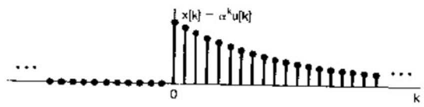
بنابراین برای تمام $n$ها داریم:

$$y[n] = \left(\frac{۱-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha}\right)u[n]$$

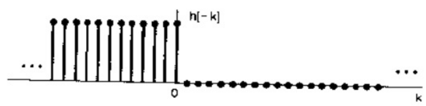
سیگنال $y[n]$ در شکل ۲-۷ ترسیم شده است.

گاهی اوقات عمل کانولوشن با عبارت لغزاندن[1] دنباله $h[n-k]$ برروی $x[k]$ توصیف می‌شود. برای مثال فرض کنید که $y[n]$ را به ازای مقدار معینی از $n$، مثلا $n = n_۰$، محاسبه کرده‌ایم. یعنی، سیگنال $h[n_۰ - k]$ را ترسیم کرده، آن را در سیگنال $x[k]$ ضرب و حاصل را روی تمام مقادیر $k$ جمع کرده‌ایم. برای محاسبه $y[n]$ در مقدار بعدی $n$ -یعنی $n = n_۰ + ۱$- لازم است که سیگنال $h[(n_۰+۱)-k]$ را رسم کنیم. اما این کار را می‌توان با در نظر گرفتن سیگنال $h[n_۰ - k]$ و انتقال آن را به راست به اندازه یک نمونه، به سادگی

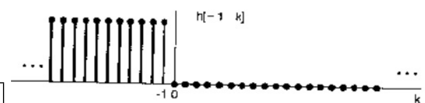
[1] Sliding

fig6a


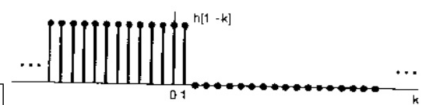

(الف) سیگنال $x[k]$

fig6b


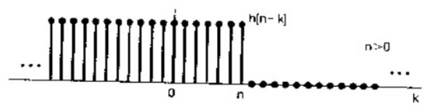

(ب) سیگنال $h[-k]$

fig6c


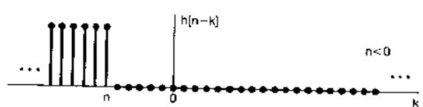

(ج) سیگنال $h[-۱-k]$

fig6d



(د) سیگنال $h[۱-k]$

fig6e



(ه) سیگنال $h[n-k]$

fig6f



(و) سیگنال $h[n-k]$

fig6 شکل ۲-۶: تعبیر ترسیمی محاسبه جمع کانولوشن برای مثال ۲-۳

انجام داد. برای مقادیر متوالی $n$ این فرآیند انتقال $h[n-k]$ به راست به اندازه یک نمونه، ضرب در $x[k]$ و جمع زدن نتیجه روی $k$ را ادامه می‌دهیم [۱].

ex24- **مثال ۲-۴** به عنوان مثالی دیگر، دو دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n] = \begin{cases} ۱ & ۰ \leqslant n \leqslant ۴ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

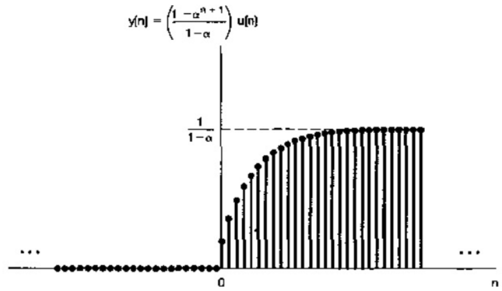



fig7 شکل ۲-۷: خروجی در مثال ۲-۳

و

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & ۰ \leqslant n \leqslant ۶ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این سیگنال‌ها در شکل ۲-۸ به ازای یک مقدار مثبت $\alpha > ۱$ ترسیم شده‌اند. به منظور محاسبه کانولوشن دو سیگنال مناسب است که پنج بازه مجزا برای $n$ در نظر گرفته شود. این کار در شکل انجام شده است.

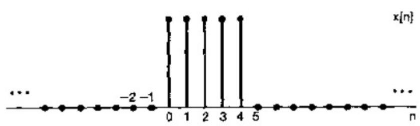



fig8a (الف) سیگنال $x[n]$

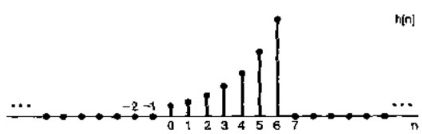


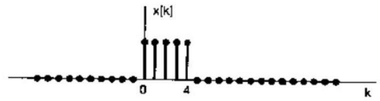

fig8b (ب) سیگنال $h[n]$

fig8 شکل ۲-۸: سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n]$ برای مثال ۲-۴

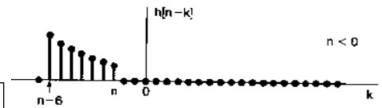
**بازه اول:** به ازای $n < ۰$، بین قسمت‌های غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ هیچ همپوشانی‌ای وجود ندارد و در نتیجه $y[n] = ۰$ است.

**بازه دوم:** به ازای $۰ \leqslant n \leqslant ۴$.

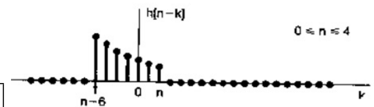
$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & ۰ \leqslant k \leqslant n \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

fig9a


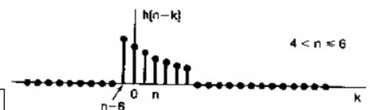
(الف) سیگنال $x[k]$

fig9b


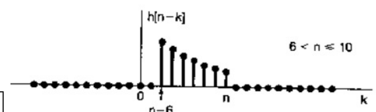
(ب) سیگنال $h[n-k]$

fig9c


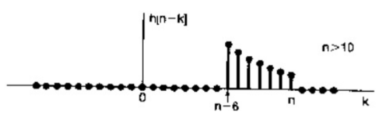
(ج) سیگنال $h[n-k]$

fig9d


(د) سیگنال $h[n-k]$

fig9e


(ه) سیگنال $h[n-k]$

fig9f


(و) سیگنال $h[n-k]$

شکل ۲-۹: تعبیر ترسیمی محاسبه جمع کانولوشن برای مثال ۲-۴ fig9

بنابراین در این بازه داریم:

$$y[n] = \sum_{k=۰}^{n} \alpha^{n-k} \qquad (۱۴-۲)$$ eq214-

این مجموع را می‌توان با استفاده از فرمول (۲-۱۳) محاسبه کرد. بویژه، با تغییر متغیر مجموع در معادله

(۲-۱۴) از $k$ به $r = n - k$ داریم:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{n} \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

**بازه سوم:** به ازای $n > 4$ و $n - 6 \leqslant 0$ (یعنی $4 < n \leqslant 6$) داریم:

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leqslant k \leqslant 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین در این بازه داریم:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} \qquad (۲-۱۵)$$

eq215-

یک بار دیگر می‌توان برای محاسبه معادله (۲-۱۵) از فرمول مجموع هندسی در معادله (۲-۱۳) استفاده کرد. بویژه با فاکتورگیری ضریب ثابت $\alpha^n$ از مجموع در معادله (۲-۱۵) خواهیم داشت:

$$y[n] = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \qquad (۲-۱۶)$$

**بازه چهارم:** به ازای $n > 6$ و $n - 6 \leqslant 4$ (یعنی، برای $6 < n \leqslant 10$)، داریم:

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & n-6 \leqslant k \leqslant 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چنان که:

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}$$

برای محاسبه این مجموع، بار دیگر می‌توانیم از معادله (۲-۱۳) استفاده کنیم. با قرار دادن $r = k - n + 6$ خواهیم داشت:

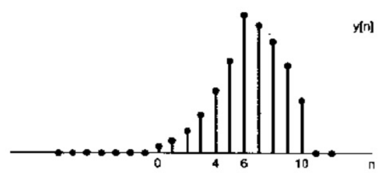
$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

**بازه پنجم:** به ازای $n - 6 > 4$، یا به طور معادل $n > 10$، بین قسمت‌های غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ هیچ همپوشانی‌ای وجود ندارد و از این رو داریم: $y[n] = 0$.

پس بطور خلاصه داریم:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \leqslant n \leqslant 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4 < n \leqslant 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6 < n \leqslant 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

که در شکل ۲-۱۰ رسم شده است [۱].




شکل ۲-۱۰: خروجی در مثال ۲-۴

fig10

ex25- **مثال ۲-۵** یک سیستم LTI را با ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه واحد $h[n]$ که به صورت زیر مشخص شده‌اند، در نظر بگیرید [۱]:

$$x[n] = 2^n u[-n] \qquad (۲-۱۷)$$

$$h[n] = u[-n] \qquad (۲-۱۸)$$

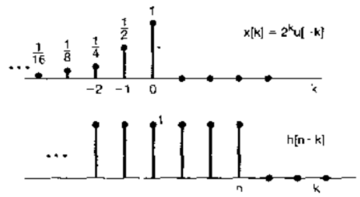
دنباله‌های $x[k]$ و $h[n-k]$ به عنوان تابعی از $k$ در شکل ۲-۱۱(الف) رسم شده‌اند. توجه کنید که $x[k]$ برای $k > 0$ برابر صفر و $h[n-k]$ برای $k > n$ برابر صفر است. همچنین ملاحظه می‌کنیم که صرف‌نظر از مقدار $n$ دنباله $x[k]h[n-k]$ همواره دارای نمونه‌های غیرصفری در طول محور $k$ است. اگر $n \geqslant 0$ باشد، $x[k]h[n-k]$ نمونه‌های غیرصفری در بازه $k \leqslant 0$ دارد. نتیجه می‌شود که برای $n \geqslant 0$ داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \qquad (۲-۱۹)$$ eq219-

برای محاسبه مجموع بی‌پایان در معادله (۲-۱۹) می‌توان از فرمول جمع بی‌پایان استفاده کرد:

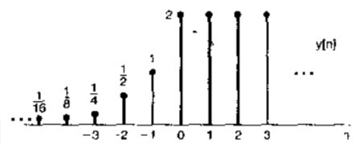
$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1 \qquad (۲-۲۰)$$ eq220-

fig11a




(الف) سیگنال‌های $x[n]$ و $h[n-k]$

fig11b




(ب) سیگنال $y[n]$

fig11

شکل ۲-۱۱: مثال ۲-۵

با تغییر متغیر مجموع در معادله (۲-۱۹) از $k$ به $r=-k$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^r = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad (۲-۲۱)$$

بنابراین برای $n \geqslant 0$، $y[n]$ مقدار ثابت ۲ را اختیار می‌کند.

اگر $n<0$ باشد، $x[k]h[n-k]$ به ازای $k \leqslant n$ دارای نمونه‌های غیرصفر است. نتیجه می‌شود که برای $n<0$ داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k \qquad (۲-۲۲)$$ eq222-

با انجام تغییر متغیر $l=-k$ و سپس $m=l+n$، بار دیگر می‌توان از فرمول مجموع بی‌پایان در معادله (۲-۲۰) برای محاسبه مجموع در معادله (۲-۲۲) استفاده کرد. نتیجه برای $n<0$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty}(\frac{1}{2})^l = \sum_{m=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{m-n} = (\frac{1}{2})^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^m = 2^n \times 2 = 2^{n+1} \qquad (۲-۲۳)$$

دنباله کامل $y[n]$ در شکل ۲-۱۱(ب) رسم شده است.

# مراجع

[۱] آلن اپنهایم، آلن ویلسکی، حمید نواب. سیگنال‌ها و سیستم‌ها. ترجمه‌ی دکتر پرویز جبه‌دار مالانی، مهندس بهمن زنج. چاپ بیستم، انتشارات دانشگاه تهران، ویرایش پنجم، ۱۳۸۴.

[۲] جزوه تجزیه و تحلیل سیستم‌ها. موسسه پارسه، ۱۳۹۰.