

باسمه تعالی

فصل چهارم : احتمال

الف : احتمال

(۱) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A).P(B) + P(A' \cup B') = 1$ آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چگونه اند. (ک ۷۹)

(۱) سازگار (۲) مستقل (۳) وابسته (۴) ناسازگار

حل:

$$P(A).P(B) + P(A' \cup B') = 1 \rightarrow P(A).P(B) = 1 - P(A' \cup B')$$

$$\rightarrow P(A).P(B) = 1 - P(A \cap B)' \rightarrow P(A).P(B) = P(A \cap B)$$

و لذا طبق تعریف پیشامد های مستقل گزینه ی ۲ درست است.

(۲) دو تاس (مکعب) متمایز را پرتاب می کنیم، با کدام احتمال هر یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست؟ (ک ۷۹)

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{18}$

حل: احتمال اینکه در یک بار پرتاب عدد مضرب ۳ ظاهر نشود برابر $\frac{4}{6}$ است. و چون پیشامد های پرتاب دو تاس مستقل از هم است،

پس احتمال ظاهر نشدن مضرب ۳ در دو بار پرتاب بصورت زیر است.

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(۳) سه تاس سالم را پرتاب می کنیم، با کدام احتمال هر یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست؟ (ک ۸۰)

(۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{19}{27}$ (۴) $\frac{2}{3}$

حل: احتمال اینکه در یک بار پرتاب عدد مضرب ۳ ظاهر نشود برابر $\frac{4}{6}$ است. و چون پیشامد های پرتاب سه تاس مستقل از هم

است، پس احتمال ظاهر نشدن مضرب ۳ در سه بار پرتاب بصورت زیر است.

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$$

(۴) در پرتاب دو تاس با هم می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فردند؟ (ک ۸۳)

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \qquad \frac{1}{5} \text{ (۳)} \qquad \frac{2}{9} \text{ (۲)} \qquad \frac{4}{15} \text{ (۱)}$$

حل: اگر تعریف کنیم:

$$A = \text{جمع دو عدد رو شده کمتر از } 10$$

$$B = \text{هر دو عدد رو شده فرد باشند.}$$

$$A \cap B = \text{هر دو عدد رو شده فرد و جمع کمتر از } 10$$

در نتیجه

$$A' = \{(6, 6), (6, 5), (6, 4), (5, 6), (5, 5), (4, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3)\}$$

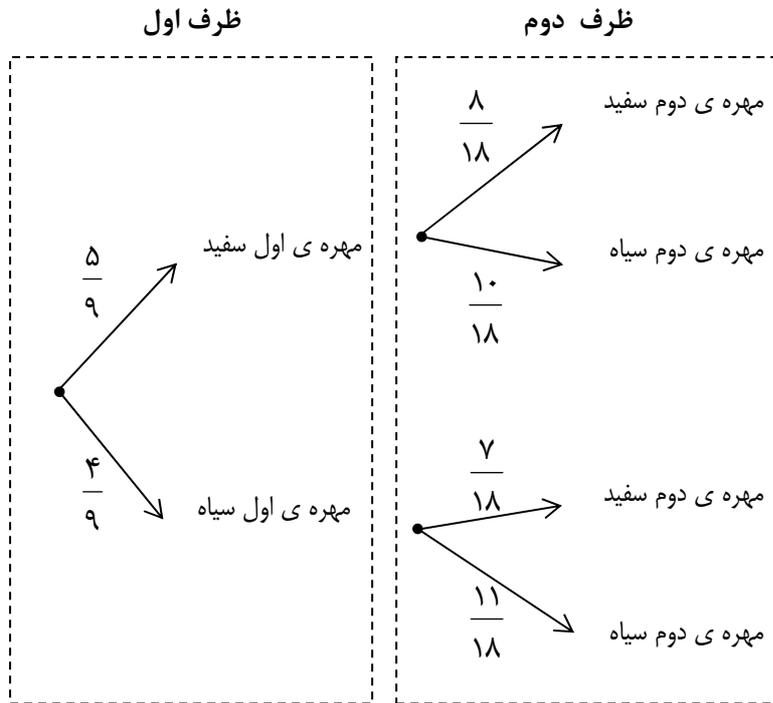
$$\begin{cases} n(A) = 36 - 6 = 30 \\ n(A \cap B) = 8 \end{cases} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

(۵) دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و

بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (ک ۸۴)

$$\frac{41}{81} \text{ (۴)} \qquad \frac{34}{81} \text{ (۳)} \qquad \frac{11}{27} \text{ (۲)} \qquad \frac{8}{27} \text{ (۱)}$$

حل: روش اول: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده سفید باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{34}{81}$$

روش دوم: ابتدا تعریف می کنیم که:

A : مهره ی اول سفید B : مهره ی اول سیاه C : مهره ی دوم سفید

$$P(C) = P(A).P(C|A) + P(B).P(C|B)$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{40 + 28}{9 \times 18} = \frac{34}{81}$$

(۶) دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، با چشم بسته یکی از این

دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن بیرون می آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد، کدام است. (ک ۸۱)

$$\frac{35}{70} \quad (۴)$$

$$\frac{37}{70} \quad (۳)$$

$$\frac{18}{35} \quad (۲)$$

$$\frac{17}{35} \quad (۱)$$

حل: اولاً با احتمال مساوی یکی از دو ظرف همانند را به تصادف اختیار می کنیم.



$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

یعنی فضای نمونه ای به دو پیشامد هم شانس افراز شده است و $P(A)$ احتمال سفید بودن مهره ، با فرمول احتمال کلی محاسبه می شود.

$$P(A) = P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} = \frac{18}{35}$$

(۷) در ظرفی شش مهره با شماره های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۱ ریخته شده اند. دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند. (کنکور ۱۵)

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{5} \quad (2) \quad \frac{3}{5} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

حل : پیشامد تصادفی این آزمایش به شکل زیر است.

$$E = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\} \rightarrow n(E) = 5$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(۸) شش گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها بر می داریم. با کدام احتمال جمع عدد این دو گوی کمتر از ۶ است ؟ (کنکور ۱۳۸۶)

$$\frac{4}{45} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{5}{12} \quad (4)$$

حل : پیشامد تصادفی این آزمایش به شکل زیر است.

$$E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\} \rightarrow n(E) = 4$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{15}$$

۹) یک تاس همگن را انداخته ایم، برآمد حاصل مضرب ۳ نیست، احتمال آنکه شماره ی ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۶)

$$\frac{1}{6} \quad (1) \qquad \frac{1}{5} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \quad (4)$$

حل : پیشامد تصادفی این آزمایش به شکل زیر است.

$$E = \{2\} \rightarrow n(E) = 1$$

$$S = \{1,2,4,5\} \rightarrow n(S) = 4$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

۱۰) هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در یکی از ۶ خانه ی هم ردیف به تصادف قرار می دهیم، با کدام احتمال این ارقام در خانه

های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟ (کنکور ۱۳۸۷)

$$\frac{1}{5} \quad (1) \qquad \frac{1}{10} \quad (2) \qquad \frac{1}{15} \quad (3) \qquad \frac{2}{15} \quad (4)$$

حل : دو رقم زوج ۴ و ۲ هستند، برای اینکه این دو عدد در ۵ خانه ی متوالی باشند، داریم:

$$n(E) = 2(2 \times 4!) = 96$$

$$n(S) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{96}{720} = \frac{2}{15}$$

(۱۱) اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟ (کنکور ۱۳۸۸)

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{4}{9} \quad (2) \quad \frac{2}{5} \quad (3) \quad \frac{5}{9} \quad (4)$$

حل: جمع دو کارت وقتی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. پس:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3 + 3}{15} = \frac{2}{5}$$

(۱۲) در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ موجود است. در جعبه ی اول ۴ عدد و در جعبه ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته در جعبه ی جدید قرار می دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه ی جدید معیوب است؟ (کنکور ۱۳۸۹)

$$\frac{17}{105} \quad (1) \quad \frac{8}{35} \quad (2) \quad \frac{6}{35} \quad (3) \quad \frac{19}{105} \quad (4)$$

حل:

$$P = \frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{12} \times \frac{3}{15} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{105}$$

(۱۳) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» بیاید، تاس را میریزیم. اگر «پشت» بیاید سه سکه ی دیگر را با هم می ریزیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود، کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۹)

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{11}{16} \quad (2) \quad \frac{5}{8} \quad (3) \quad \frac{9}{16} \quad (4)$$

حل:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{6}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

ب: توزیع های گسسته ی احتمال

(۱) توزیع احتمال متغیر تصادفی X متناظر با Y برآمد به صورت زیر است. عدد a کدام است؟ (ک۸۱)

$$\begin{cases} P(X = i) = \frac{1}{i^2 + i} & 1 \leq i \leq 5 \\ P(X = j) = \frac{j-4}{a} & j = 6, 7 \end{cases}$$

۱۸ (۴) ۲۰ (۳) ۲۴ (۲) ۳۰ (۱)

حل:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 7) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1 \rightarrow a = 30$$

(۲) در پرتاب دو تاس با هم، اگر متغیر تصادفی X برابر مجموع دو عدد ظاهر شده با تابع احتمال زیر باشد، عدد a کدام است؟ (ک۷۸)

$$P(X = x) = a - \frac{|x - 7|}{36}$$

$\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۱)

حل:

$$P(X = x) = a - \frac{|x - 7|}{36} : x = 2, 3, 4, \dots, 12$$

$$P(X = 2) = a - \frac{|2 - 7|}{36} = a - \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = a - \frac{|7 - 7|}{36} = a$$

$$P(X = 3) = a - \frac{|3 - 7|}{36} = a - \frac{4}{36}$$

$$P(X = 8) = a - \frac{|8 - 7|}{36} = a - \frac{1}{36}$$

$$P(X = 4) = a - \frac{|4 - 7|}{36} = a - \frac{3}{36}$$

$$P(X = 9) = a - \frac{|9 - 7|}{36} = a - \frac{2}{36}$$

$$P(X = 5) = a - \frac{|5 - 7|}{36} = a - \frac{2}{36}$$

$$P(X = 10) = a - \frac{|10 - 7|}{36} = a - \frac{3}{36}$$

$$P(X = 6) = a - \frac{|6 - 7|}{36} = a - \frac{1}{36}$$

$$P(X = 11) = a - \frac{|11 - 7|}{36} = a - \frac{4}{36}$$

$$P(X = 12) = a - \frac{|12 - 7|}{36} = a - \frac{5}{36}$$

$$\sum_{i=1}^{12} P(X = x) = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{12} \left(a - \frac{|x-7|}{36} \right) = 1 \rightarrow 11a - 2 \frac{(1+2+3+4+5)}{36} = 1 \rightarrow a = \frac{1}{6}$$

۳) با کدام مقدار a و با کدام حوزه ی مقادیر X تابع $p(X = i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i$ یک تابع احتمال اولین موفقیت در امتحان i ام است. (ک ۸۴)

(۱) $a = 1$ ، نا شمارا و نامتناهی

(۲) $a = 1$ ، نا شمارا و متناهی

(۳) $a = 2$ ، شمارا و نامتناهی

(۴) $a = 2$ ، شمارا و متناهی

حل: واضح است که حوزه ی مقادیر X فقط اعداد طبیعی می تواند باشد.

$X : 1, 2, 3, \dots$

شمارا و نامتناهی

$$p(X = i) = a\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} p(X = i) = 1 \xrightarrow{\text{سری هندسی}} \sum_{i=1}^{+\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 \rightarrow a \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \rightarrow a = 2$$

۴) به ازای کدام مقدار a تابع زیر یک تابع احتمال است؟ (ک ۷۷)

$$P(X = x) = ap(1 - 2p)^{x-5} \quad : \quad x = 5, 6, 7, \dots$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad 1 \quad (۳) \qquad 4 \quad (۲) \qquad 2 \quad (۱)$$

حل:

$$p(X = i) = ap(1 - 2p)^{x-5} \rightarrow \begin{cases} p > 0 \\ 1 - 2p > 0 \rightarrow p < \frac{1}{2} \rightarrow 0 < p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} p(X = i) = 1 \xrightarrow{\text{سری هندسی}} \sum_{i=1}^{+\infty} ap(1 - 2p)^{x-5} = 1 \rightarrow ap \times \frac{1}{1 - (1 - 2p)} = 1 \rightarrow a = 2$$

۵) تابع احتمال متغیر تصادفی X با حوزه ی مقادیر اعداد طبیعی به صورت $P(X = i) = \frac{1}{i^2 + i}$ است.

مقادیر $P(10 \leq X < 100)$ کدام است؟ (کنکور ۸۵)

- (۱) 0.09 (۲) 0.092 (۳) 0.099 (۴) 0.11

حل :

$$P(X = i) = \frac{1}{i^2 + i} ; \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{99} P(X = i) &= \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i^2 + i} = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0.99 \end{aligned}$$

۶) توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}$; $i = 1, 2, 3, \dots$ تعریف شده است. $P(X \geq 5)$ کدام

است؟ (کنکور ۸۸)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{3}$

حل :

$$P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sum_{i=5}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=5}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \dots = \frac{1}{5}$$

موفق باشید.

جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی