

حل المسائل ریاضی هشتم

کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

با تشکر از سایت خانه ریاضی برای

تهیه و تنظیم این فایل

توجه : کانال گام به گام درسی در

سایر پیام رسان ها هیچ گونه

فعالیتی ندارد

قرارداد: حرکت به سمت راست، با علامت مثبت و حرکت به سمت

چپ، با علامت منفی نشان می دهیم

حرکت صفر

چنانچه ابتدا و انتهای حرکت یک نقطه باشد چاپی وجود ندارد و در واقع حرکت صفر است

یادآوری عددهای صحیح

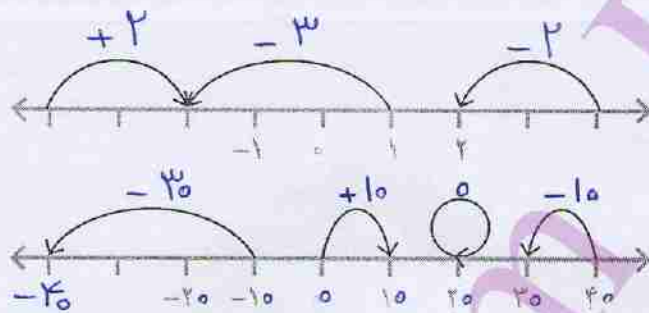
فعالیت



با انجام دادن تمرین های زیر، آنچه را در سال گذشته درباره عددهای صحیح یاد گرفته اید،

مرور کنید.

۱- برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.



۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد صحیح	۶	-۲	$-(-۷)$	۰	۸	-۵	۳
قرینه آن	-۶	+۲	-۷	۰	-۸	۵	-۳

۳- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$۵ - (-۹) = ۵ + ۹ = ۱۴$$

$$-۱۶ + ۱۲ = -۴ \quad ۸ - ۱۲ = -۴ \quad -۳ + ۹ = +۶ \quad -۴ - ۸ = -۱۲$$

$$-۳ \times ۷ = -۲۱ \quad -۸ \div (-۴) = +۲ \quad -۱۲ \div ۲ = -۶ \quad -۴ \times (-۳) = +۱۲$$

۴- حاصل عبارت ها را با توجه به ترتیب انجام عملیات به دست آورید.

$$-۸ - ۳ \times ۵ = -۸ - ۱۵ = -۲۳ \quad -۱۶ \div ۲ \times ۳ - ۴ = -۸ \times ۳ - ۴ = -۲۴ - ۴ = -۲۸$$

$$۱ - ۲ \times (۱ - (۸ - ۹)) = ۱ - ۲ \times (۱ + ۱) = ۱ - ۴ = -۳ \quad -۴ \div ۴ - ۴ \times ۳ = (-۴ \div ۴) - (۴ \times ۳) = -۱ - ۱۲ = -۱۳$$

الویت ها به ترتیب عبارت اندازه: ۱- پرانتز و کروشه (داخلی ترین پرانتز) ۲- توان و ریشه گیری

۳- ضرب و تقسیم ۴- جمع و تفریق

نکته: اگر در یک عبارت ضرب و تقسیم آمده باشد الویت از سمت چپ می باشد

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 29 \\ \hline 72 \end{array} \xrightarrow{\text{قرینه}} \begin{array}{r} -43 \\ -29 \\ \hline -72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 37 \\ \hline 35 \end{array} \xrightarrow{\text{قرینه}} \begin{array}{r} -72 \\ + 37 \\ \hline -35 \end{array}$$

$$43 + 29 - 37 = 72 - 37 = 35 \quad \xrightarrow{\text{قرینه}} \quad -43 - 29 + 37 = -35$$

کلامی

۵- عبارت $43 + 29 - 37$ را چهار دانش آموز محاسبه کرده اند. راه حل هر یک را توضیح دهید.

$$-43 + 37 - 29 = -43 - 29 + 37 = -72 + 37 = -35$$

راه حل علی:

جابجایی در این حالت مشکل است

$$-72 + 37 = -35 \quad \text{③} \quad -43 - 29 = -72 \quad \text{④} \quad 37 - 29 = 37 + (-29) = -29 + 37 \quad \text{①}$$

توضیح:

احتمال استباه خیلی زیاد است

$$-43 + 37 - 29 = -43 + 8 = -35$$

راه حل مجتبی:

$$-43 + 8 = -35 \quad \text{②} \quad +37 - 29 = +8 \quad \text{①}$$

توضیح:

$$-43 + 37 - 29 = -6 - 29 = -35$$

راه حل مرتضی:

$$-4 - 29 = -35 \quad \text{⑤} \quad -43 + 37 = -6 \quad \text{①}$$

توضیح:

ی	د
۲	۴
۷	۳
۹	۲

راه حل مصطفی: ۱- بسط اعداد ۳ حاصل یلی ها $-40 - 3$

توضیح: و ده تایی ها را جداگانه محاسبه می کنیم $+30 + 7$

$$-40 - 3 = -43$$

۳- جواب نهایی را درست می آوریم $-30 - 5 = -35$

شما کدام راه حل را می پسندید؟ چرا؟ *به عهده می دانش آموز*

آیا راه حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارید؟ *بالای صفحه*



کار در کلاس

۱- حاصل عبارت های زیر را با روش مورد نظر خود به دست آورید.

$$-(17) + 14 - 13 - 19 = 31 - 32 = -1$$

$$+7 - (-7) - 2 + (-9) = 7 - 11 = -4$$

$$-18 - (-4) - (-19) = -18 + 4 + 19 = 4 + 1 = 5$$

$$-24 - 97 + 100 - 23 = -24 - 120 + 100 = -24 - 20 = -44$$

۲- حاصل عبارت $10 + 3 - 7 - 2$ را به دو روش حساب کرده ایم. کدام درست و کدام نادرست

$$10 + 3 - 7 - 2 = 13 - 5 = 8 \quad \text{نادرست}$$

$$10 + 3 - 7 - 2 = 13 - 9 = 4 \quad \text{درست}$$

$$\begin{array}{l} -7 - 2 \neq -5 \\ -7 - 2 = -9 \end{array}$$

است؟ توضیح دهید.

در محاسبات حتماً به علامت عدد دقت شود

۳- قبل از انجام دادن محاسبات، در عبارت های داده شده خوب دقت کنید و با دسته بندی مناسب، راه ساده ای پیدا کنید. راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید و آن گاه با ماشین حساب درستی پاسخ های خود را بررسی کنید.

$$-40 + 25 + 80 - 17 - 40 = 35 - 17 = 18$$

$$-22 - 21 + 12 + 3 \times 7 = -32 + 12 = -20$$

$$-40 + 80 - 40 = 0$$

$$-21 + 21 = 0$$

اگر طرح سوال را آدم با هوشش فرض کنیم، هیچ وقت حاصل ضرب این عدد را از زمانی خواهد

پس باید دنبال نکته‌ای که در سوال گفته است باشیم

اگر دقیق به عبارت نگاه کنیم در این عبارت جایی $1-1=0$ را داریم حاصل ضرب صفر در هر عددی برابر صفر می‌شود **نکته!**

۴- یکی از ریاضی دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری

$$1+2+3+\dots+98+99+100=$$



محاسبه کرد. نصف تعداد → چند جفت عدد با هم جمع شده‌اند؟ ۵۰ جفت

حاصل جمع هر جفت عدد چند است؟ ۱۰۱ ← حاصل جمع اولی و آخری

حاصل عبارت چند می‌شود؟ $50 \times 101 = 5050$

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. روش کار را توضیح دهید.

$$-2+4-6+8-10+12 = (-2-10+12) + (4+8-6) = 0 + 6 = 6$$

$$(10-1)(9-1)(8-1)\dots(-9-1)(-10-1) = 0$$

بالای صفر ↑

۶- ابتدا در مربع‌های خالی علامت‌های «+» یا «-» بگذارید. سپس، عبارت داده شده را

محاسبه کنید و همه عددهای صحیح ممکن را که به دست می‌آیند، از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-3 \square (+7) \square 2$$

$$-3-7-2 = -12$$

$$-3-7+2 = -8$$

$$-3+7+2 = 6 \quad \text{و} \quad -3+7-2 = 2$$

فعالیت



۲، ۴، -۸، و -۱۲

در جاهای خالی علامت «+» یا «-» را طوری قرار دهید که حاصل عبارت زیر، بزرگ‌ترین

مقدار ممکن شود. **نکته!** علامت‌ها را طوری انتخاب می‌کنیم که اعداد بعد از عدداول همگی مثبت باشند

$$-5 \square (-6) \square (+3) \square (-9) = -5 + 6 + 3 + 9 = 13$$

در زیر، چهار پاسخ به این مسئله داده شده که فقط یکی از آنها درست است. آن را مشخص

کنید و دلیل نادرست بودن پاسخ‌های دیگر را هم توضیح دهید.

پاسخ اول: $-5 \square (+) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (+) \square (-9) = -5-6+3-9 = -11-6 = -17$

پاسخ دوم: $-5 \square (+) \square (-6) \square (-) \square (+3) \square (+) \square (-9) = -5-6-3-9 = -23$

پاسخ سوم: $-5 \square (-) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (-) \square (-9) = -5+6+3+9 = 1+12 = 13$ ✓

پاسخ چهارم: $-5 \square (+) \square (-6) \square (+) \square (+3) \square (-) \square (-9) = -5-6+3+9 = -11+12 = 1$

نکته! این سوال در مجموع ۱ جواب دارد

$$-5 + (-6) - (+3) - (-9) = -5 - 6 - 3 + 9 = -5$$

$$-5 - (-6) + (+3) + (-9) = -5 + 6 + 3 - 9 = -5$$

$$-5 - (-6) - (+3) - (-9) = -5 + 6 - 3 + 9 = +7$$

$$-5 - (-6) - (+3) + (-9) = -5 + 6 - 3 - 9 = -11$$

سرگرمی: اعداد ۸- الی ۷ را طوری در مربع 4×4 قرار دهید که حاصل جمع هر ردیف و هر ستون و هر قطر مساوی باشد

-۸	۶	۵	-۵	= -۲
۳	-۳	-۲	۰	= -۲
-۱	۱	۲	-۴	= -۲
۴	-۶	-۷	۷	= -۲

مربع و قطر 4×4



تمرین

- ۱- عددهای صحیح بین ۳ و ۵- را بنویسید.
- * عددهای صحیح کوچکتر از ۴- را بنویسید.
- * عددهای صحیح بزرگتر از ۳- را بنویسید.
- ۲- مانند نمونه، جدول را کامل کنید.

عدد	+۳	۰	۵ ^۲	$\sqrt{۴}$	$\frac{۳}{۱}$	$-(-۲)$	$\frac{۲}{۳}$	۰/۷
طبیعی	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
صحیح	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-۸ - ۱۲ + ۲۲) + (۶ + ۱۴ - ۲۰) = ۲$$

$$-۸ + ۶ - ۱۲ + ۱۴ - ۲۰ + ۲۲ =$$

$$-۸ + ۷ - ۶ + ۸ - ۷ + ۶ = (-۸ + ۸) + (۷ - ۷) + (-۶ + ۶) = ۰$$

$$۱۲ - ۲۲ + ۳۲ - ۴۲ = ۱ - ۴ + ۹ - ۱۶ = -۱۰$$

$$۳ - (۲ - (۱ - ۷) - ۱) = ۳ - (۲ + ۶ - ۱) = ۳ - ۷ = -۴$$

$$۳ - ۴ \times ۵ = ۳ - ۲۰ = -۱۷$$

$$-۸ - ۴ \div ۲ = -۸ - ۲ = -۱۰$$

الویت اول یا تقسیم می باشد ←

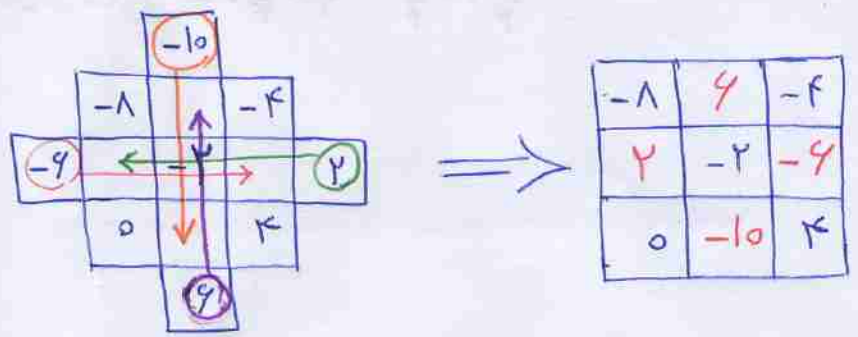
۴- هر یک از عبارت‌های زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟

- کوچک‌ترین عدد طبیعی: ۱
- بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی: -۱
- کوچک‌ترین عدد زوج طبیعی: ۲
- کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت: +۱
- بزرگ‌ترین عدد زوج طبیعی سه رقمی: ۹۹۸
- کوچک‌ترین عدد فرد طبیعی دو رقمی: ۱۱

۵- جدول زیر را کامل کنید؛ طوری که حاصل جمع عددهای هر ردیف، با مجموع عددهای هر ستون و هر قطر مساوی باشد.

-۸	۶	-۴	= -۶
۲	-۲	-۶	= -۶
۰	-۱۰	۴	= -۶
			= -۶
-۶	-۶	-۶	= -۶

مربع و قطر 3×3



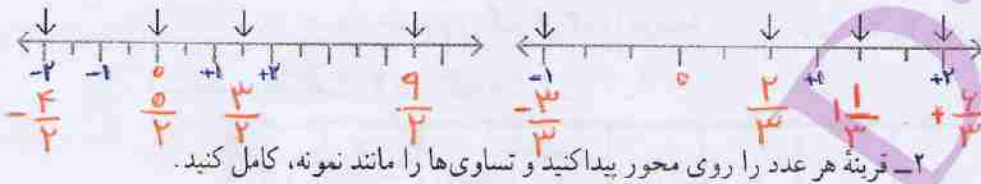
$$-2\frac{1}{3} = \frac{-2 \times 3 + 1}{3} = \frac{-6 + 1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$-2\frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad 2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

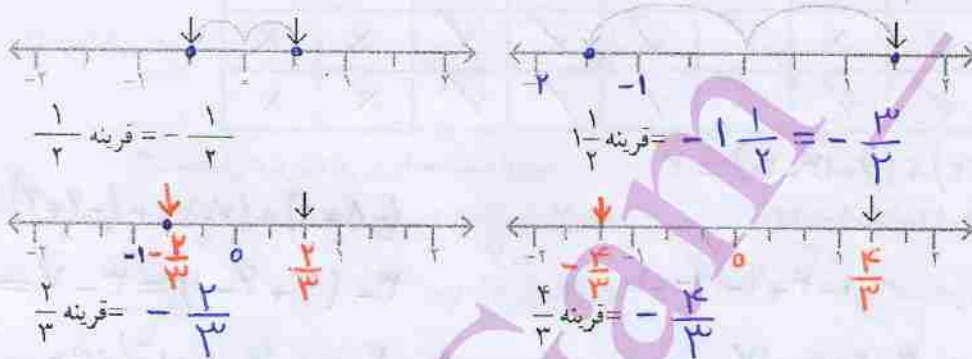
معرفی عددهای گویا



۱- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نشان می‌دهند؟



۲- قرینه هر عدد را روی محور پیدا کنید و تساوی‌ها را مانند نمونه، کامل کنید.



۳- به این ترتیب، می‌توانید قرینه همه کسرهایی که با آنها آشنا شده‌اید را بنویسید:

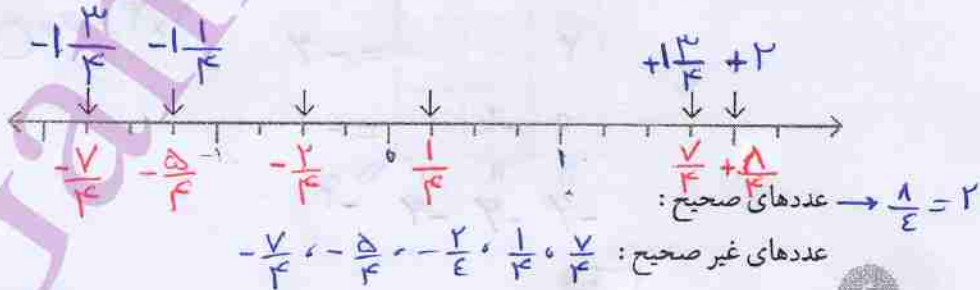
$$0 = \text{قرینه صفر} \quad 1/5 = \text{قرینه } -1/5 \quad 9/10 = \text{قرینه } -9/10$$

۴- کسرها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

$$+3\frac{1}{4} = +\frac{13}{4} \quad -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5} \quad +\frac{14}{3} = +4\frac{2}{3} \quad -2\frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

۵- نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نمایش می‌دهند؟ از این عددها،

کدام صحیح و کدام غیر صحیح‌اند؟



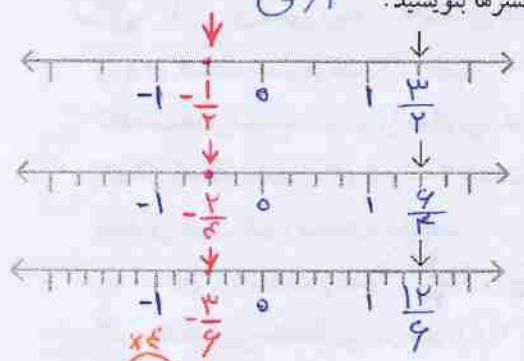
برای مقایسه ی اعداد منفر کسری بهتر است
 دانش آموزان ابتدا کسرها را هم مخرج کنند و سپس
 با توجه به صورت کسر مقایسه صورت گیرد

$$-\frac{1}{7} \square -\frac{11}{5}$$

$$-\frac{5}{35} \square > -\frac{77}{35}$$

۶- الف) نقطه های مشخص شده روی محورها چه کسرهایی را نشان می دهند؟ آیا این سه کسر

با هم مساوی اند؟ نتیجه را به صورت تساوی کسرها بنویسید. **آری**



$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{6}$$

ب) تساوی کسرهایی زیر را روی

محور نمایش دهید. $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6}$

۷- مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 28$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 15$$

کار در کلاس

۱- کسرهایی زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$(90, 124) = 18$$

$$\frac{18}{108} = -\frac{11}{1}$$

$$\frac{11}{66} = +\frac{11}{6}$$

$$\frac{90}{126} = -\frac{5}{7}$$

۲- عقربه چه عددی را نشان می دهد؟ بنویسید.



۳- به کمک محور، عددهای زیر را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست مرتب کنید.

$$-\frac{42}{70} \square -\frac{25}{70} \square -\frac{30}{70} \quad \frac{3}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, 0, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{13}{5} < -\frac{1}{7} < -\frac{3}{7} < 0 < \frac{1}{10} < \frac{3}{5} < 2$$

۴- در جای خالی علامت مناسب < یا > یا = بگذارید. توضیح در بالا

$$\frac{3}{5} \otimes 0.25 = \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{7} \otimes -\frac{11}{5} \quad -\frac{3}{6} \otimes -0.5 = -\frac{1}{2}$$

۵- هر یک از عددها را در جدول زیر در جای خود قرار دهید و جدول را کامل کنید.

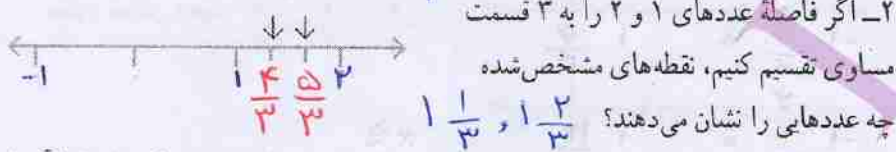
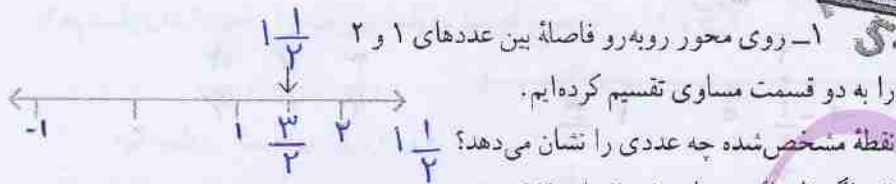
$$\frac{17}{7}, \frac{1}{15}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{25}{6}, +\frac{35}{7}, \frac{27}{10}, -\frac{31}{17}, -\frac{2}{10}$$

کوچک تر از -۳	بین -۳ و -۲	بین -۲ و -۱	بین -۱ و ۰	بین ۰ و ۱	بین ۱ و ۲	بزرگ تر از ۲
$-\frac{37}{5}$	-	$-\frac{12}{5}$	-	$\frac{1}{5}$	-	$\frac{17}{7}, \frac{35}{7}$
$-\frac{25}{6}$						$\frac{27}{10}$
$-\frac{31}{17}, -\frac{72}{10}$						

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

نکته

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots < \frac{1}{2}$$



۳- در شکل زیر، فاصله بین دو عدد ۱ و ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم اما آن را بزرگ‌تر رسم کرده‌ایم تا شما نقطه‌ها را بهتر ببینید. اکنون مانند نمونه مشخص کنید که هر نقطه چه



در تساوی زیر، عدد اعشاری $\frac{1}{2}$ را به صورت کسری نوشته‌ایم. شما هم در محور بالا

عددهای اعشاری را به صورت کسری نشان دهید.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2}$$

۴- چگونه می‌توانیم بین دو عدد ۱ و ۲، تعداد بیشتری عدد کسری بنویسیم؟ توضیح دهید.

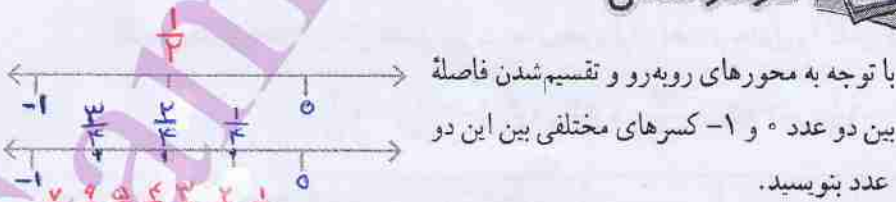
می‌توانیم آن را به هر قسمت مساوی تقسیم کنیم

۵- آیا می‌توانیم بگوییم بین دو عدد ۱ و ۲ کسرهایی بی‌شماری وجود دارد؟ آری

آیا همین نتیجه را می‌توان برای عددهای ۱- و ۲- نیز تکرار کرد؟ آری

آیا می‌توانیم به‌طور کلی نتیجه بگیریم که «بین هر دو عدد صحیح، بی‌شمار کسر وجود دارد»؟ آری

کار در کلاس



توضیح دهید چگونه می‌توانیم بین هر دو عدد کسری، کسرهایی بی‌شماری پیدا کنیم.

مقاله ①

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{6} < \frac{3}{6} \xrightarrow{\times 100} \frac{200}{600} < \frac{300}{600}$$

$$\frac{200}{600} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{300}{600}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

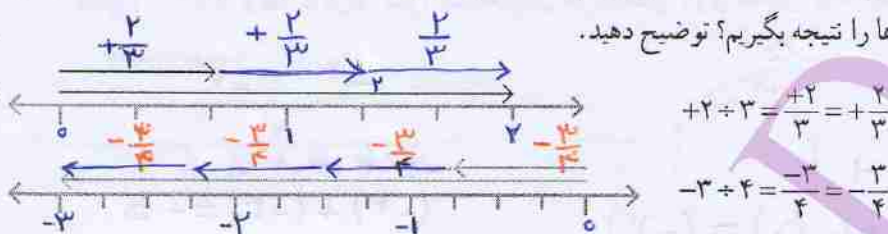
روش دوم

تقسیم فاصله بین کسرها به قسمت‌های مساوی و این کار را به ترتیب ادامه می‌دهیم.

همان طول که در شکل دوم پیدا است بردار -3 با 4 تا بردار $\frac{3}{4}$ - برابر است
 لذا خواهیم داشت $\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ بردار $\frac{3}{4}$ = بردار $-\frac{3}{4}$



۱- چگونه می توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده اند، درستی تساوی ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.



۲- با توجه به سؤال بالا و مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید.

$$\frac{-2}{3} = -2 \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{-5} = 3 \div (-5) = -(3 \div 5) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{-4}{7} = -(-4 \div 7) = -(-\frac{4}{7}) = \frac{4}{7}$$

$$\frac{-3}{-4} = -3 \div (-4) = +(3 \div 4) = +\frac{3}{4}$$

به هر عدد کسری به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$ باشد، عدد گویا می گوئیم.

تعریف اعداد گویا



۱- آیا می توان گفت هر عدد صحیح و هر عدد طبیعی نیز یک عدد گویاست؟ چرا؟

۲- در هر یک از حالت های زیر تعیین کنید $\frac{x}{5}$ بزرگ تر است، یا $\frac{x}{8}$.

الف) وقتی x عدد صحیح مثبت است. $\frac{x}{8} < \frac{x}{5}$ ب) وقتی x عدد صحیح منفی است. $\frac{x}{8} > \frac{x}{5}$

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$$

۳- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

عدد	نوع									
$\frac{12}{-4}$	$\frac{-1}{5^3}$	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-8}{-3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{9}$	$-\frac{6}{2}$	$-(-(+2))$
X	X	✓	X	X	X	X	X	✓	X	✓
✓	X	✓	X	X	X	✓	X	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۴- ابتدا علامت هر عبارت را تعیین و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{-8 \times (-18)}{12 \times 16} = + \frac{1 \times 18}{2 \times 16} = \frac{1 \times 18}{2 \times 16} = + \frac{3}{4}$$

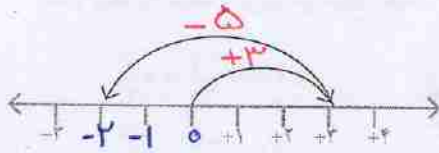
$$\frac{10 \times (-2)}{-7 \times 25} = - \frac{1 \times 2}{7 \times 25} = - \frac{2}{175}$$

جمع و تفریق عددهای گویا

فعالیت



۱- با توجه به درس سال گذشته برای حرکت‌های روی محور، یک جمع عددهای

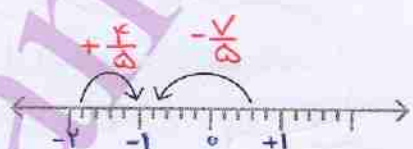
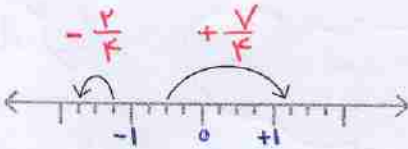
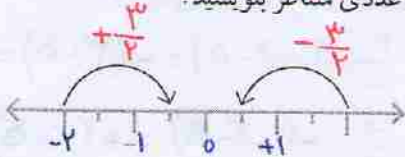


$$(+3) + (-5) = (-2)$$

۲- با توجه به سؤال ۱، برای هر حرکت روی محور، عددی متناظر بنویسید.



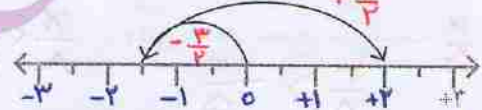
$$(-2) + (-3) = -5$$



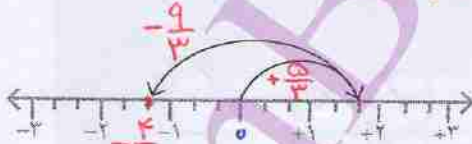
۳- برای محورهای زیر مانند نمونه، یک جمع یا عددهای گویا بنویسید.



$$\left(+\frac{2}{2}\right) + \left(-\frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{4}{2}\right) = \left(-1\frac{1}{2}\right)$$



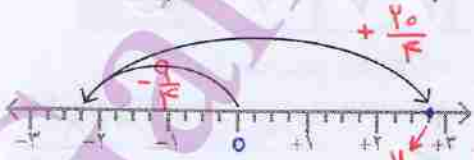
$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{5}{4}\right) = +\frac{2}{4} = +\frac{1}{2}$$



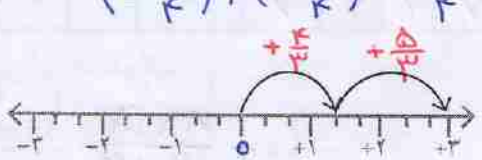
$$\left(+\frac{8}{12}\right) + \left(-\frac{9}{12}\right) = -\frac{1}{12} = \left(-1\frac{1}{12}\right)$$



$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{8}{4} = \left(-1\frac{2}{4}\right)$$



$$\left(-\frac{9}{8}\right) + \left(+\frac{10}{8}\right) = \left(+\frac{1}{8}\right) = \left(+\frac{1}{8}\right)$$



$$\left(+\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{9}{3}\right) = +\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

۴- عبارت‌های زیر را مانند نمونه به صورت جمع دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{5}{8} + \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{2}{8} \quad -\frac{5}{8} - \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{8} + \left(-\left(-\frac{7}{8}\right)\right) = -\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = +\frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5} \quad -\frac{2}{5} - \left(+\frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{5} + \left(-\left(+\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{2}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{5}{10} + \left(-\frac{15}{100}\right) \leftarrow 0/5 - 0/100 = 0/5 + \left(-0/100\right) = -0/25 \quad -2/3 - 5/8 = -2/3 + \left(-5/8\right) = -8/1$$

$$\left(-\frac{123}{10}\right) + \frac{7}{1} \leftarrow -12/3 - (-7) = -12/3 + \left(-(-7)\right) = -12/3 + 7 \quad 25 - 18/4 = 25 + \left(-18/4\right) = 9/4$$

$$= -5/3 \quad = \frac{25}{1} + \left(-\frac{18}{4}\right)$$

۵- مانند نمونه، عدد‌ها را ابتدا به طور تقریبی به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد کنید. سپس، حاصل

عبارت را به دست آورید.

$$-17/9 - (-100/1) + 12/87 = -18 - (-1) + 13 = -18 + 1 + 13 = -15 + 13 = 3$$

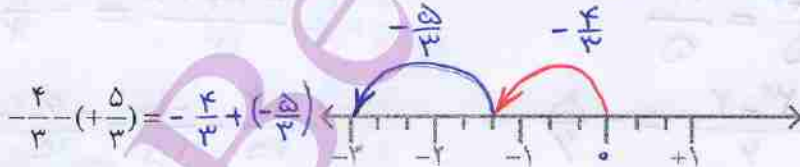
$$-1\frac{14}{15} + 2\frac{1}{17} - 3\frac{2}{19} = -2 + 2 - 3 = -3$$

کاردر کلاس

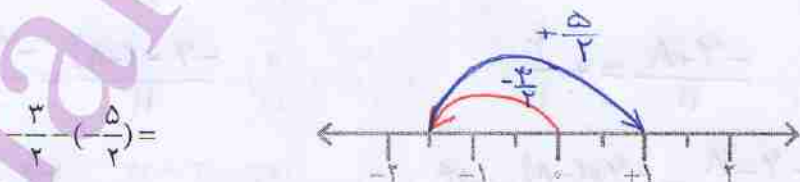


به کمک محور، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا تفریق‌ها را به صورت جمع

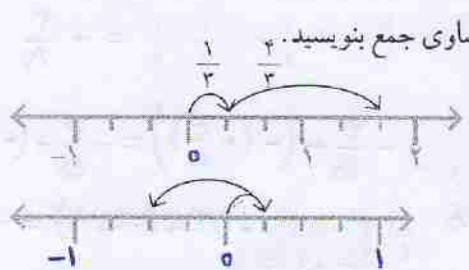
بنویسید.



$$= -\frac{9}{3} = -3$$



$$= \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) = +\frac{2}{2} = 1$$



$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{3}$$

حاصل عبارت رو به رو را به دست آورید و با حاصل جمع بالا مقایسه کنید.

$$\frac{1+(-3)}{3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

حاصل یکی است

با توجه به تساوی های زیر، توضیح دهید که چگونه می توانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا را با استفاده از جمع و تفریق دو عدد صحیح به دست آوریم.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-3+2}{5}$$

$$\frac{3}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{-3-(-4)}{7} = \frac{-3+4}{7}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

خلاصه درس

۲- مانند نمونه، ابتدا منفرجه ها را یکی کنید. سپس جمع و تفریق ها را انجام دهید.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{20-21}{28} = \frac{-1}{28} = -\frac{1}{28}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{5} = \frac{6+7}{5} = \frac{13}{5}$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-9+8}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15} - \frac{-10}{15} = \frac{-4-(-10)}{15} = \frac{-4+10}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

کار در کلاس

۱- مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت ها را به دست آورید.

$$\left(+\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{-7-(-4)}{9} = \frac{-7+4}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{8}{11}\right) = \frac{-6+8}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) - \left(+\frac{8}{11}\right) = \frac{-6-(+8)}{11} = \frac{-6+(-8)}{11} = \frac{-14}{11}$$

$$\frac{6}{11} - \frac{8}{11} = \frac{-6-8}{11} = \frac{-14}{11} = -\frac{14}{11}$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) = \frac{-30-12}{25} = -\frac{42}{25}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{-34 + 35}{63} = \frac{1}{63}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-4+4}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\frac{3}{4} - \frac{15}{8} = \frac{-6-15}{8} = \frac{-21}{8} = -\frac{21}{8}$$

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$4 + \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$$

$$4 + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4 \cdot 5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

$$-4 + \frac{3}{5} = -\frac{4 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-17}{5}$$

$$4 - \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

حالا مانند نمونه، هر عدد مخلوط را به صورت دو عدد صحیح و کسری در آورید و با هم جمع کنید.

$$-2\frac{1}{2} = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-3\frac{3}{4} = -3 + \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$+4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

$$= -2 - \frac{1}{2}$$

$$= -3 - \frac{3}{4}$$



۱- حاصل عبارت ها را به دست آورید.

$$\frac{4}{10} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{10}{24} = \frac{-9}{24} = -\frac{3}{8}$$

$$-2 + \frac{2}{5} = -1\frac{8}{5}$$

$$-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 1 + \frac{-3+4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$-4\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2} = -6\frac{7}{10}$$

$$7\frac{1}{3} - 10\frac{1}{4} = -3 + \frac{4-3}{12} = -2\frac{11}{12}$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{10}{3} = \frac{-15+20}{6} = \frac{5}{6}$$

۲- حاصل عبارت ها را به دست آورید.

$$\begin{cases} -25 + 75 = 50 \\ -0.25 + 0.75 = 0.50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + 3 = -6 \\ -0.9 + 0.3 = -0.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 12 = -5 \\ 0.7 - 1.2 = -0.5 \end{cases}$$

بین این تساوی ها چه رابطه ای را مشاهده می کنید؟

۳- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$12/8 - 15/4 = -2\frac{1}{4}$$

$$-25 + 7/2 = -11\frac{1}{2}$$

$$-4/1 - 3/7 = -7\frac{1}{7}$$

$$(-41 - 37 = -78)$$

$$(128 - 152 = -24)$$

$$(-250 + 72 = -178)$$

۴- به کمک الگویابی جاهای خالی شکل را پر کنید.

0/73			
0/01	0/72		
-0/50	0/51	0/21	
-0/7	0/20	0/31	-0/10

ضرب و تقسیم عددهای گویا

فعالیت



۱- مانند نمونه، ضرب عددهای گویا را به ضرب عددهای صحیح تبدیل کنید. با توجه به حاصل عبارت‌ها، جدول را برای ضرب دو عدد گویا کامل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \left(+\frac{3}{4}\right) &= \frac{-2}{3} \times \frac{+3}{4} = \frac{(-2) \times (+3)}{3 \times 4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \times \left(+\frac{5}{7}\right) &= \frac{-3}{4} \times \frac{+5}{7} = -\frac{3 \times 5}{4 \times 7} = -\frac{15}{28} \\ \frac{2}{9} \times \left(-\frac{4}{7}\right) &= \frac{-2}{9} \times \frac{-4}{7} = +\frac{2 \times 4}{9 \times 7} = +\frac{8}{63} \\ \frac{3}{5} \times \left(-\frac{10}{9}\right) &= \frac{-3}{5} \times \frac{-10}{9} = +\frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \times \left(-\frac{9}{4}\right) &= \frac{4 \times (-9)}{3 \times 4} = -\frac{36}{12} = -3 \end{aligned}$$

\times	+	-
+	+	-
-	-	+

۲- با توجه به جدول بالا، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین کنید. سپس، مانند نمونه، با

ضرب کسرها حاصل را پیدا کنید.

$$\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{15}\right) = +\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{3 \times 8}{4 \times 15} = \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{2} \times \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \quad +\frac{3}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{10}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{30}{15} = -2$$

کار در کلاس



با توجه به نتیجه‌ای که از فعالیت قبل گرفته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{12}{35}$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$\left(-\frac{6}{35}\right) \times \left(-\frac{21}{8}\right) = +\frac{6}{35} \times \frac{21}{8} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{4}{7} \times (+12) = +\frac{48}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(+\frac{11}{8}\right) = -\frac{1 \times 11}{1 \times 2} = -\frac{11}{2}$$

$$-1/2 \times (-0/1) = +\left(1/2 \times 0/1\right) = 0/12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$-1/3 \times \frac{2}{8} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$-2/4 \times \left(-1/3\right) = +\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = +\frac{2}{12} = +\frac{1}{6}$$

$$-\frac{12}{10} \times \left(-\frac{1}{10}\right) = +\frac{12}{100} = +\frac{3}{25}$$



۱- همان طور که می دانید، تقسیم را می توانیم به ضرب تبدیل کنیم. پس، مانند نمونه ابتدا علامت حاصل تقسیم را بگذارید و سپس آن را به ضرب دو عدد تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} (+\frac{2}{3}) \div (-\frac{5}{7}) &= -(\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}) = -(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}) = -\frac{14}{15} \\ -\frac{6}{35} \div (-\frac{8}{21}) &= +(\frac{6}{35} \div \frac{8}{21}) = +\frac{6}{35} \times \frac{21}{8} = +\frac{9}{20} \\ -\frac{15}{12} \div (+\frac{10}{18}) &= -(\frac{15}{12} \div \frac{10}{18}) = -\frac{15}{12} \times \frac{18}{10} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

۲- معکوس کسر $\frac{2}{3}$ برابر با $\frac{3}{2}$ است. معکوس عددهای گویای زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2} & \quad +\frac{2}{7} \rightarrow +\frac{7}{2} & -3 \rightarrow -\frac{1}{3} & \quad +\frac{7}{3} \rightarrow +\frac{3}{7} \\ -2\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{7}{3} & \quad 0/1 \rightarrow \frac{1}{1} & +1\frac{1}{4} \rightarrow +\frac{5}{4} & \quad -1 \rightarrow -1 \end{aligned}$$

مانند نمونه هر عدد بالا را در معکوس خود ضرب کنید و حاصل را به دست آورید.

$$\frac{2}{5} \times (-\frac{5}{2}) = +1 \quad +\frac{2}{7} \times (+\frac{7}{2}) = +\frac{2 \times 7}{7 \times 2} = 1$$

چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل ضرب هر عدد در معکوسش برابر یک می شود.

۳- جاهای خالی را با کسر مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \times (-\frac{2}{5}) &= 1 & -\frac{3}{5} \times (-\frac{5}{3}) &= 1 \\ +1\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} &= 1 & +\frac{1}{4} \times \frac{4}{1} &= 1 \end{aligned}$$

صفر تنها عددی است که معکوس ندارد؛ چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعریف نشده است.

$$-\frac{3}{1} \times (-\frac{1}{3}) = +\frac{3 \times 1}{1 \times 3} = +1 \quad , \quad +\frac{7}{3} \times +\frac{3}{7} = +\frac{7 \times 3}{3 \times 7} = +1$$

$$-2\frac{1}{3} \times -\frac{3}{7} = +(\frac{7}{3} \times \frac{3}{7}) = +1 \quad , \quad 0/1 \times \frac{1}{1} = +(\frac{1}{1} \times \frac{1}{1}) = 1$$

$$+1\frac{1}{4} \times (+\frac{4}{5}) = +(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}) = +1 \quad (-\frac{1}{1}) \times (-\frac{1}{1}) = +1$$

در کسر ساده شدن $\frac{a}{b}$ اگر $b = 2^m \times 5^n$ و m و n اعداد حسابی بی باشند آنگاه $\frac{a}{b}$ تعداد محدودی

$\frac{9}{4} = 2,25$

رقم اعشاری دارد (نماد اعشاری تحقیق دارد) مثال

کسر ساده شدن $\frac{a}{b}$ اگر $b = 2^x \times 5^y \times p^k$ یعنی درخرج خود عوامل ۲ و ۵ نداشته باشد و حداقل یک عامل اول

$\frac{3}{7} = 0,428571$

دیگر داشته باشد آنگاه $\frac{a}{b}$ نماد اعشاری متناوب ساده دارد مثال

کار در کلاس

۱- حاصل تقسیم های زیر را حساب کنید.

$\frac{8}{9} \div (-1) = + \frac{8}{9} \times \frac{1}{1} = \frac{8}{9}$

$\frac{4}{7} \div (-\frac{5}{7}) = + \frac{4}{7} \times \frac{7}{5} = + \frac{4}{5}$

$-\frac{3}{8} \div (-\frac{3}{8}) = + \frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = +1$

$1 \div (-\frac{2}{3}) = -1 \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

$(+\frac{4}{5}) \div (-5) = - \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = -\frac{4}{25}$

$-\frac{8}{10} \div 4 = - \frac{8}{10} \times \frac{1}{4} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

$1 \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$

$1 \div (-\frac{3}{4}) = -\frac{4}{3}$

$1 \div (-\frac{7}{2}) = -\frac{2}{7}$

$\frac{3}{5}$ معکوس = $\frac{5}{3}$

$\frac{3}{4}$ معکوس = $-\frac{4}{3}$

$\frac{7}{2}$ معکوس = $-\frac{2}{7}$

حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیر صفر چیست؟ توضیح دهید. برابری معکوس آن عدد شود

(نماد اعشاری)

۱- کسرها را زیر را مانند نمونه و به کمک ماشین حساب، به عددهای اعشاری تبدیل کنید.

۱- اعداد اعشاری مختوم (تحقیق)

$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0,4$

$\frac{1}{3} = 0,333...$

$\frac{3}{7} = 0,428571428571...$

۲- اعداد اعشاری متناوب ساده

$\frac{1}{8} = 0,125$

$\frac{5}{4} = 1,25$

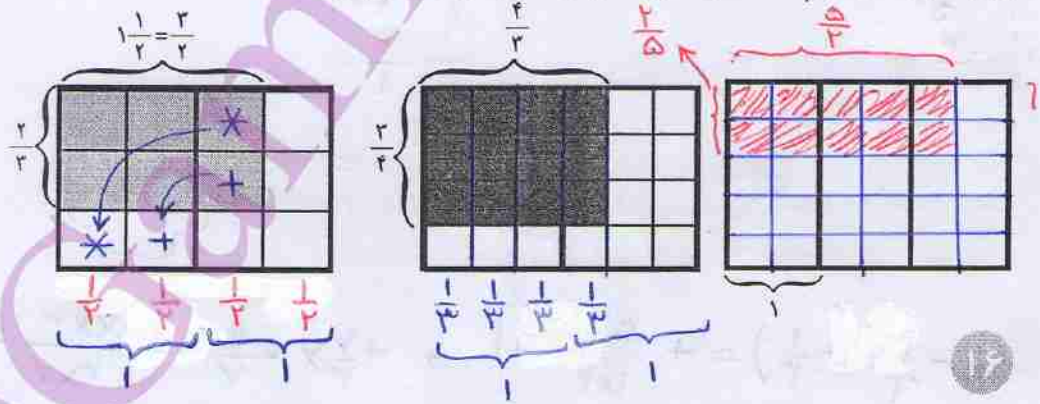
$\frac{5}{6} = 0,833...$

۳- اعداد اعشاری متناوب مرکب

بین عددهای حاصل چه تفاوتی مشاهده می کنید؟ آیا می توانید کسرها را طبقه بندی کنید؟

۲- مانند نمونه، ضرب یک کسر در معکوسش را روی شکل نشان دهید. چگونه می توانیم از

روی شکل نشان دهیم که حاصل ضرب کسر در معکوسش، یک می شود؟



$\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{12} = 1$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$

اگر کسر ساده شدن $\frac{a}{b}$ درخرج خود علاوه بر ۲ یا ۵ یک عامل اول دیگر داشته باشد

$\frac{5}{9} = 0,555...$

آنگاه $\frac{a}{b}$ نماد اعشاری متناوب مرکب دارد مثال

تمرین



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-\frac{6}{17}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{-6+8}{17} = \frac{2}{17} \quad \left(-\frac{12}{25}\right) - \left(+\frac{11}{22}\right) = \frac{-12-55}{210} = \frac{-67}{210} = -\frac{67}{210}$$

$$\left(-\frac{2}{63}\right) - \left(-\frac{5}{72}\right) = \frac{-14+35}{504} = +\frac{19}{504} \quad \frac{7}{12} + (-3) = \frac{7-36}{12} = -\frac{29}{12} = -2\frac{5}{12}$$

$$\left(+\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{6}{33}\right) = -\frac{4}{33} \quad \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(+\frac{8}{12}\right) = -\frac{1}{15}$$

$$-8 \div (+5) = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5} \quad (-12) \div (-28) = +\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{27}\right) = +\frac{7}{9} \times \frac{27}{28} = +\frac{3}{4} \quad -2/4 \div 1/2 = -2$$

۲- عددهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$-\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} \quad -\left(\frac{14}{-19}\right) = \frac{14}{19} \quad -\left(\frac{-5}{-13}\right) = -\frac{5}{13} \quad \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(\frac{2}{5} - \left(+\frac{2}{5}\right)\right) \times \frac{5}{12} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \quad \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = -\frac{3}{5} \times \frac{30}{-12+25} = -\frac{18}{13}$$

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \left(-\frac{2}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{-7}{24} = \frac{-27+12-96}{3 \times 72} \times \left(-\frac{24}{7}\right) = +\frac{79}{21}$$

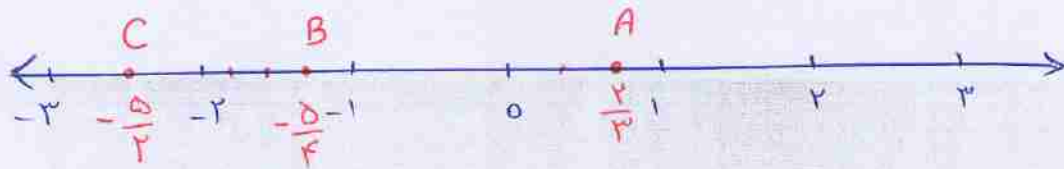
$$\left(-2 + 3 - 7\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) = -6 \quad -\frac{1}{2} \times \left(-3\frac{1}{3}\right) = +\left(\frac{3}{2} \times \frac{10}{3}\right) = 5$$

$$= -6 + \frac{-5+4-1}{15} = -6 + \frac{0}{15} = -6$$

$$-\frac{2}{2} \div \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} \times \frac{4}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{-1}{5} = -\frac{8}{12} + \frac{1}{20} = -\frac{38}{60} + \frac{3}{60} = -\frac{35}{60} = -\frac{7}{12}$$

$$= \frac{-5+4}{3} = \frac{1}{3}$$



● ● ● ● ● مرور فصل ۱ ● ● ● ● ●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل، واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های من خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

● عددهای طبیعی ● عددهای صحیح ● عددهای گویا ● معکوس عدد گویا

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود، خلاصه‌ی درس مربوط به آن را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای صحیح با رعایت ترتیب انجام عملیات
- پیدا کردن راه حل مناسب برای محاسبه یک عبارت
- پیدا کردن عددهای گویای مساوی
- نمایش جمع و تفریق عددهای گویا روی محور
- محاسبه جمع و تفریق دو عدد گویا
- محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد گویا
- پیدا کردن معکوس یک عدد گویا
- محاسبه حاصل یک عبارت، شامل عددهای گویا با رعایت ترتیب عملیات.

کاربرد

محاسبه عددهای گویا در محاسبات عبارت‌های جبری و حل معادله‌ها کاربرد دارد.

تمرین‌های ترکیبی

اگر بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، می‌توانید مطمئن باشید که این فصل را به خوبی یاد گرفته‌اید.

۱- عددهای گویا را روی محور نمایش دهید.

$$A = -\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{2}{3} \quad B = -1\frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \quad C = -\frac{5}{-2} = +\frac{5}{2}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} & \left(-2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}\right) \div \left(-1\frac{1}{4} \times \frac{-2}{5}\right) = 1 - \frac{1 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{3}{2}} = 1 - \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\ & = \left(\frac{-5}{2} + \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{-5}{4} \times \frac{-2}{5}\right) = 1 + 1 = 2 \\ & = \frac{-15 + 10}{6} \times 2 = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

۲

فصل

حساب عددهای طبیعی



شمارنده‌های اول یک عدد مانند ماده اولیه کارخانه عددها هستند. همه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک را می‌توانیم با ضرب شمارنده‌های اول به دست آوریم. امروزه از عددهای اول که تجزیه و شکسته نمی‌شوند، برای رمزنگاری و رمزگشایی استفاده می‌شود.

$15 = 1 \times 15$

یک گروه پانزده نفره

$15 = 3 \times 5$

سه گروه پنج نفره

$15 = 5 \times 3$

پنج گروه سه نفره

$15 = 15 \times 1$

پانزده گروه یک نفره

یادآوری عددهای اول

بله، گروه‌های ۱، ۳، ۵، ۱۵ نفره

فعالیت



۱- می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را برای انجام کارهای مختلف به گروه‌های

کوچک تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟ بله، گروه‌های یک نفره و ۱۹ نفره

اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه حالت‌های

$1 \times 7 = 7$

$7 \times 1 = 7$

ممکن را بنویسید. گروه‌های ۷ نفره و یک نفره

اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد، چه گروه‌هایی را می‌توانیم تشکیل دهیم؟

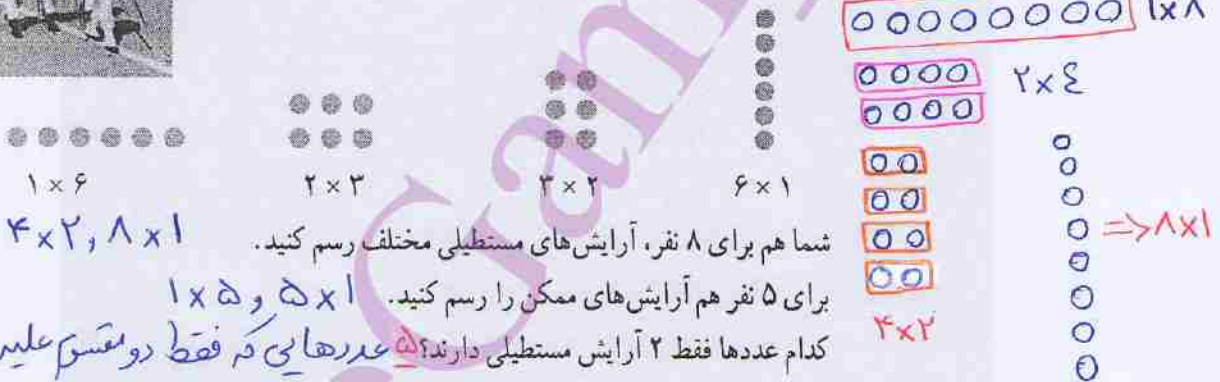
گروه‌های ۱۵، ۵، ۳، ۱ نفره

یاد



۲- تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بروند. فرمانده آنها آرایش‌های

مستطیلی مختلف برای گروه‌های ۶ نفره را روی کاغذ کشیده است.



$1 \times 8, 2 \times 4, 4 \times 2, 8 \times 1$

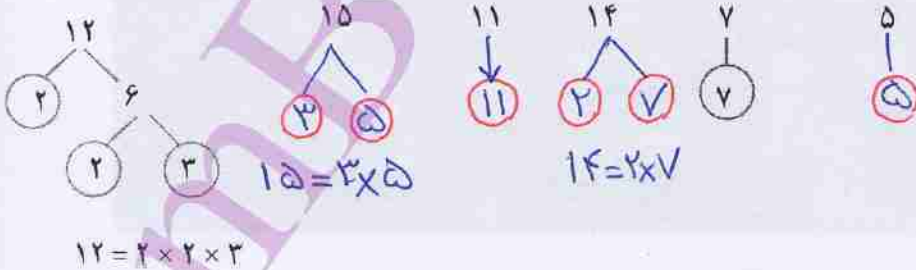
شما هم برای ۸ نفر، آرایش‌های مستطیلی مختلف رسم کنید.

برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید. 1×5 و 5×1

کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟ **۵** عددهایی که فقط دو مقسوم علیه دارند (اعداد اول)

۳- مانند نمونه‌ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای داده شده را به صورت ضرب

شمارنده‌های اول بنویسید (تجزیه کنید).



$12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

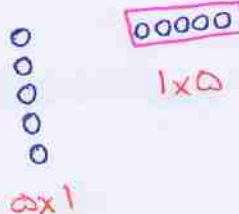
$14 = 2 \times 7$

اعداد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول

نامیده می‌شود.

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ...



یک عددی اول نمی باشد زیرا از حاصل ضرب یک در خودش عدد جدیدی حاصل نمی شود
 در دانیم از حاصل ضرب هر عدد اول در خودش و یا یک عدد اول دیگر، عددی مرکب حاصل می شود

جواب دوم: زیرا اعدادی اول اند که فقط دو شمارنده طبیعی داشته باشد و عدد یک فقط یک شمارنده طبیعی دارد

عدد ۱ مرکب نیست زیرا نمی توانیم آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک بنویسیم

کار در کلاس

اگر بتوانیم عددی طبیعی و بزرگ تر از یک را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک

بنویسیم، عدد مورد نظر اول نخواهد بود و به چنین عددی، عدد مرکب می گویند. برای مثال، ۲۴ عددی مرکب است، چون: $24 = 6 \times 4$
 $14 = 2 \times 7$, $18 = 3 \times 6$, $20 = 4 \times 5$, $21 = 3 \times 7$
 $22 = 2 \times 11$, $24 = 4 \times 6$, $25 = 5 \times 5$, $26 = 2 \times 13$
 همه عددهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک بنویسید.

اعداد مرکب بین ۱۵ و ۳۰: ۱۴, ۱۸, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸

۱- عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عددهای اول خط بکشید.

آیا عدد ۱ اول است؟ چرا؟ **خیر**
 آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟ **خیر**

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰

۲- با توجه به سؤال بالا، عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی های هر کدام را

بنویسید. الف) عدد ۱ که نه اول است و نه مرکب ب) اعداد اول، عددهایی که فقط دو شمارنده طبیعی دارند ج) اعداد مرکب، عددهایی که می توان آن ها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک

۳- مضرب های طبیعی عدد ۲ در زیر نوشته شده است. در صورت امکان، آنها را مانند نمونه نوشت

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ...

به همین ترتیب، مضرب های طبیعی عددهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ بنویسید.

مضرب های طبیعی عدد ۳: ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ...

مضرب های طبیعی عدد ۴: **نمی شود**, ۴, ۸, ۱۲, ۱۶

۴- با توجه به سؤال بالا، آیا می توانیم بگوئیم که همه مضرب های یک عدد طبیعی مرکب اند؟ چرا؟

خیر زیرا ۲ مضرب هست اما مرکب نیست
 عدد ۱ نه اول است نه مرکب؛ به این ترتیب، عددهای طبیعی را می توان به سه بخش تقسیم کرد:
 عددهای اول، عددهای مرکب و عدد یک

مضرب های طبیعی عدد ۴: ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ...
 2×2 , 2×4 , 2×6 , 2×8

کار در کلاس



۱- کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همه مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

۲- عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ بی‌شمار چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟ بی‌شمار فقط خود ۱۷

۳- اگر a یک عدد اول باشد، آیا همه مضرب‌هایش مرکب‌اند؟ خیر، خود a اول است و مضرب a

نیز می‌باشند



۱- ب.م.م جفت عددهای داده شده را بنویسید.

$(15, 6) = 3$

$(2, 8) = 2$

$(3, 9) = 3$

$(1, 4) = 1$

$(18, 12) = 6$

$(5, 12) = 1$

$(15, 4) = 1$

$(3, 5) = 1$

$(24, 25) = 1$

$(15, 16) = 1$

$(7, 8) = 1$

$(3, 3) = 3$

تکته: (ب.م.م) دو عدد متوالی برابر یک است

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم علیه [شمارنده] مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول هستند. برای مثال، عددهای ۸ و ۹ هر دو مرکب‌اند اما چون $(8, 9) = 1$ می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

$(5, 7) = 1$

۲- دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید.

آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول نسبت به هم اول‌اند؟ آری

$(5, 9) = 1$

۳- یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال یزنید که نسبت به هم اول باشند.

۴- دو عدد مرکب مثال یزنید که نسبت به هم اول باشند. $(8, 9) = 1$

۵- آیا دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول می‌شوند؟ بلی

۶- اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن‌ها برابر است

با حاصل ضرب آن‌ها

$(8, 9) = 1 \Rightarrow [8, 9] = 8 \times 9 = 72$

نکته: اگر مجموع دو عدد فرد باشد، نگاه کنی از آن دو عدد فرد دیگری زوج است

زوج = زوج + زوج و فرد = زوج + فرد و زوج = فرد + فرد

نکته: اگر مجموع دو عدد اول فرد باشد حتماً یکی از آن دو عدد زوج است



۱- برای تساوی روبه‌رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. $(\square, 4) = 1$ و $(4, \square) = 1$

$(1, 4) = 1, (3, 4) = 1, (5, 4) = 1, (7, 4) = 1$

۲- عددهای اول بین دو عدد ۴۰ و ۶۰ را بنویسید. ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹

۳- اگر تعداد عددهای اول کمتر از ۲۰، هشت عدد باشد، تعداد عددهای مرکب کوچک‌تر از ۲۰

چند تا است؟ چرا؟ ۱ نه اول است و نه مرکب $10 = (1+1) - 19$

۴- آیا جمله زیر درست است؟ چرا؟ **خیر**، زیرا عدد ۱ طبیعی است و فقط یک شمارنده دارد
«هر عدد طبیعی دست کم ۲ شمارنده دارد.»

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید. $\square = 99 - 2 = 97$ و $\Delta = 2$

$\square + \Delta = 99 \Rightarrow \Delta = 2 \Rightarrow \square = 99 - 2 = 97$
فرد زوج فرد
۶- پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

۷- عددهای ۹ و ۴ دو شمارنده یک عددند. شش عدد دیگر پیدا کنید که به‌طور حتم شمارنده‌های

$36 \rightarrow 4, 9$

$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

نکته

$2 \times 3 = 6, 2 \times 2 \times 3 = 12$

$2 \times 2 \times 3 = 12$

$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

خواندنی

هر دو عدد طبیعی و فرد که ۲ واحد اختلاف داشته باشند و هر دو اول باشند را یک جفت عدد اول دوقلو می‌نامند مانند (۳، ۵) یا (۱۱، ۱۳) یا (۱۰۱، ۱۰۳) ریاضیدانان بر این باورند (حدس می‌زنند) که برای دوقلوهای اول پایانی وجود ندارد.

همچنین هر سه عدد فرد و متوالی که هر سه اول نیز باشند را اعداد اول سه‌قلو می‌نامند که فقط یک سه‌قلوی اول در بین اعداد طبیعی وجود دارد یعنی (۳، ۵، ۷) و سه‌قلوی دیگری یافت نمی‌شود!

چرا؟ ۱۹ و ۱۷، ۱۵ و ۱۳، ۱۱ و ۹، ۷ و ۵

☆ زیرا از هر سه عدد فرد متوالی یکی مضرب سه می‌باشد

پس بی‌غیر ۳، ۵، ۷، هیچ سه‌قلوی دیگری یافت نمی‌شود

اعداد اول دوقلو
اعداد اول سه‌قلو



تعیین عددهای اول

فعالیت



می‌خواهیم عددهای اول بین ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم.
ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می‌نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

حالا عددهای غیر اول را خط می‌زنیم تا عددهای اول باقی بمانند.

۱- آیا عدد ۱ را خط زدید؟ **بله** چرا؟ **زیرا عدد ۱ نه اول است و نه مرکب**

۲- آیا مضرب‌های عدد ۲ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا ۲ اول است و خط نمی‌خورد**

مضرب‌های مرکب عدد ۲ را به صورت / خط بزنید.

مضرب‌های مرکب عدد ۳ را خط بزنید.

۳- آیا لازم است مضرب‌های عدد ۴ را خط بزنیم؟ **خیر** چرا؟ **زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد پیش**

از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۴- آیا مضرب‌های عدد ۵ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا ۵ اول است و نباید خط بخورد**

مضرب‌های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۵ که برای اولین بار خط می‌خورد،

کدام است؟ **$5 \times 5 = 25$**

۵- آیا مضرب‌های عدد ۶ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا ۶ عددی مضرب ۲ باشد پیش**

از آن با مضرب‌های ۲ خط خورده است

۶- آیا مضرب‌های عدد ۷ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **چون ۷ اول است و خط نمی‌خورد**

۷- مضرب‌های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب عدد ۷ که برای اولین بار خط

می‌خورد کدام است؟ **$7 \times 7 = 49$**

۸- آیا مضرب‌های اعداد ۸ و ۹ را خط می‌زنید؟ **خیر** چرا؟ **زیرا قبلا خط خورده‌اند**



$11^2 = 121$

۹- اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟

۱۰- به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزیم؟ **خیر**

۱۱- آیا عددهای باقی مانده، اول هستند؟ **بله**

برای تعیین عددهای اول، فقط مضرب‌های مرکب عددهای اول را خط می‌زنیم و خط زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مربع آن عدد اول، بین عددهای نوشته شده نباشند.



کار در کلاس



نتایج فعالیت قبل که به آن روش غربال می‌گویند، در نمودار زیر خلاصه شده است.



این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همهٔ مرحله‌ها را یک به یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید. برای مثال، جملهٔ «عددهای ۱ تا n را بنویسید» را بخوانید و عددهای ۱ تا ۴۰ را در کادر زیر بنویسید. عدد ۱ را خط بزنید. عدد خط نخوردهٔ بعدی را که عدد ۲ است، در نظر بگیرید. آیا مربع عدد ۲ در بین عددها هست؟ مضرب‌های مرکب آن را خط بزنید، دوباره به مرحلهٔ قبلی برگردید و به همین ترتیب کار را ادامه دهید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰		
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	

- ۲ مربع ۲ → ۴ **در بین اعداد هست** → مضرب مرکب ۲
- ۳ مربع ۳ → ۹ **در بین اعداد هست** → " مرکب ۳
- ۵ مربع ۵ → ۲۵ **در بین اعداد هست** → " مرکب ۵
- ۷ مربع ۷ → ۴۹ **در بین اعداد نیست** → " مرکب ۷



روش تشخیص عدد اول

① $\sqrt{a} = M$ عدد a را بر تمام اعداد اول تا M تقسیم کنیم

② اگر باقی مانده‌ی یکی از تقسیم‌ها صفر نشود آنگاه آن عدد **مربک** است

③ اگر باقی مانده‌ی هیچ کدام از تقسیم‌ها صفر نشود آنگاه آن عدد **اول** است



می‌خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال، که در صفحه قبل توضیح داده شد، فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده‌اند.

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 2} \\ 42 \\ \hline 1 \end{array}$$

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد؟ **خیر** با انجام دادن چه عملی می‌توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ **محل تقسیم**

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 3} \\ 45 \\ \hline 2 \end{array}$$

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۳ خط می‌خورد؟ **خیر** چرا؟

آیا عدد ۴۷ با مضرب‌های ۵ خط می‌خورد؟ **خیر** چرا؟ چون $5 \times 5 = 25$ بزرگ‌تر از ۴۷ است

آیا لازم است بررسی کنیم که عدد ۴۷ با مضرب‌های ۷ خط می‌خورد یا نه؟ **خیر** چرا؟ زیرا مربع ۷ یعنی ۴۹ در بین اعداد وجود ندارد

آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می‌کنیم؟ **خیر** چرا؟ **فقط بر اعداد اول** $2, 3, 5$ باید تقسیم کنیم و نیاز نیست بر کل اعداد اول تقسیم کنیم چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ‌تر شود ادامه می‌دهیم؟ توضیح دهید.

برادر روش غربال اولین عدد مرکبی که خط می‌خورد مربع عدد اول است
کار در کلاس والی ۴۷ مربع بود قطعاً یا بری از مضرب‌های ۲ یا ۳ یا ۵ خط می‌خورد



مانند نمونه، بررسی کنید که عددهای داده شده (۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳) اول یا مرکب هستند.

پس باید آن را بر عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 97 \overline{) 2} \\ 97 \overline{) 3} \\ 97 \overline{) 5} \\ 97 \overline{) 7} \\ \hline 1 \end{array}$$

چون تمام تقسیم‌ها باقی مانده دارند، پس ۹۷ ضرب هیچ کدام نیست؛ یعنی عددی اول است.

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 2} \\ 131 \overline{) 3} \\ 131 \overline{) 5} \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 7} \\ 91 \\ \hline 40 \\ \hline 5 \end{array}$$

④ چون ۱۳۱ بر هیچ کدام از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ بخش پذیر نیست و $11^2 > 131$ می‌باشد

لذا عدد ۱۳۱ عددی اول می‌باشد

$$\begin{array}{r} 131 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 21 \\ \hline 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

بین جابدها اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم

$143 \div 2 = 71.5$ $143 \div 3 = 47.666$ $143 \div 5 = 28.6$
 $143 \div 7 = 20.428$ $143 \div 11 = 13$ $143 \div 13 = 11$

$\sqrt{143} = 12 \rightarrow$

$143 = 11 \times 13$

۱۴۳ عددی مرکب است
 چون ۱۴۳ بر ۱۱ بخش پذیر است



پایین

- از روش غربال برای عددهای ۱ تا ۶۰ استفاده کنید و عددهای اول کمتر از ۶۰ را پیدا کنید. ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳
- مشخص کنید که عددهای ۱۰۷ و ۲۵۱ اول اند یا مرکب. ۷ و ۱۰۷ هر دو اول نباشند
- برای اینکه بفهمیم عددهای کمتر از ۱۰۰ اول اند یا نه، کافی است آنها را به عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ تقسیم کنیم.

آیا این جمله درست است؟ چرا؟ **بله زیرا $11^2 = 121$ بین اعداد زوج باشد**

۴- عددی از ۱۲۰ کوچک تر و از ۱۰۰ بزرگ تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداکثر چند تقسیم انجام می دهیم؟ چرا؟ **۴ تقسیم، تقسیم بر ۲، ۳، ۵، ۷ کافی است**

۵- عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید. سپس، به سوال های زیر پاسخ دهید.

- اولین عددی که خط خورد: **عدد ۲**
- در مرحله حذف مضرب های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب های سایر عددها خط نخورد: **۴۹**
- عددی که با مضرب های آن عدد ۲۴ خط خورد: **عدد ۲**
- تمام مضرب های ۵ که در مرحله حذف مضرب های ۵ برای اولین بار خط خوردند:

۲۵، ۳۵، ۵۵، ۶۵، ۸۵، ۹۵

$5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19$

خواندنی

توزیع و نوع قرار گرفتن اعداد اول در بین اعداد طبیعی بسیار نامنظم بوده و از قانون خاصی تبعیت نمی کند ولی همین اعداد اول که به صورتی نامنظم در بین اعداد طبیعی رویده اند، می توانند هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک را بسازند و به عنوان بلوک های ساختمانی برای اعداد طبیعی به کار بروند.

$36 = 2^2 \times 3^2$ $100 = 2^2 \times 5^2$
 $27 = 3^3$ $5 = 5^1$ $12 = 2^2 \times 3$

$\sqrt{107} \approx 10 \Rightarrow \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow$ **۱۰۷ اول است** **جواب سوال ۲**

$\sqrt{251} \approx 15 \Rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \Rightarrow$ **۲۵۱ عددی اول است**

بخش پذیری

۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹, ۳۰
 ۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷, ۳۸, ۳۹

مضرب‌های ۵ → /
 مضرب‌های ۲ → /
 مضرب‌های ۳ → /

●●●●● مرور فصل ۲ ●●●●●

مشاهده عبارت‌ها

واژه‌های زیر در این فصل به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

• نمودار درختی • عدد مرکب • نسبت به هم اول • روش غربال
 روش‌های اصلی زیر در این فصل مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و خلاصه درس را در دفتر خود بنویسید.

- پیدا کردن عددهای اول یا روش‌های تقسیم، ضرب و بخش پذیری
- تشخیص عددهای اول و مرکب
- تعیین عددهای اول به کمک روش غربال
- دنبال کردن یک دستورالعمل و نمودار
- تعیین اینکه یک عدد، اول یا مرکب است.

کاربرد

این درس در فصل مربوط به توان و جذر کاربرد دارد. از تبدیل پایه‌های مرکب به پایه‌های عدد اول برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌شود.

سری‌های ترکیبی

۱- یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است، نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

زیرا عدد ۲ شمارنده‌ی مشترک این دو عدد است $(6, 10) = 2$

۲- با روش غربال، عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰ را پیدا کنید. در این روش، کار را از خط زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

با خط زدن مضرب‌های ۲ شروع و با خط زدن مضرب‌های ۵ پایان می‌دهیم

۳- آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

آری، چون $\sqrt{137} \approx 11.7$ بر اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ بخش پذیر نیستی باشد.

۴- عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.

$(25, 49) = 1$ و $(34, 121) = 1$

تبدیل هندسی - تقارن محوری - انتقال - دوران مرکزی

فصل ۳

چند ضلعی ها



در معماری سنتی، اسلامی کشور ما انواع نقش های هندسی و ترکیب چند ضلعی های مختلف در منبت کاری، شیشه کاری، آینه کاری، کاشی کاری و سایر صنایع دستی و نقوش معماری دیده می شود. در کاشی کاری ها انواع چند ضلعی ها را می توان دید و هم نهشتی آنها را با تبدیل های هندسی (انتقال، تقارن، دوران) بررسی کرد.



چند ضلعی: یکدم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره خط تشکیل شده باشد

چند ضلعی‌ها و تقارن

تعریف چند ضلعی

فعالیت



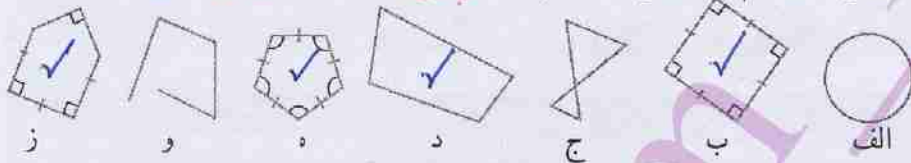
۱- در هندسه به هر خط شکسته بسته، چند ضلعی گفته می‌شود به شرط آنکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند. شکل‌های «ب»، «د»، «ه»، «و» و «ز» چند ضلعی

می‌باشند.

شکل «ج» چند ضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چند ضلعی نیست. چرا؟ چون خط شکسته نیست.

شکل «الف» هم چند ضلعی نیست. چرا؟ چون خط شکسته نیست.



۲- اگر در یک چند ضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چند ضلعی منتظم است.

تعریف چند ضلعی منتظم

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چند ضلعی منتظم اند؟ «ب» و «ه»

۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید. سپس، درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها

و... توضیح دهید تا دوستان شما را که انتخاب کرده‌اند، پیدا کند. خط شکسته بسته ولی چند ضلعی نیست. سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را که او انتخاب کرده است، پیدا کنید.

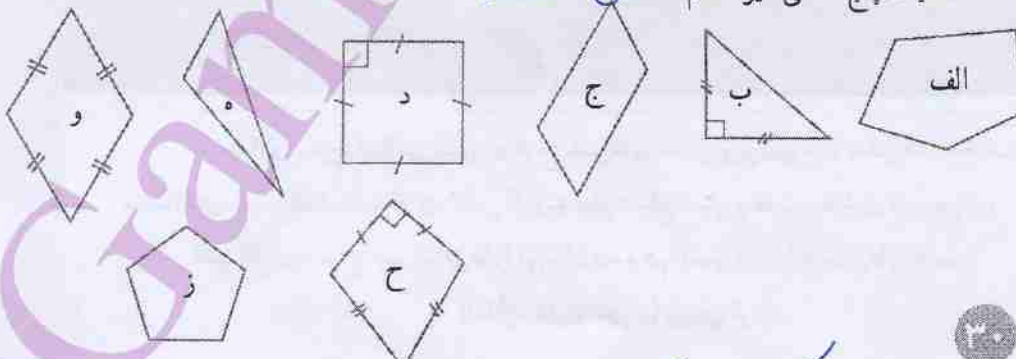
جواب: شکل «ج»

کار در کلاس



۱- هر یک از عبارت‌های زیر مربوط به کدام چند ضلعی است؟

- یک لوزی با زاویه قائمه شکل «د»
- یک مثلث با زاویه باز شکل «ه»
- یک پنج ضلعی غیر منتظم شکل «الف»



جواب سوال سوم: (۲) خط شکسته بسته که ۵ ضلع برابر و ۵ زاویه برابر دارد و چند ضلعی است «ه»

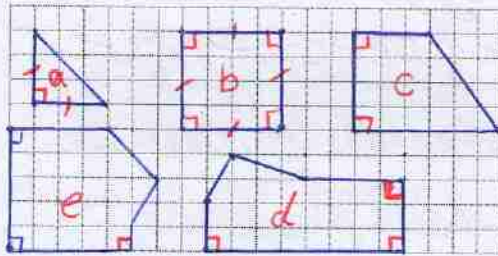
(۳) خط شکسته‌ی باز که ۴ ضلع دارد «و»

(۴) شکلی که چند ضلعی نیست ولی بسته است «الف و ج»

شباهت‌ها: اندازه‌ی اضلاع برابر است ۲) چند ضلعی هستند ۳) خط تقارن دارند

تفاوت‌ها: ۱) شکل الف منتظم ولی ب و ج منتظم نمی باشد ۲) الف مرکز تقارن دارد ولی ب و ج مرکز تقارن ندارند ۳) شکل الف ۲ محور تقارن دارد ولی شکل‌های ب و ج فقط یک محور تقارن دارند ۴) الف محدب ولی ب و ج مقعر است

۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین « a »

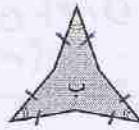
ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی « b »

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه « c »

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

« d, e »

۳- به شکل‌های زیر نگاه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را بنویسید. **کتابی ← پاسخ‌های متفاوت**



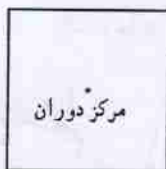
۴- به چند ضلعی‌ای که زاویه‌های آن کوچک‌تر از 180° درجه باشد، چند ضلعی محدب (کوز) و به

چند ضلعی‌ای که دست کم یک زاویه آن بزرگ‌تر از 180°

درجه باشد، چند ضلعی مقعر (کاو) گفته می‌شود.

شکل	منتظم	غیرمنتظم	محدب	مقعر
الف	✓	✗	✓	✗
ب	✗	✓	✗	✓
ج	✗	✓	✗	✓

فعالیت

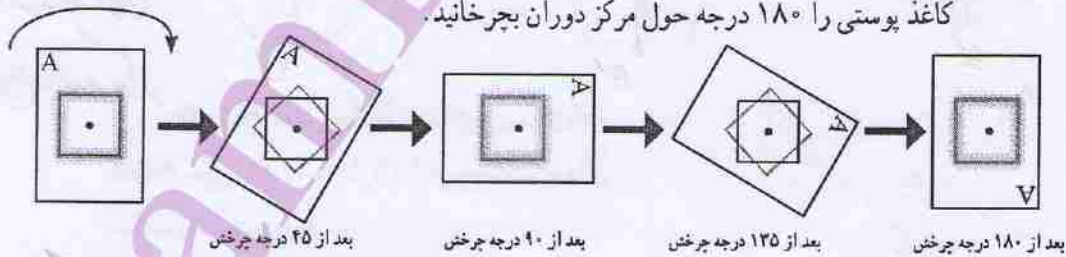


۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مربع رویه‌رو قرار دهید

و تصویر مربع را روی آن رسم کنید.

نوک ماداتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر،

کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



بعد از ۴۵ درجه چرخش

بعد از ۹۰ درجه چرخش

بعد از ۱۳۵ درجه چرخش

بعد از ۱۸۰ درجه چرخش

آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ **پله** در دوران‌های 90° درجه

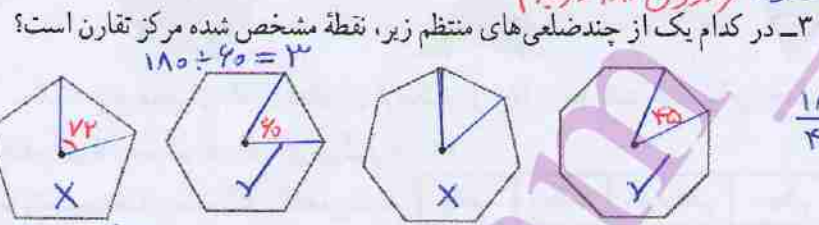
و 180° شکل دوران یافته روی شکل اول منطبق می‌شود

توضیح سؤال ۳: یک پنج ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۷۲ باشد روی شکل اول منطبق می شود و می دانیم $2 \times 72 = 144$ و $3 \times 72 = 216$ یا $180 \div 72 = 2,5$ لذا با دوران 180° شکل اول منطبق نمی شود پس مرکز تقارن ندارد

نکته: اگر تعداد رئوس فرد باشد آنگاه شکل مرکز تقارن ندارد زیرا هر رأس یک رأس دیگر خواهد بود پس هر ضلع رأس قرینیتی یکدیگرند پس تعداد رئوس باید زوج باشد
 اگر نتیجه دوران 180° درجه ای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می گوئیم شکل مرکز تقارن دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



۲- شکل روبه رو مثلثی متساوی الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. نشان دهید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل نیست. دوران یافته ی شکل روی آن منطبق نمی شود (دوران 180° درجه)

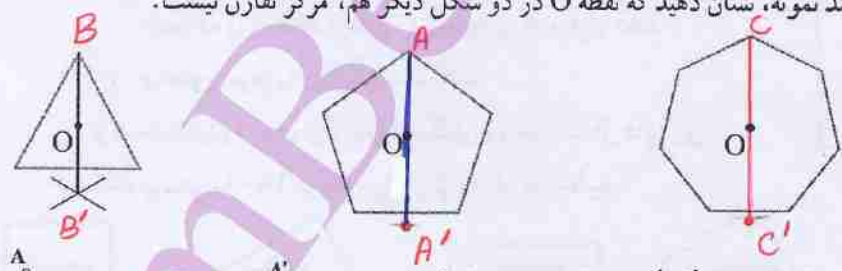


بالا ↑

به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ خیر
 ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه ای می گیرید؟ بله، اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد (در چند ضلعی های منتظم)

۴- یکی از راه های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می توان روی شکل نقطه ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.

تقارن چرخشی



نکته: هر n ضلعی منتظم
 ① n فرد باشد، مرکز تقارن ندارد
 ② n زوج باشد مرکز تقارن دارد

۵- شکل مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته نقطه A حول مرکز O به اندازه 90° در جهت عقربه های ساعت را نشان می دهد.

کدام یک از شکل های فعالیت (۳) با دوران 90° حول نقطه مشخص شده، در جهت عقربه های ساعت روی خودش می افتد؟ هشت ضلعی منتظم

$90 \div 45 = 2$



هشت ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۴۵ باشد روی خودش می افتد
 ۱۲۰
 شش ضلعی با دوران هابی که مضرب ۶۰ - مثلث متساوی الاضلاع با دوران هابی که مضرب ۱۲۰
 نه ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۴۰ درجه - ده ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۳۶ درجه

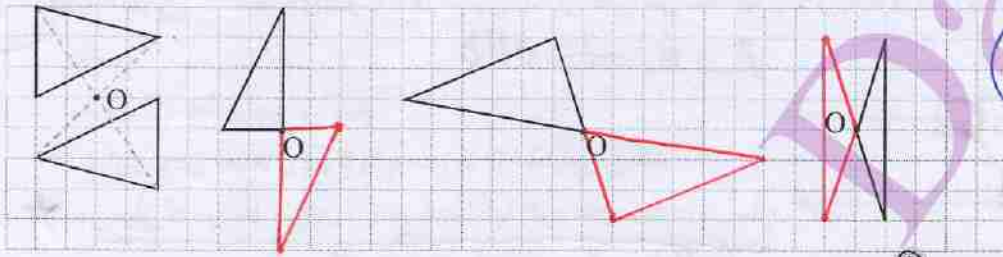
تقرن ۱) هر n ضلعی منتظم n خط تقارن دارد

اگر n فرد باشد خط‌های تقارن از راس بر وسط ضلع مقابل عمود می‌شوند
اگر n زوج باشد قطرها و خط‌های که وسط اضلاع مقابل را بهم وصل می‌کنند خط‌های تقارن می‌باشند

کار در کلاس



مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.



ارتباط تبدیلی

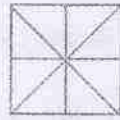
تمرین



۱- الف) تعداد خط‌های تقارن هر یک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



۳ خط تقارن



۴ خط تقارن



۵ خط تقارن



۶ خط تقارن



۷ خط تقارن

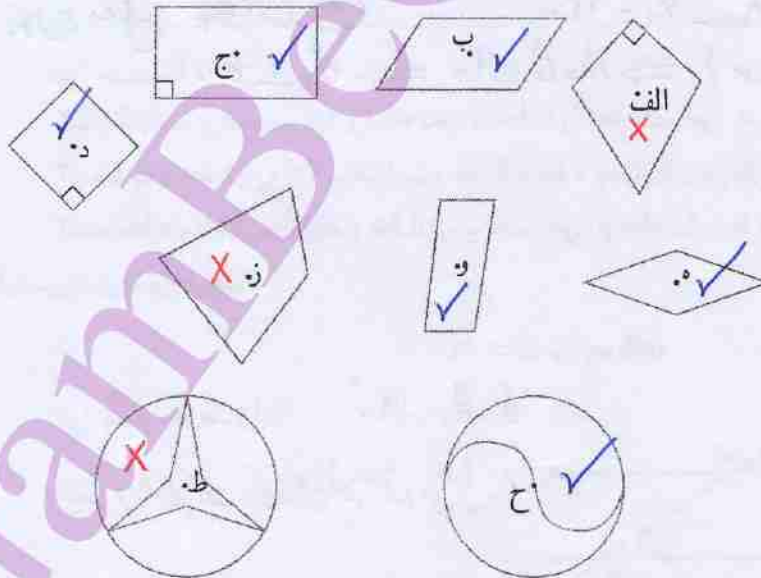


۸ خط تقارن

بالا ↑

ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟
۹ محور تقارن - ۱۰ محور تقارن

۲- در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل هست یا نه.



هوا - سؤال ۲ چون با یکی از دو خط موازی زاویه 90° بی سازد با دیگری نیز زاویه

90° در هر دو سازد پس خط d_1 بر خط b عمود است

دو خط هم‌سری را قطع کنند دو خط موازی نام دارند (در صفحه)

تعریف قدم:

توازی و تعامد

تعریف دو خط موازی

فعالیت



تعریف جدیدی از دو خط موازی

خط های a و b با هم موازی اند، اگر خطی مثل d_1 آنها را با زاویه های مساوی قطع کرده

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow a \parallel b$$

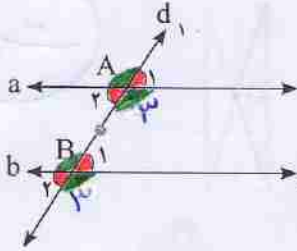
باشد.

به خط d_1 خط مورب می گویند.

موازی بودن خط های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می دهند.

هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها زاویه های مساوی می سازد.

تعریف



$$(a \parallel b, d_1 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

$$\hat{A}_2 = 180 - 60 = 120$$

چون مکمل زاویه \hat{A}_1 است.

$$\hat{B}_1 = 60$$

چون a و b موازی اند و d_1 مورب

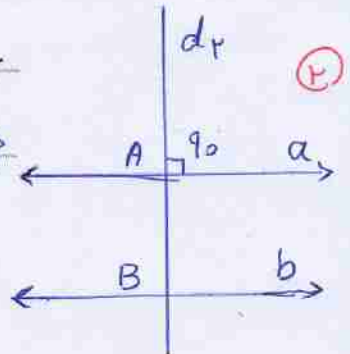
$$\hat{B}_2 = 60$$

چون با زاویه \hat{B}_1 متقابل به راس است.

$$\hat{B}_2 = 120 \quad 180 - 60 = 120$$

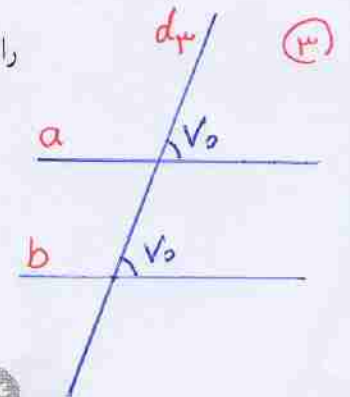
چون مکمل \hat{B}_1 است

$$(a \parallel b, d_2 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90 \Rightarrow d_2 \perp b$$



(۲)

(۳)



۲- خط d_1 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_1 بر b هم عمود است؟

۳- خط d_1 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_1 با خط a چه زاویه ای می سازد؟ 70° درص

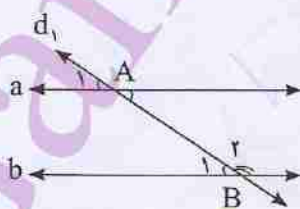
۴- دو خط a و b با هم موازی اند و خط d مورب است. پس زاویه های A_1 و B_1 با هم مساوی اند. این مطلب

را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$(a \parallel b \text{ و } d \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \quad \text{چرا } \hat{B}_1 \text{ و } \hat{B}_2 \text{ مکمل اند؟}$$

چون با هم یک زاویه نیم صفحه می سازند



$$\left. \begin{aligned} (d_1 \parallel d, d_2 \text{ مورب } d) &\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

نقاد ریاضی

استدلال منطقی

چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟ چون دوزاوی می A_1 و B_1 مساوی اند و B_1 مکمل B_2 است

اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی

کدام زاویه قرار می گیرد؟ روی زاویه B_1 قرار می گیرد پس $A_1 = B_1$ چگونه از این طریق می توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید. چون B_1 مکمل B_2 است و $A_1 = B_1$ پس A_1 مکمل B_2 می باشد

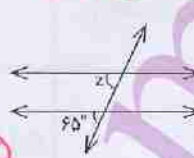
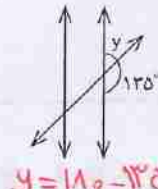
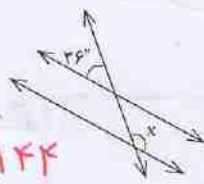
کاردر کلاس * روی A_1 قرار گیرد آنگاه با B_2 زاویه نیم صفحه می سازد پس مکمل

بیدارند

۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه های

مجهول را به دست آورید.

$$z = 65$$

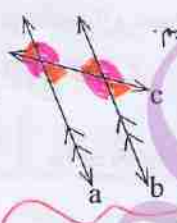
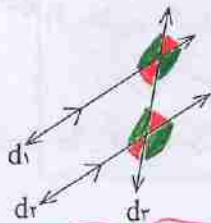


$$x = 180 - 34 = 146$$

$$y = 180 - 135 = 45$$

$$t = 180 - 60 = 120$$

۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل، با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم. عبارت «خط



با خط d_1 موازی نیست» را به صورت $d_1 \parallel d_2$ می نویسیم.

الف) عبارت های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید.

ب) زاویه های مساوی را در شکل ها با

علامت گذاری مشخص کنید.

$a \parallel b \rightarrow$ (خط a و b موازی هستند)

$a \parallel c \rightarrow$ (خط a و c متقاطع هستند)

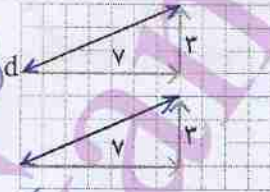
فعالیت



۱- می خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه

دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.

مربع شیب



دو نقطه از خط را در نظر گرفته

و حرکت افقی و قائم بین

این دو نقطه را از نقطه ای در راه

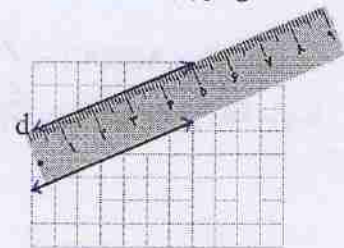
شبه سازی کرده



دو نقطه از آن را بید

اندازه انتقال داده است

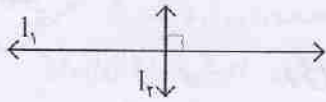
مفهوم انتقال



از لبه های موازی خط کش

استفاده کرده است

۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



مانند نمونه، برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

الف

$a \perp b$
 $a \perp c$ } $\Rightarrow b \parallel c$

دو خط عمود بر یک خط **باهم موازی‌اند**

استدلال رسمی

ج

$d \parallel e$
 $d \parallel f$ } $\Rightarrow e \parallel f$

دو خط موازی با یک خط موازی **باهم موازی‌اند**

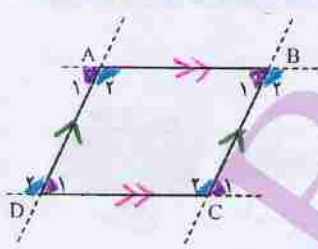
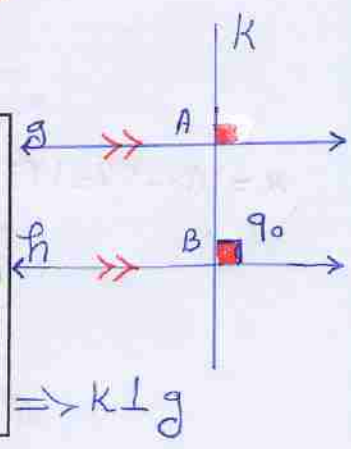
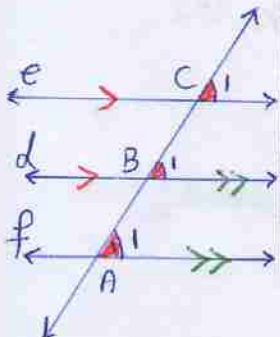
$d \parallel e \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$
 $d \parallel f \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1$ } $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$
 $\Rightarrow e \parallel f$

ب

$g \parallel h$
 $k \perp h$ } $\Rightarrow k \perp g$

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود **بر دیگری نیز عمود است**

$g \parallel h$
 $k \perp h \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$ } $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow k \perp g$



۳- در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. ب) در رابطه‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

(مورب AD و $AB \parallel DC$) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{A}_r = \hat{D}_r$ (مورب BC و $AB \parallel DC$) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$, $\hat{B}_r = \hat{C}_r$

(مورب DC و $AD \parallel BC$) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$, $\hat{D}_r = \hat{C}_r$ (مورب AB و $AD \parallel BC$) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{A}_r = \hat{B}_r$

خط تقارن است $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ①

خط تقارن است $\Rightarrow \left. \begin{matrix} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$ ②

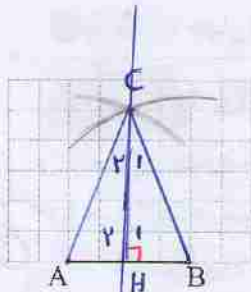
خط تقارن است $\Rightarrow \overline{AH} = \overline{BH}$ ③

در این مجموع زاویه‌های هر $\hat{A} = \hat{B}$ ①, ②

ثلث ۱۸۰ درجه است

خط عمود منصف AB است ②, ③

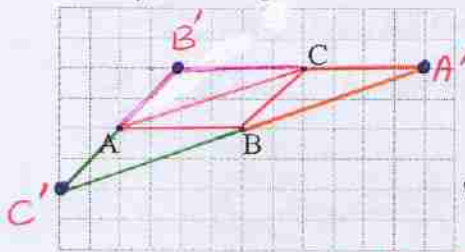
کار در کلاس



الف) یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.
ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ **بله**

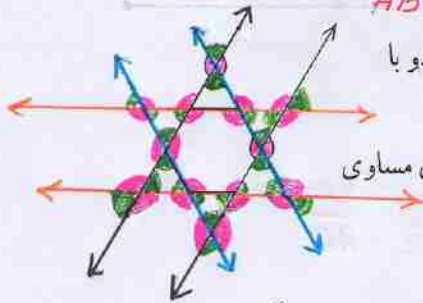
د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ **بله**



۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A, B, C و سه تا از رأس‌های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.
برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟

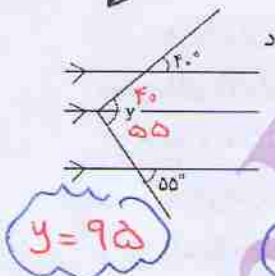
$ABA'C, ABCB', ACBC'$



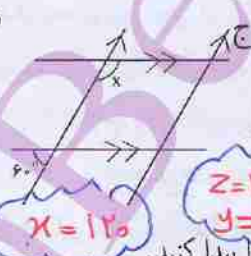
۱- در شش ضلعی منتظم، ضلع‌های روبه‌رو دو به دو با هم موازی‌اند.

مانند نمونه، ضلع‌های موازی دیگر را امتداد دهید و زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.

۲- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



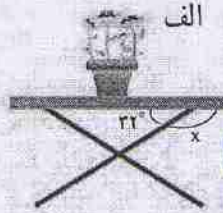
$y = 95$



$x = 125$

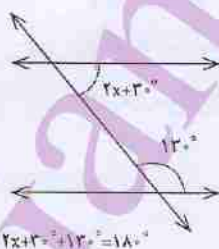


$z = 125$
 $y = 125$



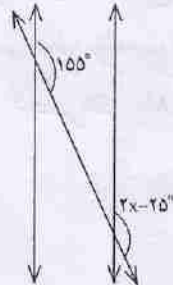
$x = 180 - 32$
 $x = 148$

۳- مانند نمونه، با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.

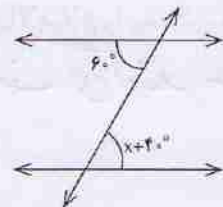


$2x+30+120=180$

$2x+30+120=180$
 $\Rightarrow 2x+150=180$
 $\Rightarrow 2x=30 \Rightarrow x=15$



$2x-25=155$
 $\Rightarrow 2x=155+25$
 $\Rightarrow 2x=180$
 $\Rightarrow x=90$



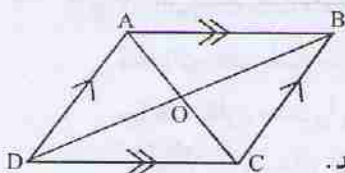
$x+40=60$
 $\Rightarrow x=60-40$
 $\Rightarrow x=20$

هندسه و جید

ترکیب فکر هندسی و فکر جبری

چهار ضلعی ها

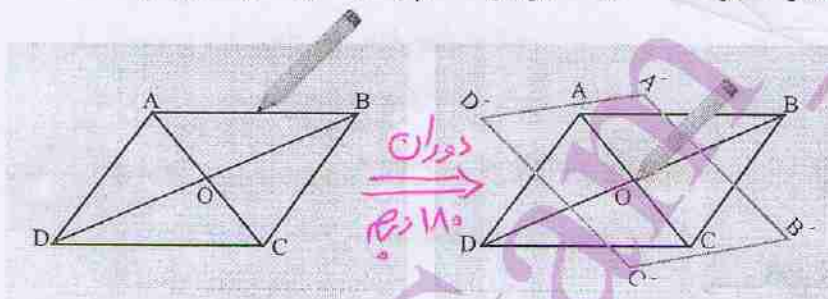
تعریف متوازی الاضلاع



چهارضلعی ای که ضلع های روبه روی آن دو به دو با هم موازی اند، متوازی الاضلاع نام دارد.

دستوری

۱- متوازی الاضلاعی را رسم و مانند شکل نام گذاری کنید.
 یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی الاضلاع را رسم کنید.
 نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطرها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند شکل های زیر تصویر را ۱۸۰ درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



۲- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AB} = \overline{DC} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

هر یک از عبارات های زیر، یکی از خاصیت های متوازی الاضلاع را بیان می کند. با توجه به تساوی های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی الاضلاع، زاویه های رو به رو **با هم مساوی اند**

در هر متوازی الاضلاع، ضلع های رو به رو **با هم مساوی اند**

۳- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ **پاره خط OC** پس $\overline{OA} = \overline{OC}$ ①

پاره خط OB چطور؟ **پاره خط OD** پس $\overline{OB} = \overline{OD}$ ②

با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

در هر متوازی الاضلاع، **قطرها یکدیگر را نصف می کنند** ① ②

۲) کلاسی جواب: چون در متوازی الاضلاع زوایای مقابل مساوی اند
 و زوایای مجاور مکمل پس تمام زوایای قائمه است

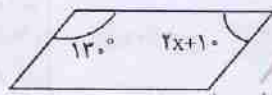
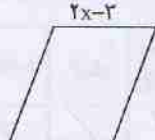
نیم سوال ۲ کار در کلاس : مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است

کار در کلاس

۱- شکل های زیر متوازی الاضلاع اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

$$x + 10 = 140$$

$$\Rightarrow x = 130$$



$$2x - 1 = 17$$

$$\Rightarrow 2x = 18$$

$$\Rightarrow x = 9$$

$$2x + 10 + 130 = 180$$

$$\Rightarrow x = 20$$

$$2x - 2 = 17 \Rightarrow x = 19.5$$



۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید که یکی از زوایای قائمه (۹۰ درجه) باشد. چرا زوایای دیگر آن هم حتماً قائمه اند؟ توضیح دهید.

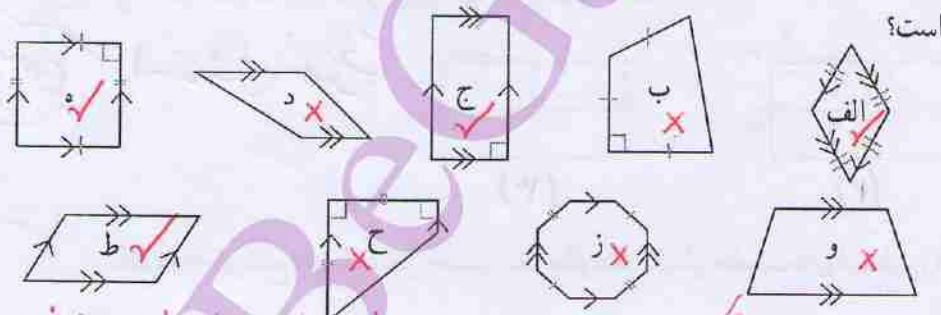
$$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 90$$

$$A = 90$$

$$(\hat{A} + \hat{D} = 180, \hat{A} = 90) \Rightarrow \hat{D} = 90$$

$$\hat{B} = 90$$

۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع



جواب: شکل های الف، ج، هـ و ط متوازی الاضلاع می باشند

۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده اند. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی های فعالیت قبل، مثال هایی برای هر یک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زوایای قائمه دارد. شکل «ج» و «هـ»

مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زوایای قائمه دارد. شکل «هـ»

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. شکل «الف» و «د»

۳- می دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.»

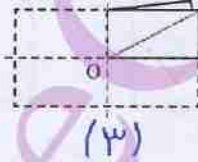
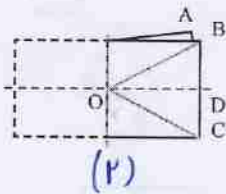
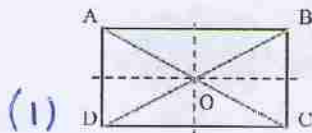
آیا می توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می کنند؟ چرا؟»

بله؛ چون هر لوزی، متوازی الاضلاع است

کار در کلاس

۱- با توجه به نمودار رو به رو، در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

متوازی الاضلاع	لوزی	مستطیل	مربع	
✓	✓	✓	✓	
✓	-	✓	-	
✓	✓	-	-	
✓	-	-	-	



۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.

دست‌ورزی

استدلال شمری

اثبات غیر رسمی

این فرمال

مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد.

• در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

است. چون پاره‌های OA و OC و OB و OD روی هم قرار گرفته‌اند

الف) در مستطیل همه زاویه‌ها با هم برابرند؛ چون روی هم قرار گرفته‌اند

ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون طبق شکل (۲) BC روی AD منطبق شده است

ج) در مستطیل قطرها با هم برابرند؛ چون نصف هر قطر روی نصف قطر دیگر افتاده است

$$OA = OB = OC = OD \Rightarrow AC = BD$$

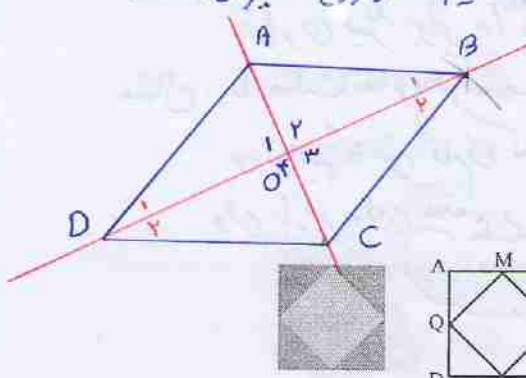
$$AB = DC \text{ است}$$

اگر شکل را روی خط تقارن دیگر تا بزنیم مشاهده می‌کنیم

۱) چرا زوایای روی هم قرار گرفته اند و با هم مساوی اند پس $90 = 4 \times 24$ ؛ لذا قطرهای برهم عمودند

۲) هر زاویه را پس به دو قسمت مساوی تقسیم شده پس قطرهای نیم ساز زاویه ها نیز می باشند

سوال ۲
تحسین



BD خط تقارن $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{D}_1 = \hat{D}_2$

دست ورزی \leftarrow تفکر خلاق

هر زاویه $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$

۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود. چهار ضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است.

دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهار ضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

هادی

مربع ABCD است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم. همه زاویه های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هر کدام 90° می شوند. در نتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

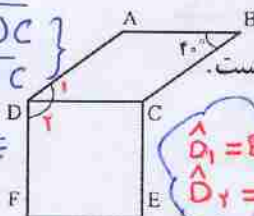
مبین

مربع ABCD است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم. همه ضلع های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس، این چهار ضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانم نتیجه بگیرم که MNPQ مربع است. **چهار ضلعی که ضلع هایش با هم برابر و زاویه هایش برابر 90° درجه باشد**

مربع نام دارد

① $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{DC}$
② $\Rightarrow \overline{CE} = \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CE}$



۱- چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی CDEF مربع است.
الف) چرا $\overline{AD} = \overline{CE}$ ؟ ب) چرا $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ؟
ج) زاویه ADF چند درجه است؟

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{EF}$

۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی رسم کنید و دور آن را ببرید.

این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در

مورد قطرهای لوزی به دست می آید. **بالا**

① قطرهای برهم عمودند
② قطرهای نیم ساز زاویه ها می باشند

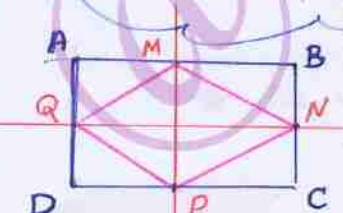
۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهار ضلعی به دست آمده

چه نوع چهار ضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید. **لوزی**

۴- درستی یا نادرستی هر یک از جمله های زیر را بررسی کنید.

- الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند. ✓
- ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند. ✗
- ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. ✗
- د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند. ✓

چون اکثر مستطیل را روی خط های تقارنش تا کنیم ضلع های این چهار ضلعی برهم منطبق می شوند



① خط تقارن MP $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{MQ}, \overline{PQ} = \overline{PN}$
② خط تقارن QN $\Rightarrow \overline{PQ} = \overline{MQ}, \overline{PN} = \overline{MN}$

چهار ضلع برابرند پس MNPQ لوزی است

نکته: زمانی می توانیم باید نوع کاشی، کاشی کاری کنیم که مجموع زاویه هایی که کنار هم

قرار می گیرند برابر ۳۶۰ باشد

مثال: با مثلث های هم نهشت، مربع های مساوی و سس صلعی ها هم نهشت منتظم

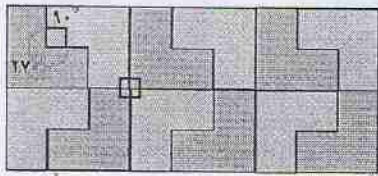
می توانیم کاشی کاری کنیم
ولی با پنج صلعی منتظم و ۱۱ صلعی منتظم همان طور که در فعالیت مشاهده می کنید این کار غیر ممکن است

زاویه های داخلی

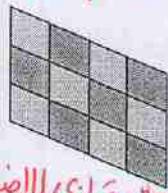


چون کاشی کاری جزئی از فرهنگ ماست از کاشی کاری استفاده

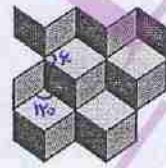
۱- در کاشی کاری، کاشی ها را طوری کنار هم قرار می دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است. ۱- روی هم قرار نگیرند ۲- فضای خالی بین آن ها نباشد



کاشی بصورت ال (با)



کاشی متوازی الاضلاع

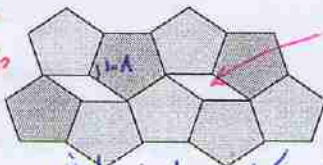


کاشی لوزی

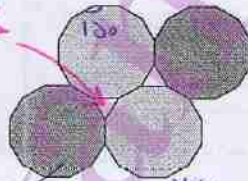
حالا به شکل های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

$$3 \times 108 = 324 < 360$$

$$4 \times 108 = 432 > 360$$



خالی



انجام نمی شود؟

$$150 \times 2 = 300 < 360$$

$$150 \times 3 = 450 > 360$$

چون در هیچ کدام ۳۶۰ مضرب یک زاویه این کاشی ها نمی باشد

۲- سطح زیر با مثلث هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.

مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.

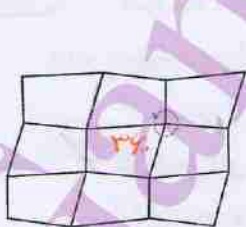
مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

زاویه های متناظر با هریک از زاویه های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

کار در کلاس همان طور که مشاهده می کنید مجموع سه زاویه \hat{A} و \hat{B} و \hat{C} برابر 180° است

در کدام شکل کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



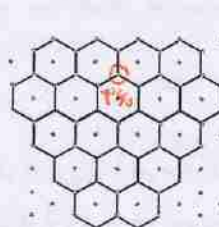
الف



ب



ج



د

در شکل های «الف»، «ب» و «د» همان طور که مشاهده می کنید

کاشی کاری باید نوع کاشی انجام شده است، چون مجموع زاویه های گوشه ها ۳۶۰ است

★ با هر سه صلعی هم نهشت یا چهار صلعی هم نهشت می توان کاشی کاری انجام داد

سعی کنیم دانش آموزان را هدایت کنیم تا رابطه‌ها را کشف کنند

فعالیت



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زاویه‌های داخلی آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	۳	۴
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های

داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ $5 \times 180 = 900$

یک هشت ضلعی چطور؟ چرا؟ $6 \times 180 = 1080$ چون با مجموع زاویه‌های داخلی ۶ تا مثلث برابر است

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی یک } n \text{ ضلعی} = (n - 2) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

تعداد ضلع‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	اندازه هر زاویه
۳	180°	$\frac{180}{3} = 60^\circ$
۴	360°	$\frac{360}{4} = 90^\circ$
۵	540°	$\frac{540}{5} = 108^\circ$
۶	720°	$\frac{720}{6} = 120^\circ$

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های یک n ضلعی منتظم باشد.

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی یک } n \text{ ضلع منتظم} = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

کار در کلاس



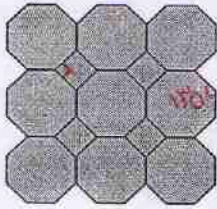
۱- مجموع زاویه‌های هر یک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هفت ضلعی منتظم $5 \times 180 = 900$ (ب) دوازده ضلعی منتظم $10 \times 180 = 1800$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم

$$1800 \div 12 = 150$$

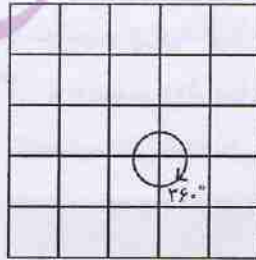
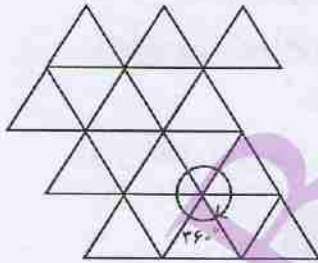
را حساب کنید.



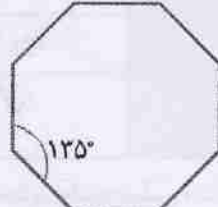
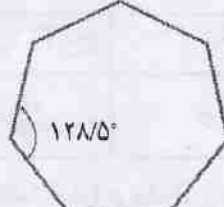
۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم کاشی کاری شده است. اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

$$\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135 \quad \text{و } 90$$

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.



$$360 \div 120 = 3, \quad 360 \div 90 = 4, \quad \text{و} \quad 360 \div 60 = 6$$

۴۴

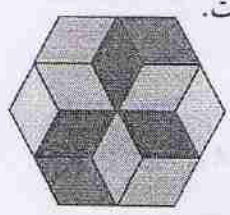
نکته: اگر زاویه n ضلعی منتظم یکی از مضرب‌های 360 باشد می‌توانیم از آن در کاشی کاری استفاده کنیم از سه و ۴ و ۶ ضلعی منتظم می‌توان در کاشی کاری توسط یک نوع کاشی استفاده کرد.

تمرین



$$\frac{18 \times 9}{1} = 162$$

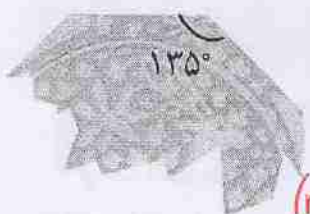
۱- اندازه هر یک از زاویه های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.



۲- در کاشی کاری روبه رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.

الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟ **لوزی**

ب) اندازه هر یک از زاویه های آن چقدر است؟ **۱۲۰°**



۳- شکل روبه رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.

حدس می زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

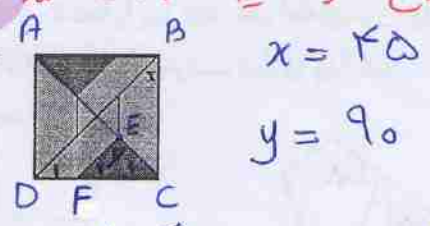
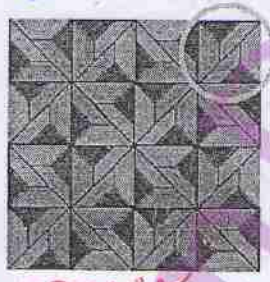
$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 135 \Rightarrow n=8$$

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.

شکل سمت راست قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های

مشخص شده را به دست آورید. $x = 45$ قطر BD مربع $ABCD \Rightarrow$

در مربع قطرها نیم ساز زاویه های پیری باشند



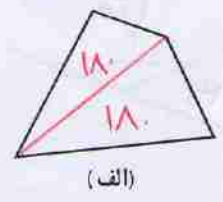
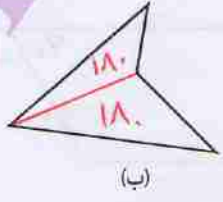
$x = 45$

$y = 90$

شکل
مربع با

اگر مثلث EFC مساوی الساق باشد $\Rightarrow EC = EF \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{F}_1 = 45 \Rightarrow y = 90$

۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



$2 \times 180 = 360$

$$\left. \begin{array}{l} \text{قطر } BD \Rightarrow \hat{D}_1 = 45 \\ (BD \parallel EF, DC) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}_1 = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{قطر } AC \Rightarrow \hat{C}_1 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{y} = 90$$

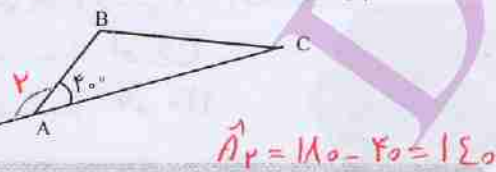
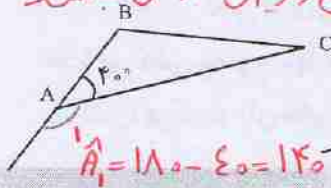
روشن دوم

زاویه‌های خارجی

فعالیت



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی اند؟ **هر دو همل زاوی می باشند**

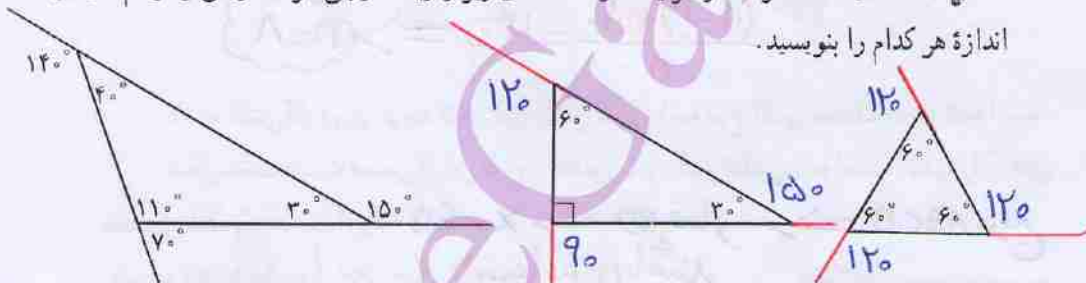


زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، زاویه خارجی آن رأس نامیده می‌شود.

کار در کلاس



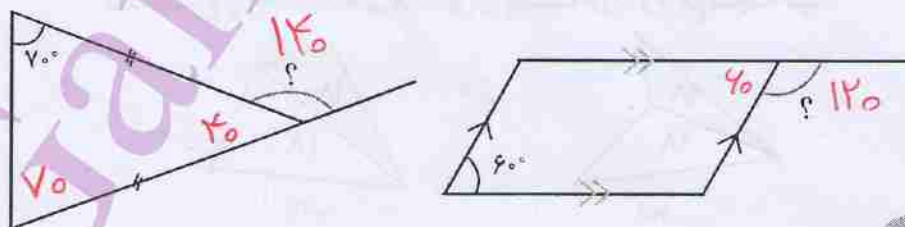
۱- الف) مانند نمونه، در هر یک از مثلث‌های زیر زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



ب) مجموع زاویه‌های خارجی هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟ **برابر ۳۶۰ است**
 ۲- چند ضلعی‌های زیر منتظم اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

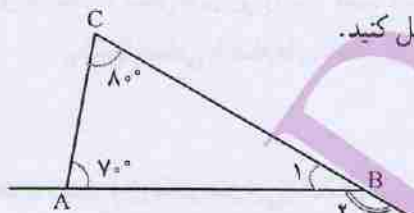
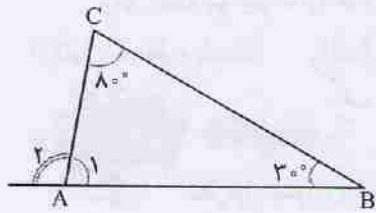


۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.





5- هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

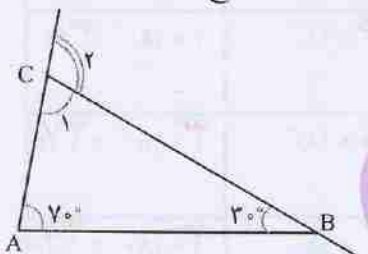
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

اثبات استقرایی

او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟
هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن



مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.

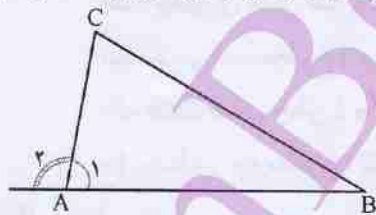
$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

اثبات منطقی

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟
یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این

ترتیب درستی حدس او را اثبات کند.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

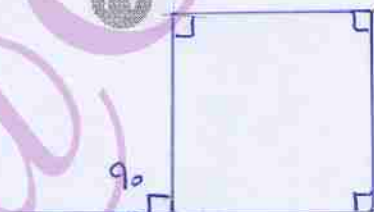
کار در کلاس



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

۲۷



$$90 + 90 + 90 = 270 \neq 90$$

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم، پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم. (چگونه؟) **مجموع آن دو را از ۱۸۰ کم می‌کنیم**

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی **سه زاویه**

یک زاویه

فعالیت



سطر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر ۳۶۰ است.

تعداد ضلع‌ها	شکل	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۵		$3 \times 180^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۶		$4 \times 180^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ **۳۶۰**

یک هشت ضلعی چطور؟ **۳۶۰**

ج) نوشته زیر چه مطلبی را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید. **مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی**

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی } n \text{ ضلعی} = n \times 180^\circ = 180^\circ n$$

۳۶۰ درجه است

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی } n \text{ ضلعی} = (n-2) \times 180^\circ = n \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ = 180^\circ n - 360^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه‌های خارجی } n \text{ ضلعی} = 180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$$

نکته: ۱) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{360}{n}$

۲) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} \quad \text{یا} \quad 180 - \frac{360}{n} = \text{اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی}$$

اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

الف) هشت ضلعی 360° درجه (ب) ده ضلعی منتظم 360° درجه

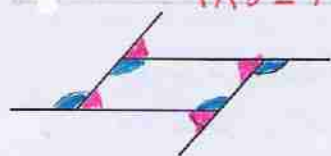
۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$360 \div 10 = 36$$

ب) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$180 - 36 = 144$$



۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع

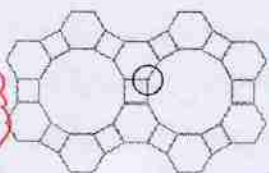
در شکل نشان داده شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

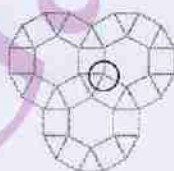


۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه

زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه‌ی مشخص شده در هر شکل 36° درجه است.



$$90 + 120 + 150 = 360$$

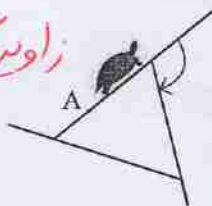


$$90 + 90 + 90 + 120 = 360$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.

زاویه‌ی خارجی



الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی می‌چرخد یا زاویه‌ی خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 360° درجه

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 360° درجه



د) در پاسخ قسمت قبل چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید. مجموع زوایای خارجی هر چند ضلعی

برابر 360° درجه است



●●●●● مرور فصل ۳ ●●●●●

توانیم مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- چندضلعی محدب
- چندضلعی مقعر
- مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم
- زاویه داخلی
- زاویه خارجی

در این فصل، روس‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل
- پیدا کردن زاویه‌های مساوی در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی الاضلاع
- تعریف مستطیل
- تعریف لوزی
- تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها
- خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

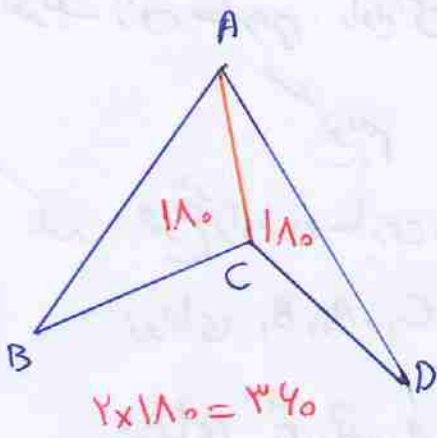
ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها متصّف	قطرها برابر	
✓	✓	✓	✓	×	متوازی الاضلاع
✓	✓	✓	✓	✓	مستطیل
✓	✓	✓	×	✓	لوزی
✓	✓	✓	✓	✓	مربع

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

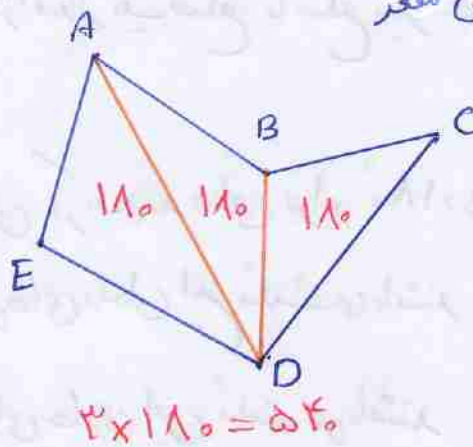
$$\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135 \quad \text{و} \quad 180 - 135 = 45 \quad \text{هر زاویه خارجی}$$

هر زاویه داخلی

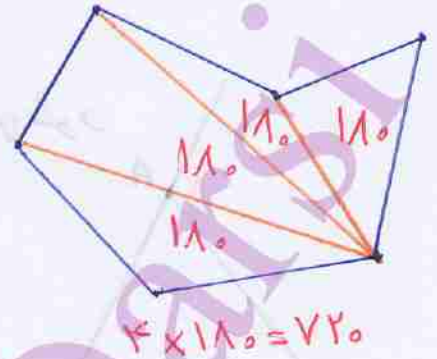
مجموع زاویای داخلی یک چند ضلعی متعین



$$2 \times 180 = 360$$



$$3 \times 180 = 540$$

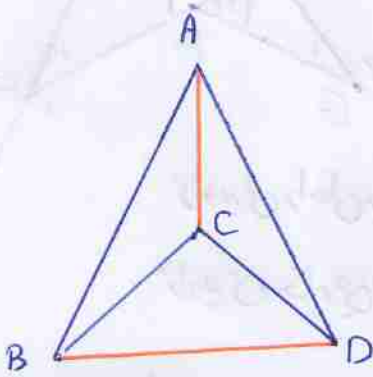


$$4 \times 180 = 720$$

$$(n-2) \times 180$$

مجموع زاویای داخلی یک n ضلعی متعین برابر است با $n > 4$

تعداد قطرهای در یک چند ضلعی متعین



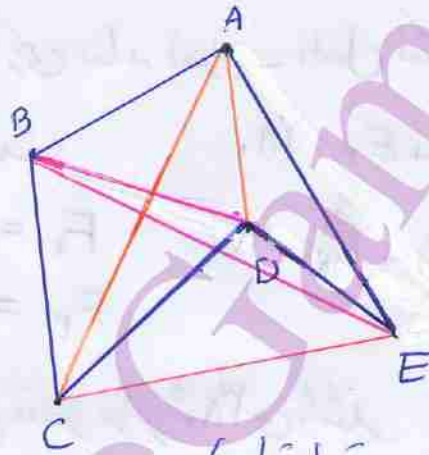
قطرها AC, BD

تعداد قطرها: 2

تعداد پاره‌خطها: 5

تعداد اضلاع: 3

$$5 - 3 = 2$$

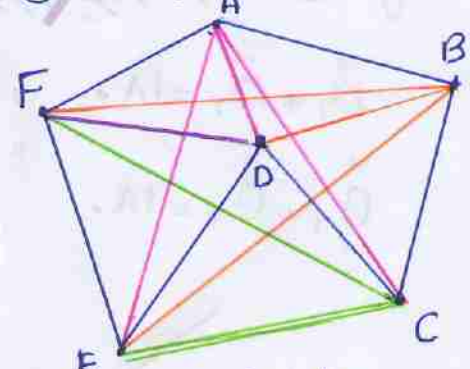


تعداد قطرها = 5

تعداد پاره‌خطها = 10

تعداد اضلاع = 5

$$10 - 5 = 5$$



تعداد قطرها = 9

تعداد پاره‌خطها = 15

تعداد اضلاع = 6

$$15 - 6 = 9$$

نتیجه: تعداد قطرهای در یک چند ضلعی برابر است با اختلاف تعداد پاره‌خطها و تعداد اضلاع

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} =$$

تعداد قطرهای در یک n ضلعی برابر است با:

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

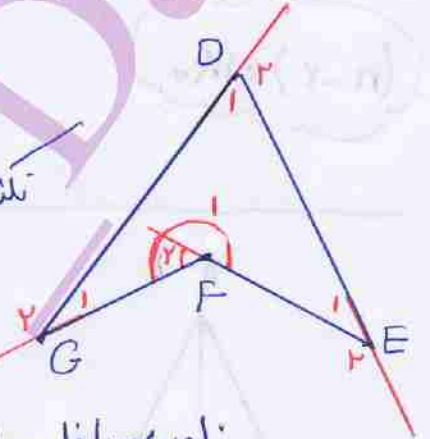
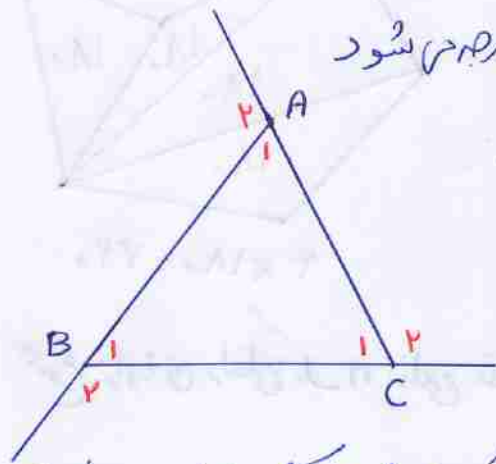
تعریف زاویه خارجی: زاویه‌ای که از امتداد یک ضلع با ضلع دیگر یک چند ضلعی بدست می‌آید زاویه خارجی

گوئیم

نکته: مجموع زاویه‌های خارجی و داخلی در یک چند ضلعی برابر 180° در هر صورت

زاویه‌های A_1, B_1, C_1 زاویه‌های داخلی این مثلث می‌باشند

زاویه‌های A_2, B_2, C_2 زاویه‌های خارجی این مثلث می‌باشند



نکته: در چند ضلعی‌ها مقعر در زاویه‌ای که از 180° بزرگ تر است زاویه‌ی

خارجی بنا به تعریف داخل شکل قرار می‌گیرد و اندازه‌ی آن منفی

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \quad \text{و} \quad E_1 + E_2 = 180^\circ$$

$$\hat{G}_1 + \hat{G}_2 = 180^\circ$$

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 = 180^\circ$$

F_1 = زاویه‌ی داخلی می‌باشد

F_2 = زاویه‌ی خارجی است

مجموع زاویه‌های خارجی چند ضلعی مقعر برابر 360° می‌باشد

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + \hat{E}_1 + \hat{F}_1 = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

نکته: چون مقدار \hat{D}_2 منفی است پس $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$

چون زاویه خارجی داخل شکل است پس منفی است (یعنی مقدار زاویه خارجی منفی است)

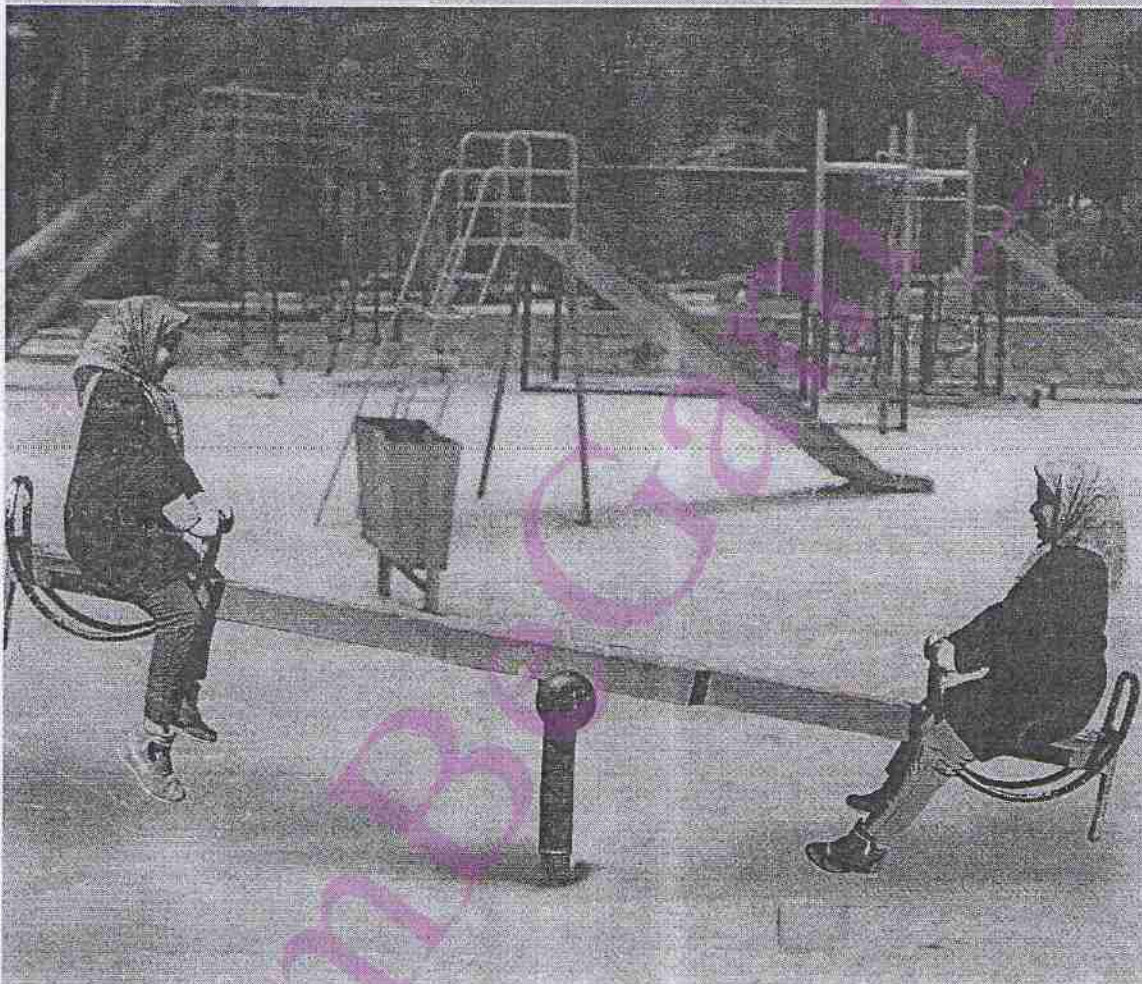
$$(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) + (C_1 + C_2) + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + (E_1 + E_2) + (F_1 + F_2) = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 + \hat{E}_2 + \hat{F}_2 = 360^\circ$$

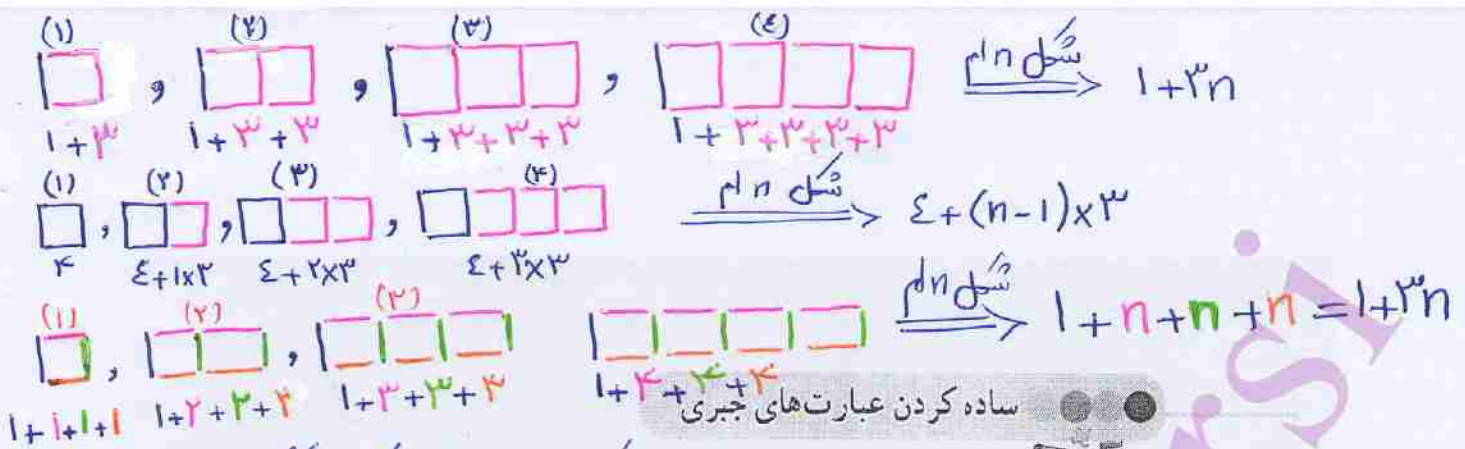
۴

فصل

جبر و معادله



اگر دو کفه یک ترازو روبه روی هم قرار گیرند، می گویند ترازو در حال تعادل است. اگر از یک کفه ترازو چیزی را برداریم یا به آن چیزی اضافه کنیم، همین کار را باید در کفه دیگر نیز انجام دهیم تا جبران شود و ترازو در حالت تعادل بماند. کلمه جبر هم خانواده جبران نیز هست و معادله به معنی برقرار ماندن تعادل در دو طرف تساوی است.



تبدیل عبارت‌های کلامی به عبارت‌های جبری

۱- در سال گذشته، با درس توان آشنا شدید. عبارت‌های کلامی را به صورت جبری و عبارت‌های جبری را به صورت کلامی بنویسید.

- هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می‌شود. $a^0 = 1 (a \neq 0)$
- یک به توان هر عدد، برابر یک می‌شود. $1^a = 1$
- صفر به توان هر عدد غیر صفر، برابر صفر می‌شود. $0^a = 0 (a \neq 0)$
- در ضرب دو عبارت توان دار با پایه‌های مساوی، یک پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.
- مربع یا مجذور عدد a $\leftarrow a^2$
- $b^a \times c^a = (bc)^a$

۲- الف) در عبارت جبری $2n - 1$ به جای n عددهای طبیعی $(1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

ب) در عبارت جبری $2m + 1$ به جای m عددهای حسابی $(0, 1, 2, 3, \dots)$ قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید.

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...

معرفی اعداد حسابی

تفاوت در ورودی‌هاست \Rightarrow آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟ **خیر**، هر دو اعداد فرد طبیعی را می‌سازند (خرد و هر دو فرد)

۳- شکل‌های زیر با چوب کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده‌اند. شکل n ام با چند چوب کبریت ساخته می‌شود؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

در اینجا پاسخ چهار دانش‌آموز را می‌بینید. توضیح دهید هر کدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست آورده است. سپس مانند نمونه‌ها، شکل‌هایی رسم کنید که روش مانهوش را مشخص کند و بین شکل‌ها و عبارت‌های جبری رابطه برقرار کنید.

پاسخ ماهرخ: $3n + 1$

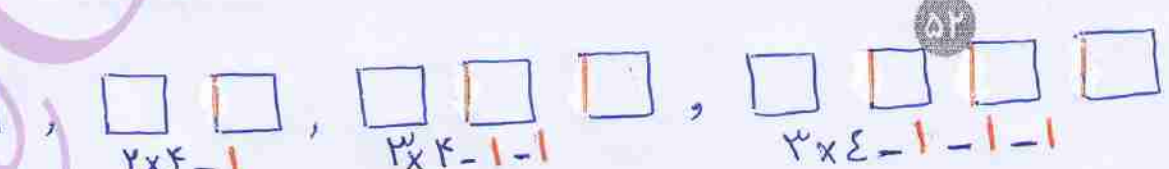
پاسخ مانهوش: $4 + (n-1) \times 3$

پاسخ ماهرو: $1 + n + n + n$

پاسخ مهتاب: $n + 1 + (n \times 2) \leftarrow 2 + (1 \times 2), 3 + (2 \times 2), 4 + (3 \times 2), 5 + (4 \times 2)$

پاسخ‌های مانهوش، ماهرو و مهتاب را ساده کنید. آیا با پاسخ ماهرخ یکی هستند؟ **بله**

آیا شما هم روشی برای شمارش چوب کبریت‌ها و یافتن جمله n ام دارید؟ **بله**



$$4n - (n-1) = 4n - n + 1 = 3n + 1$$

ضلع‌های حذف شده \rightarrow

تعدادش هر روز کمتر می‌شود

کاربرد ساده در الگوهای جبری

دو جمله را متشابه گوئیم اگر (۱) قسمت حرفی مثل هم باشد

(۲) توان حروف متناظر مساوی باشد

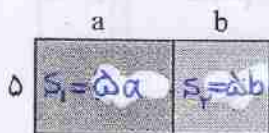
دو جمله $5x^2y$ و $7xy^2$ متشابه نمی باشند

دو جمله $\sqrt{2}y^2z^3x$ و $\frac{3}{5}xy^2z^3$ متشابه نمی باشند

کار در کلاس



۱- در سال گذشته، ضرب یک عدد در پرانتز را با شکل زیر یاد گرفتید.



$$5(a+b) = 5a + 5b$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$5(a+b) = 5a + 5b$$

این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید.

عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2(2x-1) + 2(x+3) = 4x - 2 + 2x + 6 = 6x + 4$$

$$-2(y-1) + 2(1-y) = -2y + 2 + 2 - 2y = -4y + 4$$

$$-(a-b+1) + 2(2a+b-3) = -a + b - 1 + 4a + 2b - 6 = 3a + 3b - 7$$

۲- شما همچنین جمع و تفریق جمله های متشابه (جمله هایی که همه قسمت های حرفی

انها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله های متشابه را پیدا کنید.

$$2x^2y \quad 7yx^2 \quad 2yx \quad -5x \quad +5y \quad -3xy \quad +2x \quad y$$

بالا

فعالیت



۱- حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده کردن

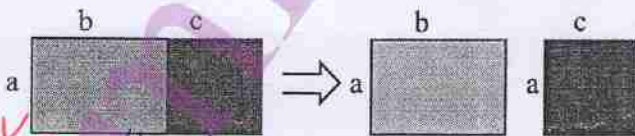
عبارت های توان دار استفاده می کنید؟ توضیح دهید. اگر در ضرب اعداد توان دار پایه ها مساوی باشند توان از

$$(-3ba)(2a^2b^3) = -6a^3b^4 \quad a \times a^2 = a^3 \quad b \times b^3 = b^4$$

$$2a \times 2b = 4ab \quad -6a \times 2a^2 = -12a^3 \quad 2ba \times 2b^2 = 4b^3a$$

توان ها را جمع می کنیم

۲- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید.



$$S = a(b+c) \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$$

$$S_1 = ab \quad S_2 = ac$$

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow a(a+b) = ab + ac$$

با توجه به نتیجه ای که گرفته اید، ضرب های زیر را انجام دهید.

$$2a(a+b) = 2a^2 + 2ab$$

$$2x(2x-1) = 4x^2 - 2x$$

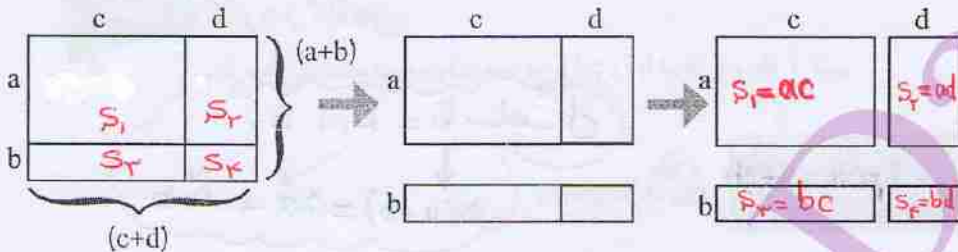
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

مساحت کل

طول \times عرض
مساحت کل

مساحت هر چیز به صورت جداگانه

۳- با توجه به شکل و مساوی بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید.



$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

برای یافتن حاصل ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را در هم ضرب و سپس

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

$$(x-1)(x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$$

$$(2x-2)(2x-2) = 4x^2 - 9x - 4x + 4 = 4x^2 - 13x + 4$$

ساده کنید.
انجام بدهید

کارد در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$4ax + a^2 + ax = 5ax + a^2$$

$$2ab + b^2 - a^2 - 5ab = -2ab + b^2 - a^2$$

$$2a - 8xy + 2xy = 2a - 6xy$$

$$9x + 7x - 8x - 2 + 11x + 5 = 19x + 2$$

$$5(-2a) = -10a \quad \frac{3}{2}(4b) = 6b$$

$$(-7)(-4x) = +28x \quad (-\frac{4}{5})(2y) = -\frac{8}{5}y$$

$$3a(-5x) = -15ax \quad -\frac{1}{2}a(3b) = -\frac{3ab}{2}$$

$$(-a)(-b) = +ab \quad (-a)(-a) = +a^2$$

$$2x(2a-b) = 4ax - 2bx$$

$$2y(2x-5y) = 4xy - 10y^2$$

$$(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$$

$$(a+6)(a-6) = a^2 - 36$$

۲- عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $4 \times 10 + 7$ یا $40 + 7$ نوشت. به همین ترتیب، عددهای زیر را

به صورت گسترده بنویسید.

$$92 = 9 \times 10 + 2$$

$$75 = 7 \times 10 + 5 \quad 23 = 2 \times 10 + 3$$

$$\overline{ab} = 10a + b$$

عدد دورقمی ab را با نماد \overline{ab} نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

بسط اعشاری عدد اعشاری

شماره جمله	۱	۲	۳	...	n
عدد	۱	۴	۹	...	n^2
رابطه	1^2	2^2	3^2	...	n^2

شماره جمله	۱	۲	۳	...	n
عدد	۱	۸	۲۷	...	n^3
رابطه	1^3	2^3	3^3	...	n^3

معرفی مقلوب در عدد



استدلال میز

۱- عدد دورقمی ab را در نظر بگیرید. عدد ba را مقلوب ab می گویند! چون در آن جای رقم ها عوض شده است. مجموع یک عدد و مقلوبش را به صورت گسترده بنویسید و حاصل جمع را ساده کنید.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a$$

نتیجه: حاصل جمع عدد و مقلوب آن بر ۱۱ بخش پذیر است

↑ توضیح در بالا

$$= 11a + 11b = 11(a+b)$$

۲- جمله n ام هر یک از الگوهای جبری زیر را بنویسید.

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$$

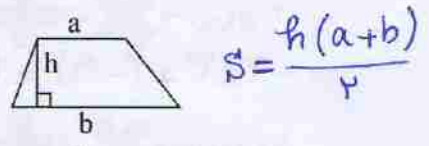
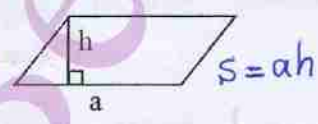
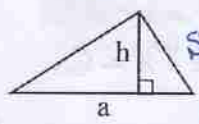
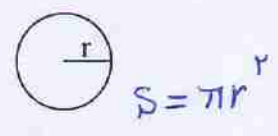
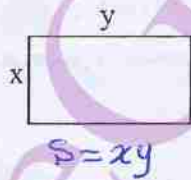
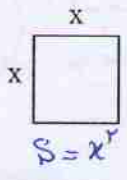
$$1, 8, 27, 64, 125, \dots, n^3$$

۳- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+3)(a+3) = a^2 + 6a + 9 \quad (a-b)(a-b) = a^2 + b^2 - 2ab \quad (a+3)(a-3) = a^2 - 9$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2x-3y)(2x-3y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

۴- مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.



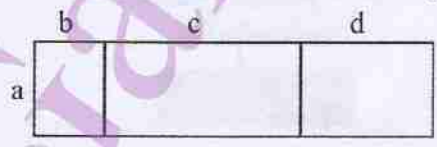
۵- دانش آموزی عبارت های جبری زیر را به صورت نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید.

$a(b+c) = ab+c$ (الف) $ab+ac$ ضرایب درست

$2x+3y-(2x-y) = 2x+3y-2x-y = 2y$ (ب) $2x+3y-2x+y$ ضرایب درست

$= 4y$ ضرب نمی شود

۶- با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.



$$a(b+c+d) = ab+ac+ad$$

بیجا کردن مقدار یک عبارت جبری

مفاهیم معادله = مفاهیم تابع

فقالبت



۱- ماشین عددساز \times عدد ورودی را در عدد داخل ماشین ضرب می کند.
 ماشین عددساز $+$ عدد ورودی را با عدد داخل ماشین جمع می کند. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید یا عدد داخل ماشین را بنویسید.

7 : ورودی \rightarrow -3 \rightarrow خروجی: $7 \times (-3) = -21$ a : ورودی \rightarrow 2 \rightarrow خروجی: $a + 4$

4 : ورودی \rightarrow 5 \rightarrow خروجی: $4 \times 5 = 20$ 0 : ورودی \rightarrow -5 \rightarrow خروجی: $0 + (-5) = -5$

b : ورودی \rightarrow 2 \rightarrow خروجی: $b \times 2 = 2b$ c : ورودی \rightarrow 0 \rightarrow خروجی: $c + 0 = c$

8 : ورودی \rightarrow 0 \rightarrow خروجی: 0 13 : ورودی \rightarrow -8 \rightarrow خروجی: 5 $13 + (-8) = 5$
 $8 \times 0 = 0$

۲- خروجی یک ماشین را به ورودی یک ماشین $+$ می بندیم و یک ماشین ترکیبی می سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید.

ترکیب دو ماشین

2 : ورودی \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow -5 \rightarrow خروجی: 1 x : ورودی \rightarrow 3 \rightarrow $3x$ \rightarrow -5 \rightarrow خروجی: $3x - 5$
 $2 \times 3 + (-5) = 1$ $3x + (-5) = 3x - 5$

7 : ورودی \rightarrow -1 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow خروجی: 1 x : ورودی \rightarrow -1 \rightarrow $-x$ \rightarrow 8 \rightarrow خروجی: $-x + 8$
 $7 \times (-1) + 8 = -7 + 8 = 1$

5 : ورودی \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 53 \rightarrow خروجی: 53 x : ورودی \rightarrow 10 \rightarrow $10x + 3$ \rightarrow خروجی: $10x + 3$
 $5 \times 10 + 3 = 53$

به این ترتیب، می توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه، مانند مثال زیر، بنویسیم:

x : ورودی \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow خروجی: y

عملکرد ماشین ترکیبی

$y = 7x + 4$

کار در کلاس



۱- عدد x به ماشین‌های زیر وارد و عدد y از آنها خارج می‌شود. با توجه به کاری که

این ماشین‌ها انجام می‌دهند، عددهای خروجی را بنویسید. $3x(-2) - 1 = -7$

$$-2 \rightarrow \boxed{3x-1} \rightarrow -7$$

$$4 \rightarrow \boxed{-2x+1} \rightarrow -2 \times 4 + 1 = -8 + 1 = -7$$

$$0 \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x+1} \rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 1$$

$$\frac{4}{7} \rightarrow \boxed{-7x+2} \rightarrow -7 \times \frac{4}{7} + 2 = -4 + 2 = -2$$

۲- با توجه به جدول‌های زیر و رابطه x و y ، جاهای خالی جدول‌ها را پر کنید:

x	y
1	4
2	7
5	14

$$y = 3x + 1$$

x	y
3	15
-2	-10
-4	-20
5	25

$$y = 5x$$

x	y
4	-3
-2	-9
7	0
-7	-14

$$y = x - 7$$

x	y
4	5
-2	-7
0	1/5
4	5

$$y = 2x - 3$$

۳- با توجه به عددهای ورودی و خروجی، در هر ردیف کاری را که ماشین

انجام می‌دهد حدس بزنید.

$$3 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 6 \text{ و } 7 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 14 \text{ و } 5 \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 10 \quad y = 2x$$

$$5 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow 8 \text{ و } 11 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow 14 \text{ و } 4 \rightarrow \boxed{+3} \rightarrow 1 \quad y = x + 3$$

شرح استدلال‌های صبری



۱- به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، هر عدد زوج را می‌توان

به صورت $2 \times n$ نشان داد.

2	4	6	8	10	n
↓	↓	↓	↓	↓	↓
					$2n$
2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	

نتیجه: هر عدد زوج را می‌توان به صورت $2n$ (عدد طبیعی) نمایش داد

۲- عددهای زوج زیر را به صورت $2n$ (n یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید.

$$\begin{array}{ccccc} 44 & 80 & 700 & 10000 & 2000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 22 & 2 \times 40 & 2 \times 350 & 2 \times 5000 & 2 \times 1000 \end{array}$$

۳- در عبارات های زیر به جای حروف m, k, a و اعداد طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا

عددهای حاصل، زوج اند؟ **آری** هر عدد زوج را می توان به صورت $2n$ یا $2k$ یا $2a$ یا $2m$... نمایش داد

$$\begin{array}{cccccc} 2 \times 5 & 2 \times 7 & 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 100 & 2 \times 500 \\ 10 & 14 & 20 & 30 & 200 & 1000 \end{array}$$

به طریقی m, a, k, n اعداد طبیعی باشند

پاسخ باز

۴- a, b, c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سوال های زیر پاسخ دهید:

- آیا عبارت $2b$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ **بله**
- آیا عبارت $4c$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟ **بله**
- آیا عبارت $2ab$ یک عدد زوج را نشان می دهد؟ چرا؟ **بله**

$4c = 2 \times (2c) \Rightarrow$ **دو عدد زوج**

$2ab \Rightarrow$ **دو عدد زوج**

۵- آیا حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟ **بله**

برای پاسخ دادن به این سوال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید.

$$\begin{array}{ccc} 4 \times 2 = 8 & 8 \times 4 = 32 & 10 \times 20 = 200 \\ 30 \times 40 = 1200 & 14 \times 10 = 140 & 8 \times 8 = 64 \end{array}$$

برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله بالا درست است، دو عدد زوج را به صورت $2m$ و $2n$ در نظر می گیریم و حاصل ضرب آنها را می نویسیم.

$2m \times 2n = 2(m \times 2 \times n) \Rightarrow$ **عددی زوج است**

چگونه این تساوی ثابت می کند که حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.

حاصل ضرب **دو عدد طبیعی در عدد ۲ یک عدد زوج می سازد**

کار در کلاس

مانند سوال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

$$\begin{array}{ccc} 3 \times 4 = 12 & 7 \times 20 = 140 & \text{زوج است.} \\ \text{فرد} \times \text{زوج} & \text{زوج} \times \text{فرد} & \end{array}$$

(الف) چند مثال بزنید. (ب) به صورت جبری ثابت کنید: $2m - 1 =$ عدد فرد

عدد زوج = $2n$
حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد = $2n \times (2m - 1)$

$= 2(2nm - n) \Rightarrow$ **زوج است**

حاصل ضرب هر عدد طبیعی در عدد ۲، عددی زوج است

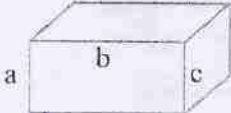
M = جرم جسم و واحد آن در سیستم SI، نیوتون است

g = شتاب جاذبه‌ی زمین که مقدار آن برابر است با $10 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$

زمان (مختار زمان)

h = ارتفاع از سطح پتانسیل که واحد آن در سیستم SI، متر باشد

$$U = mgh \Rightarrow U \text{ واحد} = \text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Joule}$$



۱- مساحت کل مکعب مستطیل روبه‌رو

را به صورت جبری بنویسید. $S = 2(ab + ac + bc)$

\Rightarrow اگر $a = 2$ و $b = 6$ و $c = 3$ باشند، مساحت کل چقدر می‌شود؟ $S = 2(12 + 6 + 18) = 72$

۲- مساحت قاعده منشوری 20° و ارتفاع آن ۴ است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه

جبری حجم منشورها به دست آورید. واحد مکعب $\Rightarrow V = 20 \times 4 = 80$ ارتفاع $V = S_{\text{قاعده}} \times h$

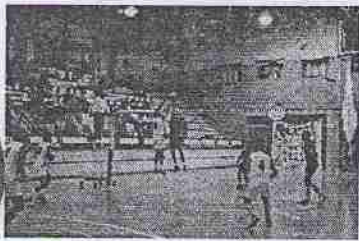
۳- قاعده‌های دوزنقه‌ای ۴ و ۷ سانتی متر و ارتفاع آن ۲ سانتی متر است. مساحت این دوزنقه

را پس از نوشتن رابطه جبری مساحت دوزنقه حساب کنید. $S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(4+7) \times 2}{2} = 11$

۴- آیا $x = 2$ و $x = -2$ پاسخ معادله $x^2 = 4$ هستند؟ چرا؟ $2^2 = 4$ و $(-2)^2 = 4$

۵- طول یک لوله x متر است. طول لوله دیگر y برابر لوله اول است. طول لوله دوم را

به صورت جبری بنویسید. $\text{طول لوله دوم} = yx$



۶- یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض

و 2x متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان

دهید. اگر عرض این زمین ۹ متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

$$S = 2x \times x \Rightarrow S = 2x^2$$

۷- در درس علوم یاد می‌گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک جسم، از رابطه $U = mg \cdot h$

به دست می‌آید که در آن، U انرژی پتانسیل، m جرم جسم، g شتاب زمین و h ارتفاع جسم است. در صورتی

که جسمی به جرم ۲۵ کیلوگرم تا ارتفاع ۴ متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین

را 10 فرض کنید.) $U = 25 \times 10 \times 4 \Rightarrow U = 1000$

۸- با توجه به رابطه x و y، مقدار y را برای x‌های مختلف پیدا کنید.

x	y
۱	-۲
۰	-۳
۲	-۱
-۱	-۳

$y = x - 3$

x	y
۱	-۱
۰	-۱
۲	-۳
-۱	۳

$y = -2x + 1$

x	y
۲	۴
-۲	۴
۰	۰
-۱	۱

$y = x^2$

توضیح
بالای صفحه

$$\frac{1393 \times 7 + 1393 \times 2}{1393 \times 5 - 1393 \times 2} = \frac{1393(7+2)}{1393(5-2)} = \frac{9}{3} = 3$$

مثال مهم
کابرد فاکتورگیری

با استفاده از زنجیره تجزیه و تبدیل
به ضرب ساده تر آموزش دهید

تجزیه عبارت های جبری
فاکتورگیری

۱- در دوره دبستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عددها، می توان کسر را ساده کرد.

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

کسرهای زیر را مانند نمونه ساده کنید.

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3} \quad \frac{15}{25} = \frac{3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{3}{5}$$

۲- بعضی از عبارت های جبری را نیز می توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت:

$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{خاصیت توزیع پذیری}$$

عکس توزیع پذیری را تجزیه کردن یا فاکتورگیری می نامیم *

$$ab + ac = a(b + c)$$

(تبدیل به ضرب) تجزیه کردن

با توجه به تساوی بالا، عبارت ها را به ضرب تبدیل کنید.

$$2ab + 4a^2b^3 = 2ab(1 + 2ab^2)$$

$$x + xy = x(1 + y)$$

$$5ab + 8ac = a(5b + 8c)$$

$$3a + ab = a(3 + b)$$

$$4a^2 + 2ab = 2a(2a + b)$$

$$5ab + 3b = b(5a + 3)$$

۳- برای تجزیه یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند عبارت را پیدا می کنیم و

بیرون براتر می نویسیم. برای تشخیص قسمت مشترک، می توان عبارت ها را به صورت ضرب نوشت:

$$(9, 9) = 3 \quad (x^2, x^3) = x^2 \quad (y^3, y^2) = y^2$$

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 2 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y \times y + 3 \times 2 \times x \times x \times x \times y \times y$$

$$= 2 \times 2 \times x^2 \times xy^2 \times y + 3 \times 2 \times x^2 \times xy^2 \times x = 3x^2y^2(2y + 3x) = 3x^2y^2(2y + 3x)$$

با توجه به تساوی بالا، عامل مشترک دو جمله عبارت جبری چیست؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله اول عبارت ساخته می شود؟

با ضرب کردن چه عبارتی در جمله مشترک، جمله دوم عبارت ساخته می شود؟

حالا این تساوی را کامل کنید.

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 3x^2y^2(2y + 3x)$$

با باز کردن جمله = اجازه دهید تا دانش آموز کشف کند چرا درید عبارت

توان کمتر عامل مشترک است

$$6x^2y^2 + 9x^3y^2 = 2 \times 2 \times x^2 \times x \times x \times y \times y \times y + 3 \times 2 \times x^2 \times x \times x \times y \times y$$

$$= 3x^2y^2(2y + 3x) = 3x^2y^2(2y + 3x)$$

$$ab + ac = a(b+c) \quad , \quad ab - ac = a(b-c)$$

$$\Delta ab + \Gamma abc = \Delta ab + \Gamma abc = ab(a+\Gamma c)$$

$$4ab + 3a^2 = 2 \times 2ab + 3aa = 3a(2b+a)$$

$$2x^2y + 4xy^2 = 2 \times 2xxy + 4 \times 2xyy = 2xy(2x+2y)$$

$$8x^2y^2 - 2xy^2 = 2 \times 2xxy^2 - 2xy^2 = 2xy^2(2xy-1)$$

۴- با توجه به سوال بالا، عبارات‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$ab+ac = a(b+c)$$

$$ab-ac = a(b-c)$$

$$\Delta ab + \Gamma abc = ab(\Delta + \Gamma c)$$

$$4ab + 3a^2 = 3a(2b+a)$$

$$2x^2y + 4xy^2 = 2xy(2x+2y)$$

$$8x^2y^2 - 2xy^2 = 2xy^2(2xy-1)$$

۵- ابتدا صورت و مخرج کسر را به ضرب دو عبارت تجزیه و سپس آن را ساده کنید.

$$\frac{ab+ac}{ab-ac} = \frac{a(b+c)}{a(b-c)} \quad (a \neq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a^2-a}{ab-b} = \frac{a(a-1)}{b(a-1)} = \frac{a}{b} \quad (a \neq 1, b \neq 0)$$

$$= \frac{b+c}{b-c}$$

کار در کلاس



توضیحات پایین

$$x^2a^2 - y^2a^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$22xy^3 - 35x^2y^2 = 7xy^2(4y - 5x)$$

$$2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z = 2^x(2^y - 2^z)$$

$$-a^4 + 2a^3 = a^3(-1 + 2a)$$

۲- با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید. ($a \neq b, ab \neq 0$)

$$\frac{a^2b - ab^2}{a^2b^2 - a^2b^2} = \frac{ab(a-b)}{a^2b^2(a-b)} = \frac{1}{ab}$$

۳- آیا تساوی $-a-b = -(a+b)$ همواره برقرار است؟ **بله**

۴- چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟

عدد زوج: $2n$

عدد زوج دیگر: $2m$

$$\text{مجموع دو عدد زوج: } 2n + 2m = 2(n+m) \Rightarrow \text{زوج است}$$

خواندنی

خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود برای عددهای علامت‌دار اصطلاحاتی به کار برده است. برای مثال

۵- را «بنج ناقص» و +۵ را «بنج زاید» خوانده است. با اینکه در زمان خوارزمی کاربرد حروف متداول

نموده است، او در حل معادله‌های جبری، مجهول را «شیشی» و مجهول مجهول را «مال» نامیده است.

سوال ۱

$$2) \quad x \times 2^a - y \times 2^a = 2^a(x-y)$$

$$22xy^3 - 35x^2y^2 = 7x \sqrt{x} \times xy^2y - 5x \sqrt{x} \times x \times y^2 = 7xy^2(4y - 5x)$$

$$2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z = 2^x \times 2^y - 2^x \times 2^z = 2^x(2^y - 2^z)$$

$$-a^4 + 2a^3 = (-1) \times a^4 + 2a^3 \times a = a^3(-1 + 2a)$$

نکته

جمع توان در هر جمله برابر ۳ است

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3ab^2 + a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + a^0b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + a^0b^6$$

۱- تفاوت x^2 و $2x$ چیست؟ در x^2 ، x در x ضرب می شود و در $2x$ مقدار x دو برابر می شود

$$x^2 = x \times x$$

$$2x = 2 \times x$$

۲- مانند نمونه، طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$(-5)^2 = -5 \times (-5) \quad a^2 = a \times a$$

$$\square^2 = \square \times \square$$

$$\triangle^2 = \triangle \times \triangle \quad (a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$

۳- جدول زیر را برای مقادیر مختلف a و b کامل کنید.

a	1	2	0	2	-1
b	1	0	-3	4	-2
$(a+b)^2$	$2^2=4$	$2^2=4$	$(-3)^2=9$	$6^2=36$	$(-3)^2=9$
a^2+b^2	$1+1=2$	$4+0=4$	$0+9=9$	$4+16=20$	$1+4=5$

$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

از مقایسه دو ردیف آخر، چه نتیجه ای می گیرید؟

۴- مانند نمونه، عبارت ها را ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

کار در کلاس

۱- مانند نمونه، تساوی ها را کامل کنید.

$$x^2 = x \times x \times x$$

$$-x^2 = -x \times x$$

$$(-x)^2 = (-x) \times (-x)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \quad (x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$

۲- چرا $ba = ab$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می شود؟) جای خالی (تعوض بپذیر)

۳- عبارت زیر را ساده کنید. \leftarrow چون ضرب جای خالی دارد

$$-(a+b)^2 = -(a+b)(a+b) = -a^2 - 2ab - b^2$$

آیا منفی به توان ۲ می رسد؟ چطور؟ چون توان مال $(a+b)$ است

و علامت منفی به توان نمی رسد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نکته

$$2n + (2m+1) = 2n + 2m + 1 = 2(n+m) + 1$$

زوج فرد عددی فرد

دو برابر یک عدد طبیعی به علاوه یک یک عددی فرد است

$$(2k+1) + (2t+1) = 2k + 2t + 2 = 2(k+t+1) \Rightarrow \text{مضرب ۲} \Rightarrow \text{زوج است}$$

عدد فرد عدد فرد عددی طبیعی

حوا - ۳

تمرین **چین عددی در قرن بیستم می شوند (هر دو جمله)**

- ۱- آیا $b-a = -(a-b)$ است؟ چرا؟ یا نه
- ۲- چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می شود؟
- ۳- مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می شود یا فرد؟ چرا؟
- ۴- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$-(a-b) = -a+b$$

$$\text{زوج} + \text{فرد} = \text{فرد}$$

بالا

$$(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x+7)(x-7) = x^2 - 49$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$a^2 + b^2 - (a-b)^2 = +2ab$$

$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

۵- با توجه به بیگان های رسم شده، عبارت را ساده کنید.

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

۶- نشان دهید که تفاضل هر عدد دو رقمی از مقلوبش، مضرب ۹ است.

۷- اگر دو براتر زیر را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟ **۹ جمله $3 \times 3 = 9$**

$$(a+b+c)(z+y+x) = az + ay + ax + bz + by + bx + cz + cy + cx$$

جمله ۳ جمله ۳

خواندنی

خوارزمی

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی حدود سال ۱۳۵ هجری قمری در شهر خوارزم (که امروز خیوه نامیده می شود) متولد شد. وی یکی از مفاخر علمی ایران و جهان و از بزرگ ترین دانشمندان مسلمان در قرن های گذشته است.

یکی از آثار خوارزمی کتاب جبر و مقابله است. این کتاب نخستین کتابی است که نام جبر را بر خود دارد و نام جبر به عنوان بخشی از ریاضی، از نام این کتاب گرفته شده است. از این نظر، خوارزمی را می توان یکی از بنیان گذاران علم جبر دانست. امروز جبر به شاخه ای مهم از ریاضی گفته می شود.

کتاب حساب خوارزمی در قرن دوازدهم هجری به زبان های اروپایی ترجمه شد و به «الخوارزمی» یا «الگوریسم» که از نام «الخوارزمی» گرفته شده بود، شهرت یافت. بعدها الگوریسم یا الگوریتم (Algorithm) به معنای فن محاسبه (یعنی حساب) به کار رفت. امروزه الگوریتم به روشی از محاسبه گفته می شود که در آن محاسبه مرحله به مرحله انجام می گیرد و محاسبه هر مرحله به مراحل قبلی بستگی دارد.

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a)$$

$$= 10a + b - 10b - a$$

$$= 9a - 9b = 9(a-b)$$

مضرب ۹ می باشد

مثال ۴

$$92 - 29 = 63 = 9 \times 7$$

$$15 - 51 = 27 = 9 \times 3$$

$$72 - 27 = 45 = 9 \times 5$$

معادله

فعالیت



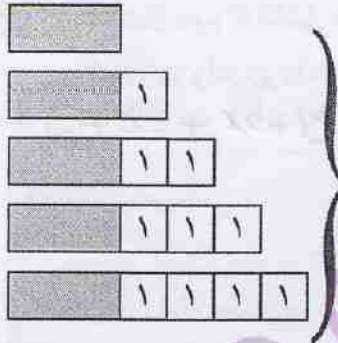
۱- حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
چهار دانش آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه: راهبرد حدس و آزمایش

عدد اول	عدد دوم	عدد سوم	عدد چهارم	عدد پنجم	حاصل جمع
۵	۶	۷	۸	۹	۳۵
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۴۵
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۶۵

حدس و بررسی

راه حل فریده: راهبرد رسم شکل



$$۶۵ \rightarrow ۵ \square + ۱۰ = ۶۵$$

$$۶۵ - ۱۰ = ۵۵$$

$$۵۵ \div ۵ = ۱۱$$

راه حل فهیمه: راهبرد روش های نمادین

$$O + (O+1) + (O+2) + (O+3) + (O+4) = 65$$

$$5O + 10 = 65$$

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید.

$$5O = 65 - 10 = 55 \Rightarrow O = 55 \div 5 = 11$$

راه حل مهدیه: راهبرد تشکیل معادله

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 65$$

$$5x + 10 = 65$$

$$\Rightarrow 5x = 65 - 10 = 55 \Rightarrow x = 11$$

راه حل فرشته: راهبرد تشکیل معادله

$$(x-2) + (x-1) + x + (x+1) + (x+2) = 65$$

تفاوت راه حل های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

فرشته عدد وسطی را مجهول گرفته (x) و بقیه اعداد را بر حسب آن نوشته

ولی مهدیه عدد اول را مجهول در نظر گرفته (x) و بقیه اعداد را بر حسب آن نوشته

اسمه

۲- مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله خود را به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{aligned} 5x+10 &= 65 \\ -10 & \\ \hline 5x+10-10 &= 65-10 \\ 5x &= 55 \\ \times \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} \times 5x &= \frac{1}{5} \times 55 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

از دو طرف معادله را واحد یک منهای

دو طرف را در عدد $\frac{1}{5}$ ضرب

معلم راه حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی یکان‌ها چیست؟

$$\begin{aligned} 5x+10 &= 65 \\ 5x &= 65-10 \\ 5x &= 55 \rightarrow x = \frac{55}{5} = 11 \end{aligned}$$

۳- با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید. سپس معادله‌های دیگر را به همین

ترتیب حل کنید.

$$\begin{aligned} 2x-3 &= x+5 \\ \Rightarrow 2x-x &= 5+3 \\ \Rightarrow x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-1 &= x-7 \\ \Rightarrow 2x-x &= -7+1 \\ \Rightarrow 2x &= -6 \\ \Rightarrow x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 3(x+4) \\ 2x-2 &= 3x+12 \\ \Rightarrow -x &= 14 \\ \Rightarrow x &= -14 \end{aligned}$$

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 5(x-2) &= 8 \\ \Rightarrow 5x-10 &= 8 \\ \Rightarrow 5x &= 18 \Rightarrow x = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4 &= 16 \\ x &= 16-4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x-3 &= 2x-1+5x \Rightarrow 4x-3=7x-1 \\ \Rightarrow 4x-7x &= 3-1=2 \\ \Rightarrow -3x &= 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-2x &= -(x-1)+2 \\ \Rightarrow 1-2x &= -x+1+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= 3(1-x) \\ \Rightarrow 2x-2 &= 3-3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-2(1-x) &= 0 \\ \Rightarrow 2x-2+2x &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2x+x = 3-1$$

$$\Rightarrow 2x+3x = 3+2$$

$$\Rightarrow 5x = 3$$

$$\Rightarrow -x = 2$$

$$\Rightarrow 5x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow x = 1$$



۱- معادله زیر را دو دانش آموز حل کرده اند. راه حل آنها را توضیح دهید. ویژگی های هر کدام از روش ها را بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت و گو کنید.

راه حل یگانه

راه حل یکتا

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$6 \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$$

$$6 \times \frac{1}{2}x - 6 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{5}{6}$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{14}{6}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

به دو طرف $\frac{1}{3}$ اضافه کرده

دو طرف را در عدد ۶ ضرب کرده

انجام ضربها و ساده کردن

دو طرف را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کرده

به دو طرف ۲ واحد اضافه کرده

چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب کردن انتخاب کرده است؟ $[2, 3, 6] = 6$ کوچکترین مضرب مشترک این سه عدد است

۲- دو دانش آموز کسر $\frac{x+3}{2}$ را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده اند. کدام یک اشتباه

کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید. علامت مثبت که پشت خط کسری هست کل صورت

را قرینه می کند

$$6 \times \left(-\frac{x+3}{2} \right) = -3x - 9$$

$$6 \times \left(\frac{x+3}{2} \right) = -3x + 9$$

درست

نادرست

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6} 4x - 3 = 1$$

$$\Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} = \frac{8}{3} \xrightarrow{\times 75} 18x - 20 = 200$$

$$\Rightarrow -18x - 20 = 200$$

$$\Rightarrow -18x = 220$$

$$\Rightarrow x = \frac{-220}{18} = \frac{-110}{9}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 20} 12x - 10 = 15 \Rightarrow 12x = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{12}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{\times 6}$$

$$\Rightarrow 3x + 3 = 2x + 6$$

$$\Rightarrow 3x - 2x = 6 - 3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

۶۶

$$(x-1) + x + (x+1) = 27 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \text{عدد کوچک تر} = 8$$

جواب (۴)

$$2x = x + 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{برابر} = x$$

جواب (۷)

$$\text{مجموع سه نفر} = x + (x+6) + 2x = 4x+6$$

تمرین



۱- معادله های زیر را حل کنید.

$$-\frac{3}{8}x + 5 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{114}{9}$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} = 2 \Rightarrow x = \frac{14}{15}$$

$$2x + \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = -\frac{4}{35}$$

$$2x - \frac{2}{3} = 5x + 3 \Rightarrow x = -\frac{11}{9}$$

$$1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 0$$

$$2(x+5) = 28 \Rightarrow x = 7$$

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی متر و محیط آن ۲۴ سانتی متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

$$7x + 4 = 58 \Rightarrow x = \frac{54}{7}$$

$$5x - 3 = 17 \Rightarrow x = 4$$

۳- هفت برابر عددی به اضافه ۴ مساوی ۵۸ است. آن عدد چند است؟

۴- حاصل جمع سه عدد متوالی طبیعی ۲۷ شده است. کوچک ترین این عددها را پیدا کنید.

۵- از پنج برابر عددی ۳ تا کم کردیم: عدد ۱۷ به دست آمد. آن عدد چند است؟

۶- اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، ۴۲ خواهد بود. کدام یک از مقادیر زیر می تواند مقدار آن عدد باشد؟

- الف) ۴۲ ب) ۱۴ ج) -۶ د) -۷ ه) ۵

۷- تعداد کتاب های محمد دو برابر تعداد کتاب های بهرام است. علی ۶ کتاب بیشتر از بهرام دارد.

اگر بهرام x تا کتاب داشته باشد، یک عبارت جبری بنویسید که مجموع کتاب های این سه نفر را نشان دهد.

۸- پدری ۴۵ سال دارد. دو فرزند او ۹ و ۱۲ ساله اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع سن فرزندانش برابر می شود؟

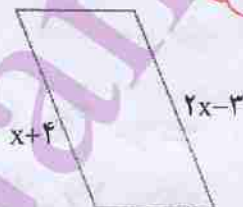
$$45 + x = (9+x) + (12+x) \Rightarrow x = 22$$

۹- در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام شده برابر است با مقدار نیرو در اندازه جابه جایی.

این رابطه را با تساوی $W = F \cdot d$ نشان می دهیم. اگر کار انجام شده ۱۲ و مقدار نیرو ۴ باشد، مقدار جابه جایی را حساب کنید.

$$12 = 4 \times d \Rightarrow d = 3$$

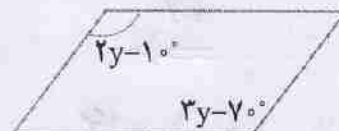
۱۰- معادله ها را با توجه به شکل های زیر حل کنید.



$$x + 4 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow -x = -7$$

$$\Rightarrow x = 7$$



$$2y - 10 = 3y - 70$$

$$\Rightarrow -y = -60$$

$$\Rightarrow y = 60$$

●●●● مرور فصل ۴ ●●●●

تأثیر عبارات

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

● جمله‌های مشابه ● معادله ● تجزیه کردن (تبدیل به ضرب)

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- تبدیل عبارت جبری به عبارت کلامی و برعکس
- ساده کردن یک عبارت جبری با جمع جمله‌های مشابه
- ضرب جمله در پرانتز
- پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت
- تبدیل یک عبارت به ضرب
- بیان رابطه جبری برای الگوهای مساحت و محیط و...
- ضرب جمله در جمله
- ضرب پرانتز در پرانتز
- حل معادله‌های کسری

کاربرد

موضوع‌های این فصل علاوه بر کاربردهایی که در ریاضی دارد، به شما در حل مسئله‌های روزمره نیز کمک می‌کند. شما با تشکیل معادله و حل آن می‌توانید مسائل زیادی را حل کنید. به همین ترتیب، می‌توانید در سایر درس‌ها، مثل علوم، نیز از رابطه‌ها و معادله‌های جبری استفاده کنید.

تشریح ترکیبی

۱- عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - 2ab) = 4ab = 4x(2)x(-2) = -16$$

مقدار عددی عبارت حاصل را به ازاء $a=2$ و $b=-2$ به دست آورید.

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6} \quad \times 6 \Rightarrow$$

$$2x-1 = 3(x-1) \Rightarrow 2x-1 = 3x-3$$

$$\Rightarrow 3x-3-2x-2=1$$

$$\Rightarrow 2x-3x=1-3$$

$$\Rightarrow x-5=1$$

$$\Rightarrow -x=-2$$

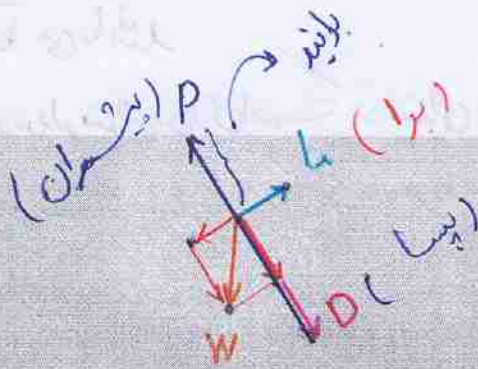
$$\Rightarrow x=6$$

$$\Rightarrow x=2$$

(weight = نیروی وزن)

(Thrust = نیروی رانش)

در این کتاب از P استفاده شده

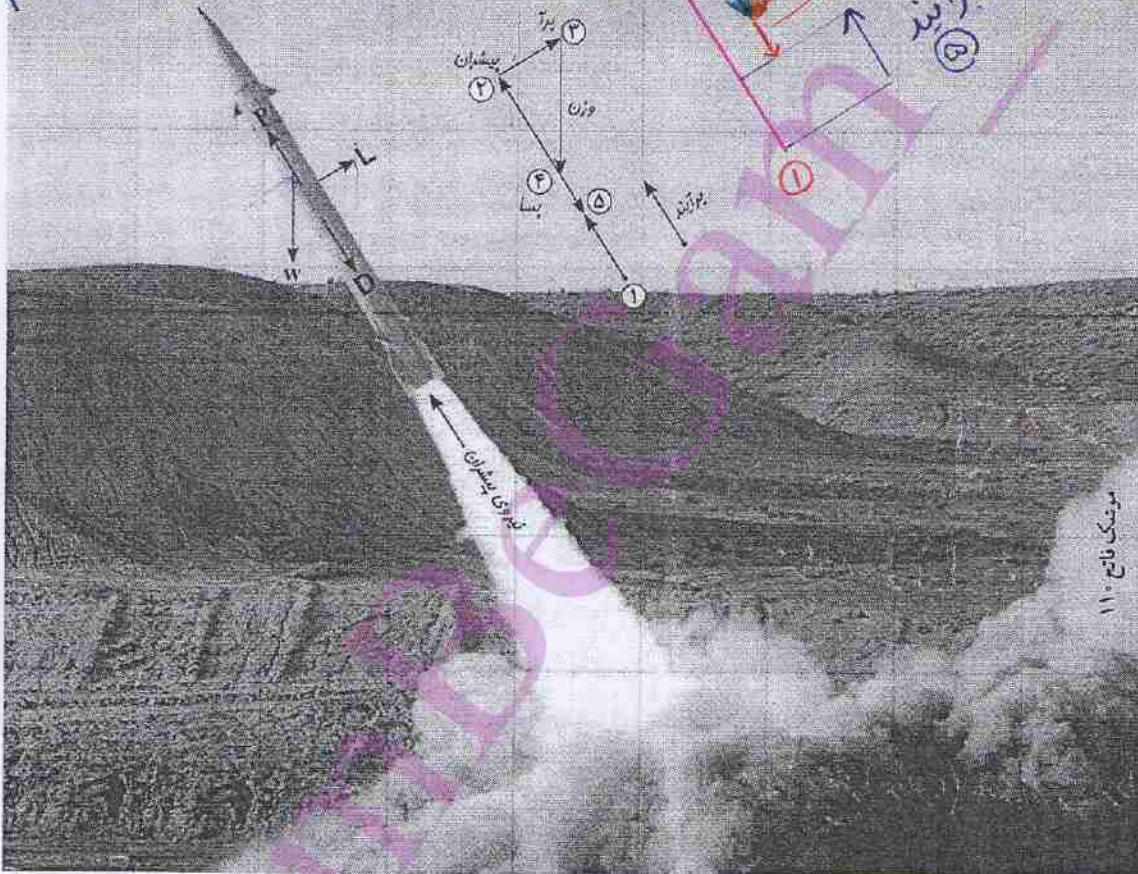


فصل ۵

بردار و مختصات

(Drag = نیروی پسا)

(Lift = نیروی برا)



موشک ناتج ۱۱۰

شتاب حرکت یک جسم در هر لحظه همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است. برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارتند از، نیروی وزن، نیروی پشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (پسا) و نیروی برآ (عمود بر راستای حرکت)؛ به طوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک است.

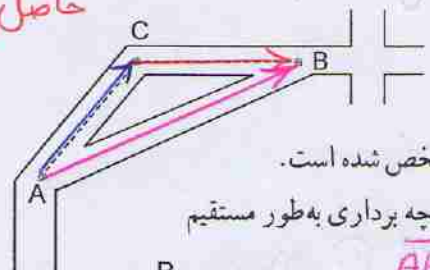
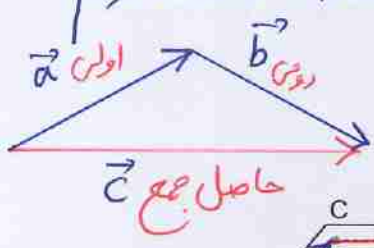


چون بردار c کار دو بردار a و b را با هم انجام می دهد پس بردار c برآیند:

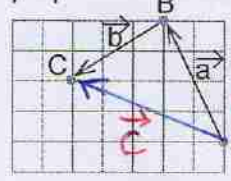
برآیند دو بردار a و b می باشد

حاصل جمع دو بردار متوالی:

حاصل جمع دو بردار متوالی برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کند (جهت از بردار اول به سمت بردار دوم)



۱- شخصی در نقطه A ایستاده است. مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است. این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه B می رسد؟ آن را رسم کنید. بردار \vec{AB}



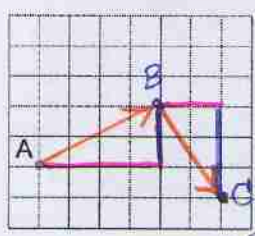
۲- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می شود؟ \vec{AC} نام آن را بردار c بگذارید. آیا می توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار انتقال a و b را انجام می دهد؟ بله

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

به بردار c بردار برآیند یا حاصل جمع می گویند.

بازی رطاس

۳- روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می کند.

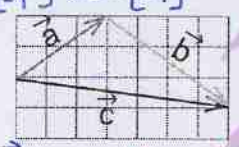


این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کند. نقطه جدید را B نام گذاری کنید.

روبات ما با فرمان $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ از B به نقطه C می رسد.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می رسد؟ فرمان



۴- مختصات بردارهای a , b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید. در چه صورت برداری که از ابتدای a به انتهای b رسم می شود، بردار c ، حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید. بردار حاصل جمع (برداری) ابتدایش بردار a و انتهایش بردار b است

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b بردار c است. بنابراین، می توان یک

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

تساوی برداری به صورت $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ را نوشت.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

آورد:

نتیجه: بردار $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ برداری است که مختصاتش برابر

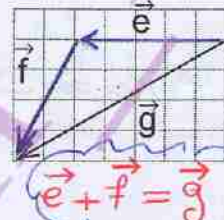
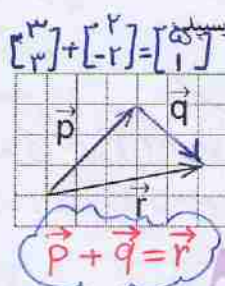
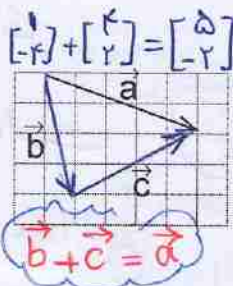
مجموع مختصات \vec{a} و \vec{b} است

کار در کلاس

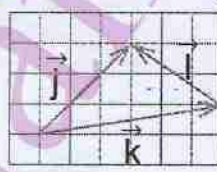
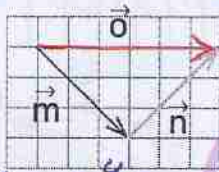


در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، برای رسم حاصل جمع یا برآیند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است. سپس برای هر شکل، یک



$\vec{m} + \vec{n} = \vec{o}$



$\vec{k} + \vec{l} = \vec{j}$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

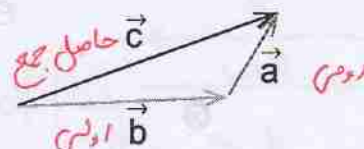
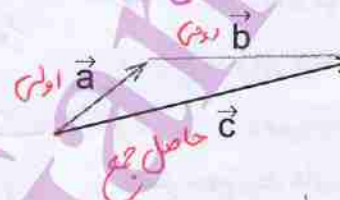
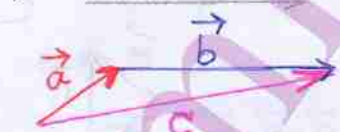


۱- چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



۲- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.



امیر
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

رضا
 $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$

امیر ابتدا از یک دایره برداری مساوی بردار \vec{a} رسم کرده و سپس از انتهای آن برداری مساوی بردار \vec{b} رسم کرده، ولی رضا ابتدا بردار \vec{b} را رسم کرده و از انتهای آن برداری مساوی بردار \vec{a} رسم کرده. حاصل جمع دو بردار خاصیت جابجایی دارد.

سعید: ابتدا حاصل جمع \vec{a} و \vec{b} را بدست آورده و سپس حاصل آن دو را با بردار \vec{c} جمع کرده است

محمد: ابتدا مجموع دو بردار \vec{a} و \vec{b} را محاسبه کرده و سپس حاصل آن دو را با بردار \vec{c} جمع کرده است

سعید: جمع سه بردار را به صورت متوالی، ابتدا \vec{a} و پس از آن \vec{b} و در انتها \vec{c} را رسم کرده و برای بدست آوردن مجموع ابتدای اولی را به انتهای سومی وصل کرده است

۳- دانش آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار راه حل های زیر را ارائه کرده اند. هر کدام را توضیح دهید.

توضیح دهید.

رضیا: رضایم مانند جمع عمل کرده با این تفاوت کم

جمع سه بردار \vec{a} و \vec{b} و در آخر بردار \vec{c} را رسم کرده است

۴- راه حل های دانش آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار \vec{a} و \vec{b} را مشاهده و مقایسه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اول \vec{a} و سپس به دنبال آن \vec{b}

اول \vec{b} و به دنبال آن بردار \vec{a} رسم شده است

رسم هر دو بردار با هم اشتراک در رسم قطر متوالی الاضلاع

کارد در کلاس

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.

بردار صفر را به صورت $\vec{0}$ نشان می دهیم و مختصات آن $[0]$ است.

حاصل جمع بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} چیست؟ چرا؟

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

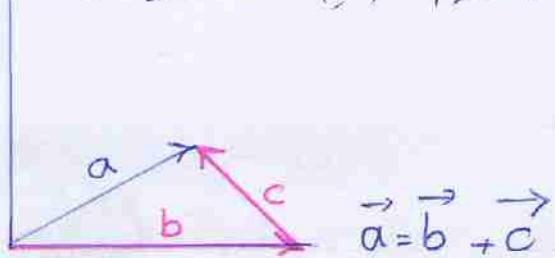
$\vec{p} = \vec{n} + \vec{m}$

بردار \vec{c} کار بردارهای \vec{a} و \vec{b} را خنثی کرده در واقع بردار \vec{c} قرینه \vec{a} و \vec{b} است

مجموع دو بردار \vec{a} و \vec{b} می باشد یا به عبارتی دیگر جسم در مجموع این سه انتقال به محل اول خود پریشده و می توان گفت مجموع این سه انتقال صفر است

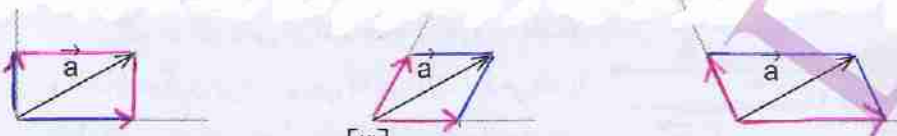
نکته: ۱) می‌توان بردارها را رسم کرد که حاصل جمع آن‌ها بردار معلوم \vec{a} باشد

۲) بر شمار متوازی الاضلاع می‌توانیم رسم کنیم \vec{a} قطر آن‌ها باشد



بالا

۱- دو بردار رسم کنید که جمع آنها بردار \vec{a} باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟ بر شمار، به خاطر استاها



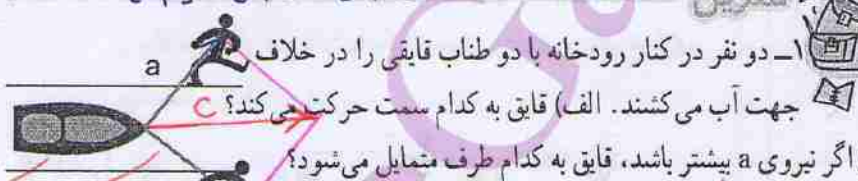
۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر

بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟ بی شمار جواب دارد، باز پاسخ است

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

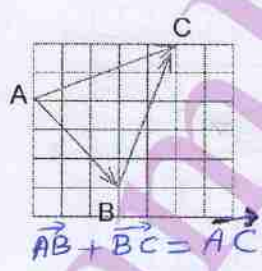
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



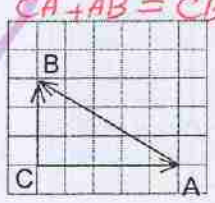
الف) روی مسیر \vec{c} که برانید دو نیروی \vec{a} و \vec{b} هست حرکت می‌کند

۲- در هر شکل یکی از بردارها حاصل جمع بردارهای دیگر است.

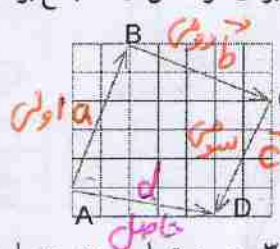
برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



$$\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$$



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۳- در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$x = 2 - 5 = -3$$

$$x = 7 - 3 = 4$$

$$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$y = -4 - 2 = -6$$

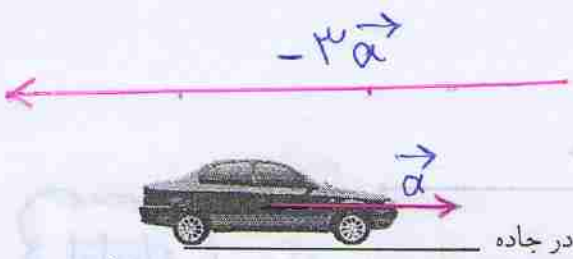
$$y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6$$

$$y = -1 - 6 = -7$$

حاصل جمع چند بردار متوالی برابر برداری است که ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند

نکته

بردار $k\vec{a}$ برداری است هم راستا با بردار \vec{a} و اندازه‌ی آن k برابر اندازه‌ی بردار \vec{a} است
 اگر $k > 0$ باشد دو بردار هم جهت و اگر $k < 0$ باشد دو بردار مخالف جهت می‌باشند

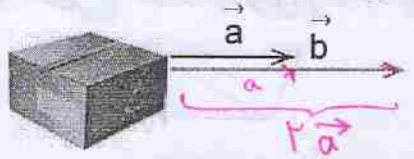


ضرب عدد در بردار

فعالیت



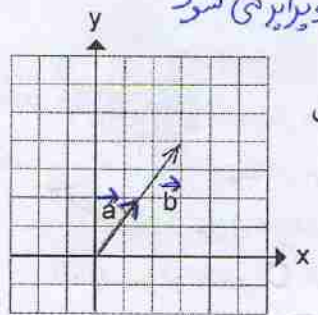
۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد، بردار حرکت جدید را رسم کنید. برداری سه برابر \vec{a} و در جهت مخالف آن رسم می‌کنیم



۲- دو نفر سعی می‌کنند جعبه روبه‌رو را بکشند و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با بردار \vec{a} و نیروی نفر دوم با بردار \vec{b} نمایش داده شده است.

با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟ تقریباً دو برابر چون اندازه‌ی آن تقریباً دو برابر \vec{a} هست و هم جهت می‌باشند

۳- در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه‌ی آن، چه نکاتی را رعایت کردید؟ راستاها یکی است در اولی جهت‌ها مخالف هم و در دومی هم جهت می‌باشند، در اولی اندازه‌ی سه برابر و در دومی اندازه‌ی دو برابر می‌شود

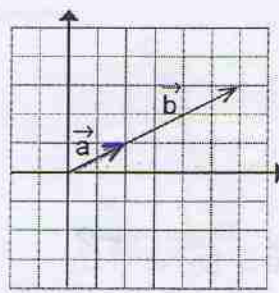
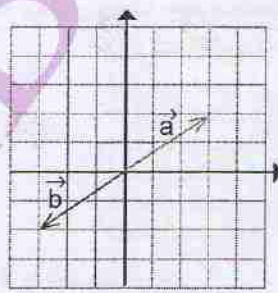
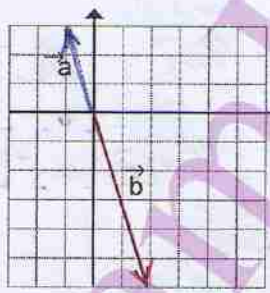


۴- در هر شکل مختصات بردارهای \vec{a} و \vec{b} را بنویسید.
 رابطه‌ی دو بردار \vec{a} و \vec{b} را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



تساوی برداری $\vec{b} = -2\vec{a}$

تساوی مختصاتی $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = -2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = -\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\vec{b} = 3\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نتیجه گیری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می شود.
بنابراین، می توانیم بنویسیم:

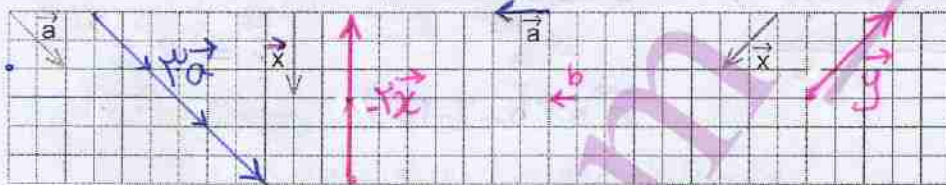
$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینه بردار a باشد، می نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$$\vec{b} = 2\vec{a}$$

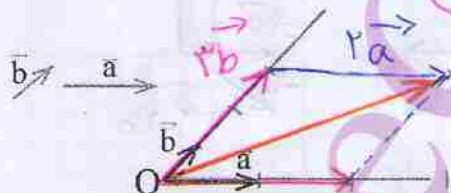
$$\vec{y} = -2\vec{x}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{x}$$

تولید خط

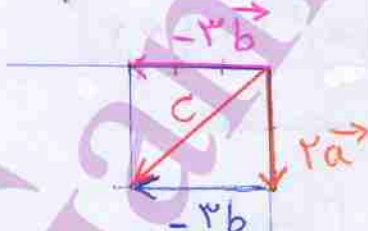
فعالیت



۱- بردارهای a و b مفروض اند.
بردار $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ را رسم کنید.

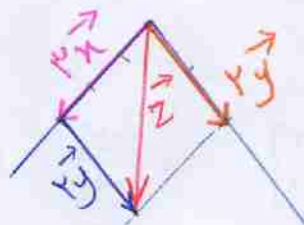
از نقطه دلخواه O بردارهای $2a$ و $3b$ را رسم کنید. سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$



۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

$$\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$



برای رسم بردار $(\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b})$ ابتدا از یک نقطه دلخواه بردار $k\vec{a}$ را رسم راستا با بردار \vec{a} و k

برابر آن رسم می کنیم و سپس از همان نقطه بردار $l\vec{b}$ را رسم راستا با بردار \vec{b} رسم می کنیم

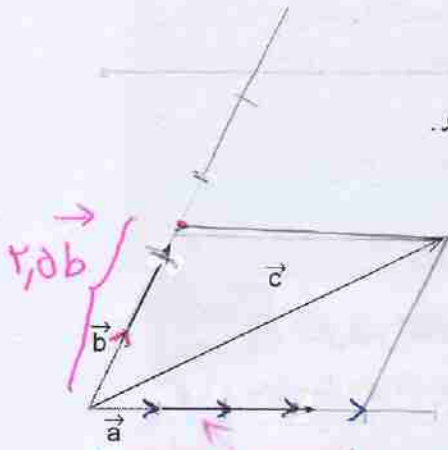
به روش متوازی الاضلاع بردار \vec{c} را بدست می آوریم

نکته

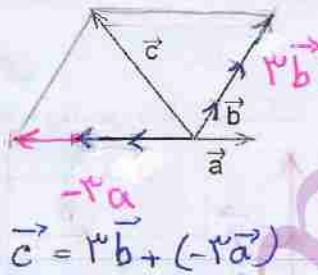
اصلاح مرور

کار در کلاس

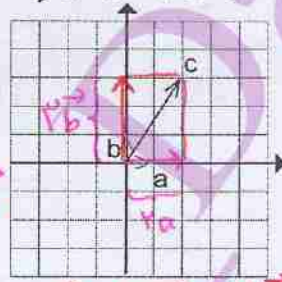
در هر شکل، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.



$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$



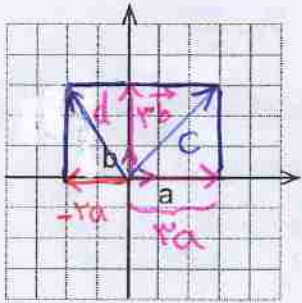
$$\vec{c} = 3\vec{b} + (-2\vec{a})$$



$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

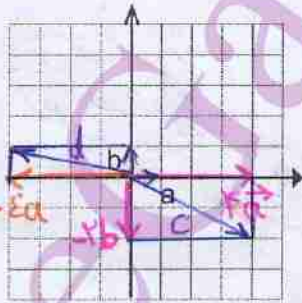


۱- با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید.



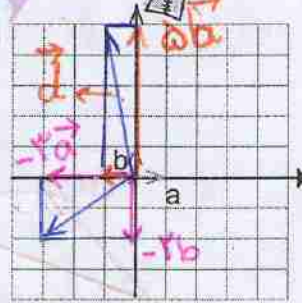
$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$



$$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}$$



$$\vec{c} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (-4) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -27 \end{bmatrix} \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

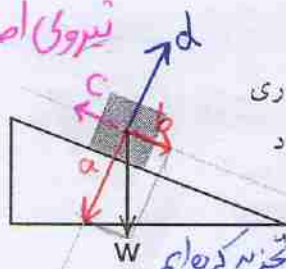
۳- معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 2x &= \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} & -3x &= \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x &= \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x &= \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} & x &= \begin{bmatrix} -6 \\ +1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نکته: اگر نیروی \vec{a} از عکس العمل زمین بیشتر باشد جسم داخل سطح شیب دار فرومی رود
 اگر نیروی عکس العمل زمین از نیروی \vec{a} بیش تر باشد جسم به سمت هوا پرتاب می شود
 طبق قانون دوم نیوتن این دو نیرو یکدیگر را خنثی می کنند

اگر نیروی اصطکاک زیاد باشد آن گاه نیروی \vec{a} خنثی می شود
 جسم حرکت نمی کند

مثال باربری
 هر چه قدر شیب



بیش تر باشد مولفه ی نیروی \vec{a} در شکل روبه رو نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید. بردار وزن \vec{W} را به دو بردار \vec{a} عمود بر سطح \vec{b} در راستای سطح شیب دار تجزیه کرده ایم

پس جسم در راستای بردار \vec{b} به سمت پایین حرکت می کند

بردار \vec{a} با عکس العمل سطح خنثی می شود (قانون دوم نیوتن)
 ۵- با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به دست آورید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

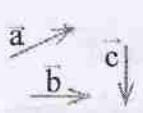
$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} \quad \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2+4 \\ 1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

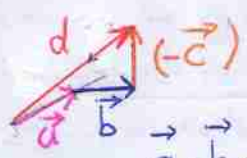
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -3+0 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

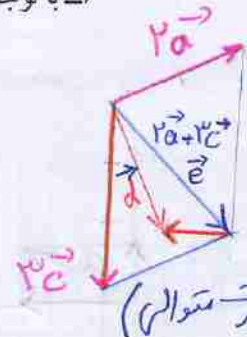
$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$



$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{d}$$

$$2\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{e}$$

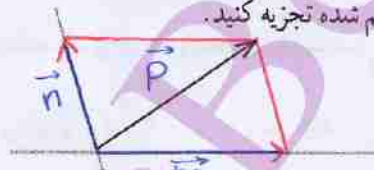
$$\vec{e} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$



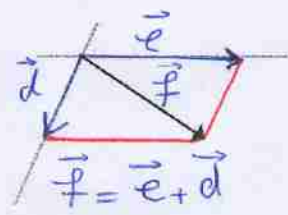
روش اول

روش دوم (به صورت متوالی)

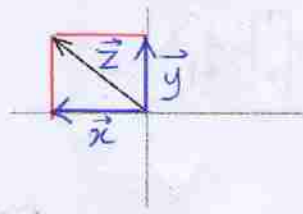
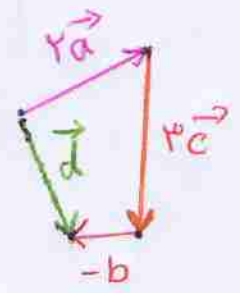
۷- بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



$$\vec{p} = \vec{n} + \vec{m}$$



$$\vec{f} = \vec{e} + \vec{d}$$



بردارهای واحد مختصات

فعالیت



۱- برای اندازه گیری هر یک از مقادیر زیر از چه واحدی استفاده می کنیم؟



زمان: ثانیه
متر: m



دما: درجه سانتیگراد
زاویه: درجه
فاصله: m



جرم: کیلوگرم



طول: متر

۲- در محور زیر، واحد را نشان داده ایم. عددهای ۱ و ۲ را روی محور مشخص کنید.



با توجه به واحد جدید می کنیم

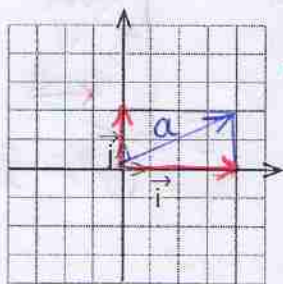
۳- همان طور که ملاحظه کردید، برای اندازه گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم.

برای نمایش بردار نیز به واحد نیاز مندیم. این واحد باید

از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور

نمایش داده می شود، به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.

در شکل روبه رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده اند.



• مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

• بردار $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ را رسم کنید.

• مختصات بردار \vec{a} را بنویسید. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

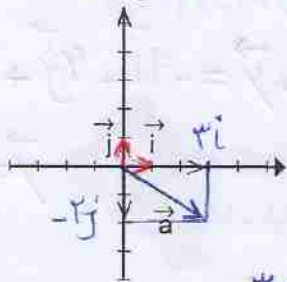
• مختصات بردار \vec{a} را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

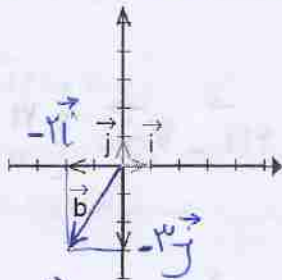
$$\vec{a} = p\vec{i} + q\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

کار در کلاس

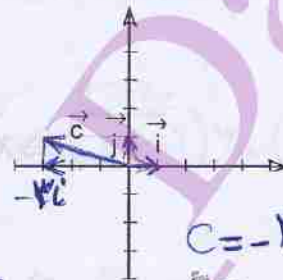
در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب \vec{i} و \vec{j} و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$c = -3\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$3\vec{i} + 5\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲- دو دانش آموز معادله برداری زیر را حل کرده اند. مراحل راه حل آنها را با هم مقایسه کنید.

همه بردار $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب بردارهای واحد مختصات نوشته و سپس شروع به انجام عمل کرده است

راه حل حمید	راه حل سعید
$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$ $2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$ $2\vec{x} = -8\vec{i}$ $\vec{x} = -4\vec{i}$	$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

سعید بردار $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب مختصات نوشته و حل را ادامه داده است

۳- معادله های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

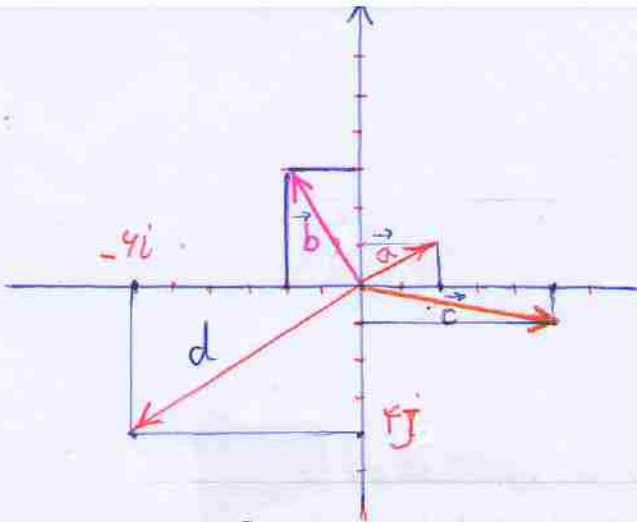
$$\Rightarrow 3\vec{x} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}}{-2}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = -\frac{8}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$



کار در کلاس



اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b} \quad \vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b} \Rightarrow \vec{y} = -9\vec{i} + 4\vec{j} + 11\vec{i} + 4\vec{j} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{x} = 5(3\vec{i} - 2\vec{j}) + 3(2\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \vec{x} = 21\vec{i} - 7\vec{j} = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

۱- طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

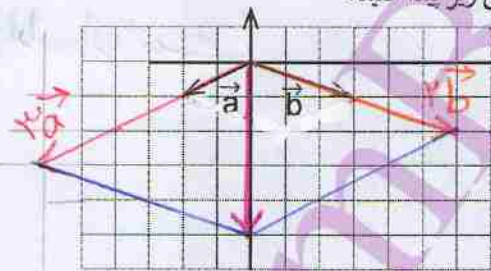
$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{i} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

بالا ↑

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات \vec{c} از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات \vec{a} و \vec{b} و قرار دادن آنها در

روش هندسی

روش چیری

تساوی زیر.

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

در روش هندسی من کون \Rightarrow ویژگی های هر روش را بیان کنید.

کدام روش برای رایانه ای شدن مناسب تر است؟ چرا؟ روش چیری، چون محاسباتی هست

و رایانه کارهای محاسباتی را سریع تر انجام می دهد

با رسم شکل و بدون انجام محاسبات حاصل

جمع دو بردار را به دست آوردن اگر صفحه شطرنجی نباشد و یا طول و عرض بردارها بزرگ یا عددی

غیر صحیح و گنگ باشد تقریباً روش اول ناکارآمد است روش چیری بسیار سریع تر و کارآمدی باشد

●●●●● مرور فصل ۵ ●●●●●

ناممربهارا

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

- جمع (برآیند) بردارها
- تجزیه بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیدا کردن جمع دو بردار.
- پیدا کردن بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشد.
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیه یک بردار روی دو امتداد.
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات.
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی.
- حل کردن معادله‌های شامل بردار.

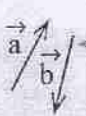
کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک - مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد. ضمن آنکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

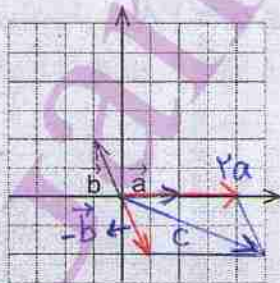
تمرین‌های ترکیبی

اگر بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، می‌توانید مطمئن باشید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- با توجه به بردارهای a و b و c بردار d را رسم کنید. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$



۲- اگر $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار x را پیدا کنید.

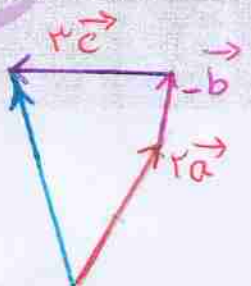


$$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x} \Rightarrow 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{i} - 5\vec{j} = 3\vec{x} \Rightarrow -7\vec{j} = 3\vec{x}$$

$$\vec{x} = -\frac{7}{3}\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل، مختصات بردار c را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + (-\vec{b})$$

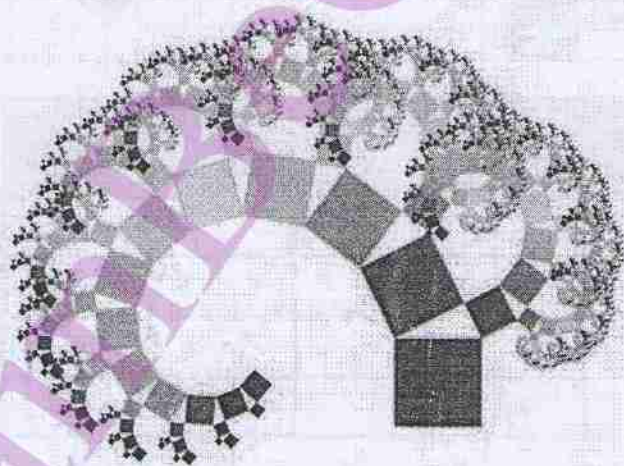


حل سؤال یک

فصل ۶

مثلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت آیه ۲۰)



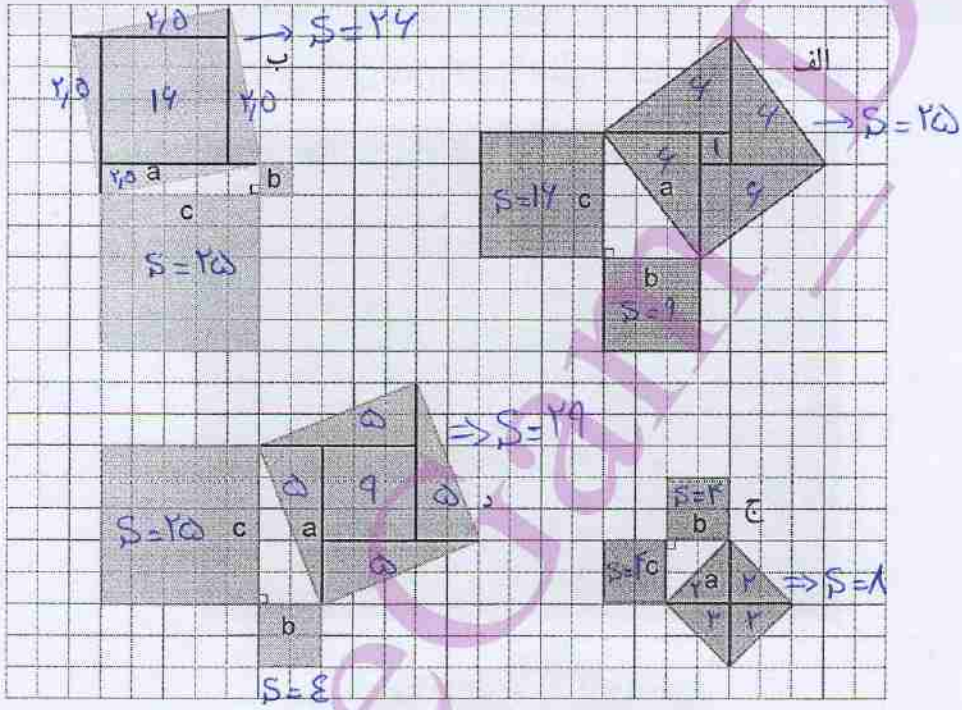
خداوند در جهان هستی نشانه‌هایی خلق کرده است و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

رابطه فیثاغورس

فعالیت



۱- روی هر ضلع مثلث های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده ایم. با شمارش مربع های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر)	
۱۶	۹	۲۵	الف
۲۵	۱	۲۴	ب
۴	۴	۸	ج
۲۵	۴	۲۹	د

بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می کنید؟

$25 = 9 + 16$, $24 = 1 + 25$

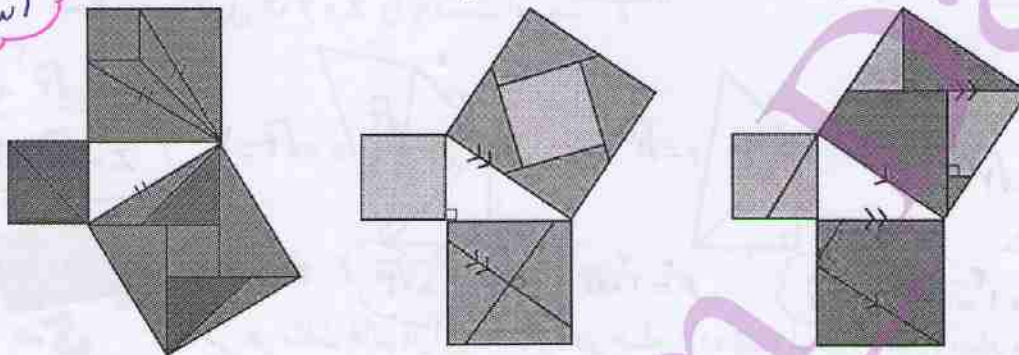
$8 = 4 + 4$, $29 = 4 + 25$

عددهای هر سطر برابر مجموع دو عدد دیگر همان سطر است

دست ورزی

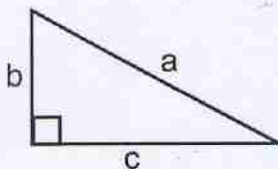
۲- به هر یک از شکل های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع های تشکیل شده روی ضلع های مثلث قائم الزاویه آمده است.
شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید.
سپس، با استفاده از یکی از این روش ها مربع های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.

اثبات سهوی



رابطه فیثاغورس

رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع های مثلث قائم الزاویه، به رابطه فیثاغورس معروف است.



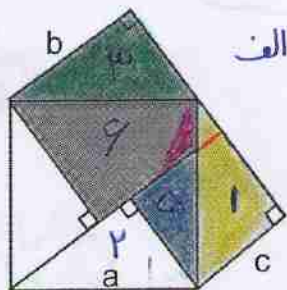
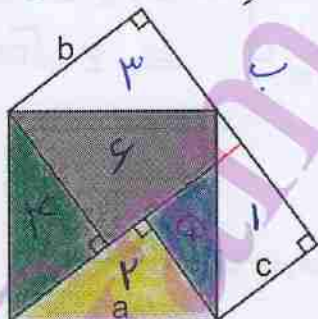
این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم الزاویه هم نهشت دیده می شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع های زاویه قائمه مثلث ساخته شده اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

الف: در شکل الف داریم

$$S = S_1 + S_3 + S_5 + S_6$$

ب: در شکل ب داریم

$$S' = S_2 + S_4 + S_5 + S_6$$

① → $S_1 = S_2$

① → $S_3 = S_4$

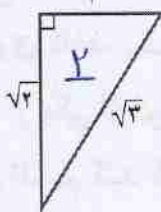
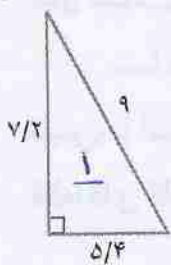
مساحت مربع های که روی دو ضلع زاویه قائمه ختم می شود با مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود برابر است.

$$\textcircled{1} \left. \begin{aligned} \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 &= \sqrt{1}^2 + \sqrt{4}^2 = 1 + 4 = 5 \\ 9^2 &= 81 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{1}^2 + \sqrt{4}^2 = 9^2$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{aligned} 1^2 + \sqrt{2}^2 &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt{3}^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

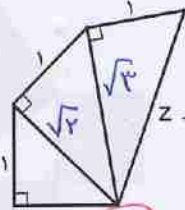
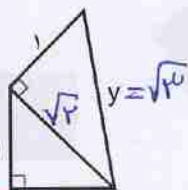
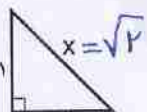
$$\textcircled{3} \left. \begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \\ 13^2 &= 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$$

کاردر کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر بررسی کنید.

۲- به ترتیب طول x , y و z را به دست آورید.



$$z^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4$$

$$z = \sqrt{4} = 2$$

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

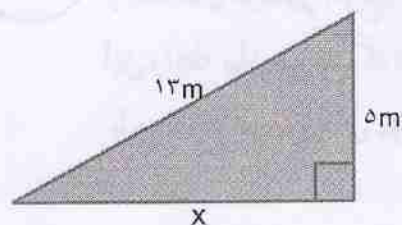
$$y^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

فعالیت



۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

مانند نمونه پیدا کنید.



$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = 12$$

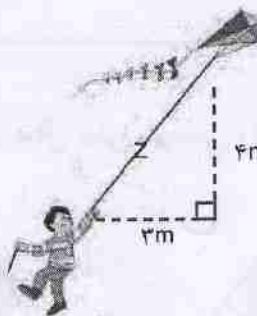


$$4^2 + y^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 14 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - 14 = 9$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{9} = 3$$



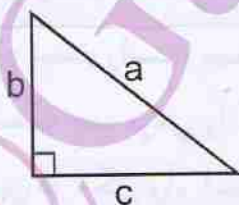
$$z^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 14 + 9$$

$$\Rightarrow z^2 = 25$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{25} = 5$$

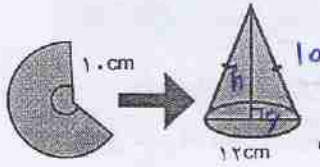
۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



کار در کلاس

۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

$R = 12 \div 2 = 6$
 $\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند. در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های آنها گفت‌وگو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

روش هندسی (طی‌زور)

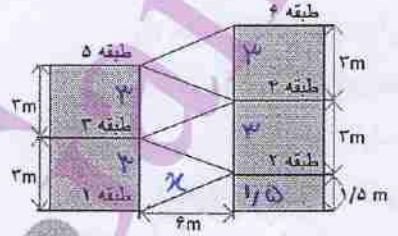
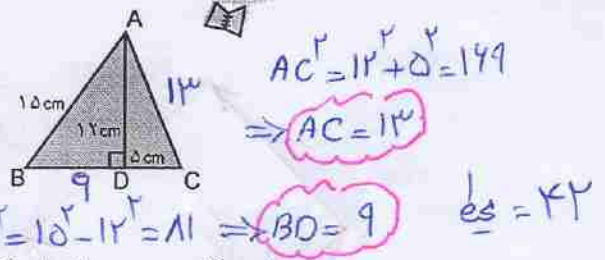
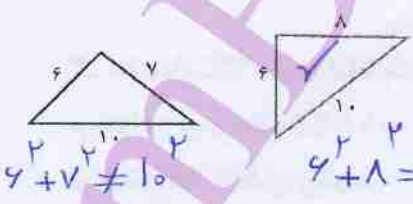
<p>زهرا:</p> <p>مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ $1^2 + 3^2 = 10$ پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد. ساخته شود.</p>	<p>سپاس:</p> <p>روش هندسی</p> <p>مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می‌کنم. $1^2 + 3^2 = 10$ پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.</p>	<p>مهسا:</p> <p>روش حسابی</p> <p>به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم. $\sqrt{10} = 3.16$ حالا به کمک خط‌کش یک پاره‌خط به طول تقریباً 3.1 سانتی متر رسم می‌کنم.</p>
--	---	--

روش مهسا ساده و ولی به صورت تقریبی است و از رقم‌های عدد از صدمه صرف نظر شده است

روش ساده ولی طولانی و وقت‌گیر

تمرین: روش خلاقیت (سخت)

۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید. ۲- کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟



۲- شکل رو به رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه بعدی می‌رساند، چقدر است؟

$x^2 = 1.5^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 2.25 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{18.25} \approx 4.27$

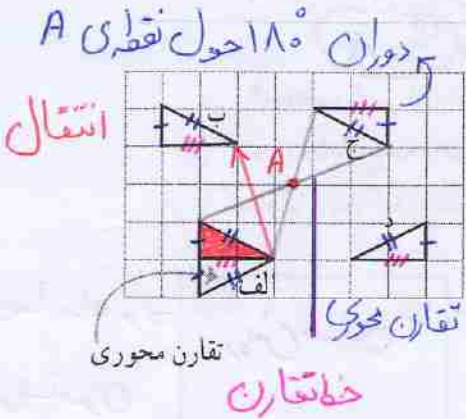


تعریف هم نهشتی

شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.

فعالیت (دست ورزی)



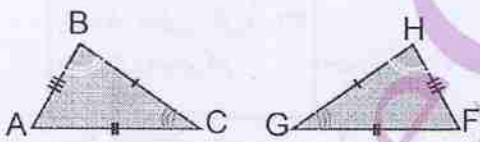
۱- در شکل روبه رو، مثلث های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده اند و با آن هم نهشت اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.
ضلع ها و زاویه های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند:

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

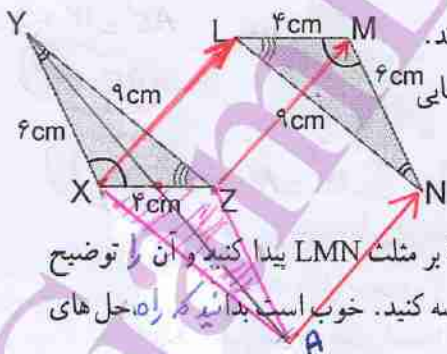
پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت های روی شکل ها، تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{F} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad \overline{AB} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{FG}$$



۳- مثلث های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت اند.

می خواهیم بینیم مثلث XYZ با چه تبدیلی یا تبدیلی هایی بر مثلث LMN منطبق می شود.

راه حل دو دانش آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح

دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های درست بی شماری برای این مسئله وجود دارد.

در دو مرحله

مرحله ۱ دوران حول وسط XZ (مرحله ۲ انتقال با بردار \vec{AN})
نکته: می توانیم دوران را حول هر ضلع دیگر انجام دهیم و سپس با یک انتقال مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کنیم

راه حل محمد: ① مثلث XYZ را توسط بردار \vec{XM} انتقال در دهیم

② مثلث انتقال یافته را با یک دوران 180° حول M بر مثلث LMN منطبق می کنیم

ترکیب دو تبدیل

دست ورزی

راه حل حامد:

با یک دوران 180° حول نقطه X می توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.

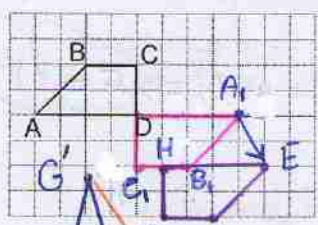
راه حل محمد:

با یک دوران 180° حول نقطه O می توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.

دوران حول نقطه X

دوران حول نقطه O به اندازه 180°

کار در کلاس



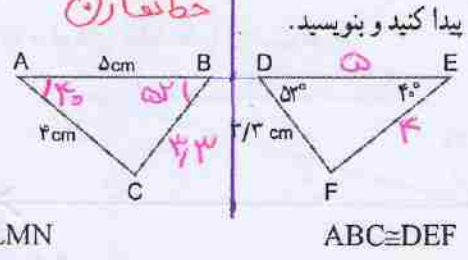
۱- تصویر ذوزنقه ABCD را پس از دوران 180° حول نقطه D رسم کنید و آن را A_1, B_1, C_1, D_1 بنامید.

سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

شکل جدید را نام گذاری کنید و عبارت هم نهشتی شکل ها را کامل کنید.

بردار انتقال $ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong EFGH$

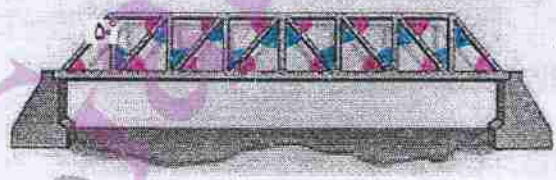
۲- با توجه به هم نهشتی شکل های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را پیدا کنید و بنویسید.



خط تقارن

① تقارن نسبت به خط d
② انتقال با بردار $\vec{G'K}$

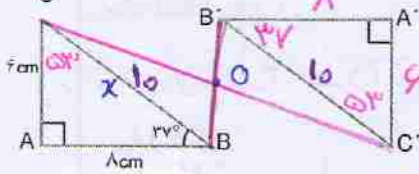
۳- دیواره های کنار پل از مثلث های قائم الزاویه هم نهشت ساخته شده اند.



زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص و اندازه هر یک از زاویه های یکی از مثلث ها را بنویسید.

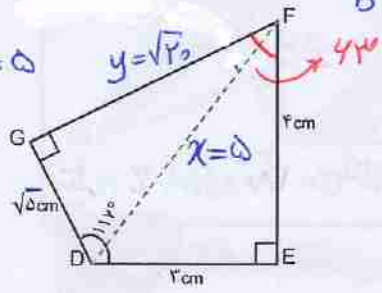
$\triangle = 40^\circ$
 $\triangle = 50^\circ$

دوران حول O به اندازه ۱۸۰ درجه

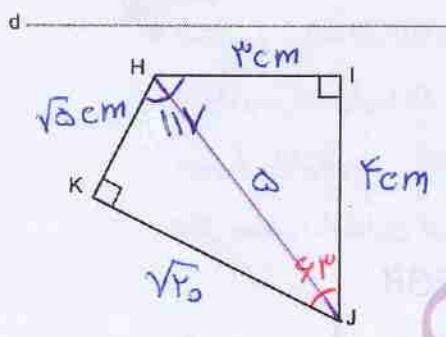


۱- در شکل مقابل $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$
 $y^2 = 5^2 - 3^2$
 $\Rightarrow y = \sqrt{16}$



۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها و زاویه‌ها معلوم است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را به دست آورید.

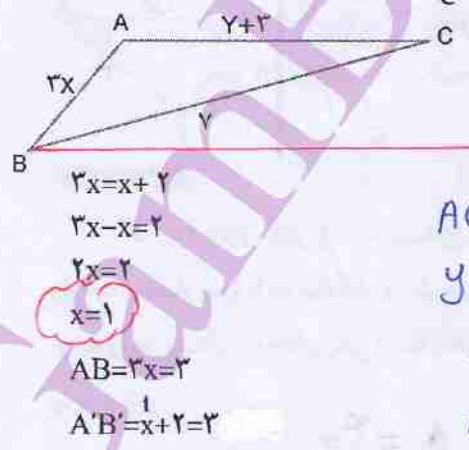


$F = 360 - (90 + 90 + 117) \Rightarrow F = 63$

دریاره رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

کلای

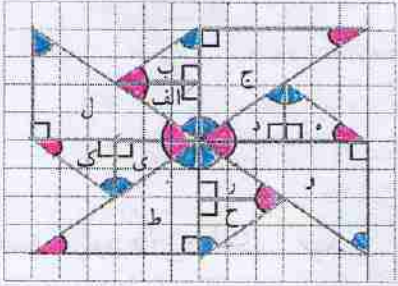
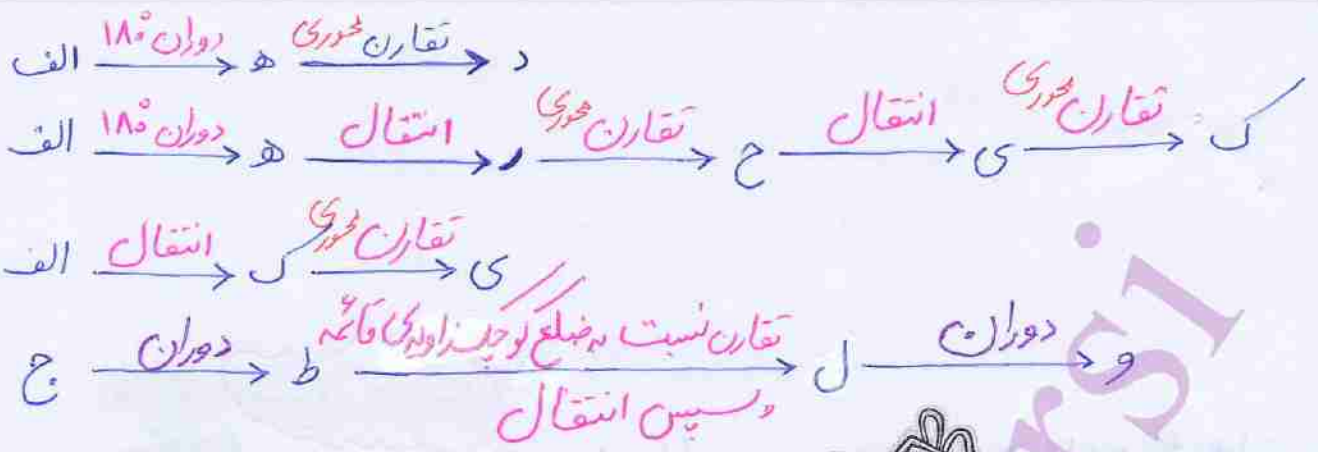
۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد. مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



مثلث ABC یا انتقال BB' بر روی مثلث A'B'C' منطبق می‌شود
 $AC = A'C' \Rightarrow y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 1 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$
 $BC = B'C' \Rightarrow z = y$

$2x = x + 2$
 $2x - x = 2$
 $x = 2$
 $x = 1$
 $AB = 2x = 2$
 $A'B' = x + 2 = 3$





تمرین

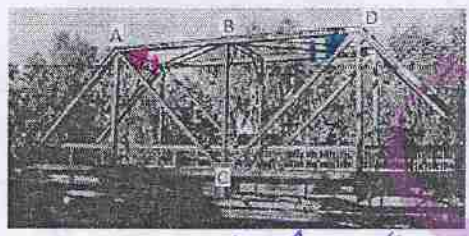
۱- در شکل رو به رو زاویه های مساوی را با رنگ های یکسان مشخص کرده ایم. کدام مثلث ها با مثلث الف هم نهشت اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می توان مثلث الف را بر مثلث های هم نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ هایتان را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

جواب: مثلث های ب، ی، ک، ه، ج، و د با الف هم نهشت هستند

دوران 180° (الف) \leftarrow (ه)

تقارن محوری (الف) \leftarrow (ب) \leftarrow (د)

۲- شازه های مثلثی که در این پل به کار رفته اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می شوند.



می دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع BC است؟ \hat{A}_1

ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع BC است؟ \hat{D}_1

اینها هم دارند

در مثلث های هم نهشت

زاویه های روبه روی ضلع مساوی، با هم مساوی اند

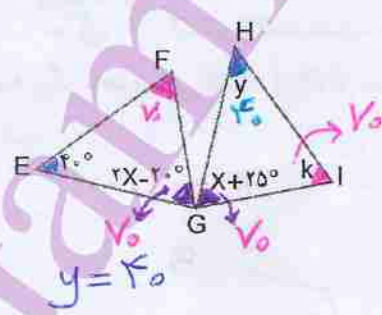
با توجه به شکل $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه \hat{A}_1 متناظر است؟ \hat{D}_1

۳- زاویه های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



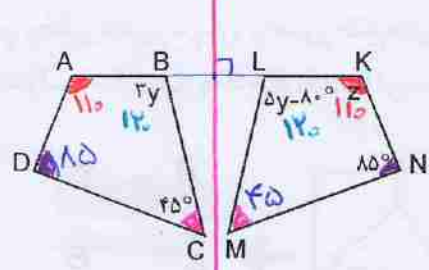
$y = 40$

$2x - 20 = x + 25$

$x = 45$

$\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow k = 110 - (40 + 45)$

$\Rightarrow k = 25$



$3y = 5y - 10$

$\Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow y = 50$

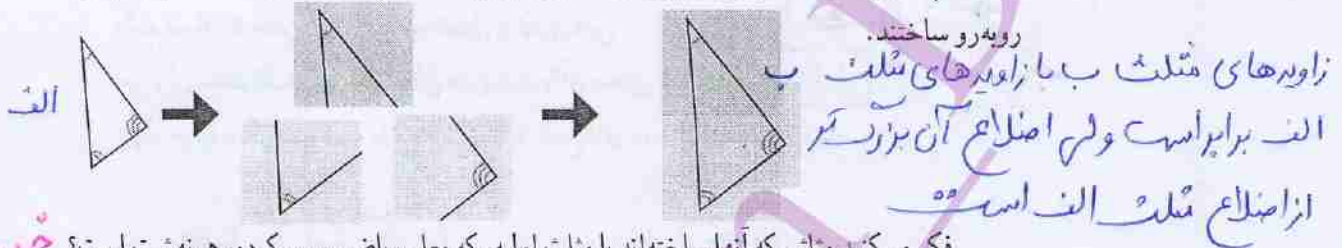
$\hat{B} = \hat{L} = 120$

$\hat{Z} = 340 - (120 + 120 + 45) = 110$

مثلث های هم نهشت

فعالیت

آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب رویه رو ساختند.



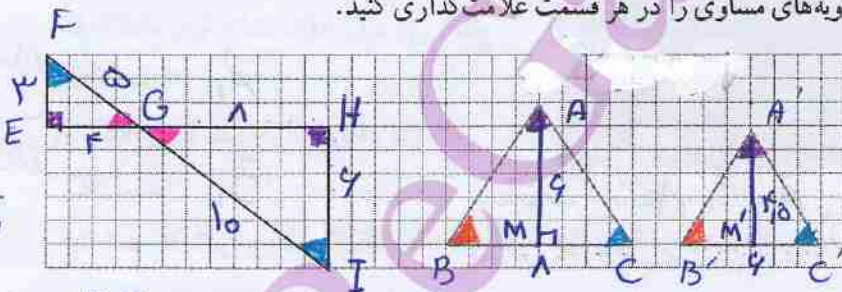
زاویه های مثلث ب با زاویه های مثلث الف برابر است ولی اضلاع آن بزرگتر از اضلاع مثلث الف است.

فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟ **خیر** (در کنار هم نهشت)

آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟ **با این روش، خیر نمی توانند**

کاردر کلاس **سه زاویه مساوی است اما ضلع ها برابر نیست**

۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \end{aligned}$$

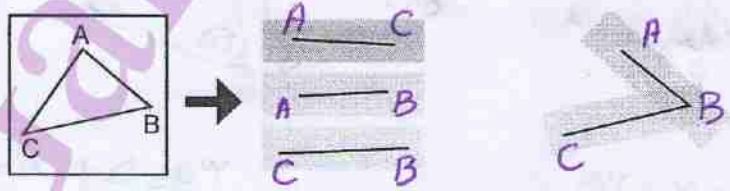
$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

$$\frac{4}{9} = \frac{4}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AM}{A'M'}$$

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشد.



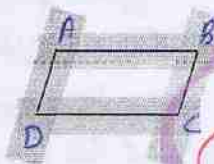
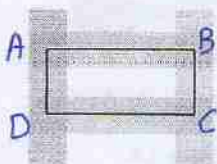
نتیجه اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت آن دو مثلث هم نهشت می باشند.



آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می‌کنی اگر ضلع‌های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم نهشت‌اند؟»
 آرمان گفت: «نه، من می‌گویم اگر ضلع‌های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت‌اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع‌هایشان مساوی است، با یکدیگر هم نهشت نیستند.»

پس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



تعریف میان

کارد در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. یاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند میانه می‌نامیم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

$AB = AC$ چون ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند.

$BM = CM$ چون AM میانه‌ی BC باشد (M وسط BC است).

AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ چون

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.

ب) دلیل تساوی ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

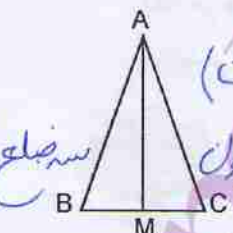
ج) زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

ب) چون چهارضلعی ABCD لوزی است

پس ضلع‌های دو مثلث باهم برابر می‌باشند

$$A_1 = A_2 = C_1 = C_2, B = D \quad \text{ج}$$

سه ضلع مثلث باهم برابرند



اصلاح شود (اندازه AB اشتباه است)



مرحله اول



مرحله دوم



فعالیت



مثلثی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه بین آن دو ضلع را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

اکنون سعی کنید مثلثی بسازید که دو ضلع آن با این دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم برابر زاویه رسم شده باشد.

کلای توضیح داده شود

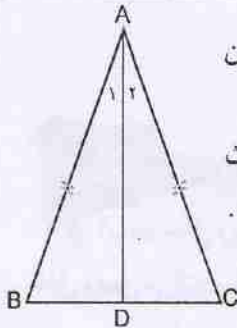
آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا با این شرایط می توانید مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

کار در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبه رو به قاعده مثلث متساوی الساقین ABC را رسم کرده ایم.



عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.
 چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.
 AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. چون دو ضلع و زاویه بین آن دو از این دو مثلث

$ABD \cong ACD$ برابرند پس

فعالیت



مثلثی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید. سعی کنید مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا می توانید مثلثی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

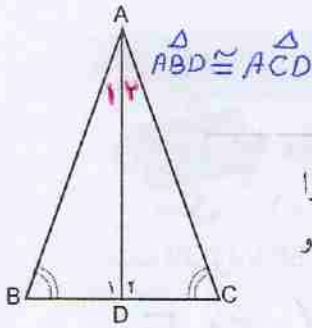
$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ طبق فرض

چون AD نیم‌ساز است

کار در کلاس: چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ و مجموع سزاوی‌بی \hat{C} و \hat{A}_2 و \hat{D}_2 برابر 180° است و مجموع سزاوی‌بی \hat{B} و \hat{A}_1 و \hat{D}_1 هم برابر 180° است پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ است و هر دو مثلث مشترک است

چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ AD نیم‌ساز است



کار در کلاس: در شکل مقابل زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند. دلایل کلامی بیان شود.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن \hat{D}_1 و \hat{D}_2 دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث **مستطیق** است.

سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

- برابری سه ضلع
 - برابری دو ضلع و زاویه بین
 - برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ز)

تمرین

۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت هم نهشتی را بنویسید.



۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

الف) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. (ض ض ض)



ب) قطر متوازی‌الاضلاع رسم شده است.

ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند. (ض ض ض)



۳- شکل روبه‌رو کدام نسبت را نمایش می‌دهد؟

اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند،

الف) دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند.

ب) ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

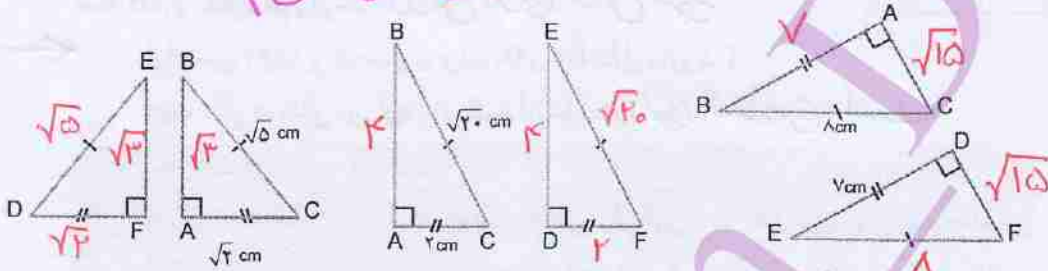


هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه

فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است. **(ص، ص، ض)**



اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟ **بله**
 آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بله (ص، ص، ض) یا (ص، ز، ض)**

۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه

دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بله**

از رابطه فیثاغورس ضلع سوم را هم بدست می آوریم در نتیجه سه ضلع دو مثلث با هم

کارد در کلاس برابر می شوند



۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.



چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟

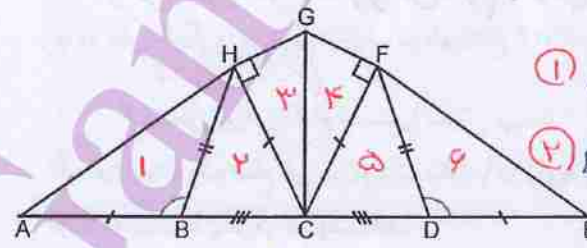
① $H_1 = H_2 = 90^\circ$ چون $AB = AC$ مثلث متساوی الساقین است

② $ABH \cong ACH$ (س، ز، ض) پس در حالت وتر و یک ضلع هم نهشتند

③ $ABH \cong ACH$ بگویم دو مثلث هم نهشت می باشند

۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



① $\triangle ABH \cong \triangle FDE$ (ص، ز، ض)

② $\triangle BHC \cong \triangle DFC$ (ص، ض، ض)

③ $\triangle CGH \cong \triangle CGF$ (وتر و یک ضلع زاویه قائم)

$\triangle FCE \cong \triangle HCA$ ← از قسمت ① و ② داریم

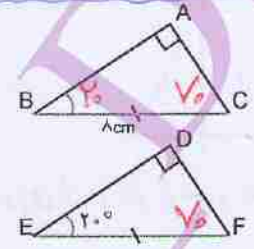
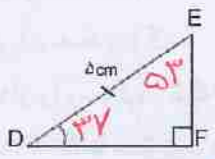
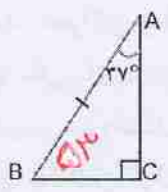
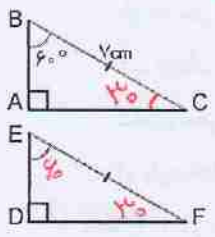
حالت (ص، ص، ض)، (ص، ز، ض)، (ز، ز، ض)

(وز) و (وض)



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

(زاویه تند)



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

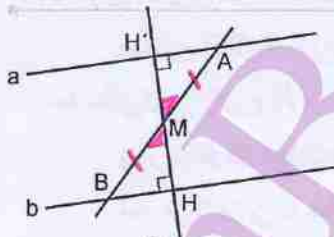
آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ *بله*، به حالت دو زاویه و ضلع بین آن دو

۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری

برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. *بله*، در این حالت می‌توانیم ثابت کنیم *زاویه سوم نیز مساوی است پس به حالت* در حالت دیگر برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: *(زاویه تند) دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند*

- برابری وتر و یک ضلع
- برابری وتر و یک زاویه تند
- یا به اختصار (وض)
- یا به اختصار (وز)

کارد در کلاس



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. *کلاسی*

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟ *وتر و یک زاویه تند (وز)*

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی‌اند. *کلاسی*

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ *وتر و یک زاویه تند (وز)*

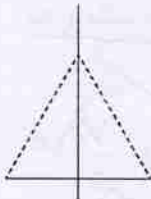


نیاز به دلیل آوردن

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند:



«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید: «چرا این جمله درست است؟»

شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

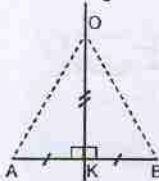
او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله

آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری: فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟ **خیر، چون فقط یک نقطه را بررسی کرده**

۲- مهتاب گفت: «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت: «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

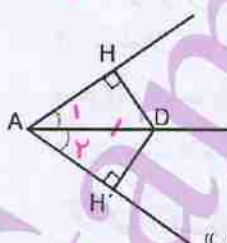
O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟)» **چون OK عمود بر AB است**

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در

چه حالتی؟) **چون OK منصف AB است - (ض: ض: ض)**

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟) **چون دو مثلث هم نسبت هستند**

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟ **بله**



۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید:

① وتر مشترک هر دو مثلث است

② $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نیم سازه است پس داریم

③ هر دو مثلث قائم الزامی باشند

«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

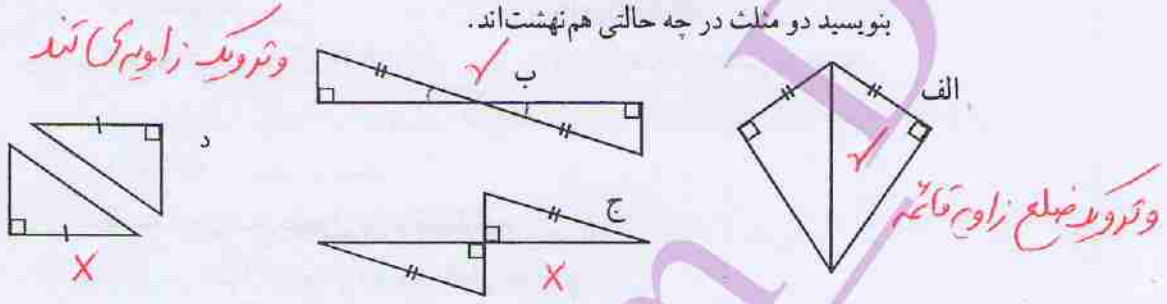
(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

۹۸

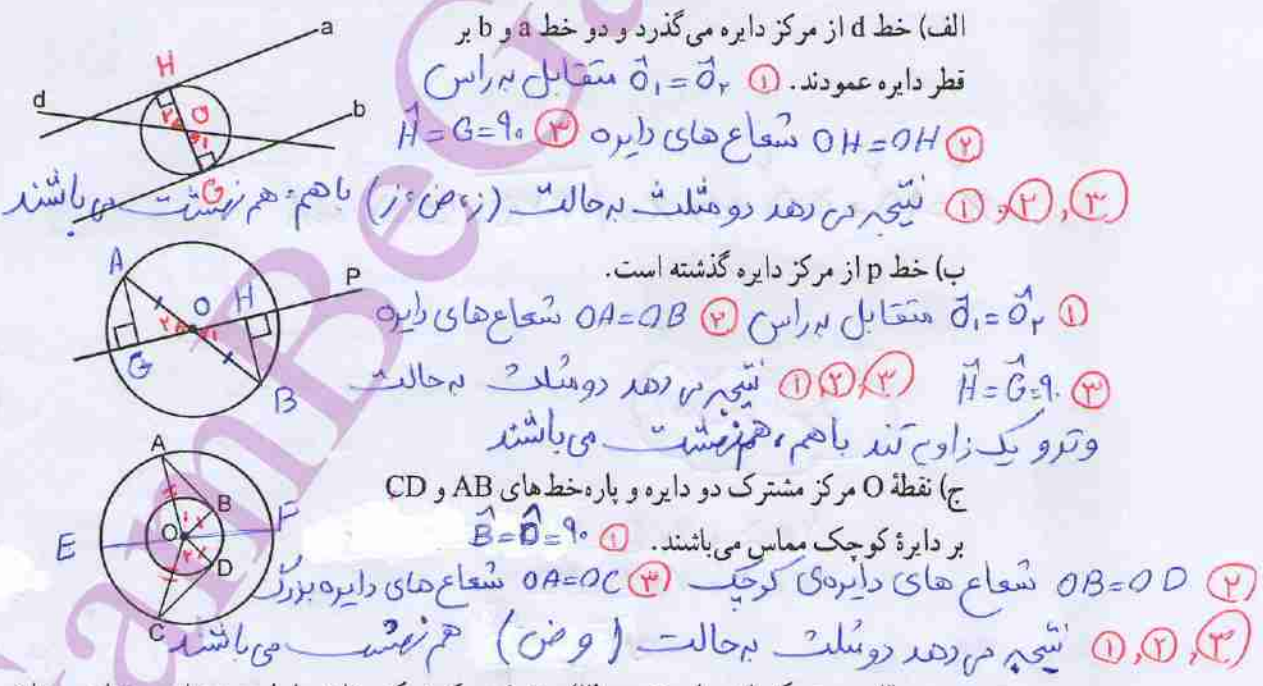
نتیجه می گیریم به حالت وتر و یک زاویه تند دو مثلث هم نسبت می باشند ①, ②, ③



۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم‌نهشت‌اند.



۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.



۳- در هر یک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

- الف ← دوران 180° نسبت به نقطه O
- ب ← دوران 180° نسبت به نقطه O
- ج ← تقارن نسبت به قطر EF

n زوج باشد \Rightarrow محیط $= 2 \times 5 + 4n = 4n + 10$

n فرد باشد \Rightarrow محیط $= 5 + 2 + 4n = 4n + 7$

مرور فصل ۶

شناخت مهارت ۱

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

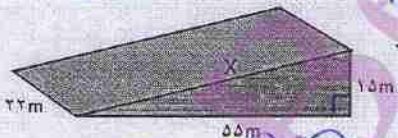
- رابطه فیثاغورس
- اجزای متناظر
- هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه
- حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث
- در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت
- هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین
- هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$



۱- در شکل روبه‌رو سطح شیب‌داری را می‌بینید.

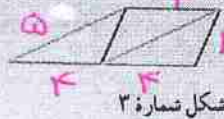
طول این سطح شیب‌دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

اصلاح شود

$2 \times 5 + 4 \times 4 = 34$

$5 + 2 + 7 \times 4 = 35$



۳

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟

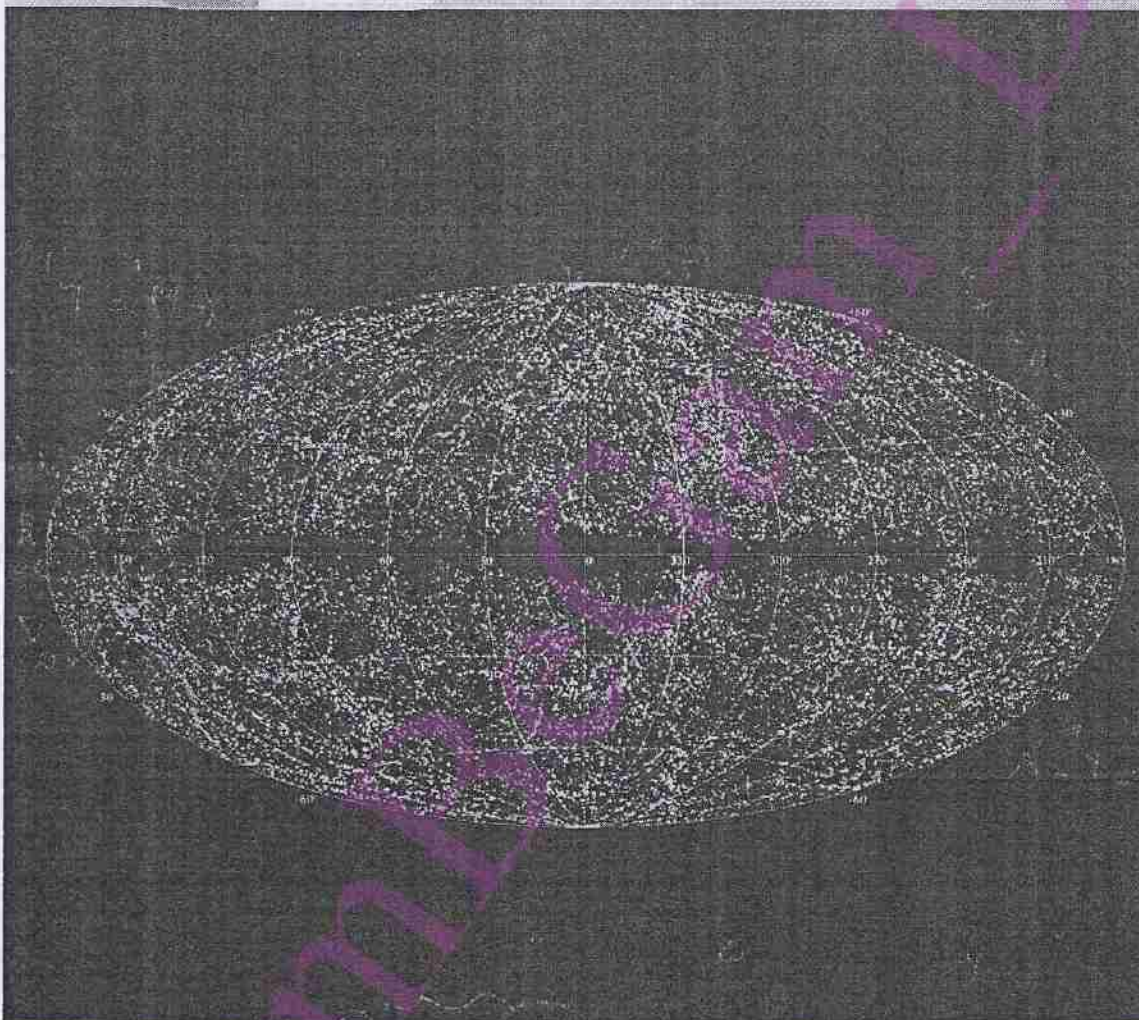
باز ↑



شکل شماره ۱	شکل شماره ۲	شکل شماره ۳	شکل شماره ۴	شکل شماره ۵
محیط $5 + 4 + 7 = 11$	محیط $2 \times 5 + 2 \times 4 = 18$	محیط $5 + 3 \times 4 + 2 = 19$	محیط $2 \times 5 + 4 \times 4 = 34$	محیط $5 + 2 + 5 \times 4 = 27$

فصل ۷

توان و جذر



اندازه تقریبی شعاع منظومه شمسی 10^{13} متر است. اندازه تقریبی شعاع جهان قابل مشاهده توسط انسان 10^{23} برابر بیشتر است. تصویر بالا شامل ۴۳ هزار کهکشان است. اگر می‌خواهید بدانید ما کجا هستیم باید بدانید که کهکشان راه شیری تقریباً یک نقطه کوچک در وسط‌های نقشه محسوب می‌شود. فکر منظومه شمسی را هم نکنید چون خیلی کوچک‌تر از آن است که در این تصویر قابل دیدن باشد.

ضرب اعداد توان دار یادآوری

توان

یادآوری در سال گذشته ضرب دو عدد توان دار با پایه های مساوی و نیز توان های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می نویسیم.
اگر a عددی دلخواه و n, m دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(یا برای سادگی: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $a^m \cdot b^m = (ab)^m$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$2^6 \times 2^2 = 2^8$ $(-\frac{2}{3})^7 \times (-\frac{2}{3})^5 = (-\frac{2}{3})^{12}$ $8^2 \times 2^3 = 128$ $(-6)^4 \times (\frac{1}{2})^4 = (-3)^4 = 81$
 $2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 = 12^7$ $3 \times (\frac{3}{5})^4 \times 81 = 3^5$ $2^6 \times 144 = 72$ $2^2 \times 8^5 \times 4^2 = 1^1$
 ۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید. اصلاح شود. $a^1 b^9$ جواب مسئله اصلی

$a^2 \times a^1 = a^3$ $x^4 \times y^4 = (x \cdot y)^4$ $(ab)^5 \times a^3 \times b^2 = a^5 \times a^3 \times b^5 \times b^2 = a^8 \cdot b^7 = (ab)^8$
 $(xy)^2 \times (xy)^7 = (xy)^9$ $12^5 \times 18^3 \times (\frac{1}{9})^3 = 10$ $2^3 \times (2a)^3 \times 2a = 2^3 \times 2^3 \times a^3 \times 2a = 2^7 \times a^4 = (2a)^7$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟
 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2a)^3}{a^3} = 2^3 = 8$

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف های مناسب پر کنید.

$18^5 = (6 \times 3)^5$ $a^4 = a^2 \times a^2$ $7^5 \times 4^5 = 28^5$

$(-\frac{7}{2})^7 \times (-\frac{7}{2})^2 = (-\frac{7}{2})^9$ جواب اصلی: $(4 \times 3)^4 = 4^4 \times 3^4$
 $2^4 \times 4^4 = (\frac{1}{2})^4 \times 2^4$
 می توانیم با سه باز در نظر بگیریم



صادق ← ضرب اعداد توان دار با پایه‌های برابر **بهر روز** ← ابتدا حاصل $2^3 = 8$ را بدست آورده و از تعریف توان استفاده کرده **بهرام** ← ابتدا کار به روز و سپس هر دو تا $8 \times 8 = 64$ را بدست آورده و در نهایت

از تعریف توان **هادی** ← قانون ضرب اعداد توان دار را روی هر دو عدد انجام داده و در نهایت دوباره از همان قانون کمک گرفته است **مجید** ← هر دو با عدد را با قانون ضرب اعداد توان دار **ماترین‌های مساوی** محاسبه کرده و در

تنوع روش‌ها

فعالیت



حاصل عبارت $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$ را پنج دانش آموز به صورت یک عدد توان دار حساب

کرده‌اند. راه حل هر دانش آموز را توضیح دهید و تفاوت آنها را بیان کنید. **کترای**

صادق: قانون ضرب اعداد توان دار $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2+2} = 2^8$

بهر روز: چون $2^3 = 8$ و قانون ضرب $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

بهرام: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 64 \times 64 = 64^2$

هادی: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6 \times 2^6 = 2^{12}$

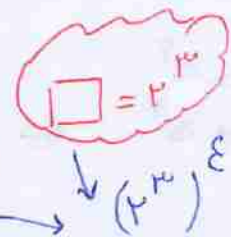
مجید: $2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 4^2 \times 4^2 = 16^2$

با محاسبه، نشان دهید که تساوی‌های زیر درست‌اند: (می‌توانید از ماشین حساب کمک

بگیرید.) $8^4 = 4096$

$8^4 = 64^2 = 16^3 = 2^{12} = 4096$ و ... $4^4 = 256$

توضیح دهید که تساوی زیر چگونه به دست آمده است. عدد 2^3 در ضرب با خودش 2^3 بار تکرار شده



$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^4$ $\square \times \square \times \square \times \square = \square$

با مقایسه این تساوی و تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^2)^4 = 2^{12}$ **پله**

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید. $(7^2)^5 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^{10}$

$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $[(\frac{1}{2})^2]^4 = (\frac{1}{2})^8 = (\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^4 = (\frac{1}{2})^8$

$(a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^8$

آنچه را فرا گرفته‌اید، به صورت یک قانون کلی بیان کنید.

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آن‌گاه:

$(a^m)^n = a^{mn}$

برای به توان رساندن یک عدد توان دار

می‌توانیم پایه آن عدد را به توان حاصل ضرب توان‌ها رسانیم



کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$(5^3)^2 = 5^{2 \times 3} = 5^6$
 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$
 $[(-6)^2]^5 = (-6)^{2 \times 5} = (-6)^{10} = 6^{10}$

$\left[(-\frac{1}{y})^3\right]^4 = (-\frac{1}{y})^{3 \times 4} = (-\frac{1}{y})^{12}$
 $(18^2)^3 = 18^{2 \times 3} = 18^6$
 $(x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$

$(ab)^2 = (ab)^2$
 $((xy)^2)^3 = (xy)^{2 \times 3} = (xy)^6$
 $(x^m)^n = x^{m \times n}$

اصلاح شود

کار خاصی نمی‌توان کرد اصلاح

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

$(3^2)^2 = 3^2 \times 3^2$ **نادرست**

$3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$ **درست**

$(3^2)^2 = 3^4$ **درست**

$(3^5)^2 = 3^7$ **نادرست**

$(3^0)^2 = 1^2 = 1$
 $3^0 = 1998^3$

$(5^2)^2 = 5^1$ **نادرست**

$3^2 \times 3^2 = 3^6$ **نادرست**

در صورتی درست است که $a=1$ باشد

$3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$ **درست**

$a^1 \cdot a^1 = 1$ **نادرست**

$(-4^4) \rightarrow$ عددی منفی
 $4^4 \rightarrow$ عددی مثبت

$((-2)^2)^2 = 2^6$ **درست**

$(-4^6) = 4^6$ **نادرست**

۳- حاصل عبارت $[(-5)^2]^3 \times (-5)^2$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

$(-5)^8$ الف **درست**
 $= (-5)^6 \times (-5)^2 = (-5)^{6+2} = (-5)^8$

ب) -5^8 جواب منفی می‌دهد و نادرست است

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$9^0 = (3^2)^0 = 3^{(2 \times 0)} = 3^0 = 1$

$$20 - 4(2 \times 2^2) = 20 - 4 \times 2^2 = 20 - 16 = 4$$



- مقدار عددی عبارت $a-b(c \times b^c)$ را به ازای $a=20, b=4, c=2$ به دست آورید.
- حجم مکعبی به ضلع 8cm را به صورت یک عدد توان دار، که پایه آن عدد ۲ باشد، بنویسید.

$$27 \times 9^5 = 3^3 \times 3^{10} = 3^{13}$$

$$V = 8^3 = (2^3)^3 = 2^9$$

باشند، بنویسید.
 $27 = 3^3$
 $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$

- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.
- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید و در صورت امکان، به شکل یک عبارت توان دار بنویسید.

این توان منفی را از این من پرورد

$$[(-3^2)]^2 = (-9)^2 = 81 = 3^4$$

$$[(3^2)]^2 = 9^2 = 81 = 3^4$$

$$2^5 \times 2^2 \times 3^2 \times 6^2 = 2^7 \times 3^3 = 2^7 \times 3^3$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{10}$$

$$(x^2)^5 \cdot (y^2)^3 \cdot x^4 y^2 = x^{10} y^4 x^3 y^2 = x^{13} y^6$$

۴, ۶, ۸, ...

۵- کدام عددهای طبیعی را می توان به جای \square نوشت تا نامساوی زیر درست باشد؟

$$2 \times 2^7 = 2^8$$

$$3 \times 3^5 = 3^6$$

$$(-2)^{\square} > 15$$

عددهای زوج بزرگتر از ۲

- حاصل $2^2 + 2^2$ و حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.
- عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست آید. (از هر چهار عدد استفاده کنید).

$$3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = (5)^2 - (1)^{\square}$$

۸- مقدار عددی عبارت های زیر را به ازای $a=6, b=-2, c=-4$ به دست آورید.

الف) $-2(a+b^2) + \frac{c^2}{b} = -2(6+4) + \frac{16}{-2} = -20 - 8 = -28$

ب) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + bc - 10 = \left(\frac{6}{-2}\right)^2 + (-2)(-4) - 10 = 9 + 8 - 10 = 7$

۱۵

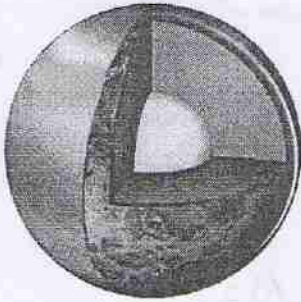
$$\underbrace{a^n + a^n + a^n + \dots + a^n}_{\text{تعداد } a \text{ تا}} = a \times a^n = a^{n+1}$$

نکته

تقسیم اعداد توان دار

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی

فعالیت



دمای مرکز خورشید حدود 10^4 درجه سانتی گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید.

حل: آب در 10^2 درجه سانتی گراد به جوش می آید و داریم: $10^2 = 10^2$

$$10^4 \div 10^2 = \frac{10^4}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10^2$$

بنابراین: $10^4 \div 10^2 = 10^2$

یعنی دمای مرکز خورشید 10^2 برابر دمایی است که آب در آن به جوش می آید.

آیا تقسیم بالا را به شکل زیر نیز می توانیم انجام دهیم؟ **بله**

$$\frac{10^4}{10^2} = \frac{10^2 \times 10^2}{10^2} = 10^2$$

اکنون، حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-9)^5 \div (-9)^3 = \frac{(-9)^5}{(-9)^3} = (-9)^2 = (-9)^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

با استفاده از نمونه های داده شده، برای محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه های

مساوی قانونی بنویسید. یکی از پایه ها را a بنویسیم و توان اولی را m و توان دومی را n بنویسیم.

a عددی دلخواه و m, n عددهایی طبیعی باشند:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div a^n = a$$

کاردر کلاس



۱- حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$8^1 \div 8^0 = 8^{1-0} = 8^1 \quad 3^7 \div 3^3 = 3^{7-3} = 3^4 \quad 6^2 \div 6^1 = 6^{2-1} = 6^1$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^3 \quad \frac{(-2)^9}{(-2)^2} = (-2)^7 \quad \left(\frac{1}{9}\right)^4 \div \left(\frac{1}{9}\right)^1 = \left(\frac{1}{9}\right)^3$$

$$(4/5)^6 \div (4/5)^3 = (4/5)^3 = 4^3/5^3 \quad (-0/3)^0 \div (-0/3)^2 = (-0/3)^{-2} = \frac{1}{(-0/3)^2} = \frac{1}{0} \quad \frac{7^5}{7^1} = 7^4$$

نیازی به پرانتز نی باشد

۲- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(2^3)^5 = 2^{15}$$

$$14^0 \div (14)^2 = 14^{-2}$$

$$3^0 \div 3^1 = 3^{-1}$$

$$\frac{7^2}{7^5} = \frac{7^2}{7^2 \times 7^3} = \frac{1}{7^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \quad \frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

۳- حاصل را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$a^{11} \div a^5 = a^6$$

$$(xy)^y \div (xy)^2 = (xy)^{y-2} \quad (-x)^y \div (-x)^2 = (-x)^{y-2} = x^{y-2}$$

تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی

فعالیت



مثال های داده شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ هر یک از تقسیم ها چگونه به دست آمده است.

$$12^2 \div 6^2 = \frac{12^2}{6^2} = \frac{12 \times 12}{6 \times 6} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = \left(\frac{12}{6}\right)^4 = 2^4$$

$$3^5 \div 7^5 = \frac{3^5}{7^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$(-4)^2 \div 6^2 = \frac{(-4)^2}{6^2} = \frac{(-4) \times (-4)}{6 \times 6} = \left(-\frac{4}{6}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$12^4 \div 6^4 = \frac{12^4}{6^4} = \frac{12 \times 12 \times 12 \times 12}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = 2^4$$



پایه‌ها بر هم تقسیم می‌شوند

$$8^5 \div 2^5 = (8 \div 2)^5 = 4^5$$

با توجه به مثال‌های بالا، توضیح دهید تساوی $4^5 = 2^5 = 8^5$ چگونه به دست آمده است.

اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی قانون زیر را کامل کنید.

در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی **پایه‌ها را بر هم تقسیم** و **پایه‌ها را بر هم تقسیم** می‌کنیم.

به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$6^8 \div 3^8 = \left(\frac{6}{3}\right)^8 = 2^8 \quad (-2)^4 \div (-3)^4 = \left(\frac{-2}{-3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و $b \neq 0$

کاردر کلاس

۱- حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \div 3^7 = \left(\frac{5}{3}\right)^7$$

$$14^3 \div 7^3 = \left(\frac{14}{7}\right)^3 = 2^3$$

$$(-8)^5 \div (-2)^5 = \left(\frac{-8}{-2}\right)^5 = 4^5$$

$$9^2 \div 27^2 = \left(\frac{9}{27}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$5^7 \times 3^2 \times 2^7 \times 3^2 = 10^7 \times 3^4 = 30^7 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{3^7 \times 3^5}{6^{10} \times 5^{10}} = \frac{3^{12}}{3^{10} \times 2^{10}} = \frac{3^2}{2^{10}} = \frac{9}{1024} \quad \frac{(a^2)^4}{a^2} = \frac{a^8}{a^2} = a^6 \quad \frac{(x^2)^5 \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{10} \times x^7}{x^{11}} = \frac{x^{17}}{x^{11}} = x^6$$

$$(a^3)^{4-1} = (a^3)^3 = a^9$$

۱- هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$81 = 3^4 \quad -8 = (-2)^3 \quad 1024 = 2^{10} \quad \frac{-125}{729} = \left(\frac{-5}{9}\right)^3 \quad \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \quad \frac{1}{32} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

۲- کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \quad \text{نادرست} \quad \left(\frac{5}{11}\right)^0 = 0 \quad \text{نادرست} \quad \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \quad \text{نادرست}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \quad \text{درست} \quad 10^2 \times 10^2 = 10^{12} \quad \text{نادرست} \quad (-2)^2 \times (-2) = 16 \quad \text{درست} \quad (-2)^4 = 16 \quad \text{درست}$$

درست

نادرست

درست

درست



۳- حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$(\frac{1}{3})^4 \times 3^{10} = \frac{1^4 \times 3^{10}}{3^4} = 3^6$
 $\frac{5^6 \times 6^2}{5^4 \times 6^5} = (\frac{5}{6})^2$
 $\frac{x^v \times y^f}{x^5 \times y^2} = x^v y^f = (xy)^2$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید.

$3^5 \times 3^4 = 3^9$
 $5 + 4 = 9$
 $(7^4)^2 = 7^8$
 $4 \times 2 = 8$
 $\frac{7^4 \times 7^2}{7^2 \times 7^1} = 7^5$
 $9 + 2 - 3 = 8$

$(\frac{2}{3})^5 \div (\frac{2}{3})^2 = (\frac{2}{3})^3$
 $\frac{(-6)^4}{(-6)^5} = (-6)^{-1}$
 $7 - 5 = 2$
 $1 - 5 = -4$

عدددهای زیر را از کوچک ترین تا بزرگ ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید. $3, 5, 1, 4, 2, 5, (-1), -4$

۵- عدددهای زیر را از کوچک ترین تا بزرگ ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید. $6^5, 1^{12}, -4^3, (-1)^5, 0, (\frac{1}{2})^5$

۶- کدام تساوی های زیر درست و کدام نادرست اند؟

$(\sqrt{5})^2 = 25$ نادرست $(\sqrt{5})^2 = 5$ درست $(\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$ درست $+\sqrt{5} = -\sqrt{5}$ نادرست

۷- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$(-10^2)^2 = (-100)^2 = 10000$
 $(ab^2)^3 = a^3 b^6$
 $(x^2 y^3)^4 = x^8 y^{12}$
 $(\frac{x^v}{x^f})^5 = (\frac{x^v}{x^f})^5 = x^{v-f}$

$[36^5 \div (-3)^5] \div [(-2)^5 \times (-3)^5] = (-12)^5 \div (+6)^5 = (-2)^5 = -32$

۸- نصف 2^1 و ربع 4^7 را به صورت عددی توان دار بنویسید.

2^9 نصف $= 2^9 \div 2 = 2^8$
 4^7 ربع $= \frac{1}{4} \times 4^7 = 4^6$

خواندنی

رشد باکتری ها به شرایط مناسب محیطی و وجود مواد غذایی بستگی دارد. در شرایط مطلوب باکتری ها در هر ۲۰ دقیقه به دو نیم تقسیم می شوند، سپس در ۲۰ دقیقه دیگر رشد کرده دوباره هر کدام به دو قسمت تقسیم می شوند. تکثیر باکتری ها تا جایی ادامه پیدا می کند که مواد غذایی لازم موجود باشد، برای مثال اگر در حال حاضر ۲ باکتری داشته باشیم، در ۲۰ دقیقه دیگر $2 \times 2 = 2^2 = 4$ باکتری و در ۶۰ دقیقه دیگر $2^3 = 8$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت ۲۴ ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

هر ۲۰ دقیقه یک واحد زمان هست $24 \times 60 = 1440$ دقیقه

تعداد واحد زمان	۰	۱ دقیقه	۲ دقیقه	۳ دقیقه	...	۷۲
تعداد باکتری ها	۲	۴	۸	۱۶	...	۹,۴۴۴,۷۳۲,۹۴۵,۷۳۹,۲۹۰ ۴۲۷,۳۹۲
رابطه	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^{72}

حرف‌حالت‌های نامطلوب



آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب‌گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب‌گذر دیواره‌ای ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواستند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب‌گذر ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟

در ادامه، گفت‌وگوی این سه دانش‌آموز را می‌خوانید که برای حل این مسئله صورت گرفته است. با دقت در این گفت‌وگو سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید.



آزاده: به نظر من این مسئله مانند آن است که یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۵ متر داشته باشیم و بخواهیم وتر آن را به دست آوریم.

نرگس: پس می‌توانیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.

نسیم: یعنی رابطه مقابل را داریم: $5^2 + 3^2 = 34$ مربع وتر

آزاده: درست است. اکنون برای به دست آوردن طول وتر باید جذر عدد ۳۴ را به دست آوریم.

نرگس: چون $25 < 34 < 36$ پس $\sqrt{34}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد.



یعنی داریم: $5 < \sqrt{34} < 6$

نسیم: اگر فاصله ۵ تا ۶ را روی محور نصف کنیم، عدد $5/5$ به دست می‌آید و چون $(5/5)^2 = 30/25$ ، پس حتماً جذر ۳۴ از $5/5$ بیشتر است.

آزاده: می‌توانیم چند عدد بزرگ‌تر از $5/5$ را بررسی کنیم؛ مثلاً $5/7$ و $5/8$ و $5/9$.



$$\left. \begin{aligned} 25 < 34 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{34} < 6 \\ 5/5 = 30/25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5/5 < \sqrt{34} < 6 \Rightarrow \left. \begin{aligned} 5/7^2 = 32,49 \\ 5/8^2 = 33,61 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5/7 < \sqrt{34} < 5/8$$

$$\left. \begin{aligned} 5/7 < \sqrt{34} < 5/8 \\ 5/9^2 = 34,01 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5/7 < \sqrt{34} < 5/9$$

روش دوم

عدد	۵,۸۱	۵,۸۲	۵,۸۳	۵,۸۴
مجدور	۳۳,۷۵۶۱	۳۳,۸۷۲۴	۳۳,۹۸۸۹	۳۴,۱۰۵۶

سپس آنها به کمک ماشین حساب جدول زیر را تکمیل کردند.

عدد	۵,۷	۵,۸	۵,۹	۶
مجدور	۳۲,۴۹	۳۳,۶۴	۳۴,۸۱	۳۶

در نتیجه با توجه به جدول بالا، مقدار $\sqrt{34}$ تقریباً برابر ۵,۸ است.

آخرین جمله فعالیت بالا را معمولاً به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $\sqrt{34} = 5,8$

اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{34}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنند، چگونه باید این کار را انجام دهند؟ **فاصله بین ۵,۸ و ۵,۹**

بداً در بالا

$5,85 = 34,1025$
 $5,80 < \sqrt{34} < 5,90$

$5,80 < \sqrt{34} < 5,85$
 $5,82 = 33,8724$
 $5,82 < \sqrt{34} < 5,85$

مقدار $\sqrt{34}$ تا پنج رقم اعشار به کمک ماشین حساب چنین به دست می‌آید:

$\sqrt{34} = 5,83095$

کار در کلاس



۱- با پرکردن جاهای خالی، مقدار $\sqrt{2}$ و $\sqrt{200}$ را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین حساب به دست می‌آورد، مقایسه کنید.

$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

(الف)

$1 < \sqrt{2} < 2$

(ب)

اکنون با نصف کردن فاصله ۱ تا ۲ روی محور، عدد $1/5$ را آزمایش می‌کنیم. چون $(1/5)^2 = 2/25$ ، پس مقدار $\sqrt{2}$ حتماً کمتر از $1/5$ است.

عدد	۱,۳	۱,۴	۱,۵
مجدور	۱,۶۹	۱,۹۶	۲,۲۵

$\sqrt{2} = 1,4$

به کمک جدول بالا می‌توان نوشت:

$\sqrt{196} < \sqrt{200} < \sqrt{225}$

$14 < \sqrt{200} < 15$

خلاصه درس: ابتدا دست می‌آوریم خبر عددی کدام دو عدد طبیعی هستند

سپس مجدور میانگین آن دو عدد را دست می‌آوریم برای مثال $5 < \sqrt{34} < 6$

$5 + \frac{1}{5} = 5,2$ → $5,2^2 = 27,04 < 34$ → $5,5 < \sqrt{34} < 6$

حال جدولی رسم می‌کنیم و در آن مجدور اعداد $5,6, 5,7, 5,8, 5,9$ را می‌نویسیم تا بتوانیم همین

تا می‌توانیم همین نصف کردن را ادامه دهیم

$$4 < \sqrt{19} < 5 \quad \frac{4+5}{2} = 4,5 \xrightarrow{\text{مقدور}} 4,5^2 = 20,25$$

عدد	4,1	4,2	4,3	4,4
مقدور	16,81	17,64	18,49	19,36

$$\Rightarrow \sqrt{19} \approx 4,3$$

عدد	9,1	9,2	9,3	9,4
مقدور	81,81	82,64	85,49	88,36

$$4 < \sqrt{40} < 7 \Rightarrow \frac{4+7}{2} = 5,5 \xrightarrow{\text{مقدور}} 5,5^2 = 30,25 > 40$$

$$\Rightarrow \sqrt{40} \approx 6,3$$

۱- اکنون با نصف کردن فاصله ۱۴ تا ۱۵ روی محور اعداد، عدد ۱۴/۵ را آزمایش می‌کنیم. چون $(14/5)^2 = 210/25 = 8,4 < 10$ ، بنابراین $\sqrt{10} > 14/5$ است.

$$\sqrt{10} \approx 3,1$$

عدد	14/1	14/2	14/3	14/4
مقدور	196/1	196/4	196/9	196/16

۲- ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید. سپس، به کمک ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده‌اید، مقایسه کنید.

عدد	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10/3}$	$\sqrt{18/5}$	$\sqrt{68}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{140}$
مقدار حدس زده شده	1,7	2,2	3,2	4,5	8,3	9,9	11,8
ماشین حساب	1,73	2,23	3,209	4,301	8,246	9,949	11,832

عدد	12,1	12,2	12,3	12,4
مقدور	144,41	148,84	151,29	153,76

$$\Rightarrow \sqrt{150} \approx 12,2$$

$$12 < \sqrt{150} < 13 \Rightarrow \frac{12+13}{2} = 12,5 \xrightarrow{\text{مقدور}} 12,5^2 = 156,25 > 150$$



۱- به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$$\sqrt{19} \approx 4,3$$

$$\sqrt{19} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{150} \cdot \sqrt{385}$$

$$\sqrt{40} \approx 6,3$$

$$\sqrt{150} \approx 12,2$$

$$\sqrt{385} \approx 19,6$$

۲- در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین حساب کمک بگیرید.

$$\sqrt{11} < 3 \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{17} > 4,03$$

$$\sqrt{6/25} = 2 \frac{1}{5}$$

$$1 + \sqrt{15} > 4$$

$$\sqrt{20} - 2 < \sqrt{18}$$

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

$$19 < \sqrt{385} < 20$$

$$\frac{19+20}{2} = 19,5$$

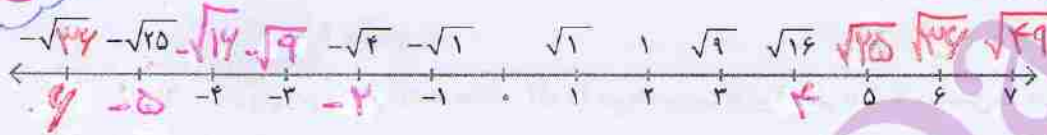
$$19,5^2 = 380,25 < 385$$

عدد	19,6	19,7	19,8	19,9
مقدور	384,16	388,09	392,04	396,01

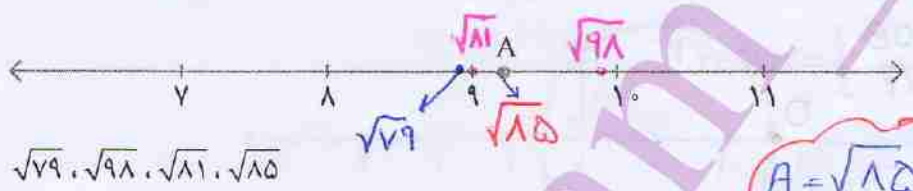
$$\Rightarrow \sqrt{385} \approx 19,6$$

اصلاح نمود

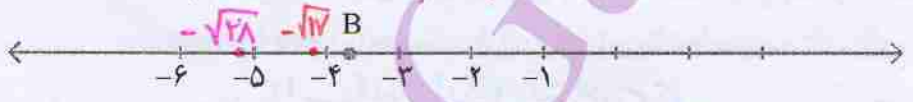
۳- جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.



۴- در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A, B, C). نقطه مشخص شده روی محور به کدام یک از عددهای داده شده نزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید. عدد ۹۸ به صد نزدیک است پس چند آن هم به ۱۰ نزدیک‌تر است

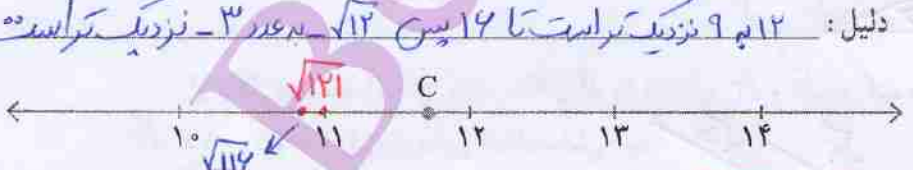


دلیل: $\sqrt{79} < 9$, $\sqrt{101} = 10$, $9.5 < \sqrt{98} < 10$



دلیل: $\sqrt{28} > 5 \Rightarrow -\sqrt{28} < -5$
 $\sqrt{34} > 6 \Rightarrow -\sqrt{34} < -6$

$B = -\sqrt{34}$



دلیل: ۱۲ به ۱۲۱ نزدیک‌تر است تا ۱۴ پس ۱۲۱ به ۱۴۴ نزدیک‌تر است پس $C = \sqrt{140}$

عدد ۱۴ به عدد ۱۴۴ نزدیک‌تر است تا ۱۲۱ پس $\sqrt{140} = 12$ نزدیک‌تر است

۱۵ به ۱۶ نزدیک‌تر است تا ۹ پس $\sqrt{15}$ به ۴ نزدیک‌تر است

لذا با توجه به شکل داریم $B = -\sqrt{15}$



برای راحتی کار در توانیم مثلث را با همان واحد محور بیرون محور رسم کنیم و سپس برگردانیم. راه اندازه‌ی مطلوب باز نموده و همان مورد نظر را رسم کنیم.

مهم

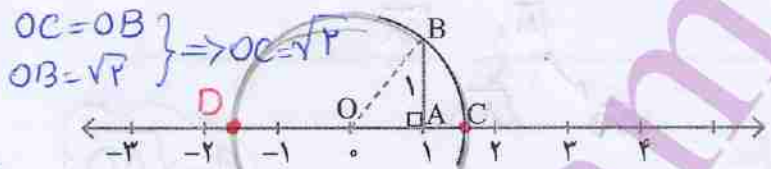
نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

فعالیت



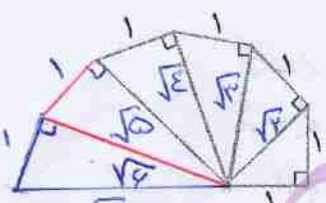
در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین حساب محاسبه کردید.

در این فعالیت، با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. محور عددهای زیر را در نظر بگیرید. مثلث OAB یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه C قطع کند. طول پاره خط OC چقدر است؟ $\sqrt{2}$ چرا نقطه C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟



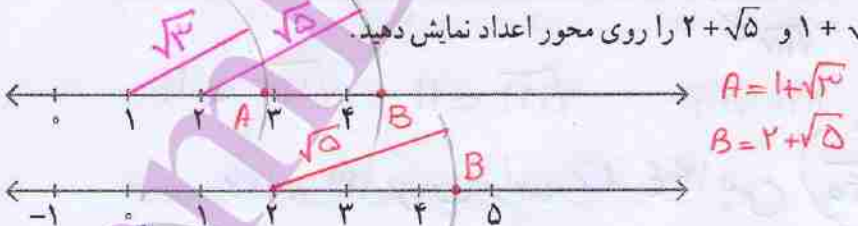
به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد. $D = -\sqrt{2}$

در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ است. چرا؟



با استفاده از این روش، آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟ بله

از شکل داده شده استفاده کنید. دهانه برگردانده را به اندازه $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $1 + \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

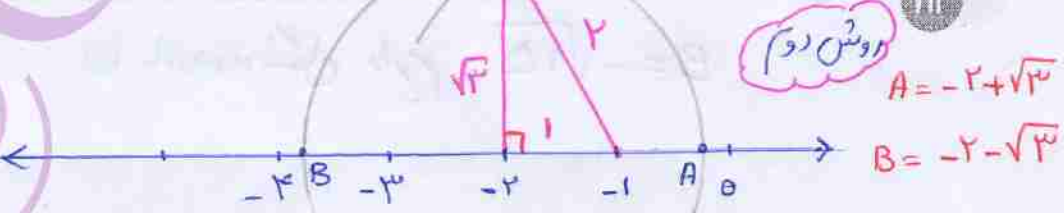


$A = -2 + \sqrt{3}$
 $B = -2 - \sqrt{3}$

عدد $2 - \sqrt{3}$ را روی محور اعداد نمایش دهید. برای نمایش عدد $2 - \sqrt{3}$ روی محور از تساوی $2 - \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$ استفاده کنید.

روش اول

کار در کلاس



روش دوم

$A = -2 + \sqrt{3}$
 $B = -2 - \sqrt{3}$

در این روش هر واحد ۵cm است

خواص ضرب و تقسیم رادیکالها
 رابطه را دانش آموزان کشف کنند

فعالیت



با توجه به عددهای داده شده a و b، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه

دو ستون آخر جدول، چه حدسی می زنید؟

a	\sqrt{a}	b	\sqrt{b}	ab	\sqrt{ab}	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
4	2	9	3	36	6	6
9	3	16	4	144	12	12
4	2	16	4	64	8	8
25	5	4	2	100	10	10

آیا می توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟ جذر (رادیکال) حاصل ضرب دو عدد برابر است با حاصل ضرب جذرهاي آن دو عدد

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $a, b \geq 0$
 به کمک جدول بالا، درستی رابطه را بررسی کنید.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *نادرست*

$\sqrt{9+14} = \sqrt{23} = 5$ *نادرست*

$\sqrt{9} + \sqrt{14} = 3 + \sqrt{14} \neq 5$

۱- در تساوی های زیر جاهای خالی را پر کنید.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ یا $\sqrt{2 \times 8}$

$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{14} = \sqrt{7} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

اصلاح شود $\sqrt{14 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 4 \times 5 = 20$

۲- کدام یک از عبارت های زیر درست و کدام نادرست است؟

$\sqrt{50} = 25$ *نادرست*

$\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$ *درست*

۳- مانند نمونه تساوی های زیر را کامل کنید.

$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

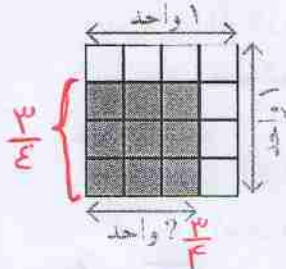
$\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$



جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به دست آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید.

a	۱۶	۲۵	۱	۴۹
b	۹	۳۶	۱۰۰	۶۴
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$	$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$	$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$	$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$

کاردر کلاس



۱- با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه

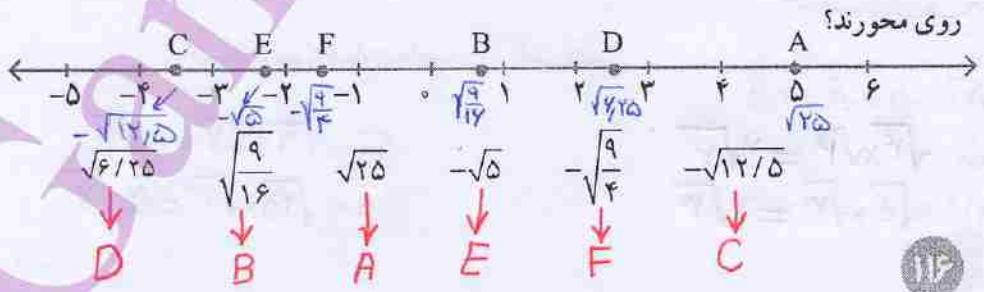
$S = \frac{9}{16}$ را بررسی کنید. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

$-\sqrt{\frac{1}{144}} = -\frac{1}{12}$ $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ $-\sqrt{\frac{1}{49}} = -\frac{1}{7}$

۳- به صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص شده



$$24 < \sqrt{700} < 27 \rightarrow \frac{24+27}{2} = 25,5 \xrightarrow{\text{مجدور}} 25,25 > 700$$

عدد	24,1	24,2	24,3	24,4
مجدور	581,21	584,44	591,69	596,96

$$\Rightarrow \sqrt{700} \approx 24,4$$



۱- نزدیک ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید.

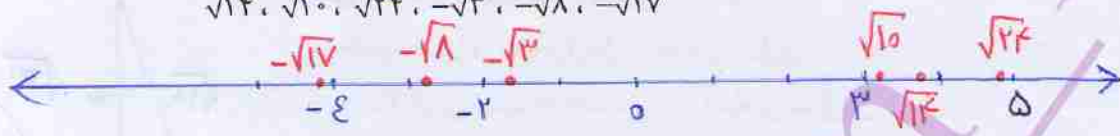
$$\sqrt{401} \approx 20 \quad \sqrt{310} \approx 18 \quad \sqrt{9999} \approx 100 \quad \sqrt{280} \approx 17 \quad \sqrt{175} \approx 13$$

$$\sqrt{401} \approx 20,02, \quad \sqrt{310} \approx 17,7, \quad \sqrt{9999} \approx 99,99 \quad \text{و} \quad \sqrt{280} \approx 16,7, \quad \sqrt{175} \approx 13,2$$

درستی پاسخ خود را به کمک ماشین حساب بیازمایید.

۲- یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید.

$$\sqrt{14}, \sqrt{10}, \sqrt{24}, -\sqrt{3}, -\sqrt{8}, -\sqrt{17}$$



۳- مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر ۶- است.

$$-4, -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

جاهای خالی را با چه عددهایی می توان پر کرد؟

نکته مهم

$$5^0 = 1$$

$$-5^0 = -1$$

1	-4	-1
-4	-2	0
-3	2	-5

1	$-(\sqrt{4+2^2})$ -3	-5^0 -1
-2	-2	5^0 0
$-\sqrt{4}$ -2	1^0+2^0 2	-5

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$(a^0 \times a^1) \times (b^{10} \div b^3) = a \times b = (ab)^1$$

$$\frac{(4 \times 3)^5 \times 14^1}{(28^7 \div 2^7) \times (6^5 \times 2^5)} = \frac{12^5 \times 14^1}{14^7 \times 12^5} = 14^{-2}$$

۵- جذر 700 را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین حساب بررسی کنید.

بالا

$$\Rightarrow \sqrt{700} = 24,4$$

$$\sqrt{700} \approx 24,457$$

۶- دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

$$\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4 < \sqrt{17}$$

جواب: 3, 4

۷- پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

$$\sqrt{3} < \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{7,5} < \sqrt{8}$$

$$\sqrt{3} = 1,73 < 1,8, 1,9, 2, 2,1, 2,2, 2,3, 2,4 < \sqrt{8} \approx 2,82$$

$$= \left(\frac{3^{10}}{3^6} \right)^2 \div \left(\frac{5^4}{5^4} \right) = 3^2 \div 1 = 9$$

$$9 < \sqrt{93} < 10 \rightarrow \frac{9+10}{2} = 9,5$$

$$9,5 \xrightarrow{\text{مجنور}} 9,25 < \sqrt{93}$$

عدد	9,4	9,7	9,8	9,9
مجنور	92,14	94,09	94,04	98,01

$$\Rightarrow \sqrt{93} \approx 9,7$$

$$9,4 < \sqrt{93} < 9,7$$

$$9,45^2 \approx 93,1225$$

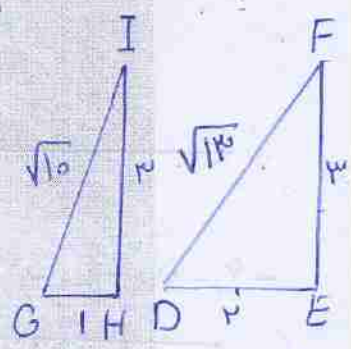
$$93,1225 > 93$$

عدد	9,41	9,42	9,43	9,44
مجنور	92,3881	92,5444	92,7349	92,9444

$$\Rightarrow \sqrt{93} \approx 9,44$$

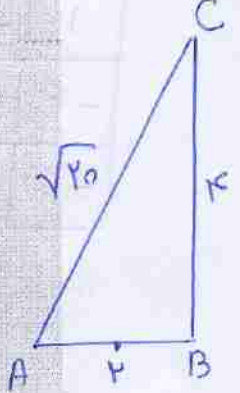
توان • جذر تقریبی • ریشه‌های دوم یک عدد • جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و دو دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- محاسبه حاصل یک عدد توان دار به توان عدد دیگر
- محاسبه تقسیم دو عدد توان دار با پایه‌های مساوی
- محاسبه تقریبی تقسیم دو عدد توان دار با نماهای مساوی
- محاسبه جذر یک عدد
- ساده کردن یک عبارت توان دار
- محاسبه جذر حاصل ضرب و حاصل تقسیم
- محاسبه یک عبارت توان دار
- پیدا کردن عددهای رادیکالی روی محور



کاربرد

کاربرد این درس علاوه بر درس‌های دیگر ریاضی مثل جبر در بیان عددهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک است. نماد علمی نحوه‌ای از بیان این عددها به صورت توان دار است.



تمرین‌های ترکیبی

۱- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید $\frac{(-3)^5 \times 2^2 \times 8}{-2^2 \times (-9)^2 \times 18} = \frac{1}{6}$

۲- حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید $\left[3^{10} \times \left(\frac{1}{27}\right)^3 \right] \div \left[5^4 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 \right]$

۳- با تهیه جدول مناسب، جذر عدد ۹۳ را تا دورقم اعشار به دست آورید. $\sqrt{93} \approx 9,44$

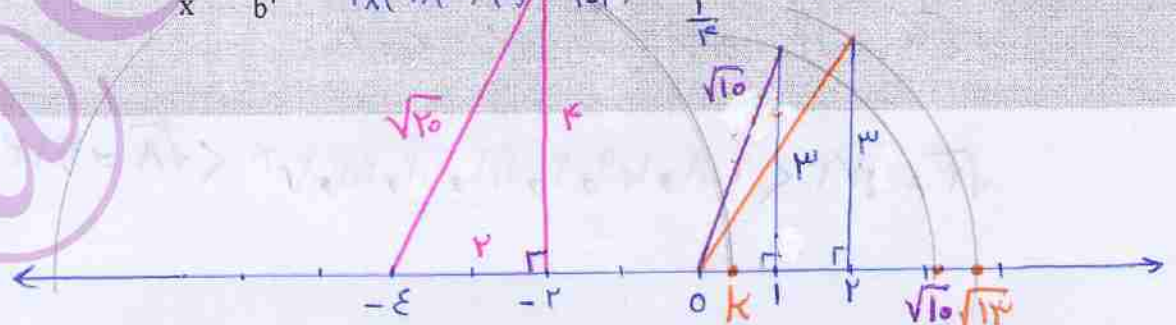
۴- عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید. $(-2)^4, (-2/5)^2, 6, \sqrt{27}, \sqrt{25}, 2^2, -2^2, -2, \sqrt{25}, 4, \sqrt{47}, 2, (-2), (-2/5)^4$

۵- به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$\sqrt{10} \text{ و } \sqrt{13} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{16} = -2 + \sqrt{2} = -2 + 2\sqrt{5} = k$$

۶- مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = -2$ و $y = 6$ و $a = -1$ و $b = \frac{1}{4}$ به دست آورید.

$$\frac{ax^2 - b(x - y^2)}{2axy + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{3}{b^2}} = \frac{(-1) \times 4 - \frac{1}{4}(-2 - 36)}{2 \times (-1) \times (-2) \times (6) + \left(\frac{6}{-2}\right)^2 - \frac{3}{(-1)^2}} = \frac{-4 + 19}{24 - 27 - 12} = \frac{15}{-15} = -1$$



فصل ۸

آمار و احتمال

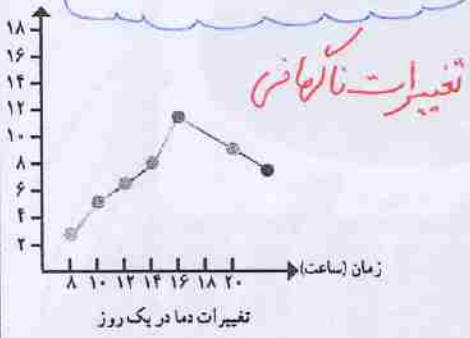
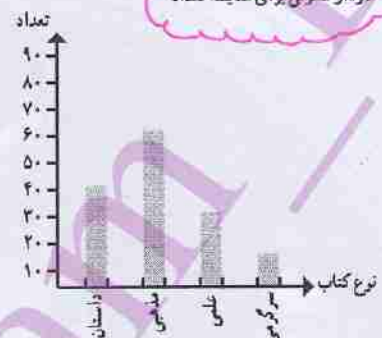

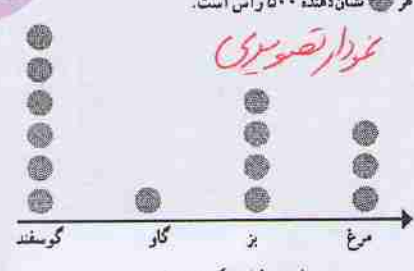


بررسی خواص یک گاز با استفاده از آمار و احتمال، هم کاری ساده است و هم منجر به نتایج قابل قبول و عملی می‌شود. مثلاً با استفاده از آمار و احتمال می‌توان تعداد دفعاتی را برآورد کرد که باید مقداری گاز دارای اورانیوم را غنی کنیم تا به درجه خلوص مورد نیاز برسند.

علم آمار

دسته بندی داده ها

در سال های پیش با علم آمار، که علم جمع آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده ها) است، آشنا شدید. داده ها را با چوب خط، سرشماری و در جدول سازماندهی کردید. سپس، با توجه به موضوع و هدف آمارگیری، نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر، چهار نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است.

<p>نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص دما</p>  <p>تغییرات دما در یک روز</p>	<p>نمودار ستونی برای مقایسه تعداد</p>  <p>نمودار تصویری برای مقایسه داده های تقریبی تعداد کتاب های کتابخانه یک مسجد</p>
<p>نمودار دایره ای برای نشان دادن تعداد داده ها نسبت به کل</p>  <p>سطح زیر کشت کشاورزی یک مزرعه</p>	<p>واحد شمارش مرغ قلم است</p> <p>هر نشان دهنده ۵۰ رأس است.</p> <p>نمودار تصویری</p>  <p>تعداد حیوانات یک روستا</p>

اگر داده های جمع آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می شود. برای اینکه بتوانیم آسان تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده ها را متناسب با موضوع آماری دسته بندی و سازماندهی می کنیم.

دسته بندی باید هدفمند باشد، به غیر از تحلیل و تفسیر اطلاعات مورد نیاز است.

نکته

< ← یعنی شامل خود عدد نمی شود

≤ ← شامل خود عدد می شود

$$\text{دامنه تغییرات} = \frac{\text{طول هر دسته}}{\text{تعداد دسته‌ها}}$$

داده‌هایی کم‌بزرگ‌تر یا مساوی عدد ۱۳۰ است و بزرگ‌تر از ۱۴۵ است

$$130 \leq x < 145 \Rightarrow \frac{75}{5} = 15 \Rightarrow 130 \leq x < 145$$



در زیر، داده‌های جمع‌آوری شده درباره اندازه قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک

شهر کوچک بر حسب سانتی متر مشخص شده است. (n=40)

- ۱۶۴ ۱۶۸ ۱۷۳ ۱۸۵ ۱۵۳ ۱۷۲ ۱۷۸ ۱۹۲ ۱۵۰ ۱۷۵ ۱۶۲ ۱۸۴ ۱۴۷ ۱۸۱
- ۱۵۱ ۱۶۲ ۱۶۷ ۱۷۳ ۱۴۲ ۱۶۳ ۱۳۸ ۱۶۵ ۱۳۷ ۱۷۱ ۱۹۳ ۱۶۸ ۱۷۰ ۱۳۰
- ۱۶۵ ۱۸۳ ۱۵۷ ۱۷۹ ۱۷۶ ۱۵۹ ۱۷۸ ۲۰۵ ۱۵۸ ۱۷۲ ۱۹ ۱۲۳

$$D = \text{Max} - \text{Min}$$

Max

Min

کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید.

دامنه تغییرات

به فاصله بین این دو عدد دامنه تغییرات می‌گویند. دامنه تغییرات داده‌ها را پیدا کنید.

در یک تولیدی شلوار مردانه می‌خواهیم با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده بالا اندازه‌های مختلف را طراحی کنیم. برای این کار، داده‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم. هر دسته یک معنای مشخصی دارد. برای مثال، افراد مختلف را می‌توانیم به صورت زیر تقسیم‌بندی کنیم:

قد بلند، بلندتر از متوسط، متوسط، کوتاه‌تر از متوسط و قد کوتاه

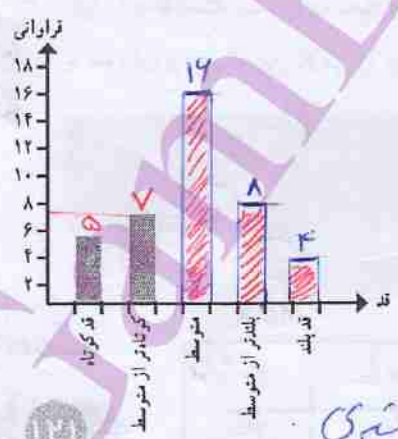
به این ترتیب، داده‌های ما به ۵ دسته تقسیم می‌شوند. می‌توانیم فاصله این دسته‌ها را مساوی در نظر بگیریم. به همین دلیل، برای رسیدن به حدود دسته‌ها دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها به طور تقریبی معلوم شود. به این ترتیب، می‌توانیم محدوده دسته‌ها را مشخص کنیم و در یک جدول بنویسیم.

در جدول زیر معنای $130 \leq x < 145$ را توضیح دهید. < و ≤ چه تفاوتی دارند؟

با توجه به حدود دسته‌ها، با استفاده از چوب خط تعداد داده‌های هر دسته را، که به آن فراوانی می‌گویند، تعیین کنید.

بالا
فراوانی

حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
$130 \leq x < 145$	###	۵
$145 \leq x < 160$	####	۷
$160 \leq x < 175$	#####	۱۶
$175 \leq x < 190$	####	۸
$190 \leq x \leq 205$	####	۴



آخرین داده باید در دسته‌ی

آخری باشد

جواب ۲: مردم این روستا دارای قد طبیعی و نرمال هستند

جواب ۳: با توجه به اینکه مقدار متقارن هست (نمودار ستونی) متوسط قد مردان این روستا در دسته وسط (دسته سوم) قرار دارد

دسته سوم

با توجه به فعالیت صفحه قبل به سوال های زیر پاسخ دهید.

۱- قد اکثر افراد در چه محدوده ای است؟ $140 \leq x < 175$

۲- با توجه به نمودار ستونی متوجه چه چیزی می شوید؟ بیشترین فراوانی در دسته سوم و کمترین فراوانی در دسته اول است

۳- فکر می کنید میانگین قد مردان این شهر در کدام دسته قرار می گیرد؟ در دسته سوم $140 \leq x < 175$

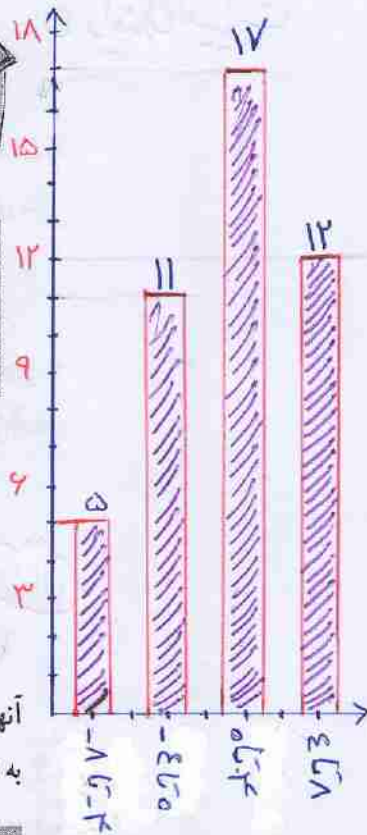
۴- به نظر شما این آمار و اطلاعات و نمودار چه کاربردهای دیگری دارند؟

استعدادیابین برای تیم های ورزشی، این شهر می تواند تیم والیبال و بسکتبال قوی داشته باشد - بهتر است فروشگاه های این شهر، لباس های سایز بزرگ تهیه کنند

کاردر کلاس

۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است.

+2	+2	+2	+5	+6	-1	-2	-3	-7	-2	-1	-1	-1	-1	
-1	-2	-6	-7	-8	+8	+7	+8	+7	+6	+3	+1	+2	+2	+2
+2	+2	-2	-2	-1	0	-5	-3	0	+1	+1	+2	+6	+7	



جدول فراوانی داده ها را بر اساس سوال های زیر مشخص کرده و نموداری ستونی رسم کنید.

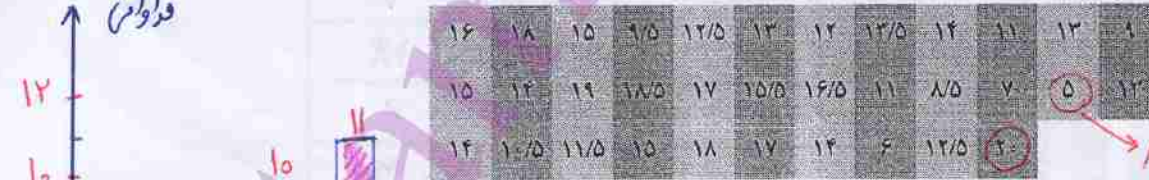
● دامنه تغییرات چقدر است؟ $8 - (-8) = 14$ **دامنه تغییرات**

● داده ها را به چهار دسته تقسیم می کنیم! طول هر دسته چقدر است؟ $14 \div 4 = 4$ **طول هر دسته**

۲- نمره های ریاضی دانش آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات، آنها را به ۵ دسته مساوی دسته بندی کنید. پس از رسم جدول، نمودار ستونی را رسم کنید و با توجه به نمودار، وضعیت این کلاس را توصیف کنید. **طول هر دسته** $\frac{15}{5} = 3 \Rightarrow 20 - 5 = 15$ **دامنه تغییرات**

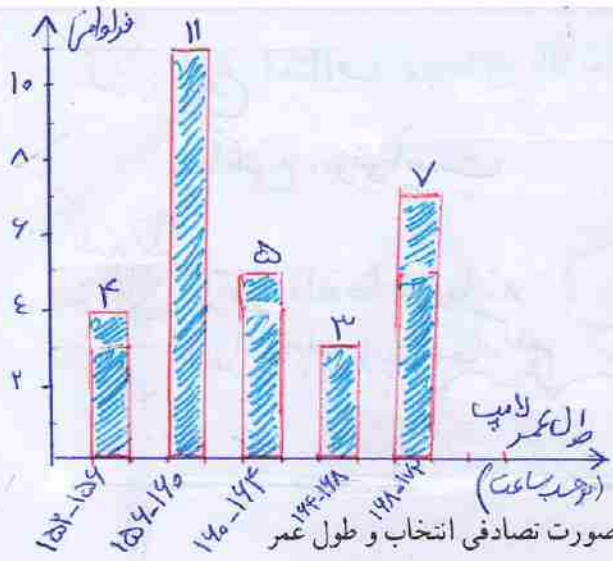
۳- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ فقره نمرات کم تر از ۱۴ گرفته اند

۴- با توجه به نمودار وضعیت این کلاس متوسط است چون ۱۸ فقره نمرات کم تر از ۱۴ گرفته اند



16	18	15	10	12/5	13	12	13/5	12	11	13	1	8
15	12	19	17/5	17	10/5	16/5	11	8/5	7	5	13	15
14	10/5	11/5	15	18	17	12	6	12/5	20	20	20	20

دوره دسته ها	خاستگان	فراوانی
$5 \leq x < 8$	///	3
$8 \leq x < 11$	////	5
$11 \leq x < 14$	//////	10
$14 \leq x < 17$	////// /	11
$17 \leq x \leq 20$	////// //	7

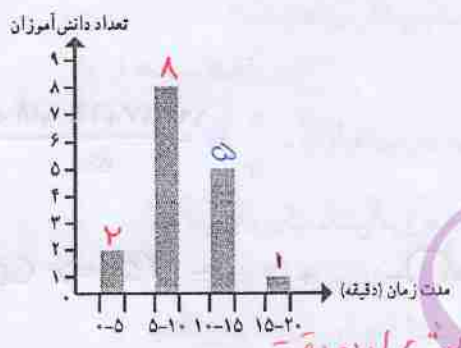


دوره دسته‌ها	خط نشان	فروانش
$152 \leq x < 154$	////	3
$154 \leq x < 140$	### ### /	11
$140 \leq x < 144$	###	5
$144 \leq x < 148$	///	3
$148 \leq x \leq 172$	### //	7

۱- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه‌گیری شده است. داده‌ها را به ۵ دسته تقسیم کنید و جدول فروانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

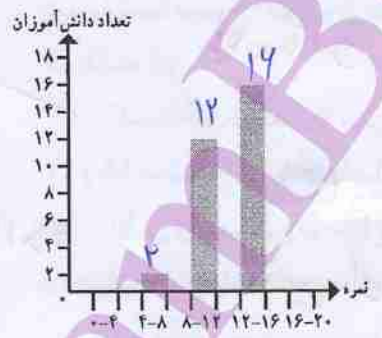
دامنه تغییرات = $172 - 152 = 20$
 طول هر دسته = $20 \div 5 = 4$

Max														
156	159	165	163	161	157	154	157	168	172	163	158	157	161	171
Min														
163	168	167	159	152	158	157	169	170	153	169	158	165	156	



۲- از دانش آموزان یک کلاس درباره مدت زمانی که طول می‌کشد تا آنها از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته‌بندی این داده‌ها نمودار ستونی مقابل رسم شده است. چند دانش آموز فاصله خانه تا مدرسه را در بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می‌کنند؟ این کلاس چند دانش آموز دارد؟

نفر $2 + 1 = 3$: بیش از ۱۰ دقیقه
 نفر $2 + 8 + 5 + 1 = 16$: تعداد کل دانش آموزان



۳- در اینجا نمودار نمره‌های دانش آموزان یک کلاس را می‌بینید.
 ۱- این کلاس چند دانش آموز دارد؟
 ۲- آیا این دسته‌بندی مناسب است؟ چرا؟
 ۳- آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

باز پاسخ است →

اجازه دهیم دانش آموزان نظر دهند. بستن به فرایندها $\frac{20-0}{5} = \frac{20}{5} = 4$ طول هر دسته
 می‌تواند مناسب و یا غیر مناسب باشد

این کلاس دانش آموزان خیلی قوی ندارد، دانش آموزان خیلی ضعیف هم کم می‌باشد

- ۲) بله، زیرا تمام حالت‌ها را برای این کلاس در نظر گرفتیم - خیر، زیرا برخی از دسته‌ها خالی است
- ۳) بله، زیرا این کلاس دانش آموز خیلی ضعیف ندارد (کم است) - خیر، زیرا دانش آموز قوی ندارد

نکته ۱: مجموع اختلاف نمره‌های بالاتر از میانگین با میانگین و نمرات پایین‌تر از میانگین با میانگین برابر است

$$S_1 = X_1 \cdot n, S_2 = \bar{X}_2 \cdot n, \bar{X} = \frac{S_1 + S_2}{2n}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\bar{X}_1 \cdot n + \bar{X}_2 \cdot n}{2n} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}$$

نکته ۲: اگر تعداد داده‌ها برابر باشد می‌توانیم از این رابطه استفاده کنیم

میانگین داده‌ها

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند و به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید، می‌توان از میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج حاصل از داده‌ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. شما در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شده‌اید. میانگین تعدادی داده عددی، از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می‌آید.

برای تحلیل و تفسیر داده‌ها می‌توان از دانستی

تغییرات و میانگین در کنار هم استفاده کنیم



۱- نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های

او را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{19+17+15+18+17}{5} = \frac{86}{5} = 17.2$$

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است:

$$16 + 15/5 + 16 + 15 + 17 + 19 + 18/5 + 14 + 16/5 + 17/5 = 145 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{145}{10} = 14.5$$

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد مساوی است؟ ۴ نمره بالاتر و ۵ نمره پایین‌تر خیر

اختلاف نمره‌های بالای میانگین را با میانگین حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید. به همین ترتیب، مجموع اختلاف نمره‌های پایین‌تر از میانگین با میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید. بالای میانگین ۶ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۱ و پایین میانگین ۶ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۱

بدفرضی

۳- میانگین نمره‌های ۷ درس یک دانش‌آموز ۱۶/۵ است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او، که ۱۷ و ۱۵ است، به این میانگین اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید. مجموع نمرات ۷ درس

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرد (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟ خیر. برای اینکه مساوی نیست $14.5 \neq 14.38$

۴- میانگین نمره‌های زیر را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

$$\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 15 \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \bar{x} = \frac{117}{9} = 13 \end{array}$$

بین اعداد و میانگین تقارن وجود دارد

نکته: اگر داده‌ها را مرتب کنیم (در صورتی که تعداد داده‌ها راست فرد باشد) و مجموع اختلاف اعداد سمت چپ با اعداد سمت راست برابر باشد، آن داده دانه

وسط برابر میانگین خواهد بود

سوال ۱ \Rightarrow

$$\text{مجموع اختلاف داده‌های سمت راست با وسط} = (16-15) + (17-15) + (17-15) + (20-15) = 10$$

$$\text{مجموع اختلاف داده‌های سمت چپ با داده وسط} = (15-14) + (15-13) + (15-12) + (15-11) = 10$$

پس داده وسط را با میانگین برابر است

$$a \leq x < b \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{a+b}{2}$$

نکته سوال ۲

کار در کلاس $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 17, 20$

با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددی زیر را به دست آورید.

۱۷ ۱۴ ۱۱ ۱۵ ۱۲ ۲۰ ۱۷ ۱۳ ۱۶

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار خوب به دست آورد.

$$\bar{x} = \frac{135}{9} = 15$$

فعالیت



۱- به کمک ماشین حساب، میانگین قد ۴۰ نفر را که در درس قبل مطرح شده

$$\bar{x} = \frac{4479}{40} \approx 111,975$$

است، پیدا کنید.

۲- برای به دست آوردن مرکز دسته‌ای مانند دسته $130 \leq x < 145$ ، ابتدا مجموع عددهای

$$130 + 145 = 275$$

۱۳۰ و ۱۴۵ را به دست می‌آوریم و سپس، حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت می‌بینید. مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته

قرار دهید. برای مثال، چون عدد ۱۹۲ در دسته $190 \leq x < 205$ قرار دارد؛ به جای آن عدد ۱۹۷/۵ را، که مرکز این دسته است، قرار دهید.

۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۸۲/۵	۱۶۴	۱۶۸	۱۷۴	۱۷۸	۱۵۰	۱۷۵	۱۶۷	۱۸۴	۱۴۷	۱۸۱
۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۵۱	۱۶۲	۱۶۷	۱۷۳	۱۴۲	۱۶۳	۱۳۸	۱۶۵	۱۳۷	۱۷۱
۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۹۷/۵	۱۶۵	۱۸۳	۱۵۷	۱۷۹	۱۷۶	۱۵۹	۱۷۰	۱۵۸	۱۷۳	۱۴۳

۴- چرا در عددهای تغییر یافته ۴ تا ۱۹۷/۵ وجود دارد؟ چون تعداد داده‌های این دسته ۴ تا بود

۵- با توجه به عددهای بالا، میانگین ۴۰ عدد جدید را پیدا کنید.

$$4485 \div 40 = 112,125$$

چگونه برای پیدا کردن مجموع داده‌ها از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با

فراوانی‌های جدول دارند؟ چون تمام داده‌های هر دسته به میانگین آن دسته (مرکز هر دسته) تبدیل می‌شود

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی، که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید.

مقدار خطای این روش چقدر است؟

$$112,125 - 111,975 = 0,15$$

نکته: هر چه قدر طول دسته‌ها کمتر باشد خطای کمتر است

با مقایسه میانگین واقعی و این میانگین به این نتیجه می‌رسیم که اختلاف بسیار ناچیز است و با این روش می‌توانیم تقریب خوبی از میانگین واقعی داده‌ها را به دست آوریم

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته‌ها	فراوانی	حدود دسته‌ها
$5 \times (-6) = -30$	$\frac{-1 + (-9)}{2} = -6$	5	$-1 \leq x < -4$
-22	-2	11	$-4 \leq x < 0$
+34	+2	17	$0 \leq x < 4$
+72	+4	12	$4 \leq x \leq 1$
54		جمع	

$$\text{میانگین واقعی} = \frac{+35}{45} = +0,78$$

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{+54}{45} = +1,2$$

خواه سوال ۱

کار در کلاس



با توجه به فعالیت صفحه قبل، با کامل کردن جدول زیر میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته‌ها
$487,5$	$137,5$	5	$130 \leq x < 145$
$1097,5$	$152,5$	7	$145 \leq x < 160$
2980	$147,5$	14	$160 \leq x < 175$
1490	$182,5$	8	$175 \leq x < 190$
790	$197,5$	4	$190 \leq x < 205$
4485		جمع	

$$\text{میانگین} = \frac{4485}{30} = 149,5$$

میانگین	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته‌ها
$4 \times 154 = 616$	154	4	$152 \leq x < 156$
1738	158	11	$156 \leq x < 160$
110	142	5	$140 \leq x < 144$
498	147	3	$144 \leq x < 148$
1190	172	7	$168 \leq x < 172$
3852	170	جمع	

۱- میانگین دمای هوا مربوط به کار در کلاس صفحه ۱۲۲ و میانگین ساعت‌های عمر

لامپ مربوط به تمرین ۱ صفحه ۱۲۳ را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید. **بالا**

۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

میانگین	مرکز دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
12	2	6	///	$0 \leq x < 4$
24	4	4	////	$4 \leq x < 8$
10	10	8	////	$8 \leq x < 12$
238	14	17	////	$12 \leq x < 16$
142	18	9	////	$16 \leq x < 20$
514		جمع		

$$\text{میانگین} = \frac{514}{44} \approx 11,68$$

$$\begin{aligned} \text{میانگین واقعی} &= \frac{3852}{30} = 128,4 \\ \text{میانگین تقریبی} &= \frac{4852}{30} \approx 161,73 \end{aligned}$$

کلمه: داده‌هایی که فاصله زیادی تا میانگین دارند تاثیر زیادی روی میانگین دارند
 برای مثال ۳۵ فاصله زیادی تا ۱۷/۲۵ دارد و اگر آن را حذف کنیم میانگین
 به صورت محسوسی اضافه می‌شود

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش‌آموزان در این امتحان نمره ۳/۵ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند.

الف) اگر این دانش‌آموز را از کلاس کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می‌شود؟ از این سؤال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\text{مجموع نمرات کلاس} = ۱۷/۲۵ \times ۳۰ = ۵۱۷/۵$$

$$\text{مجموع نمرات ۲۹ نفر} = ۵۱۷/۵ - ۳/۵ = ۵۱۴$$

$$۵۱۴ \div ۲۹ = ۱۷/۷۲$$

نتیجه: نمرات بالا و پایین تاثیر زیادی روی میانگین دارند

ب) حالا فرض کنید همه دانش‌آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته‌اند؛ به جز یک نفر که ۲۰ گرفته است، معدل این کلاس ۳۰ نفره ۱۰/۲۵ شده است. اگر دانش‌آموزی را که نمره ۲۰ گرفته است کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می‌شود؟

$$\text{معدل جدید برای ۲۹ نفر} \approx \frac{۳۰ \times ۱۰/۲۵ - ۲۰}{۲۹} = \frac{۳۰۷/۵ - ۲۰}{۲۹} \approx ۹/۹۱$$

خواندنی

ایده اولیه احتمال، مبتنی بر بازی‌های شانسی است. این گونه بازی‌ها از زمان‌های بسیار قدیم رایج بوده‌اند، زیرا در حفاری‌های باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده شده‌اند؛ از جمله مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهایی از ۱ تا ۶ نقش شده است.

در روزگار کنونی در مواردی که به راحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود. برای مثال، در شروع بازی فوتبال از پرتاب سکه استفاده می‌کنند یا برای قبول یارد یک موضوع، از قرعه کمک می‌گیرند. همچنین بانک‌ها برای اختصاص دادن جایزه به مشتریان دارای حساب قرض الحسنه، از قرعه‌کشی استفاده می‌کنند.

احتمال زوج بودن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۲، ۴، ۶ : اعداد زوج

احتمال فرد آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۱، ۳، ۵ : اعداد فرد

احتمال اول آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۲، ۳، ۵ : اعداد اول

احتمال غیر اول آمدن $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ \Rightarrow ۱، ۴، ۶ : اعداد غیر اول

احتمال یا اندازه گیری شانس ابتدا در جدول آمار و احتمال هفتم تدریس شود



امتیاز بیشتر

فعالیت اعداد اول : ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۲۷، ۱۳۱، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۷، ۱۶۱، ۱۶۷، ۱۷۳، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۹۱، ۱۹۷، ۱۹۹

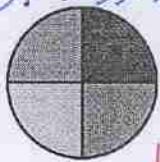
۱- ده کارت هم اندازه و هم شکل داریم و روی آنها عددهای ۱۱ تا ۲۰ را نوشته ایم. کارت ها را به پشت روی میز قرار می دهیم و به طور تصادفی، یکی از آنها را برمی داریم. احتمال اینکه روی این کارت عددی اول باشد بیشتر است یا احتمال اینکه عددی مرکب باشد؟

چرا؟ $\frac{1}{10} =$ احتمال اول بودن $>$ $\frac{4}{10} =$ احتمال مرکب بودن



وقتی یک سکه را می اندازیم، قبل از آنکه به زمین برسد نمی دانیم چه پیش می آید؛ یعنی روی سکه می آید یا پشت آن! اما می دانیم که دو حالت ممکن است پیش آید: روی سکه یا پشت سکه! از آنجا که این دو حالت مشابه اند، پس امکان اینکه روی سکه یا پشت آن بیاید، برابر است و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن، روی سکه می آید، پس احتمال اینکه روی آن بیاید $\frac{1}{2}$ است. به همین ترتیب، احتمال اینکه پشت سکه هم بیاید، $\frac{1}{2}$ است.

احتمال رو آمدن $= \frac{1}{2}$
احتمال پشت آمدن $= \frac{1}{2}$



۲- در هر یک از موارد زیر، حالت های هم شانس را بنویسید.
(الف) عقربه چرخنده را می چرخانیم.
(ب) تاسی را می اندازیم. هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هر کدام $\frac{1}{6}$ احتمال هر کدام $\frac{1}{4}$ است.

(ب) احتمال زوج آمدن و فرد آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است
احتمال اول آمدن و غیر اول آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است

۳- معلم از دانش آموزان پرسید: «یک مهره را به طور تصادفی از کیسه ای که در آن سه مهره سبز و یک مهره سفید است، بیرون می آوریم. چند حالت هم شانس می تواند رخ دهد؟»



احتمال اینکه مهره سبز خارج شود بیشتر از آنکه سفید است.
بلافاصله شایان پاسخ داد: «دو حالت: سبز، سفید»
سپس علی برای آنکه بتواند پاسخ سوال را بدهد، مهره های سبز را شماره گذاری کرد و پاسخ داد: «چهار حالت: سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سفید»
به نظر شما پاسخ کدام یک درست است؟ چرا؟

جواب علی درست است، حالت سبز و سفید هم شانس نیست ولی اگر مهره ها را شماره گذاری کنیم احتمال اینکه هر کدام خارج شود برابر است

احتمال هر کدام $= \frac{1}{4}$



- ۴- در آزمایش مربوط به فعالیت ۱ با توجه به اینکه 10° کارت داریم پس بیرون آمدن هر یک از عددهای روی کارت‌ها هم شانس هستند حالا به سؤال‌ها پاسخ دهید:
- الف) در چند تا از آنها عدد روی کارت، اول است؟ 4 تا
- ب) در چند تا از آنها عدد روی کارت، مرکب است؟ 6 تا
- ج) احتمال هر یک از اتفاق‌ها (پیشامد)های زیر را پیدا کنید:
- $\frac{4}{10}$ = احتمال آنکه عدد روی کارت، اول باشد. $\frac{6}{10}$ = احتمال آنکه عدد روی کارت، مرکب باشد.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک پیشامد را بیابیم، تعداد حالت‌های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

کارد در کلاس



- ۱- پنج توپ کوچک با شماره‌های ۱ تا ۵ را داخل یک جعبه ریخته‌ایم. احمد یکی از آنها را به‌طور تصادفی از جعبه خارج می‌کند. قرار است اگر عدد توپ زوج بود، جایزه بگیرد. احتمال اینکه احمد جایزه بگیرد چقدر است؟ $\frac{2}{5}$ = احتمال زوج بودن
- ۲- حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده است اما نمی‌داند چه روزی! احتمال اینکه دوست حمید در روز ۱۵ خرداد به دنیا آمده باشد، چقدر است (خرداد ۳۱ روز دارد)؟ $\frac{1}{31}$

- ۳- برای هر یک از موارد زیر یک مثال بنویسید.
- الف) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن صفر باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی بزرگتر از ۶ بیاید $\frac{0}{6}$**
- ب) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی مرکب بیاید $\frac{2}{6}$**
- ج) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی زوج بیاید $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$**
- د) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن بیشتر از $\frac{1}{4}$ باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی بزرگتر از دو بیاید $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$**
- ه) پیشامدی که احتمال رخ دادن آن یک باشد. **یک تاس را بیندازید، عددی کوچک‌تر از ۶ بیاید**

عبارت زیر را بخوانید؛ درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید و دلیل این تشخیص را

در چند جمله بنویسید.

«احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر با صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.» **درست**

به هیچ وجه رخ ندهد برابر صفر است

اگر حتماً رخ دهد برابر یک است

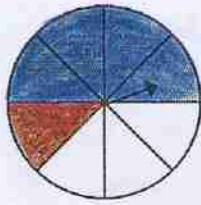
و بقیه حالت‌ها هم عددی بین صفر و یک است

$1 = \text{احتمال رخ ندادن آن اتفاق} + \text{احتمال رخ دادن یک اتفاق}$



۱- الف) عقربه چرخنده زیر را می چرخانیم. احتمال هر یک از حالت های زیر را پیدا کنید و در جدول بنویسید.

نایستد	بایستد	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	عقربه روی نارنجی
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	عقربه روی آبی
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	عقربه روی سفید



هم سانس

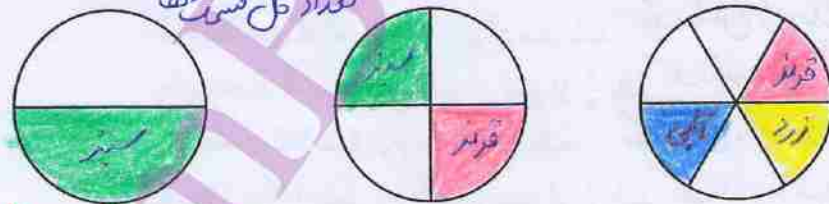
$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$
 $\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$
 $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$

ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید. چرا حاصل جمع ها با هم برابرند؟ چون کل حالت های موجود را در بر می گیرند
 ج) احتمال رخ دادن یک بیشامند $\frac{3}{10}$ است. احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

احتمال رخ ندادن آن $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

۲- الف) هر یک از چرخنده های زیر را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقربه روی رنگ سفید برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

احتمال = $\frac{\text{تعداد قسمت های سفید}}{\text{تعداد کل قسمت ها}}$

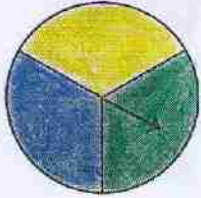


ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟
 $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

۳- از یک کیسه حاوی ۵۰ مهره، مهره ای را به طور تصادفی بیرون می آوریم. احتمال سبز بودن مهره، $\frac{3}{10}$ است.

چند تا از مهره ها سبزند؟ ۱۵ مهره سبز داریم $\Rightarrow \frac{3 \times 50}{10 \times 1} = \frac{150}{10} = 15$





۱- عقربه شکل چرخنده رویه رو را ۳۰۰ بار می چرخانیم. عبارتهای درست را با \checkmark و عبارتهای نادرست را با \times مشخص کنید.

- الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می ایستد. \times نادرست
 - ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد. \checkmark درست
 - ج) انتظار داریم تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می ایستد، دقیقاً برابر باشد. \times نادرست
- ۲- تاسی را می اندازیم؛ احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

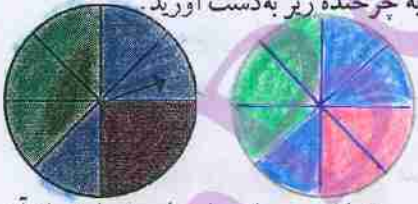
۱, ۲, ۳, ۴

- الف) مضرب ۵ بیاید. $\frac{1}{6}$
- ب) شمارنده ۶ بیاید. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- ج) ۷ یا بیشتر بیاید. $\frac{2}{6}$ *چهار*

۳- سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ را در گردونه‌ای ریخته‌ایم. مهره‌ای را به طور تصادفی از گردونه خارج می کنیم. احتمال هر یک از حالت‌های زیر را به دست آورید:

- الف) فرد بودن عدد روی مهره $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
- ب) مضرب ۵ بودن عدد روی مهره $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
- ج) اول بودن عدد روی مهره $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹



- ۴- احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را با توجه به چرخنده زیر به دست آورید.
- الف) عقربه چرخنده روی سبز بایستد. $\frac{3}{8}$
- ب) عقربه چرخنده روی آبی بایستد. $\frac{3}{8}$
- ج) عقربه چرخنده روی قرمز بایستد. $\frac{2}{8}$

۵- در یک کیسه تعدادی مهره رنگی وجود دارد. می خواهیم مهره‌ای را به طور تصادفی از آن بیرون بیاوریم. می دانیم احتمال سبز بودن مهره $\frac{3}{8}$ است.

الف) احتمال سبز نبودن مهره را حساب کنید. $\frac{5}{8}$ *خبر سبز ۵ - ۳ = ۵*

ب) آیا می توانید تعداد مهره‌های درون پاکت را پیدا کنید؟ چرا؟ *خبر تعداد AK است (KEN)*

۶- یک سکه در چهار پرتاب پشت سر هم رو آمده است. فکر می کنید اگر بار پنجم آن را

ببندازیم، چه می آید؟ چرا؟ *رو یا پشت چون اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم*

احتمال رو آمدن و پشت آمدن هر کدام $\frac{1}{2}$ است



$$S = \{(پ, پ), (پ, رو), (رو, رو), (پ, پ و رو)\}$$

بررسی حالت های ممکن

	هر دو رو	یکی رو، یکی پشت
در ۲۰ آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
در ۸۰ آزمایش	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

فعالیت $\frac{1}{4}$ ← $\frac{1}{4}$ ← $\frac{1}{4}$ ← $\frac{1}{4}$

۱- سارا، ستاره و محدثه یک بازی طراحی کرده اند. آنها دو سکه را هم زمان می اندازند. اگر هر دو، رو آمد، سارا امتیاز می گیرد و اگر هر دو، پشت آمد، ستاره. اگر هم، یکی رو و یکی پشت آمد، محدثه امتیاز می گیرد.

فکر می کنید این بازی عادلانه است؟ یعنی شانس امتیاز گرفتن بازیکن ها با هم مساوی است؟ **خیر**

۲- دو سکه بردارید و ۲۰ بار آزمایش کنید. نتایج ۲۰ آزمایش را با رسم چوب خط در جدول ثبت کنید. نتایج آزمایش خودتان را با نتایج سه هم گروهی تان جمع کنید و با استفاده از نتایج مربوط به ۸۰ آزمایش، درستی فکرتان را بررسی کنید.

آیا نتیجه آزمایش ها، پاسخ شما به فعالیت ۱ را تأیید می کند؟ **بله**

۳- در جدول زیر، حالت های ممکن در پرتاب دو سکه نشان داده شده است. با توجه به این جدول، احتمال امتیاز گرفتن هر کدام از بازیکن ها را محاسبه کنید.

سکه دوم		
سکه اول		
	رو-رو	رو-پشت
	پشت-رو	پشت-پشت

احتمال اینکه یک سکه رو بیاید و یک سکه پشت. $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

احتمال اینکه هر دو سکه رو بیایند. $= \frac{1}{4}$

احتمال اینکه هر دو سکه پشت بیایند. $= \frac{1}{4}$

حالا دوباره به سؤال فعالیت ۱ پاسخ دهید و برای پاسختان دلیل بیاورید. **چون احتمال یک سکه رو و یکی پشت**

کار در کلاس بیاید سراسر است و منصفانه نیست

محمد می خواست یک شاخه گل رز برای مادرش و یک شاخه هم برای پدرش بخرد. در گل فروشی تعداد زیادی گل رز به رنگ های سفید، قرمز و صورتی بود.

گل مادر	سفید		صورتی
گل پدر	سفید		صورتی
	س-س	س-ق	س-ص
	ق-س	ق-ق	ق-ص
	ص-س	ص-ق	ص-ص

او دو شاخه گل را به طور تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برداشت.

الف) همه حالت های ممکن را به کمک جدول پیدا کنید.

ب) در چند تا از این حالت ها دست کم یکی از گل ها سفید است؟

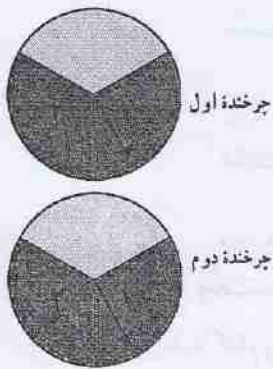
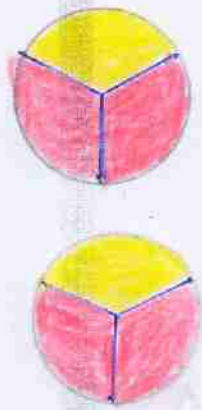
حالت ۱۳



۱- می خواهیم عقربه های دو چرخنده زیر را بچرخانیم و رنگی را که عقربه ها روی آن می ایستند، یادداشت کنیم.

الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.

حالت های ممکن



کل حالت های ممکن $3 \times 3 = 9$

$\frac{4}{9}$

ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی رنگ قرمز بایستند، چقدر است؟

۲- سه سکه را هم زمان انداختیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش، همه حالت های ممکن را نوشته و تعداد حالت ها را یافته اند.
الف) راه حل هر دو را کامل کنید.

راه حل عرفان

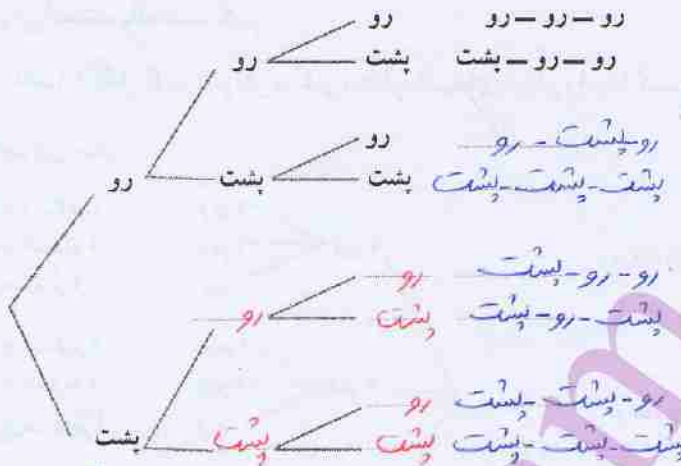
	سکه دوم سکه اول			
سکه اول		رو - رو	رو - پشت	رو - پشت پشت - پشت
		پشت - رو	پشت - پشت	پشت - رو پشت - پشت



سکه سوم	سکه دوم	سکه اول	سکه سوم	سکه دوم	سکه اول
رو	رو	رو	پشت	رو	پشت
پشت	رو	رو	پشت	رو	پشت
رو	پشت	رو	پشت	پشت	پشت
پشت	پشت	رو	پشت	پشت	پشت

راه حل یارسا

حالت های ممکن = ۸ = ۲ حالت سوم × ۲ حالت دوم × ۲ حالت اول



ب) شما کدام راه حل را بیشتر دوست دارید؟ **یاسغ باز** به نظر بنده راه حل یارسا بهتر است

بالا

ج) آیا می توانید روش دیگری برای یافتن تعداد حالت های ممکن پیشنهاد کنید؟ $2 \times 2 \times 2 = 8$

د) تعداد حالت های ممکن چند تا است؟ ۸

ه) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید، چقدر است؟ $\frac{1}{8}$

و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید، چقدر است؟ $\frac{3}{8}$

تمرین



۱- در یک کارخانه دو چرخه سازی دو مدل دو چرخه تولید می شود: دو چرخه جاده

و دو چرخه کوهستان. در این کارخانه هر نوع دو چرخه در سه رنگ (زرد، قرمز و آبی)

و دو اندازه (۲۴ و ۲۶) تولید می شود.

نوع دو چرخه

رنگ

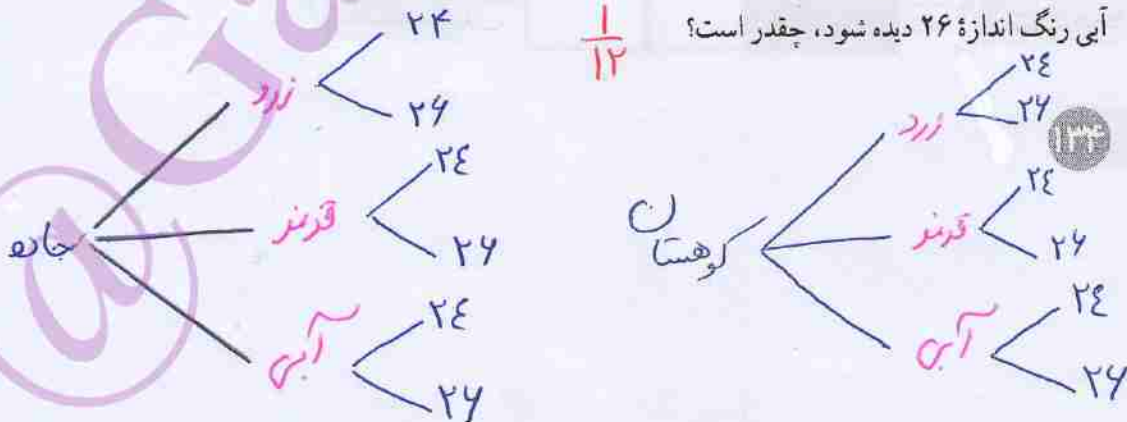
اندازه

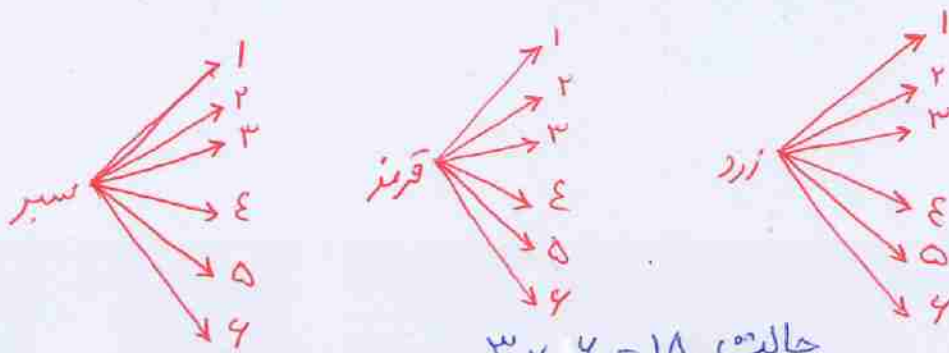
الف) چند نوع دو چرخه مختلف در این کارخانه تولید می شود؟ $2 \times 3 \times 2 = 12$

ب) در نشریه تبلیغاتی این کارخانه، در هر صفحه عکس یکی از این دو چرخه ها آمده است. علی

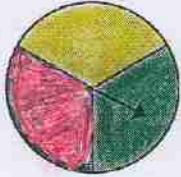
یکی از صفحه ها را به طور تصادفی انتخاب می کند. احتمال اینکه در این صفحه دو چرخه کوهستان

آبی رنگ اندازه ۲۶ دیده شود، چقدر است؟ $\frac{1}{12}$

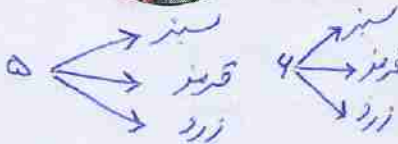




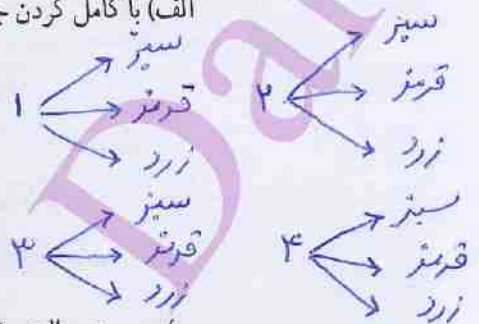
حالت $3 \times 2 = 18$



۲- عقربه چرخنده مقابل را می چرخانیم و تاسی را می اندازیم.
الف) با کامل کردن جدول، همه حالت های ممکن را پیدا کنید.



تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
چرخنده						
سبز						
قرمز						
زرد						



ب) در چند حالت عقربه روی قرمز ایستاده است و تاس عددی زوج را نشان می دهد؟ سه حالت

(قرمز، ۲)، (قرمز، ۴) و (قرمز، ۶)

۳- قفلی داریم که رمز آن عددی یک رقمی است. (این رقم می تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد.)

الف) احتمال اینکه با یک حدس بتوانیم رمز قفل را پیدا کنیم، چقدر است؟ $\frac{1}{10}$

ب) اگر یک رقم دیگر به رمز اضافه کنیم، این احتمال چه تغییری می کند؟
 کلمه کرمی شود
 نلته: رمز دورقی شود



۴- دو تاس را می اندازیم:

نلته: در قسمت دوم حالت

حالت $4 \times 4 = 36$

پاسخ

الف) با رسم جدول مناسب، همه ۳۶ حالت ممکن را پیدا کنید.

ب) احتمال اینکه یکی از تاس ها ۳ و تاس دیگر ۵ بیاید، چقدر است؟ $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ج) احتمال اینکه هر دو تاس ۵ بیاید، چقدر است؟ $\frac{1}{36}$

د) پاسخ قسمت های ب و ج را با هم مقایسه کنید و دلیل تفاوتشان را بنویسید.

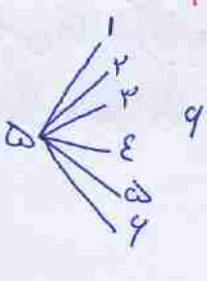
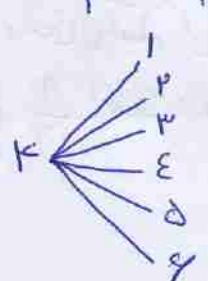
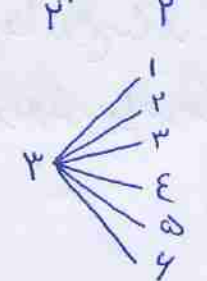
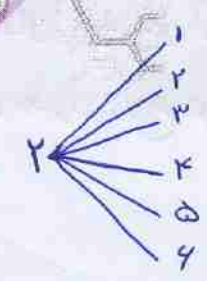
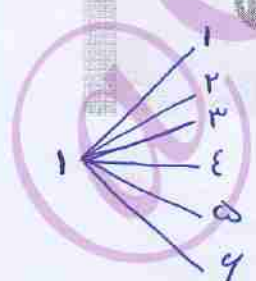
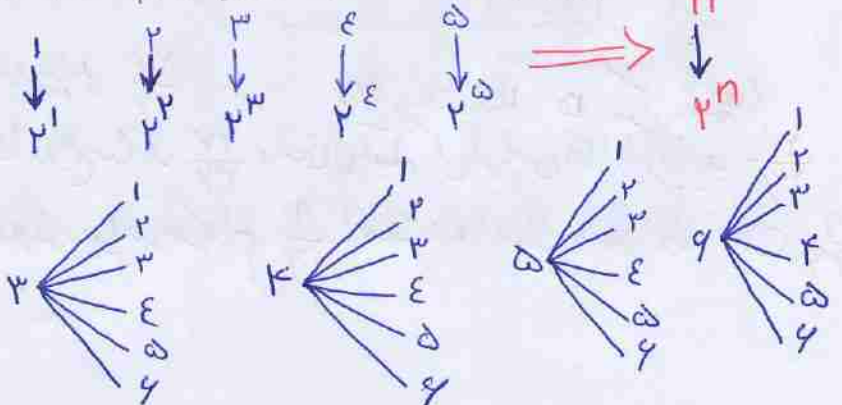
ارتقاء من افتد اولی ۳ و دومی ۵ و اولی ۵ و دومی ۳

در قسمت ب دو حالت و در قسمت ج یک حالت ممکن است اتفاق بیفتد

۵- دو سکه را می اندازیم. احتمال اینکه دست کم یکی از آنها رو بیاید، چقدر است؟ $\frac{3}{4}$

۶- لوله های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دوشاخه می شوند.

پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان دار نشان دهید. $2^5 = 32$



مرور فصل ۸

بناهای و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار برفته‌اند مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثال بزنید.

- دسته‌بندی داده‌ها
- مرکز دسته
- فراوانی
- میانگین
- آمار
- احتمال
- نمودار درختی
- حالت‌های هم‌شانس
- جدول حالت‌های ممکن

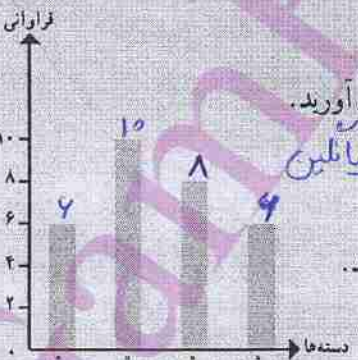
در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه تری را بنویسید.

- دسته‌بندی داده‌های زیاد و پراکنده
- محاسبه میانگین داده‌های دسته‌بندی شده
- پیدا کردن احتمال یک پدیده
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک جدول
- یافتن همه حالت‌های ممکن به کمک نمودار درختی

کاربرد

آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک اطلاعات آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع رخدادهایی چون بارندگی، سیل و بارش برف را پیش‌بینی کنیم.

تمرین‌های ترکیبی



۱- با توجه به نمودار مقابل، میانگین داده‌ها را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۳۰ + ۱۵۰ + ۲۰۰ + ۲۱۰}{۳۰} = \frac{۵۹۰}{۳۰} \approx ۱۹.۶$$

۲- دو تاس را می‌اندازیم. الف) تعداد حالت‌های هم‌شانس ممکن را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیاید، چقدر است؟ $\rightarrow \frac{۱}{۳۶}$

۳۶ حالت هم‌شانس \Rightarrow

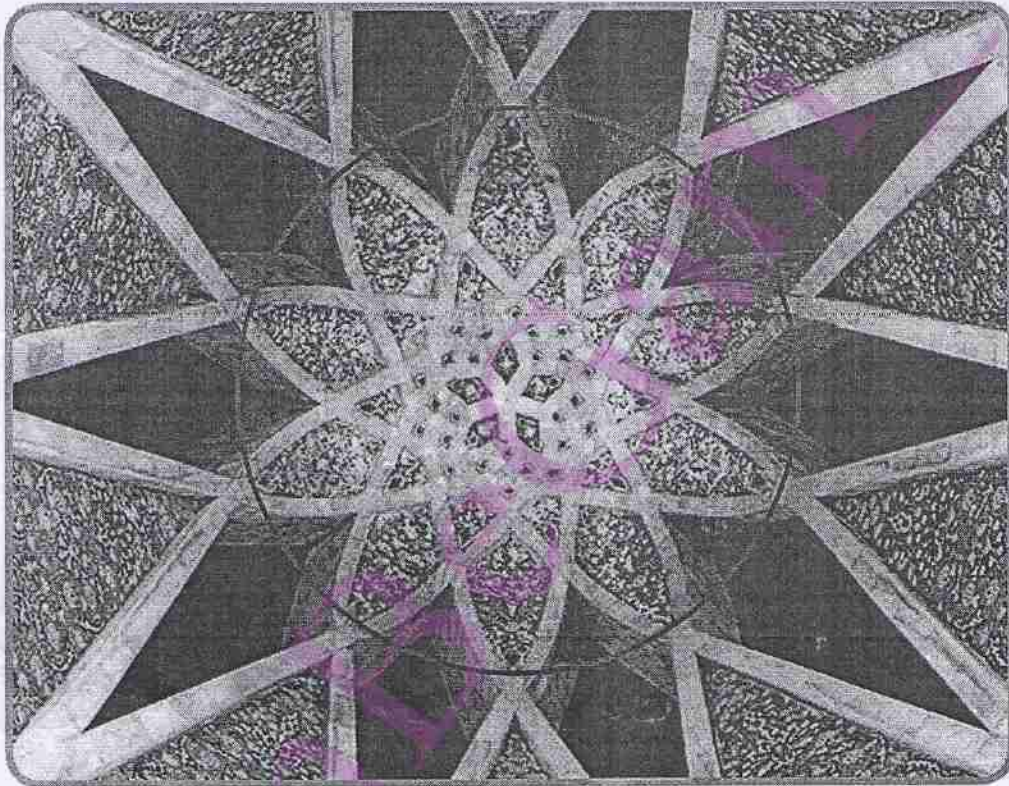
الف) احتمال اینکه یکی از تاس‌ها فرد بیاید $\frac{۲۷}{۳۶}$

ب) احتمال اینکه یکی از تاس‌ها زوج بیاید $\frac{۲۷}{۳۶}$

۳۶ حالت هم‌شانس
 مرکز دسته‌ها: ۵, ۱۵, ۲۵, ۳۵
 احتمال اینکه یکی از تاس‌ها اول بیاید $\frac{۲۷}{۳۶}$
 احتمال هر دو زوج و یا هر دو فرد بیاید هر کدام $\frac{۹}{۳۶}$ است. احتمال هر دو اول آمدن $\frac{۹}{۳۶}$

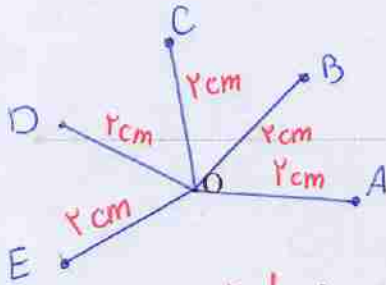
دایره‌ها

فصل ۹



زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.



خط و دایره

فعالیت

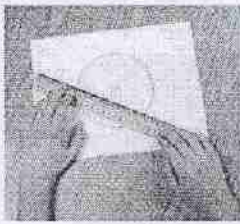


۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

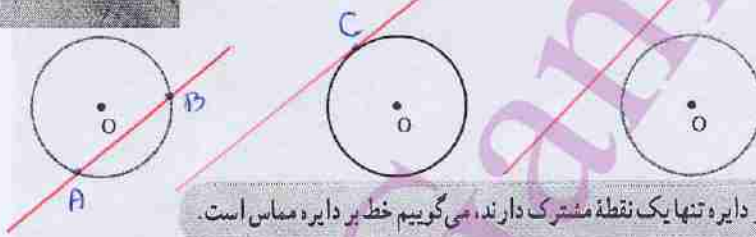
اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟ **دایره**

۲- دو خط یا موازی اند یا متقاطع؛ یعنی، یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

تعریف دوط موازی



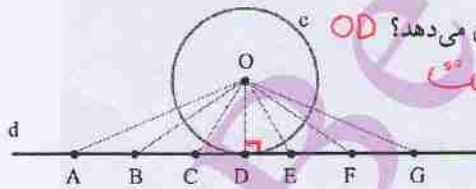
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.



در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

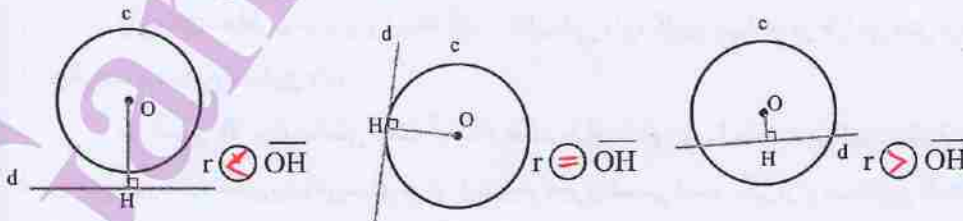
تعریف مماس

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.

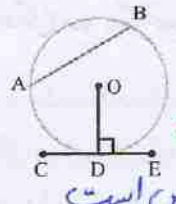
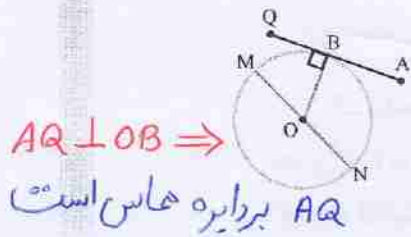


کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ **OD**
اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید. **برابر است**

۴- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را \overline{OH} بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ یا $<$ کامل کنید.

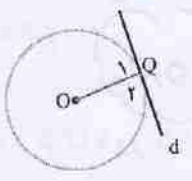
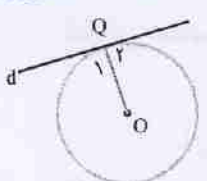


شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



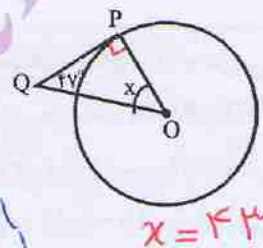
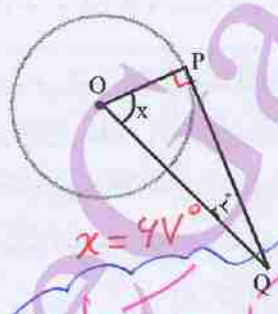
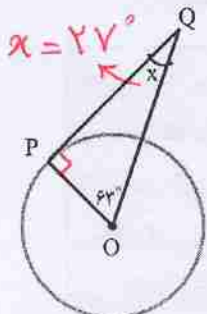
کار در کلاس

۱- در هر شکل، کدام پاره خط مماس دایره است؟



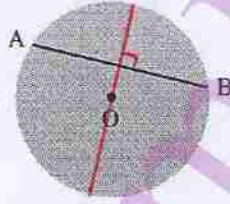
۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q چه نوع زاویه ای است؟ قائمه $\hat{Q}_1 = 90^\circ$

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



پیدا کردن مرکز دایره

۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره ای رسم کنید. سپس، صفحه



دایره ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید. A را به B وصل کنید. این پاره خط وتر دایره نامیده می شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند. تای کاغذ را باز کنید.

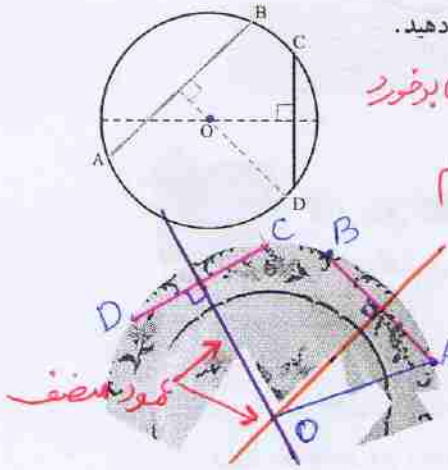


روی خط تا را با مداد پر رنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می گویند؟ قطر
روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید.
دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه ای قطع می کنند؟ مرکز

نکته: قطری که AB را نصف می کند بر آن عمود است

نکته: اگر عمود منصف دو وتر دلخواه غیر موازی را رسم کنیم یکدیگر را در مرکز دایره قطع می کنند

وتر: پاره خطی که دو نقطه ای همای از یک دایره را بهم وصل می کند را وتر نامیم



۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.
 برای پیدا کردن مرکز یک دایره، کافی است قطری برقرار
 عمود منصف های دو وتر غیر موازی آن را پیدا کنیم

۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.
 تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.
 با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم
 قطر این بشقاب را پیدا کنیم.

$2OA = \text{قطر}$

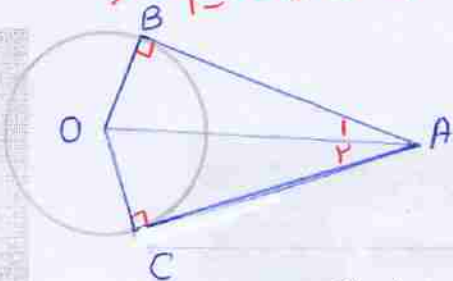
۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را
 کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

<p>خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p>	<p>وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p>

نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند
 و برعکس پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، بر آن عمود است

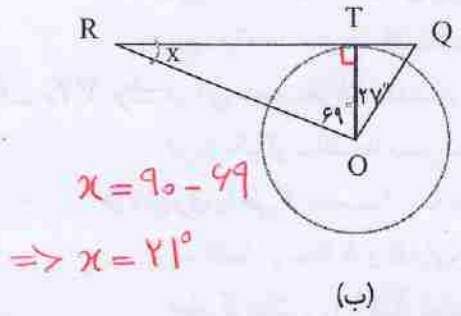
نکته: اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است و خطی که مرکز دایره را به آن نقطه وصل می‌کند نیم‌ساز زاویه بین این دو مماس است



$\Rightarrow AB = AC$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

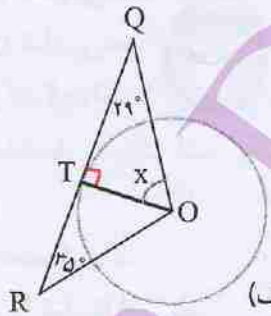
کار در کلاس

۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$x = 90 - 69$
 $\Rightarrow x = 21^\circ$

(ب)

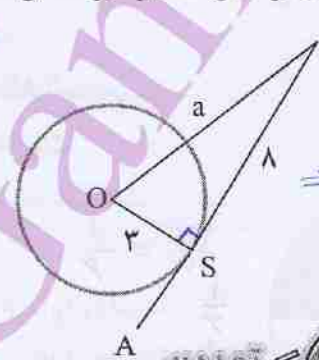
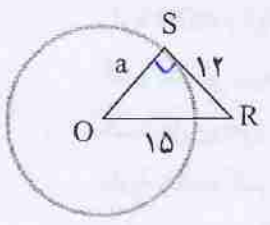


$x = 90 - 29$
 $x = 61$

(الف)

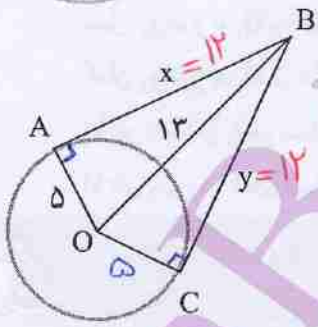
۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. طول پاره خط a را به دست آورید.

$a^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$



$a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
 $\Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$

تمرین

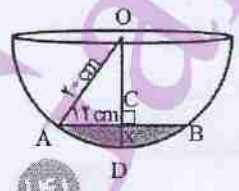


۱- نقطه B در فاصله ۱۲ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

$x^2 = 12^2 - 5^2 = 144$
 $\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید.

شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.
(الف) چرا $O'A = O'B$ ؟
(ب) چرا OO' نیم‌ساز $\angle AOB$ است؟



(۱۴۱)

۳- در کاسه رویه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم. AB برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

$OC^2 = 20^2 - 12^2 \Rightarrow OC^2 = 400 - 144 \Rightarrow OC^2 = 256 \Rightarrow OC = 16$

عمق آب $x = 20 - 16 = 4 \text{ cm}$

زاویه‌های مرکزی

فعالیت



10:15

10:10



۳۰ درجه

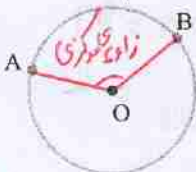
۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟

پنج دقیقه بعد، هریک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟

در این مدت، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟ $\Rightarrow 360 \div 12 = 30$

در هریک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟ **ساعت دیواری**



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

کمان کوچک‌تر را با \widehat{AB} نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.

۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟

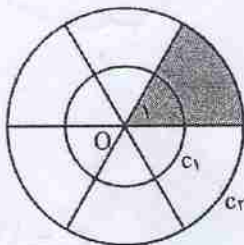
$$\frac{360}{6} = \frac{1}{6}$$

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟ $\frac{1}{6}$

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟ $\frac{1}{6}$

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟ **بله**

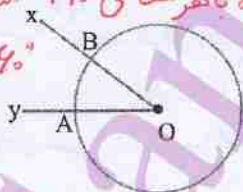
آیا طول این دو کمان مساوی است؟ **خیر، اولی $\frac{1}{6}$ از دایره C_1 و دومی $\frac{1}{6}$ از دایره C_2 است**



اندازه کمان AB برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن. بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هریک از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟ **هر دایره با هر شعاعی 360° است و این روی 6° می‌باشند**



از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟ **$\frac{1}{6}$ دایره است پس هر کدام**

۵- در شکل رو به رو زاویه xOy برابر 36° درجه است.

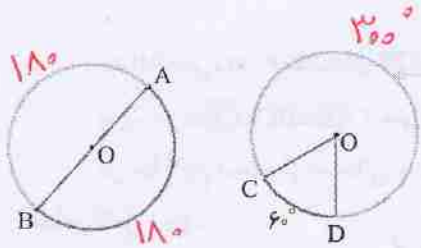
کمان AB چند درجه است؟ $\widehat{AB} = xOy = 36^\circ$

طول کمان AB چه کسری از دایره است؟ $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

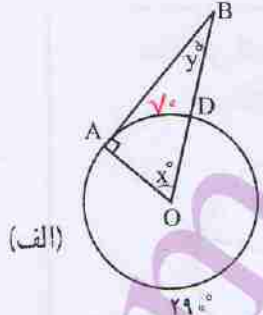
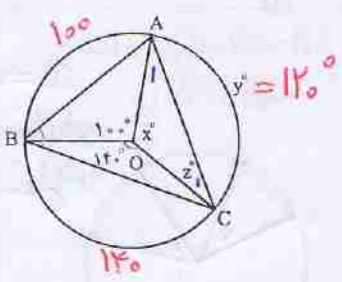
کار در کلاس



۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است. اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

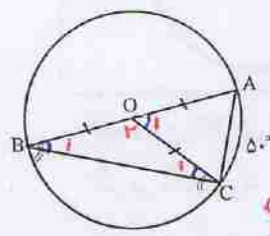
۲- اندازه کمان و زاویه های مجهول را پیدا کنید.

$y = 360 - (100 + 140)$
 $\Rightarrow y = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$
 $OA = OC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ$
 $\hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 120 = 60^\circ \uparrow$ (ب)



$x = \widehat{AB} \Rightarrow$
 $x = 70^\circ \Rightarrow y = 90 - 70$
 $\Rightarrow y = 20^\circ$

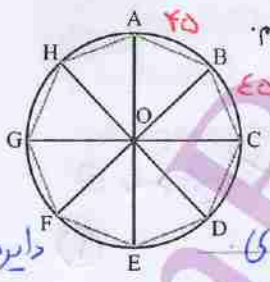
۳- در شکل رویه رو، AB قطر دایره است. زاویه B چند درجه است؟



$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = 50^\circ$
 $\Rightarrow \hat{O}_2 = 180 - 50 = 130^\circ$
 $OB = OC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 25^\circ$
 $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - 130 = 50^\circ \uparrow$



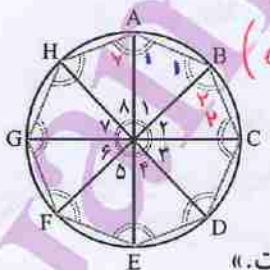
$360 \div 8 = 45$



۱- محیط دایره رویه رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده ایم. می خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است. رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می کند: «مثلث های AOB, BOC, COD و... متساوی الساقین اند.

دایره من باشند

چرا؟ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه های سبز رنگ با هم برابرند.



چرا؟ $(\hat{O}_1 = 45, OA = OB) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 47.5^\circ$ پس همه زاویه های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟
 آرش می گوید: «ولی این تنها برابری زاویه ها را نشان می دهد و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع های هشت ضلعی پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»

$(\hat{O}_2 = 45, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 47.5^\circ$

پس تمام زاویه های سبز رنگ با هم مساوی می باشند

$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A} = 2 \times 47.5 = 95$

به همین ترتیب داریم $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dots = \hat{H} = 95$

ارائه

بعد ادامه می دهد: «مثلث های AOB, BOC, COD و... هم نهشت اند. در چه حالتی؟ (من، رضی)»

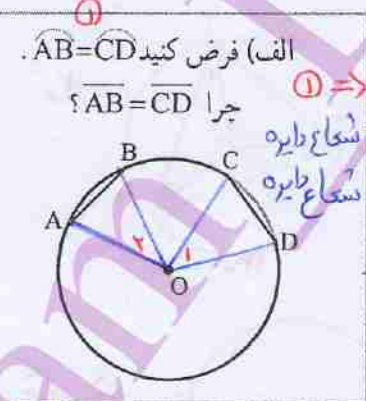
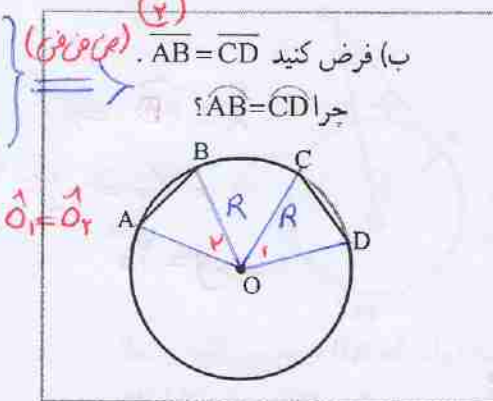
پس... $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ یعنی ضلع های هشت ضلعی هم مساوی اند.

هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید. **کلاس**

(۱) $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$
 $OA = OD = R$
 $OB = OC = R$

$\triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

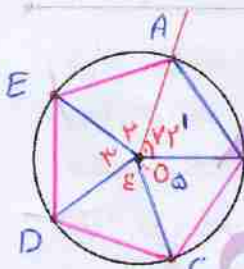


$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.

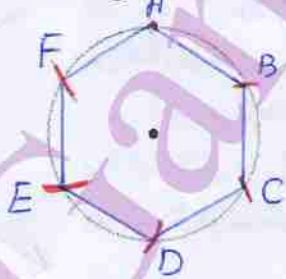
اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، اندازه وترهای نظیر آن ها نیز با هم برابر خواهد بود.
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، اندازه کمان های نظیر آن ها نیز با هم برابر است.

کار در کلاس



۱- با استفاده از خط کش و نقاله، در دایره رویه رو یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید. اندازه هر کمان 72° است.
 $\hat{AOB} = 72^\circ$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \dots = \hat{O}_5 = 72^\circ$

۲- الف) دهانه برگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطه دایره، شروع کنید و



بی دربی کمان بزنید.
 ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می شود؟
 ج) چرا این کمان ها با هم مساوی اند؟ زیرا $AB = BC = \dots = AF$
 د) هر کمان چند درجه است؟ $360^\circ \div 6 = 60^\circ$
 ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می شود؟ 6

$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{CE} = \widehat{DF} = \widehat{EA} = \widehat{FB} = 120^\circ$

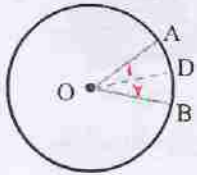
زیرا اگر در یک دایره اندازه وترها مساوی باشد آن گاه کمان های نظیر آن ها نیز با هم مساوی هستند

جواب سوال ۴ الف) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$ ①

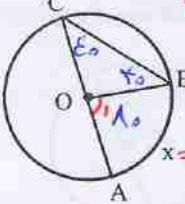
اگر دو زاویه مرکزی برابر باشند کمان‌های نظیرشان نیز با هم برابر است
 ب) بله، می‌دانیم اگر چند کمان با هم مساوی باشند آن‌گاه وترهای نظیر آن کمان‌ها نیز با هم مساوی اند

① $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC}$

$(\hat{O}_1 = 90^\circ, OB = OC) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$
 $(\hat{O}_2 = 90^\circ, OA = OC) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$. اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟ 18°
 $36^\circ \div 2 = 18^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB} = 18^\circ$
 ۲- کمان AB برابر x درجه است.



اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید. $x = 180^\circ$
 اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید. $x = 180^\circ$

در نظر بگیرید $x = 180^\circ$
 بهتر است با جدول کار کنید

$\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}$

$OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

$\hat{C} = \frac{x}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$

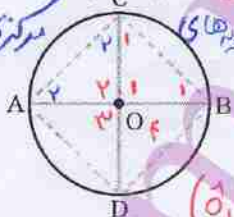
۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

					شکل
۱	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	کسر طی شده از دایره
360°	270°	180°	120°	90°	اندازه کمان طی شده
2π	$\frac{2}{4} \times 2\pi = \frac{2\pi}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	طول تقریبی کمان طی شده

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} = \widehat{AD} = \widehat{AC}$

مرکزی با هم برابرند

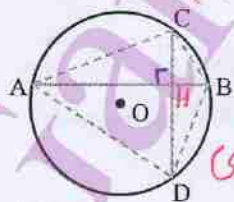


الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ چون زاویه‌های مرکزی با هم برابرند

ب) آیا وترهای AC، CB، BD، DA نیز با هم مساوی اند؟ بله

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی اند؟ چرا؟ بله

د- در شکل روبه‌رو وترهای AB و CD بر هم عمودند. $(\hat{O}_1 = 90^\circ, OC = OB) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$



الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی اند؟ خیر

ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟ در تمرین قبل دو وتر قطرهای

دایره بودند و در مرکز دایره را قطع می‌کردند ولی اینجا وترها قطر نیستند

و زاویه‌های H، یک زاویه مرکزی نیست

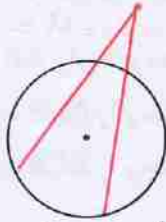
زاویه های محاطی

فعالیت

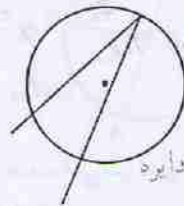


۱- مانند نمونه رسم شده (الف)، در شکل های زیر نمونه ای از هر یک از وضعیت های

مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.



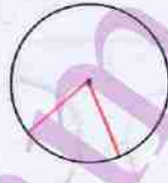
ب) رأس زاویه خارج دایره



الف) رأس زاویه روی دایره



د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه ای غیر از مرکز

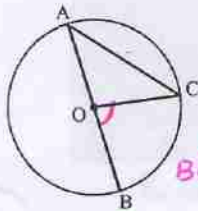


ج) رأس زاویه در مرکز دایره

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟ (ج)

به زاویه ای که در شکل «الف» مشاهده می کنید، زاویه محاطی گفته می شود. رأس این زاویه روی دایره است و ضلع های آن، دایره را قطع کرده اند.

زاویه محاطی



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید: $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$

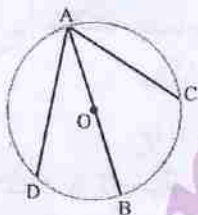
چرا زاویه های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟ $OA = OC$

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{C}$

اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

۳- با توجه به فعالیت قبل، با پر کردن جاهای خالی

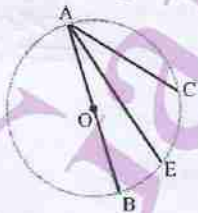
اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب \widehat{DC} بنویسید.



$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب \widehat{EC} بنویسید.



$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه

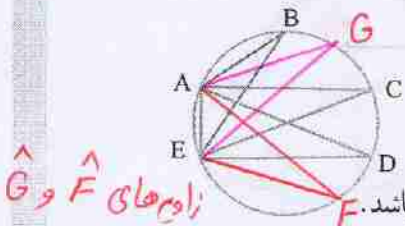
حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید. **بلیه**

اندازه هر زاویه محاطی برابر است با **نصف کمان مقابل به آن**

کار در کلاس



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،



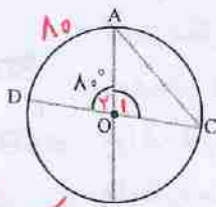
الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید. \widehat{D} , \widehat{C} , \widehat{B}

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد. **زاویه‌های F و G**

۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید. **کلامی**



زاویه مرکزی کمان مقابلش برابر است

فاطمه

$$\widehat{O} = 80^\circ \rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

زاویه محاطی کمان مقابلش

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به آن می‌باشد

زهرا

$$\widehat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

به کمان مقابلش است

مجموع زاویه‌ها در هر مثلث ۱۸۰ است

مثلث OAC متساوی الساقین است

زاویه‌های ۱۰۰ است

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

بله، زیرا همگی روی یک کمان می‌باشند پس نصف کمان AB می‌باشند

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟ 180°

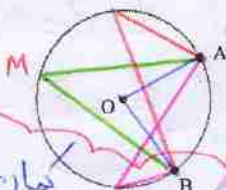
چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟ **۹۰**

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

نود (۹۰) درجه زیرا نصف کمان مقابلش می‌باشند

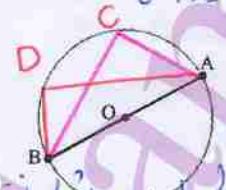
$$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \text{زاویه محاطی مقابل به آن} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



کمان AMB می‌شمار

می‌شماره روی

نقطه وجود دارد که با وصل کردن آن به A و B یک زاویه محاطی رسم می‌شود



$$360^\circ \div 2 = 180^\circ$$

180°

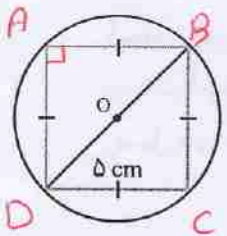
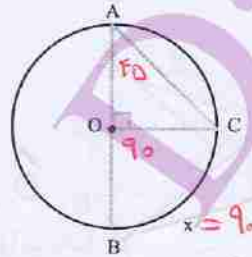
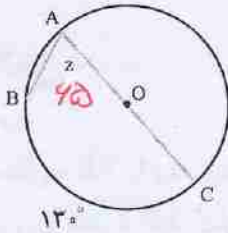
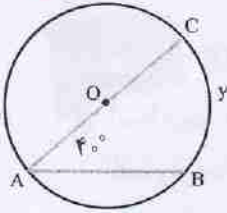


کار در کلاس



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

$y = 10$



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد. چرا این لوزی، مربع است؟
 قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

$$BD^2 = 5^2 + 5^2$$

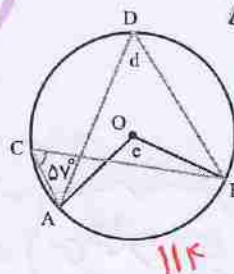
$$\Rightarrow BD = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$$

$$\Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$$

لوزی که یک زاویه قائمه داشته باشد مربع است.



۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.



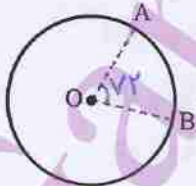
$d = c = 57$
 $e = \widehat{AB} = 114$

۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه است؟

$\widehat{AB} = \hat{O} = 72$

اگر، دهانه پرگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع از نقطه B، بی‌دری کمان‌هایی بزنیم، به این ترتیب چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟

$360 \div 72 = 5$

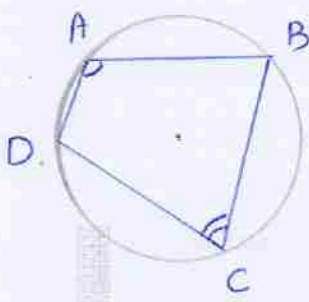


$j = 2 \times 52 = 104$

$h = \hat{A} = 52$

$k = 2\hat{B} = 44$

$l = \hat{B} = 33$



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

به همین ترتیب داریم $\hat{B} + \hat{D} = 180$

مجموع دو زاویه مقابل هر دو ضلعی مخالف برابر 180° درجه است

$$360 \div 8 = 45$$

$$\hat{A} = \frac{FD}{2} = 45$$

$$\hat{F} = 45$$

$$K = 180 - (45 + 45) = 90$$



۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ 8 خط تقارن

ب) اندازه دو زاویه مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.

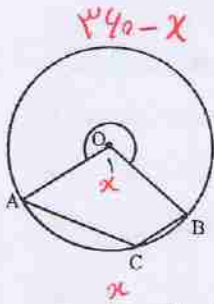
$$\hat{A} = 45 \text{ و } K = 90$$

۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟

بالا



۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

الف) اندازه زاویه O_1 را بر حسب x بنویسید. x درجه

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید. $360-x$

ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید.

$$\hat{C} = \frac{360-x}{2} = 180 - \frac{x}{2}$$

۶- در شکل زیر، برهه‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

$$360 \div 12 = 30$$

شعاع چرخ 30 سانتی متر است.

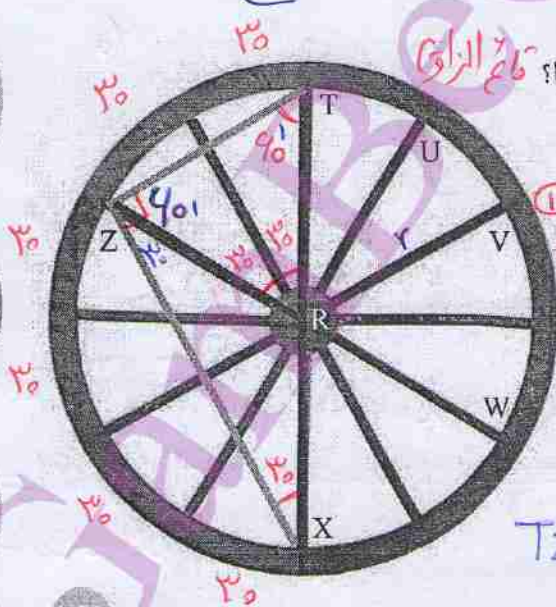
الف) طول TX چقدر است؟ 40 cm (قطر دایره)

ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ متساوی الاضلاع

ج) طول ZT چقدر است؟ 40 cm

د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ قائم الزامی

ه) طول ZX چقدر است؟



$$\hat{T}_1 = \hat{Z}_1 = \hat{TRZ} = 40 \Rightarrow$$

مثلث TRZ متساوی الاضلاع است

$$\Rightarrow TZ = r = 30 \text{ cm}$$

$$\hat{TZX} = \frac{TX}{r} = \frac{180}{2} = 90 \text{ (چون TX قطر است)}$$

$$\Rightarrow ZX^2 = TX^2 - TZ^2 \Rightarrow ZX^2 = 40^2 - 30^2 = 3600 - 900$$

$$\Rightarrow ZX = \sqrt{2700} = \sqrt{9 \times 100 \times 3} = 30\sqrt{3}$$

●●●●● مرور فصل ۹ ●●●●●

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

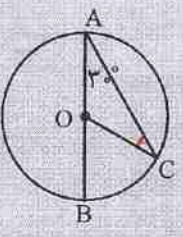
در این فصل، روش‌های اصلی رسم مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

کاربرد

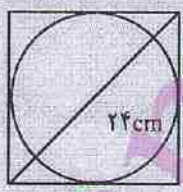
رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

تمرین‌های ترکیبی



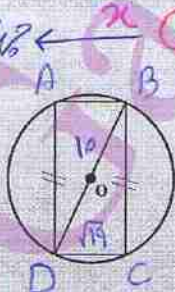
۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.
 $\hat{C} = 30^\circ$, $\hat{COB} = 40^\circ$, $\widehat{BC} = 40^\circ$
 (Handwritten note: $\hat{COB} = \hat{A} + \hat{C}$)

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



Handwritten solution for problem 2:
 $x^2 + x^2 = 24^2 \Rightarrow 2x^2 = 576 \Rightarrow x^2 = 288 \Rightarrow x = \sqrt{288} = \sqrt{2} \times \sqrt{144} = 12\sqrt{2}$

الضلاع
 چهارضلعی متوازی



۳- الف) در شکل زیر ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند. چرا چهارضلعی مستطیل است؟
 ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است. طول مستطیل را به دست آورید.

ABCD مستطیل است \Rightarrow (۱), (۲)
 است زیرا متوازی الاضلاع
 که زاویه قائم دارد مستطیل است

Handwritten solution for problem 3b:
 $BC^2 = 10^2 - 19 = 100 - 19 = 81$
 $\Rightarrow BC = \sqrt{81} = 9$