

عمل ۱: سری را اشتدال فوریه

تعریف تابع متناوب: به هر تابعی مانند $y = f(x)$ که عدد مثبت

$P = 2L$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$f(x+P) = f(x)$$

به $f(x)$ تابع متناوب می گوئیم و به P یک دوره تناوب می گوئیم.

توابع زیر همگی تابع متناوب با دوره تناوب 2π هستند

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx, \dots$$

$$\cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx, \dots$$

مثال:

$$\underbrace{\sin^2 x}_{f(x)}$$

$$f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) \sin(x+2\pi)$$

$$1 = \sin x \cdot \sin x = \sin^2 x = f(x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{TAT} \sin^2 x = \frac{1}{2} + 0 \sin x + 0 \cos x + 0 \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \dots$$

از ریاضی ۲: مشتق سری را اشتدال خط

$$\int_C p dx + q dy$$

از معادلات دیفرانسیل: معادلات جداشدنی و معادلات مرتبه ۲ با ضرایب

ثابت

مثال: سری فوريه تابع متناوب زیر را مشخص کنید

$$f(x) = \begin{cases} \pi & 0 < x < \pi \\ -\pi & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$P = 2\pi \Rightarrow L = \pi \quad \text{دوره تناوب}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 \quad \text{تابع فرد}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx dx = \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n} (\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - 1)$$

$$\text{تابع زوج} = \begin{cases} 0 \\ \end{cases}$$

تعريف: تقسيم (سری فوريه)

اگر $y = f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $P = 2L$ باشد که در بازه $(-L, L)$ پیوسته نیز هست، در این صورت این تابع را

می توان به صورت سری فوريه زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

به a_0, a_n ها و b_n ها ضرایب اویلری گوئیم که از طریق فرمول های زیر (فرمول های اویلری) بدست می آیند:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \text{نکته}$$

موضوع:

$$P=r \Rightarrow L=1$$

$$\text{زوج: } f(-x) = f(x)$$

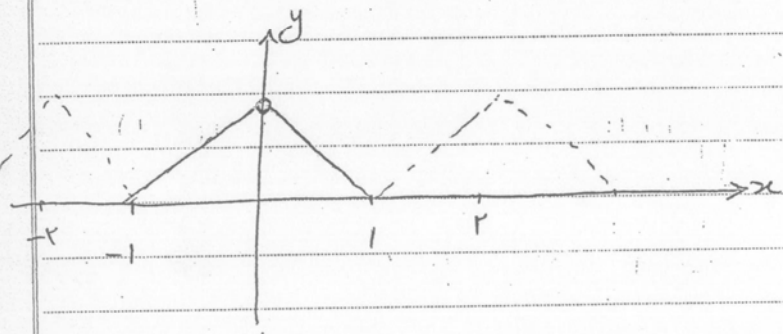
$$-L < x < 0$$

$$0 < x < L$$

$$\text{فرد: } f(-x) = -f(x)$$

$$-L < x < 0$$

$$0 < x < L$$



$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx =$$

$\downarrow$ زوج $\downarrow$ فرد

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 (1-x) \, dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx =$$

$\downarrow$ زوج $\downarrow$ زوج

$$b_1 = \frac{4}{1} \quad b_2 = \frac{4}{3} \quad b_3 = \frac{4}{5} \dots$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0$$

سری فوريه $f(x)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

$$= 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \frac{4}{5} \sin 5x + \dots$$

مثال: سری فوريه تابع متادوب زیر را بدست بیاورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 1+x & -1 < x < 0 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$

پس مقدار سری عدد زیر را نزدیک بیاورید.

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

$$A = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \dots$$

$$x=0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$1 = \frac{1}{1^r} + \frac{2}{\pi^r} + \frac{2}{3^r \pi^r} + \frac{4}{5^r \pi^r} + \dots$$

$$\frac{1}{1^r} = \frac{r}{\pi^r} \left(1 + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \dots \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$$A = \frac{\frac{1}{1^r}}{\frac{r}{\pi^r}} = \frac{\pi^r}{r}$$

$$f(0^+) = 1 \text{ \& } f(0^-) = 1 \Rightarrow \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 1$$

$$= r \int_0^1 (1-x) \cos n\pi x \, dx =$$

$\begin{array}{l} 1-x \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \cos n\pi x \\ \hline \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \\ \hline -\frac{1}{n^r \pi^r} \cos n\pi x \end{array}$

$$= r \left(\frac{1-x}{n\pi} \sin n\pi x - \frac{1}{n^r \pi^r} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1$$

$$= r \left(0 - \frac{(-1)^n}{n^r \pi^r} \right) - r \left(-\frac{1}{n^r \pi^r} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{r}{n^r \pi^r} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

using $f(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + \underbrace{b_n}_{=0} \sin n\pi x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{(r+1)^r \pi^r} \cos((r+1)\pi x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(n+1)^2 \pi^2} \cos((n+1)\pi x)$$

سوال: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f'(x) = g(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 1 \\ 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\varepsilon}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi x) \rightarrow \text{فر}$$

نکته: اگر تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $P = 2L$

نکته: $x = x_0$ توقف زنجیره باشد در انتهای می توان نوشت:

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x_0 + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x_0$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{حد راست}$$

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{حد چپ}$$

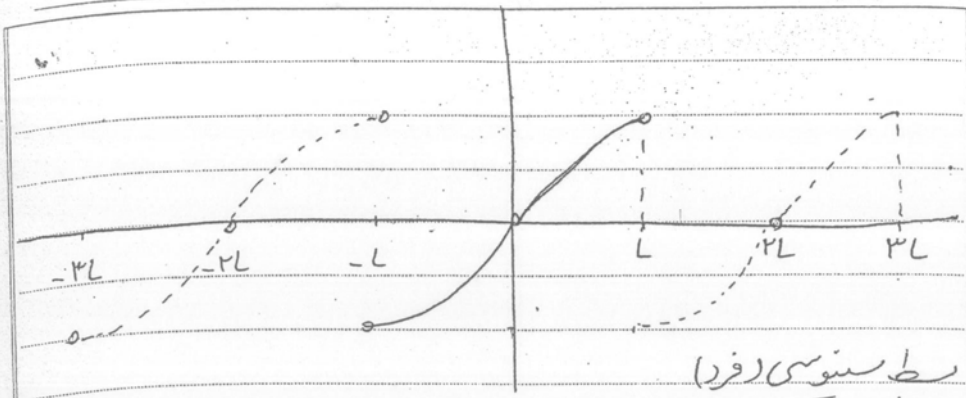
مادر آری از سری مک لورن:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

در مثال قبل داشتیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 1+x & -1 < x < 0 \end{cases} \quad \text{زوج}$$



تابع سینوسی (فرد)

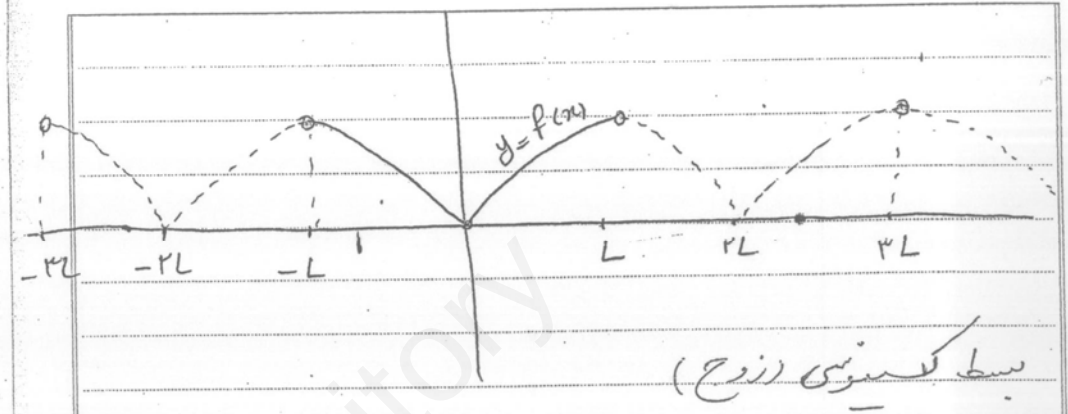
$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad \text{فرد}$$

$$f_0(x + 2L) = f_0(x)$$

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_0(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$



تابع سینوسی (زوج)

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad \text{زوج}$$

$$f_e(x + 2L) = f_e(x)$$

$$f_e(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_e(x) \, dx = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{-1}{n+1} \cos(n+1)\pi - \frac{1}{1-n} \cos(1-n)\pi \right) - \left(\frac{-1}{n+1} - \frac{1}{1-n} \right) \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{r}{\pi(1-n^2)} & \text{زوج } n \neq 1 \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx \quad : n=1$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} \sin rx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin rx dx =$$

$$= \left. \frac{-1}{r\pi} \cos rx \right|_0^{\pi} = \frac{-1}{r\pi} (1-1) = 0$$

پس سری فوريه کسینوسی تابع $f(x)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = \frac{r}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\pi(1-\varepsilon n^2)} \cos nx$$

$$f(x) = \frac{r}{\pi} + \frac{-r}{r\pi} \cos rx = \frac{r}{\pi} \cos rx + \dots$$

$$f'(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-r \times rn}{\pi(1-\varepsilon n^2)} \sin nx = -\frac{r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-\varepsilon n^2} \sin nx$$

$$= \cos x$$

مثال: سری فوريه کسینوسی تابع $f(x) = \sin x \quad 0 < x < \pi$

رايافته ده بگ آن سری فوريه کسینوسی تابع $g(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi$
را تيريدست آورده.

$$L = \pi$$

$$f(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad L = \pi$$

$$a_0 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{r}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{r}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{r}{\pi}$$

$$a_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx =$$

$$\frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} (\sin(n+1)x + \sin(1-n)x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{n+1} \cos(n+1)x - \frac{1}{1-n} \cos(1-n)x \right) \Big|_0^{\pi}$$

برای یافتن سری فوریه تابع g از سری فوریه تابع f مستفید می‌شیم.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda n}{\pi(1-\varepsilon n^2)} \sin 2nx$$

اکنون برای تابع $g(x) = \cos x$ ، بسط کسینوسی آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g(x) = \boxed{1} + \boxed{1} \cos x + \boxed{0} \cos 2x + \boxed{1} \cos 3x + \dots$$

* بسط سینوسی کسینوسی یک تابع یکپارچه است.

$$f(x) \quad 0 < x < L \quad , \quad a < x < b$$

$$f(x-a) \quad 0 < x-a < b-a$$

$$f(x) = \sin x \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) \text{ : توسیع کسینوسی } f_c(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ -\sin x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ : بسط کسینوسی تابع } f(x) = \frac{r}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F}{\pi(1-\varepsilon n^2)} \cos 2nx$$

$$A = \frac{1}{1 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$$

$$g(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi \quad \text{سری فوریه کسینوسی تابع :}$$

رایج‌ترین مورد. همچنین سری فوریه سینوسی همین تابع $g(x)$ را

در دست آورید.

سری فوريه کسینوسی تابع $f(x)$ = سری فوريه تابع $f_e(x)$

$$= \frac{r}{\pi} - \frac{r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sum n^2 - 1)} \cos 2nx$$

$$(2n-1)(2n+1)$$

$$= \frac{r}{\pi} - \frac{r}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6x + \dots \right)$$

$$\underbrace{\frac{r}{\pi}}_{a_0} \quad \underbrace{\frac{1}{1 \times 3}}_{a_1} \quad \underbrace{\frac{1}{3 \times 5}}_{a_2} \quad \underbrace{\frac{1}{5 \times 7}}_{a_3} \quad \dots$$

$$a_0 = \frac{r}{\pi} \quad b_n = 0$$

$$a_1 = \frac{-r}{\pi(1 \times 3)} \quad a_2 = \frac{-r}{\pi(3 \times 5)}$$

$$a_3 = \frac{-r}{\pi(5 \times 7)}$$

سری فوريه: $\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_e(x) dx = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{r}{\pi} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{r}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} \right) \right]$$

اتحاد پار سوال (نم)

اگر تابع $f(x)$ تابع متناوب با دوره تناوب $P=2L$

باشد a_0, a_n و b_n ضرایب سری فوريه تابع

$f(x)$ باشد در این صورت اتحاد زیر که به آن اتحاد پار سوال می گویند

برقرار است:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n')$$

اتحاد پار سوال

ادامه مثال قبل

$$A = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$$

از سری فوريه آخرین مثال طلب قبل استفاده می کنیم:

$$f_e(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ -\sin x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad \& \quad f_e(x + 2\pi) = f_e(x)$$

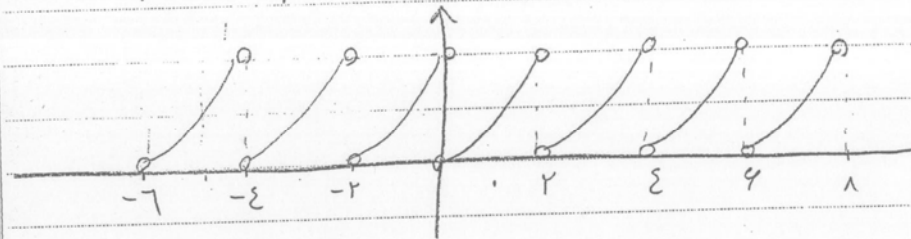
سوال: ابتدای سری فوری تابع $f(x) = x^2$: $0 < x < 2$

$f(x+2) = f(x)$ رابطه و سپس حاصل سری عددی زیر را به دست

$$P=2, L=2 \Rightarrow \boxed{L=1}$$

آن بدست آورید.

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$



$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad * f(x) \text{ نوزوج است و منفرد}$$

$$L=1 \quad a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \int_{-2}^0 f(x) dx =$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$L=1 \rightarrow a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx$$

$P=2$ در جواب

$$\text{سری راست اتحاد سوال} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

جایگذاری

$$\rightarrow \frac{\frac{17}{\pi^2}}{2} + \left(\frac{17}{\pi^2 (1^2 \times 3^2)} + \frac{17}{\pi^2 (3^2 \times 5^2)} + \dots \right)$$

$$\frac{17}{\pi^2 (5^2 \times 7^2)} + \dots$$

$$= \frac{17}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots}_A \right]$$

$$\frac{17}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + A \right] = \text{سری راست اتحاد سوال}$$

$$1 = \frac{17}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + A \right] \Rightarrow \frac{1}{2} + A = \frac{\pi^2}{17}$$

$$\boxed{A = \frac{\pi^2}{17} - \frac{1}{2}}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_0^r x^r \sin n\pi x dx =$$

$$\begin{array}{l|l} x^r & \sin n\pi x \\ \hline rx & \frac{-1}{n\pi} \cos n\pi x \\ \hline r & \frac{-1}{n^r \pi^r} \sin n\pi x \\ \hline 1 & \frac{1}{n^r \pi^r} \cos n\pi x \end{array}$$

$$b_n = \left[\frac{-x^r}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{rx}{n^r \pi^r} \sin n\pi x + \frac{r}{n^r \pi^r} \cos n\pi x \right]_0^r$$

$$= \left[\frac{-r}{n\pi} + \frac{r}{n^r \pi^r} \right] - \left(\frac{r}{n^r \pi^r} \right) \Rightarrow b_n = \frac{-\varepsilon}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

$$f(x) = \frac{r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n^r \pi^r} \cos n\pi x - \frac{r}{n\pi} \sin n\pi x \right)$$

نقطه نصف : $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\varepsilon}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n^r \pi^r}$

$$g(x) = f(x) \cos n\pi x$$

$$g(x+r) = f(x+r) \cos n\pi(x+r) = f(x) \cos n\pi x = g(x)$$

$$L=1 \text{ \& } P=r$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^r x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_0^r = \frac{1}{r+1} = a_0$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_0^r x^r \cos n\pi x dx =$$

$$\begin{array}{l|l} x^r & \cos n\pi x \\ \hline rx & \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \\ \hline r & \frac{-1}{n^r \pi^r} \cos n\pi x \\ \hline 1 & \frac{-1}{n^r \pi^r} \sin n\pi x \end{array}$$

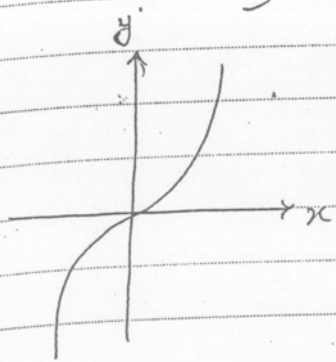
$$a_n = \left(\frac{x^r}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^r \pi^r} \cos n\pi x - \frac{1}{n^r \pi^r} \sin n\pi x \right) \Big|_0^r$$

$$= \frac{r}{n^r \pi^r} - 0 \Rightarrow a_n = \frac{\varepsilon}{n^r \pi^r}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos \omega x \, dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin \omega x \, dx$$

سوال: آیا تابع $f(x) = x^3$ انتگرال فوری دارد؟



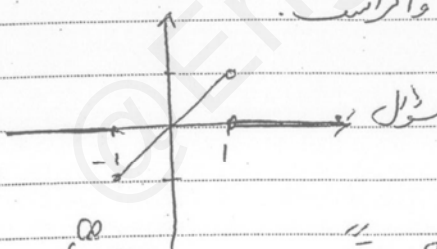
جواب: ندارد

نکته: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد انتگرال $f(x)$ تابعی زوج است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^3| \, dx = 2 \int_0^{+\infty} x^3 \, dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{+\infty} = \infty$$

و این است.

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| = \int_{-\infty}^{-1} |f| + \int_{-1}^1 |f| + \int_1^{+\infty} |f| = 1 \Rightarrow f(x) \text{ نطقاً انتگرال پذیر است}$$

$$\frac{0+2}{2} = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2}$$

$$\rightarrow \frac{4}{2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) A$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{\pi^2} A \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{6}$$

انتگرال فوری:

اگر $f(x)$ تابعی با دامنه $(-\infty, +\infty)$ باشد و همچنین انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

حداکثر باشد (به اصطلاح می گوئیم $f(x)$ مطلقاً

انتگرال پذیر است) در این صورت تابع $f(x)$ را می توان به صورت

عبارت انتگرالی زیر نمایش داد.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

انتگرال فوری تابع $f(x)$

که در آن $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به کمک فرمول های زیر بدست می آیند:

$$x=0 \rightarrow \pi = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin w}{w} dw \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

انستال فوریه سینوسی، انستال فوریه کسینوسی

اگر تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده باشد در این صورت

الف: می توان برای تابع $f(x)$ انستال فوریه کسینوسی به صورت

نویسند:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx$$

ب: می توان برای تابع $f(x)$ انستال فوریه سینوسی به صورت زیر

نویسند:

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw$$

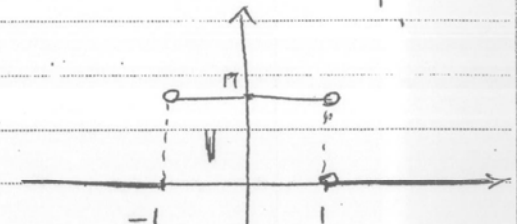
$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin wx \, dx$$

مثال: انستال فوریه تابع زیر را بنویسید

$$f(x) = \begin{cases} \pi & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

پسین به کمک آن مقدار انستال زیر را بنویسید

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$



چون تابع $f(x)$ زوج است پس $B(w) = 0$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos wx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \pi \cos wx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \pi \cos wx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin wx \right]_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{w} \rightarrow A(w)$$

انستال فوریه تابع $f(x)$: $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin w}{w} \cos wx \, dw$

$$e^{-sx} = \int_0^{\infty} \frac{rs}{\pi(s^2 + \omega^2)} \cos \omega x \, d\omega$$

پیدا می‌کنیم:

انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x) = e^{-sx}$

سوال: مقدار انتگرال زیر را به کمک انتگرال فوریه سینوسی سوال قبل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2} \, d\alpha$$

محاسبه کنید

انتگرال فوریه سینوسی:

$$e^{-sx} = \int_0^{\infty} \frac{rs}{\pi(s^2 + \omega^2)} \cos \omega x \, d\omega$$

به جای ω می‌توانیم مقدار $\omega = 1$ بگذاریم

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{r}{\pi(1 + \omega^2)} \, d\omega$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

سوال: برای تابع $f(x) = e^{-sx}$ که s عددی مثبت و x

انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی آن را بدست آورید.

انتگرال فوریه سینوسی $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

تغییر متغیر $\sin \omega x$ تابع

پیدا می‌کنیم:

$$e^{-sx} = \int_0^{\infty} \frac{r\omega}{\pi(s^2 + \omega^2)} \sin \omega x \, d\omega$$

انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x) = e^{-sx}$

انتگرال فوریه کسینوسی $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$V(x, y) = x + y$$

یک جواب رند

$$\left. \begin{array}{l} V_x = 1, \quad V_{xx} = 0 \\ V_y = 1, \quad V_{yy} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_{xx} + V_{yy} = 0$$

در معادله لاپلاس، جواب عمومی نداریم $\leftarrow$ جواب خصوصی داریم

و شروط مقدار اولیه را داریم.

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad \text{معادله حرارت یا ارتعاش}$$

(یک بعدی)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{معادله موج}$$

$$u_{tx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

فصل ۲ معادلات با مشتقات جزئی:

تعریف: یک معادله دیفرانسیل که مجهول آن تابعی حداقل در متغیر

باشد را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌گویم. (PDE)

مثلاً معادله دیفرانسیل معمولی (ODE)

$$\textcircled{1} \text{ معادله لاپلاس: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

یکی از جواب‌های معادله لاپلاس می‌تواند تابع زیر باشد:

$$u(x, y) = e^x \sin y$$

$$u_x = e^x \sin y \quad u_{xx} = e^x \sin y$$

$$u_y = e^x \cos y \quad u_{yy} = -e^x \sin y$$

$$\rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

تابع $u(x, t)$ نسبت به x دارای دامنه محدود $0 < x < L$ است

یعنی $u(x, t)$ نسبت به x می‌تواند یک سری فوریه سینوسی

به صورت زیر ارائه باشد:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (*)$$

چراود شرط $u(0, t) = u(L, t) = 0$ برقرار است؟

چون تابع u باید در معادله $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ صدق کند لذا

سری فوریه سینوسی $(*)$ را در معادله موج قرار می‌دهیم

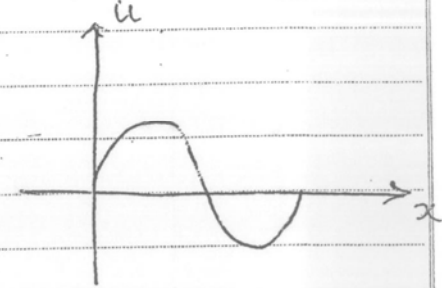
$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} b''_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha b_n(t) \cos \alpha x$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha^2 b_n(t) \sin \alpha x$$

معادله موج (تار متحرک)



$$① u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$t \geq 0, \quad 0 < x < L$$

$$② u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{شرط مقدار مرزی}$$

$$③ u(x, 0) = f(x)$$

$$④ u_t(x, 0) = g(x)$$

شرط مقدار اولیه

قبل از حل معادله موج، معادله دیفرانسیل معمولی زیر را مد نظر بگیرید:

$$y'' = -\beta^2 y \quad \text{که در آن } \beta \text{ عددی ثابت است}$$

$$y'' + \beta^2 y = 0 \quad \xrightarrow{\text{معادله مقارن}} \quad r^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\beta$$

$$\text{حاصل می‌شود: } y = A \sin \beta t + B \cos \beta t$$

$$y(0) = y_0 \quad \boxed{y_0 = B} \quad \& \quad y'(0) = y'_0$$

$$\boxed{y'_0 = A\beta}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \rightarrow u_t = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n c \cos \alpha c t - B_n c \sin \alpha c t) \sin \alpha x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} c \sin \frac{n\pi}{L} x$$

ری‌فونر سینوسی تابع $g(x)$

$$A_n \frac{n\pi}{L} c = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$A_n = \frac{1}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (****)$$

جمع‌بندی می‌کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \frac{n\pi}{L} ct + B_n \cos \frac{n\pi}{L} ct) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ B_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \end{cases}$$

مختلری حساب

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n''(t)}_{u_{tt}} \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-c^2 \alpha^2 b_n(t)}_{c^2 u_{xx}} \sin \alpha x$$

$$b_n''(t) = -\underbrace{c^2 \alpha^2}_{\beta^2} b_n(t)$$

$$b_n(t) = A_n \sin \alpha c t + B_n \cos \alpha c t \quad (**)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \alpha c t + B_n \cos \alpha c t) \sin \alpha x$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

ری‌فونر سینوسی تابع $f(x)$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (***)$$

$$B = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2K}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2K}{L} (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

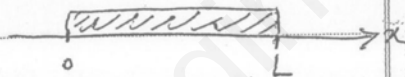
$$\Rightarrow B = \frac{4K}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

جواب معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4K}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

معادله حرارت (گرمایی)

$$\textcircled{1} u_t = c \cdot u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

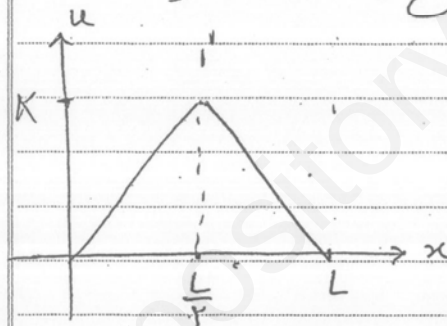


$$\textcircled{2} u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$\textcircled{3} u(x, 0) = f(x)$$

مثال: تکی به طول L را مطابق شکل زیر از سطح ارتفاع K بالا برده

و رها کردن ساخته ایم. حرکت این نخ را در لحظه رها کردن مشخص



حل: چون نخ را رها کرده ایم پس سرعت اولیه نداریم.

معنی $u(x, 0) = 0$ و این نیز معنی $g(x) = 0$ لذا خواهیم داشت

$$A = 0$$

اکنون ضابطه حالت اولیه نخ یعنی $f(x)$ را بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2K}{L} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\frac{2K}{L} (x-L) & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

در معادله موج، ضریب کسینوس به صورت زیر می باشد:

$$B = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

سوال: چو یک از معادلات (معادله زیر را به روش سری فوری (جداسازی) حل کنید.

$$u_t - q u_{xx} = 0 \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$L=1$$

$$C=q$$

$$u(x, 0) = 1 = f(x)$$

$$u_t = q u_{xx} \Rightarrow C=q \Rightarrow \boxed{C=q}$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad b_n(t) = A_n e^{-C \alpha_n^2 t}$$

$$A_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{r}{1} \int_0^1 f(x) \cdot \sin n\pi x \, dx =$$

$$A_n = r \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{-r}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 =$$

$$\frac{-r}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{-r}{n\pi} [(-1)^n - 1] =$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-r}{n\pi} [(-1)^n - 1] e^{-q(n\pi)^2 t} \cdot \sin n\pi x$$

$$L: A_n = \begin{cases} n \text{ زوج} & A_n = 0 \\ n \text{ فرد} & A_n = \frac{r}{(n-1)\pi} \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r}{(n-1)\pi} e^{-q(n-1)^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \cdot \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} -C \alpha_n^2 b_n(t) \sin \alpha x$$

$u_t \qquad \qquad \qquad C u_{xx}$

$$b'_n(t) = -C \alpha_n^2 b_n(t)$$

$$b_n(t) = A_n e^{-C \alpha_n^2 t}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-C \alpha_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$A_n = \frac{-1}{r\pi} \left[\frac{1}{(1+\frac{n}{r})} \underbrace{\sin(1+\frac{n}{r})\pi}_* - \frac{1}{(1-\frac{n}{r})} \underbrace{\sin(1-\frac{n}{r})\pi}_* \right]$$

$$A_n = \frac{-1}{r\pi} \left[\frac{1}{(1+\frac{n}{r})} \sin(\pi + \frac{n}{r}\pi) - \frac{1}{(1-\frac{n}{r})} \sin(\pi - \frac{n}{r}\pi) \right]$$

$$A_n = \frac{-1}{r\pi} \left[\frac{-1}{(1+\frac{n}{r})} \sin(\frac{n}{r}\pi) - \frac{1}{(1-\frac{n}{r})} \sin(\frac{n}{r}\pi) \right]$$

$$A_n = \frac{-1}{r\pi} \left[\frac{-1}{1+\frac{n}{r}} - \frac{1}{1-\frac{n}{r}} \right] = \frac{1}{r\pi} \left[\frac{1}{\frac{r+n}{r}} + \frac{1}{\frac{r-n}{r}} \right] \sin(\frac{n}{r}\pi)$$

$$A_n = \frac{1}{r\pi} \left[\frac{r}{r+n} + \frac{r}{r-n} \right] \sin(\frac{n}{r}\pi)$$

$$A_n = \frac{1}{r\pi} \left[\frac{r(r-n) + r(r+n)}{r^2 - n^2} \right] \sin(\frac{n}{r}\pi)$$

$$A_n = \frac{r \sin(\frac{n}{r}\pi)}{(r^2 - n^2)\pi}, \quad n \neq r$$

$$A_r = \frac{r}{r\pi} \int_0^\pi \sin x \sin x dx = \frac{1}{r}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n}{r} t \sin \frac{n}{r} x$$

$$u_t = u_{xx} \quad t > 0, \quad 0 < x < r\pi, \quad L = r\pi$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < r\pi \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0 = g(x) \Rightarrow B_n = 0$$

$$C=1 \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n(t) = A_n \cos \frac{cn\pi}{L} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{L} t$$

$$A_n = \frac{r}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{r}{r\pi} \int_0^\pi \sin x \sin \frac{n\pi}{r} x dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cdot \sin \frac{n}{r} x dx$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r} [\cos(1+\frac{n}{r})x - \cos(1-\frac{n}{r})x] dx$$

$$A_n = \frac{-1}{r\pi} \left[\frac{1}{(1+\frac{n}{r})} \sin(1+\frac{n}{r})x - \frac{1}{(1-\frac{n}{r})} \sin(1-\frac{n}{r})x \right]$$

$$④ \text{ قدر مطلق: } |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{نکته: } z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\text{مثال: } (2-3i)(2+3i) = 4+9 = 13$$

$$⑤ \text{ معکوس: } \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\text{مثال: } \frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$⑥ \text{ تقسیم: } \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

$$\text{مثال: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$\text{مثال: } \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$① \text{ مجموعه اعداد مختلط: } \mathbb{C} = \left\{ a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

$\downarrow$ حقیقی
 $\downarrow$ موهومی
 Re Im

$$\text{مثال: } 0 \in \mathbb{C} \quad -\sqrt{2}i \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{5}i \in \mathbb{C}$$

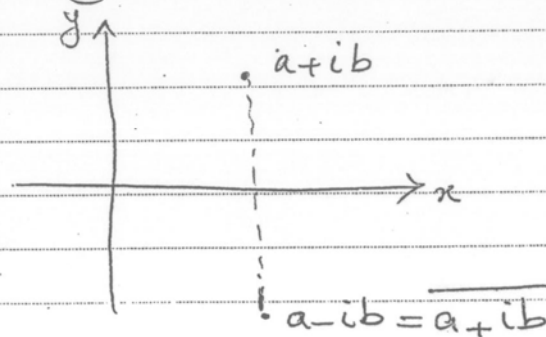
② جمع، تفریق، ضرب، مزدوج، قدر مطلق، معکوس و تقسیم اعداد مختلط

$$① (a_1+ib_1) + (a_2+ib_2) = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$$

$$② (a_1+ib_1) \cdot (a_2+ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$\text{مثال: } (1-2i)(2+3i) = (2+6) + i(3-4) = 8 - i$$

$$③ \text{ مزدوج: } a+ib = \overline{a-ib}$$

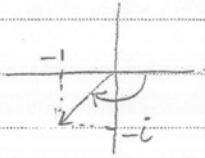


مثال: آرگومان اصلی اعداد مختلط زیر را مشخص کنید

$$z_1 = -17 \quad \text{Arg}(-17) = \pi$$

$$z_2 = 1 \quad \text{Arg}(1) = 0$$

$$z_3 = -1 - i \quad \text{Arg}(-1 - i) = \frac{-3\pi}{4}$$



$$z_4 = -1 + i \quad \text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$$

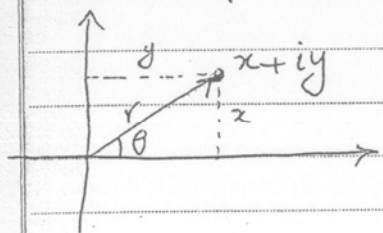
$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad \text{فرمول اویلر}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

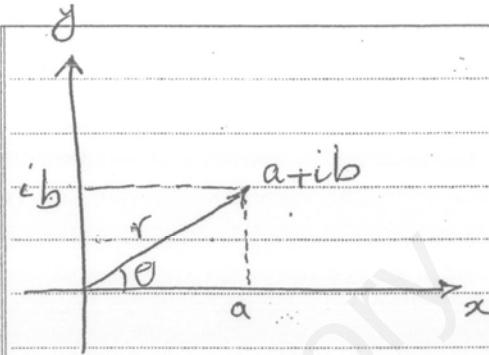
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \rightarrow e^{ix}$$

$$x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$



نمایش قطبی اعداد مختلط:



$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arg(a + ib) = \theta \neq 2k\pi$$

آرگومان اصلی

آرگومان اصلی

آرگومان اصلی:

آرگومان اصلی عدد مختلط $z = a + ib$ زاویه θ است که زاویه

بین سمت مثبت محور x و بردار است که مبدأ را به نقطه

$a + ib$ وصل می کند به علامت اینکه $-\pi < \theta \leq \pi$

در ضمن آرگومان اصلی عدد مختلط z را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\text{Arg}(z) \rightarrow \text{آرگومان اصلی}$$

عدد مختلط

$$w = \sqrt[4]{-17} = (-17)^{\frac{1}{4}} = (17e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} = (17)^{\frac{1}{4}} (e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} =$$

$$re^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$= (17)^{\frac{1}{4}} (e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} = re^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$= (17)^{\frac{1}{4}} (e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} = re^{\frac{i\pi}{4}}$$

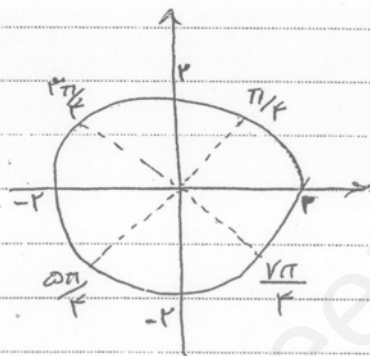
$$= (17)^{\frac{1}{4}} (e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} = re^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$w_1 = re^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{r} + i\sqrt{r}$$

$$w_2 = re^{\frac{i3\pi}{4}} = -\sqrt{r} + i\sqrt{r}$$

$$w_3 = re^{\frac{i5\pi}{4}} = -\sqrt{r} - i\sqrt{r}$$

$$w_4 = re^{\frac{i7\pi}{4}} = \sqrt{r} - i\sqrt{r}$$



فرمول دیوار:

$$(a \cos \theta + i \sin \theta)^n = a^n \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مانند قطبی یک عدد مختلط: اگر $z = a + ib$ دارای پارامترها

$r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$ باشد در صورت نمایش قطبی عدد مختلط

z به صورت زیر خواهد بود:

$$z = r e^{i\theta}$$

$$z = r e^{i\theta}$$

قرار داریم کنیم برای θ از آن گویان اصلی استفاده کنیم یعنی θ

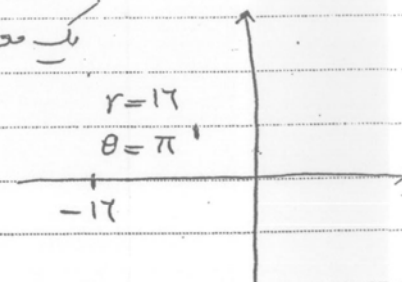
$\arg(z)$ در نظر می گیریم.

$$\sqrt[4]{-17} = w \Rightarrow w^4 = -17$$

یک معادله

رشته چهارم

عدد -17



$$-17 = 17 e^{i\pi}$$

نمایش قطبی عدد -17

توابع مختلط:

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{یک عبارت بر حسب } z$$

$$f(x+iy) = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$f(z) = z^2$$

$$f(x+iy) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{0}_{v(x,y)}$$

$$f(z) = |z|$$

$$f(x+iy) = (x^2 + y^2) - ix$$

$$z = x+iy \quad \& \quad \bar{z} = x-iy$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$f(x+iy) = (x^2 + y^2) - ix$$

$$f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 - i \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)$$

فرمول کلی یافتن ریشه های n ام یک عدد مختلطبرای یافتن ریشه های n ام عدد مختلط z با در واقع یافتن جواب ها

$$z = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{معادله} \quad w^n = z \quad \text{ابتدا } z \text{ را به فرم قطبی آن یعنی } z = r \cdot e^{i\theta}$$

می نویسیم. سپس جواب ها (ریشه های n ام z) به صورت زیر

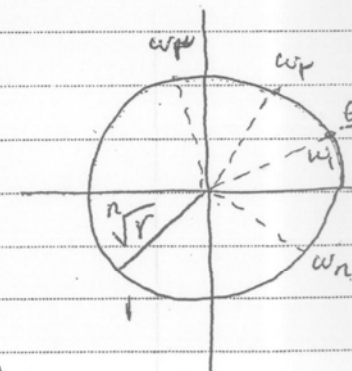
درست می آیند:

$$w_1 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\theta}{n}}$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)}$$

$$w_3 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \left(\frac{\theta + 4\pi}{n} \right)}$$

$$w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right)}$$



تابع هم: $f(z) = z^2 \rightarrow f(x+iy) = \underbrace{(x^2-y^2)}_u + i \underbrace{(2xy)}_v$

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} u_y = -2y \\ -v_x = -2y \end{cases}$$

معادلات کوشری - ریمن :

اگر $f(x+iy) = u+iv$ تابعی مشتق پذیر باشد، در این صورت

معادلات زیر (معادلات کوشری - ریمن) برقرار هستند

$$\begin{cases} u_x = v_y * \\ u_y = -v_x * \end{cases}$$

مشتق تابع مختلط :

اگر $w = f(z)$ تابعی مختلط باشد، در صورت مشتق تابع f را

در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

تابع هم:

۱- تابع ثابت: $f(x+iy) = -1-i$ مثال

۲- تابع چند جمله ای

حالت کلی: $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$

مثال: $f(z) = z^2$

۳- تابع گوی:

$$f(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$$

۴- تابع نمایی

$$f(z) = e^{iz}$$

مثال: $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \quad \begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{-1}{z^2}$$

نکات مهم:

(۱) تابع محاط: $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

تابعی مشتق پذیر است هرگاه معادلات کوشی - ریمن برقرار باشند:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{معادلات کوشی - ریمن}$$

در این حالت، مشتق تابع f را می توان با فرمول های زیر محاسبه کرد:

$$f'(x+iy) = u_x + i v_x$$

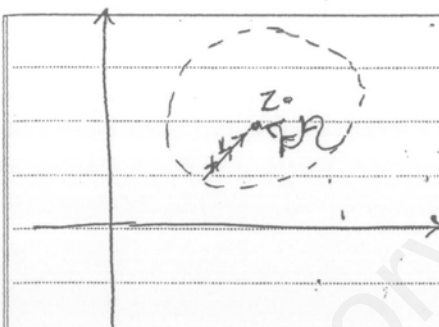
$$f'(x+iy) = v_y - i u_y$$

(۲) اگر $f(x+iy) = u + i v$ مشتق پذیر باشد، در صورتی که

تابع u و v ، فرد و زوج هم از یکدیگر می گذرند. (هر تابعی که در قطره

زیر صدق کند را یک تابع هم از می گویم.)

صفحه اعداد مختلط



$$f'(x_0 + i y_0) = \lim_{\Delta x + i \Delta y \rightarrow (0,0)} \frac{f((x_0 + \Delta x) + i (y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + i y_0)}{\Delta x + i \Delta y}$$

مثال: به کمک تعریف مشتق، نشان دهید تابع زیر در نقطه $z_0 = 0$

مشتق پذیر نیست.

$$f'(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

حل: تابع f باید برای مشتق پذیر بودن در نقطه $z_0 = 0$ ، در این

نقطه تعریف شده باشد، اما مطابق ضابطه آن، در این نقطه، اصلاً

تعریف نشده است.

$$f(x+iy) = \frac{(x-iy)}{x^2+y^2} \Rightarrow f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

معادلات کوشر-کان

$$\begin{cases} u_x = vx & \& \quad v_y = vx \\ u_y = 0 & \& \quad v_x = 0 \end{cases}$$

$$u_x = v_y \quad vx = vx \Rightarrow x = y$$

$$u_y = -v_x \quad 0 = 0 \quad \checkmark$$

پس تابع f در نقاط $z = x + iy$ که $x = y$ مستقیم است.

برای محاسبه مقدار مشتق تابع f از فرمول $f' = u_x + i v_x$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$f'(x + iy) = vx + i \cdot 0 = vx$$

$$z = x + ix \longrightarrow \boxed{f'(x + ix) = vx}$$

$$\text{مثال: } f'(1 + i) = 2$$

$$\swarrow \quad \searrow \\ x=1 \quad y=1$$

معادلات کوشر: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

هم u و هم v در معادلات کوشر صدق می‌کنند.

دلیل:
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

مثال: ابتدا بررسی کنید تابع زیر در هر نقاطی مستقیم هستند:

پس مشتق تابع را در آن نقاط بدست آورید.

$$f(x + iy) = x^2 + iy^2$$

برای بررسی نقاطی که تابع f در آن جا مستقیم است، معادلات

کوشر - کان را بررسی می‌کنیم:

$$u = x^2 \quad \& \quad v = y^2$$

$$\cos ax \cdot \cosh by (b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{b = \pm a}$$

بنابراین تابع u به صورت زیر نوشته می شود:

$$u(x, y) = \cos ax \cdot \cosh(\pm ay)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x, y) = \cos ax \cdot \cosh ay}$$

$\cosh x$: زوج است. $\sinh x$: فرد است.

ب: فرم های

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow v_y = -a \sin ax \cdot \cosh ay \\ u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -a \cos ax \cdot \sinh ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow v_y = -a \sin ax \cdot \cosh ay \\ u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -a \cos ax \cdot \sinh ay \end{cases}$$

انتگرال گیری

$$v = \int -a \sin ax \cdot \cosh ay \, dy = -\sin ax \cdot \sinh ay$$

$$v = \int -a \cos ax \cdot \sinh ay \, dx = -\sin ax \cdot \sinh ay$$

فرم های v : $\boxed{v = -\sin ax \cdot \sinh ay}$

$$f'(x+iy) = v_y - i u_y = ry - ix = ry = ry$$

$$\Rightarrow f'(x+ix) = rx$$

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر هم ساز باشد.
سپس یک فرم هم ساز برای آن بیابید.

$$u(x, y) = \cos ax \cdot \cosh by$$

برای هم ساز بودن u باید u در معادله لاپلاس صدق کند:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} u_x = -a \sin ax \cdot \cosh by \\ u_{xx} = -a^2 \cos ax \cdot \cosh by \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = -a \sin ax \cdot \cosh by \\ u_{xx} = -a^2 \cos ax \cdot \cosh by \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y = b \cos ax \cdot \sinh by \\ u_{yy} = b^2 \cos ax \cdot \cosh by \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y = b \cos ax \cdot \sinh by \\ u_{yy} = b^2 \cos ax \cdot \cosh by \end{cases}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow -a^2 \cos ax \cdot \cosh by + b^2 \cos ax \cdot \cosh by = 0$$

هیرولک: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\sinh ix = i \sin x$$

تابع سینوسی مختلط $\sin z = \sin(x + iy)$

$$= \sin x \cdot \cos iy + \sin iy \cdot \cos x$$

$$= \sin x \cdot \cosh y + i \sin hy \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

تابع کسینوسی مختلط $\cos z = \cos(x + iy)$

$$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$= \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

مذایع هرید:

فرمول اویلر: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$+ e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (1)$$

هیرولک: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (1')$

$$\cosh ix = \cos x$$

$$\cos ix = \cosh x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (2)$$

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2i} = i \sinh x$$

$$\begin{aligned} \text{Ln } z : \text{Ln } z &= \text{Ln } r \cdot e^{i\theta} \\ &= \text{Ln } r + \text{Ln } e^{i\theta} = \text{Ln } r + i\theta \text{Ln } e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ln } z = \text{Ln } r + i\theta} \quad \text{Ln } |z| + i \text{Arg } z$$

$$(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$$

$$\text{مثال: } z = e^{c \text{Ln } z}$$

$$(z^c)' = c \cdot z^{c-1}$$

$$\begin{cases} \cosh ix = \cos x & \& \cos ix = \cosh x \\ \sinh ix = i \sin x & \& \sin ix = i \sinh x \end{cases}$$

$$\sinh z = \sinh(x + iy)$$

$$= \sinh x \cdot \cosh iy + \sinh iy \cdot \cosh x$$

$$= \sinh x \cdot \cos y + i \sinh y \cosh x$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \cosh(x + iy)$$

$$= \cosh x \cdot \cosh iy - \sinh x \cdot \sinh iy =$$

$$= \cosh x \cdot \cos y - i \sinh x \sin y$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

فصل ۴: آنالیز توابع محلی

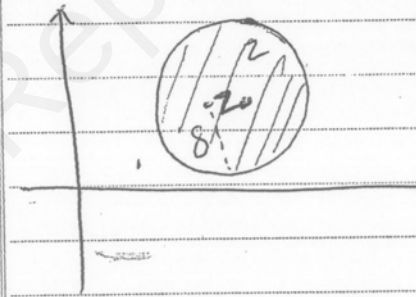
تعریف: تابع محلی و تابع نام

تابع $w = f(z)$ را در نقطه $z = z_0$ محلی می نامند چنانچه برای هر

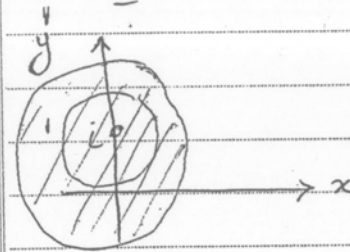
نقطه z متعلق به یک همای از نقطه $z = z_0$ ، مانند $|z - z_0| < \delta$

تابع f در این نقاط مستوی پذیر باشد.

شعاع دایره δ



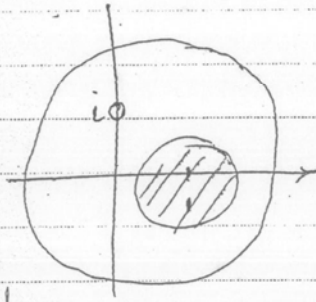
سؤال: آیا تابع $f(z) = \frac{z^2 + 1}{i - z}$ در نقطه $z = i$ محلی است؟



خیر

سؤال: آیا تابع $f(z) = \frac{z^2 + 1}{i - z}$ در نقطه $z = 1$ محلی هست یا خیر؟

بله



نکته: تابع $w = f(z)$ در نقطه ای متعلق به دامنه اش، محلی است

متصور تابع هایی هستند که ما تا الان با آنها آشنا شدیم و تا آخر درس

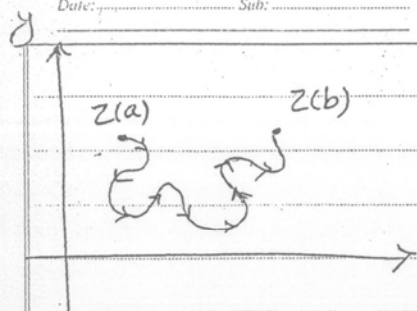
با آنها کار خواهیم داشت.

اعداد $\ln$ در مدار فیلتر داریم و یک نقطه $\ln$ داریم.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

خرج ریشه صفر دارد.

توابع نام: $\cosh z$, $\sinh z$, e^z , $\cos z$, $\sin z$ ، چند جمله ای



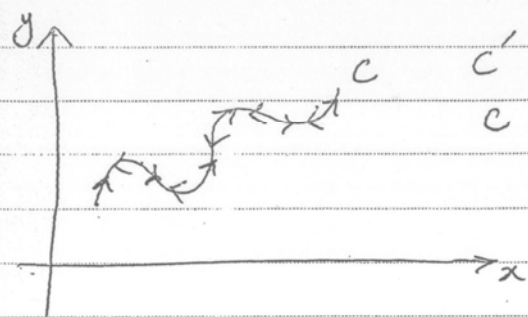
یادآوری:

$$\textcircled{1} \int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{z} dz \neq 0$$

$$\textcircled{2} \int_{z(a)}^{z(b)} z^r dz = \frac{z^{r+1}}{r+1} \Big|_{z(a)}^{z(b)}$$

چند نکته بسیار مهم در مورد انتگرال توابع مختلط:

① جهت خم: اگر کمان همان خم C باشد ولی در جهت معکوس،



در این صورت:

$$\int_{C'} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

تابع نام: تابع $w = f(z)$ را نام می‌نامیم هرگاه برای هر مختلط z ، تبدیلی باشد: توابع زیر محلی نام هستند:

$$\textcircled{1} f(z) = \text{منطقه}$$

$$\textcircled{2} f(z) = e^z$$

$$\textcircled{3} f(z) = \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

تعریف انتگرال توابع مختلط:

اگر $w = f(z)$ یک تابع مختلط باشد، C یک خم پارامتری به صورت زیر باشد:

$$C: z(t) = x(t) + i y(t) \quad a \leq t \leq b$$

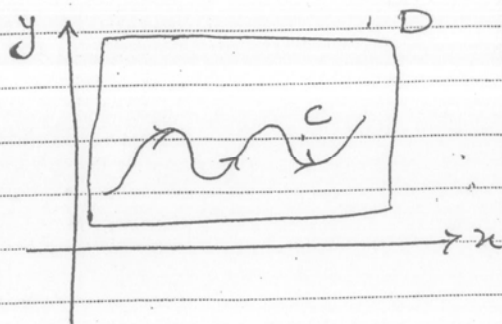
$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

(۳) تابع اولیه: اگر $f(z)$ در یک ناحیه شامل خم C عکلی باشد

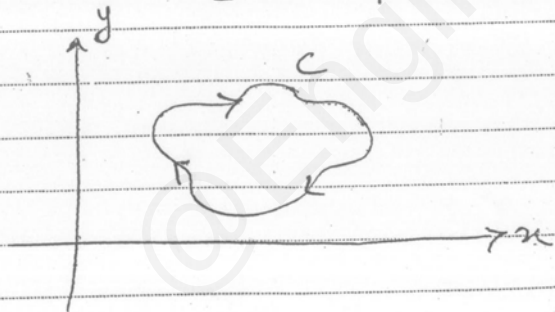
$$\int_C f(z) dz = F(z) \quad \left| \begin{array}{l} \text{نقطه انتهای } z \\ \text{نقطه ابتدای } z \end{array} \right.$$

$$F'(z) = f(z)$$



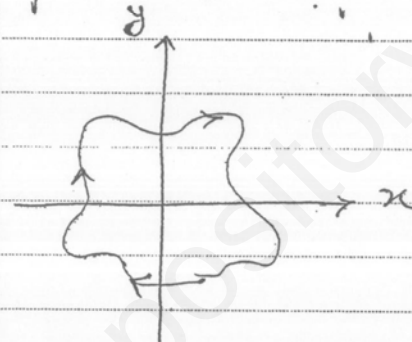
(۴) قضیه کوچی - گورال: اگر تابع $f(z)$ هم در C و هم داخل C عکلی باشد

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



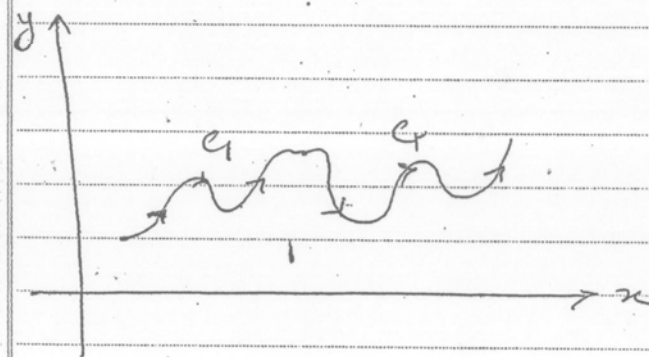
یادآوری: جهت مثبت یعنی جهت پاد ساعتگرد

جهت + یا - فقط برای خم های ساده بسته معنی دارد



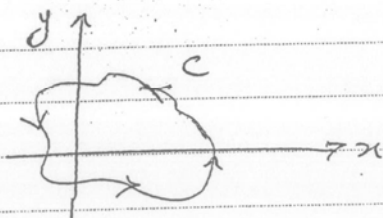
جهت خم متغیر است!

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (۲)$$



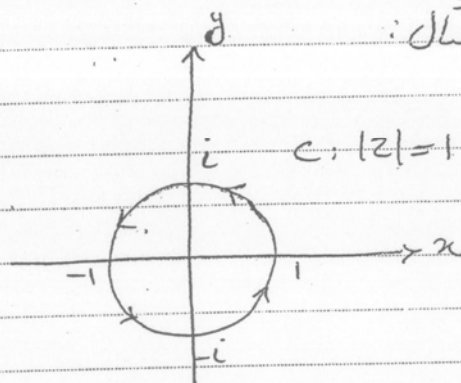
$$\oint_C \frac{z^r + 1}{(z - z_0)^{r+1}} dz = \frac{r\pi i}{r!} \times f^{(r)}(z_0) = r\pi i$$

$$z_0 = 0$$



$$\int \frac{z+1}{z^r(z-\frac{1}{r})} dz$$

$$|z|=1$$



$$f(z) = \frac{z+1}{z-r} \rightarrow f'(z) = \frac{z-r - (z+1)}{(z-r)^2}$$

$$f'(z) = \frac{-r}{(z-r)^2} \xrightarrow{z_0=0} f'(0) = \frac{-r}{r^2}$$

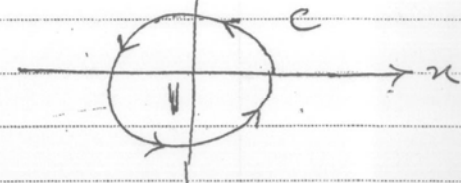
$$\oint_C \frac{z+1}{z^r(z-r)} dz = \frac{r\pi i}{r!} \times \frac{-r}{r} =$$

TAT

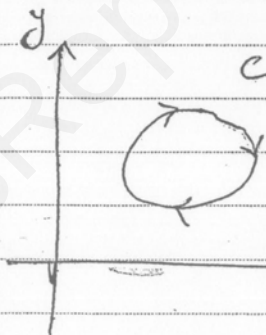
$$= -\frac{r\pi}{r} i$$

$$\oint_C \frac{1}{z} dz \stackrel{!}{=} 0$$

جهت پارسا عقدر



چون $f(z) = \frac{1}{z}$ و $z=0$ شامل نقطه z است پس برای محاسبه این انتگرال، از قضیه کوچی - کورسا نمی توان استفاده کرد.

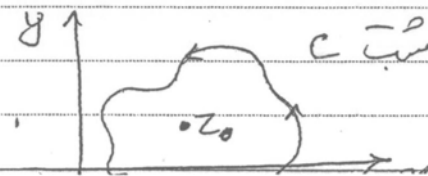


$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 0$$

قضیه کوچی - کورسا

⑤ فرمول انتگرال کوچی: اگر C در جهت مثبت باشد

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{r\pi i}{(n-1)!} \times f^{(n-1)}(z_0)$$



TAT

سری لوران: اگر تابع مختلط $w = f(z)$ بتوان به صورت سری

زیرنمایش داد، در این صورت این سری را، سری لوران تابع $f(z)$ (در نقطه z_0) می نامند.

$$f(z) = \dots + \frac{b_r}{(z-z_0)^r} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \underbrace{a_2(z-z_0)^2 + \dots}_{\text{سری لوران}} + \underbrace{\dots}_{\text{سری تیلور}}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{1-n}} dz \quad n=1, 2, 3, \dots$$

که خم C ، حلقه بسته و شامل نقطه z_0 است و جهت خم C نیز مثبت است.

دار آردی سری ها:

$$① e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

سری لوران تابع e^z

$$② \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$③ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$④ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

$$⑤ \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \quad |z| > 1$$

$$= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \quad |z| > 1$$

سری لوران $\rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right)$

$\left| \frac{1}{z} \right| < 1$
 $|z| > 1 \rightarrow \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right)$

$\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right)$

فرد

سری لوران تابع $\frac{1}{z-1}$ در ناحیه $|z| > 1$

سری لوران

$|z| < 1 \rightarrow \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \right)$

$|z| > 2 \rightarrow -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 - \dots$

سری لوران تابع $\frac{1}{z-2}$ در ناحیه $|z| < 2$

مسئله، سری لوران تابع زیر را در ناحیه $\frac{1}{2} < |z| < 2$

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

تفکیک کسری: $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2}$

$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} \right)$

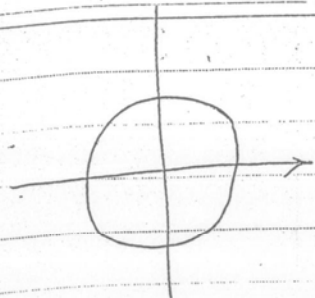
سری لوران

$\rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z}$

$|z| < 1 \rightarrow - \left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots \right)$
 فرد

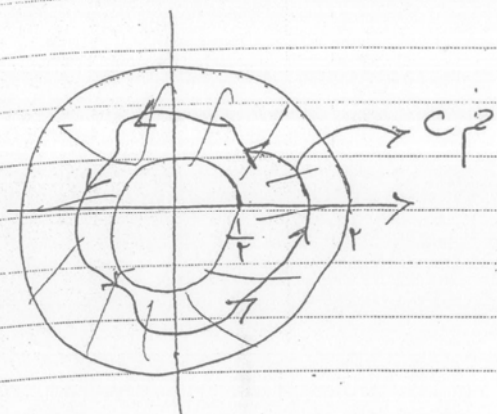
مناسب نیست زیرا در این سری $|z| < \frac{1}{2}$ که در ناحیه

$\frac{1}{2} < |z| < 2$ قرار ندارد.



رنگر: صفحه اعداد مختلط

$$|z| = r$$



نامنه: $\frac{1}{r} < |z| < r$

$$|z| > \frac{1}{r} : \frac{1}{rz-1} = \frac{1}{rz} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

$$|z| < r : \frac{1}{z-r} = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}z - \frac{1}{r^3}z^2 - \dots$$

سری توان تابع $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(rz-1)(z-r)}$$

$$= -\frac{r}{r} \left(\frac{1}{rz-1} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{z-r} \right)$$

$$\frac{1}{r} < |z| < r$$

$$= -\frac{r}{r} \left(\frac{1}{rz} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}z - \frac{1}{r^3}z^2 - \dots \right)$$

$$f(z) = \dots - \frac{1}{rz^3} - \frac{1}{rz^2} - \frac{1}{rz} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}z - \frac{1}{r^3}z^2 - \dots$$

سری توان تابع $f(z)$ در ناحیه $\frac{1}{r} < |z| < r$

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_r}{(z-z_0)^r} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

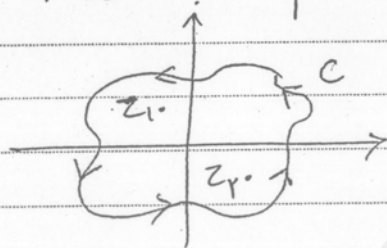
در این صورت، $z=z_0$ را یک قطب مرتبه m تابع می‌گوئیم.

اگر $m=1$ ، در این حالت، $z=z_0$ را یک قطب ساده تابع $f(z)$

می‌نامیم.

نکته مهم، محاسبه انتگرال کیهانگ مانده‌ها.

$$\oint_C f(z) dz$$



$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z) + \dots \right)$$

اگر $f(z)$ در نقاط z_1 و z_2 و ... کلیتاً مسطح.

میدانیم: اگر تابع $f(z)$ دارای یک سری لوران حول نقطه

$z=z_0$ به صورت زیر باشد:

$$f(z) = \dots + \frac{b_r}{(z-z_0)^r} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_r(z-z_0)^r + \dots$$

① به عبارت زیر، قسمت اصلی سری لوران تابع $f(z)$ می‌گوئیم:

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_r}{(z-z_0)^r} + \dots$$

قسمت اصلی سری لوران

② به عدد p در قسمت اصلی سری لوران تابع $f(z)$ ، مانده

تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ می‌گوئیم و آن را با نام زیر می‌نامیم:

$$b_1 = \text{Res } f(z)$$

$$z=z_0$$

③ قطب مرتبه m نام: اگر در قسمت اصلی سری لوران

داشته باشیم:

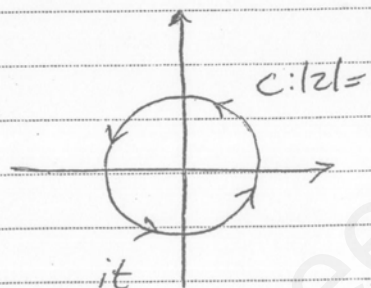
تجميع فرمول های انتگرال توابع مختلط

۱- روش مستقیم

$$\int_c f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$$

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$$

مثال: $I = \oint_{|z|=1} \bar{z} dz$



پارامتری کردن $|z|=1$ باره

$$\begin{cases} z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

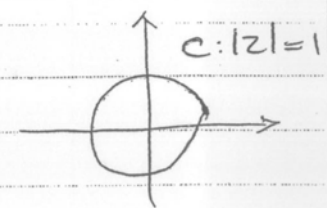
روش مستقیم

$$I = \oint_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) i e^{it} dt$$

$$e = e^{-it} \rightarrow \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = i \cdot 2\pi$$

مثال: $I = \oint_{|z|=1} z^r \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$

$$f(z) = z^r \cdot e^{\frac{1}{z}}$$



Res $f(z)$ at $z=0$

$$f(z) = z^r \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

تسلسل: $e^z = 1 + z + \frac{z^r}{r!} + \frac{z^r}{r!} + \dots$

$$f(z) = z^r \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^r \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{r! z^r} + \frac{1}{r! z^r} + \dots \right)$$

$$= z^r + z + \frac{1}{r!} + \frac{1}{r! z} + \dots$$

باره $b_1 = \text{Res } f(z) = \frac{1}{r!}$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} z^r \cdot e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \times \frac{1}{r!} = \frac{2\pi i}{r!}$$

محل انتگرال

(۳) فرمول انتگرال کوشی:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = 2\pi i \times \frac{f(z_0)}{(m-1)!}$$

$f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است.

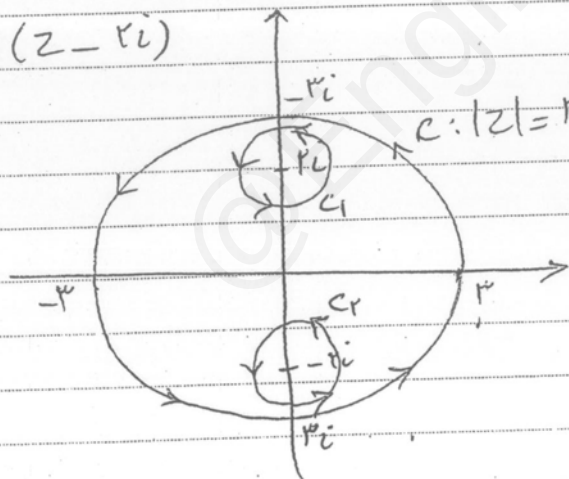
معمولاً برای $m=1, 2, 3$ استفاده می‌شود.

C : خم بسته و در جهت مثبت

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 + \epsilon} dz$$

$$z^2 + \epsilon = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\epsilon} i$$

$$z^2 + \epsilon = (z + \sqrt{\epsilon} i)(z - \sqrt{\epsilon} i)$$



اگر تابع $f(z)$ علامت بار - داشته باشد از روش مستقیم

برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کنیم.

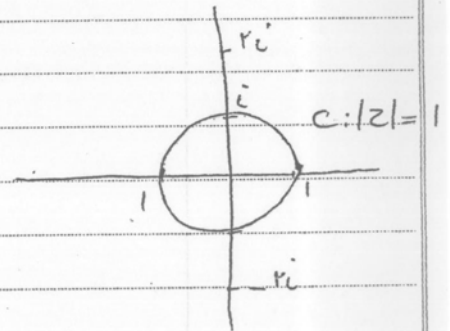
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

(۲) قضیه کوشی - گoursa:

$f(z)$ در دایره داخل خم بسته C تحلیلی باشد

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2 + \epsilon} dz$$

$$z^2 + \epsilon = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\epsilon} i$$



تابع $\frac{\sin z}{z^2 + \epsilon}$ در نقاط $z = \pm \sqrt{\epsilon} i$ تحلیلی نیست.

چون نقاط غیر تحلیلی داخل خم C نیستند پس مطابق قضیه کوشی گoursa داریم:

$$* I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2 + \epsilon} dz = 0$$

$$|z|=1$$

(*) قضیه بائیه لا :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \times \sum \text{Res } f(z)$$

نقاط غیر صفری تابع $f(z)$ که داخل خم C قرار دارند.

مثال: $I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$

باینه $\frac{\sin z}{z}$ در نقطه $z=0$:

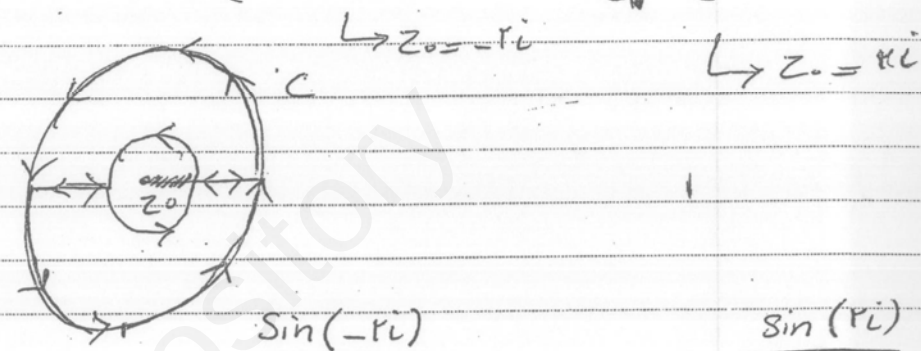
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 0 + \frac{1}{z^3} + \frac{b_1}{z} + \frac{b_3}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Res } \frac{\sin z}{z} = 0}$$

$$I = \oint_{C_1} \frac{\sin z}{z-ri} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z+ri} dz$$



$$= 2\pi i \times \frac{\sin(-ri)}{0!} + 2\pi i \times \frac{\sin(ri)}{0!}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-\sin ri}{-ei} + \frac{\sin ri}{ei} \right] = \frac{2\pi \sin ri}{ei}$$

$$= 2\pi i \times \frac{2 \sin ri}{ei} = \pi \sin ri : I$$

$$z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - + \dots \quad \left| \quad \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right.$$

$$- \left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \quad \left| \quad \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right.$$

$$- \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow b_1 = \text{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} = \frac{1}{2}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} dz = 2\pi i \times \text{Res} \left(\frac{\sin z}{e^z - 1 - z} \right) = 2\pi i \times \frac{1}{2}$$

حاصل انشال

تبدیل فوری:

$$\hat{f}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \hat{f}(\omega)$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} dz = 2\pi i \left[\text{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} \right] = 0$$

حاصل انشال

سوال: $I = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z - 1 - z} dz$

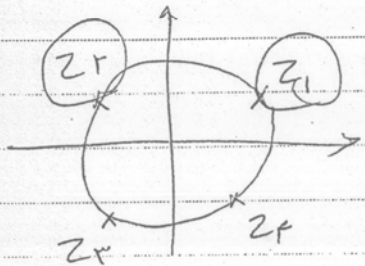
باقی بر روی لولان تابع $\frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$ در نقطه $z=0$

$$\begin{cases} \sin z = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - + \dots \\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \end{cases}$$

$$e^z - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{e^z - 1 - z} = \frac{z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - + \dots}{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}$$

$$f(z) = \frac{1+z^r}{1+z^r} \rightarrow z_1, z_2, z_3, z_4$$



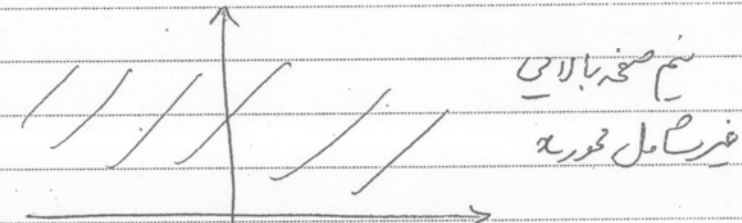
کاربرد انتگرال توابع مختلط برای محاسبه انتگرال های حقیقی

$$① I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$② I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

$$① I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\sum_{z=z_0} \text{Res } f(z) \right)$$

که z_0 نقاط غیرکلیبی تابع $f(z)$ در نیم صفحه بالایی هستند.



$$\text{مثال: } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^r}{1+x^2} dx$$

تبدیل فوریه

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx$$

سری سوم - سوال ۱۰ قسمت ۱

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$F(f(x)) = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{x(-1-i\omega)} dx$$

x	$e^{x(-1-i\omega)}$
۱	$\frac{1}{1-i\omega} e^{x(-1-i\omega)}$
۰	$\frac{1}{(1-i\omega)^2} e^{x(-1-i\omega)}$

$$\left[\frac{x e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega} - \frac{e^{x(-1-i\omega)}}{(1+i\omega)^2} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(\frac{-1}{(1+i\omega)^2} \right) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}$$

توفیق سری

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{\text{فوریه}} [a_n \\ \frac{f(+0) + f(-0)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{r} a_n \\ \text{ایجاد سوال} \end{cases}$$

اندازه فوریه - اندازه فوریه سینی - اندازه کسینوس

قرینات سری اول - ۱

سری سوم - نمونه سوالات سوال ۱۳

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \omega \sin \omega x}{1-\omega^2} d\omega$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \rightarrow f(x)$$

قرین ۱۳

$$\frac{i}{z} = \frac{y}{x^r + y^r} + i \frac{x}{x^r + y^r} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1+2)} \underbrace{z^r + \frac{i}{z}}_{\text{مجموع}} = \underbrace{(x^r - y^r)}_{u(x,y)} + \underbrace{\frac{y}{x^r + y^r}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(\frac{2xy}{x^r + y^r} + \frac{x}{x^r + y^r} \right)}_{v(x,y)}$$

سوال 1 قسمة 1

$$u(x,y) = e^{xy} \cdot \cos\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right)$$

$$u_x = y \cdot e^{xy} \cdot \cos\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) - x \cdot e^{xy} \sin\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right)$$

$$\Rightarrow v = \int y \cdot e^{xy} \cdot \cos\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) - x \cdot e^{xy} \sin\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) dy$$

نتیجه

$$Z = x + iy \rightarrow z^r = x^r - y^r + i 2xy$$

$$\frac{z^r}{r} = \left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) + i(xy)$$

مسئله 1 قسمة 2

$$u(x,y) = x^r - y^r + \frac{y}{x^r + y^r}$$

$$u'_x = rx + \frac{-2xy}{(x^r + y^r)^r}$$

$$v = \int rx - \frac{2xy}{(x^r + y^r)^r} dy$$

$$= 2xy + \frac{x}{x^r + y^r} \rightarrow v(x,y)$$

نتیجه

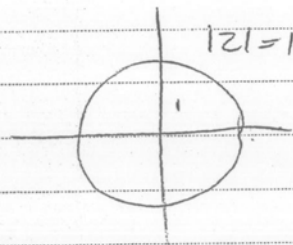
$$Z = x + iy$$

$$z^r = (x^r - y^r) + i 2xy \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^r + y^r} = \frac{x}{x^r + y^r} + i \frac{-y}{x^r + y^r}$$

سوال ۲ - قسمت ۱

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^r}{\sin z \cos z} dz$$



$$\sin z = 0 \rightarrow z = 0, z = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\sin z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^r$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= z^r - \frac{z^{\omega}}{r} + \dots$$

$$e^{-i\Delta} = e^{i\cos\Delta} \cdot e^{-i\sin\Delta} =$$

$$u = e^{xy} \cdot \cos\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{xy} - i \frac{x^r - y^r}{r}$$

$$\rightarrow -i \frac{z^r}{r} = xy - i \left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r} \right)$$

$$\rightarrow e^{-i \frac{z^r}{r}} = e^{xy - i \left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r} \right)}$$

$$= e^{xy} \cdot \cos\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) + i \left(-e^{xy} \cdot \sin\left(\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{r}\right) \right)$$

$u(x, y) \qquad \qquad \qquad v(x, y)$

$$\text{مسئله ۱: } I = \oint_C$$

$z=0 \in C$

$$I = \oint_{z=0 \in C} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) dz = 2\pi i \cdot \text{li} \left(\frac{z \cdot f(z)}{g(z)} \right)$$

m $(m-1)$

$z=0$

m از مرتبه $z=0$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^r}{\sin^r z \cos z} dz$$

$|z|=1$

$z=0$ از مرتبه ۱

$$= 2\pi i \times \text{li} \left(\frac{z^r}{\sin^r z \cos z} \right) = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$$

$$\sin z \cos z = \left(z^r - \frac{z^a}{r} + \dots \right) \left(1 - \frac{z^r}{r} + \dots \right) =$$

$$= z^r - z^a + \dots$$

$$\frac{z^r}{\sin^r z \cos z} = \frac{z^r}{z^r - z^a + \dots}$$

$$\frac{z^r}{z^r - z^a + \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^a}{z^r} + \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^{a-r}}{1} + \dots}$$

$\frac{1}{z}$

$\frac{b_1}{z} \rightarrow b_1 = 1$

$$I = 1 \times 2\pi i = 2\pi i$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^r}{\sin^r z \cos z} dz$$

$|z|=1$

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \text{ از مرتبه } r \\ z=0 \text{ از مرتبه } r \end{array} \right\} m = \text{مرتبه} - \text{خرج} = 1$$

$$1 + \frac{r}{r} z^r + \frac{1}{r^2} z^{2r} + \frac{1}{r^3} z^{3r} + \dots$$

$$b_1 = \frac{1}{r}$$

$$(2) \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^r \sin rz} dz = r\pi i \cdot \frac{1}{\pi^r}$$

$$z = \frac{\pi}{r}$$

① صورتی $z = \frac{\pi}{r}$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{r}} \left(\frac{(z - \frac{\pi}{r})}{z^r \sin rz} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1}{r z^r \sin rz + r z^{r-1} \cos rz}$$

$$= \frac{1}{0 + r \times \frac{\pi^r}{r} (-1)} = \frac{-1}{\pi^r} \quad (2)$$

$$(3) \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^r \sin rz} dz = \frac{r}{\pi} i$$

$$z = -\frac{\pi}{r} \quad \text{① از روی } z = -\frac{\pi}{r}$$

سوال 5

$$I = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^r \sin rz} dz$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = \pm \frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$I = \oint_{z=0} \frac{1}{z^r \sin rz} dz + \oint_{z=\frac{\pi}{r}} \frac{1}{z^r \sin rz} dz + \oint_{z=-\frac{\pi}{r}} \frac{1}{z^r \sin rz} dz$$

$$\oint_{z=0} \frac{1}{z^r \sin rz} dz = r\pi i \times \frac{1}{r} = \frac{r}{r} \pi i$$

از روی $z=0$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{r}} \left(\frac{z^r}{z^r \sin rz} \right) \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{z^r (rz - (rz)^r + \dots)}$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{r}} \left(\frac{z + \frac{\pi}{r}}{z^r \sin rz} \right) = \frac{-r}{\pi^r} \quad (r)$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{r dz}{z^r \sin rz} = \frac{r}{r} \pi i + \frac{1}{\pi} i$$

$$\oint \cos z = r$$

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= r \\ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= r \\ w = e^{iz} \\ \frac{w + \frac{1}{w}}{2} &= r \end{aligned}$$

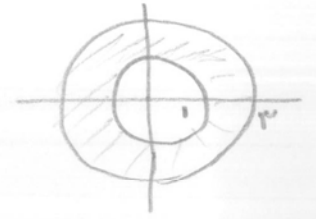
$$\rightarrow w^2 - 2rw + 1 = 0 \Rightarrow w = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4}}{2}$$

$$e^{iz} = r \pm \sqrt{r^2 - 1} \rightarrow iz = \ln(r \pm \sqrt{r^2 - 1}) + i 2k\pi$$

$$z = \frac{1}{i} \left(\ln(r \pm \sqrt{r^2 - 1}) + i 2k\pi \right)$$

سری توان تابع $\frac{1}{1+z}$ در ناحیه $|z| < 1$ محاسبه می‌شود.

سری توان، محاسبه می‌شود.



$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} ; 1 < |z| < 3$$

نقطه کسر

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right)$$

① ②

①

در ناحیه $|z| < 1$ این تابع را در نظر بگیرید
 $\frac{1}{z+1} \rightarrow$

در ناحیه $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

استفاده می‌کنیم

در ناحیه $|z| > 1$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right)$$

$$= -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots$$

② *

در مقوله *

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots$$

$|z| > 1$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots$$

②

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{3}} \right)$$

$$|z| < 3$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = 1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \dots$$

$$\rightarrow \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \pm \dots \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} \pm \dots \right)$$

سری توان - محاسبه می‌شود.

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} , (0 < |z-1| < 2)$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+z} \right)$$

① ②

①

$$\rightarrow \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \right)$$

$$\left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \rightarrow |z-1| < 2 \checkmark$$

$$\left| \frac{z-1}{2} \right| > 1 \rightarrow |z-1| > 2 \times$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\sin(\pi - \omega a)}{1 - \omega} - \frac{\sin(\pi + \omega a)}{1 + \omega} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \omega a}{1 - \omega} + \frac{\sin \omega a}{1 + \omega} \right]$$

$$= \frac{\sin \omega a}{r} \left[\frac{1 + \omega + 1 - \omega}{(1 - \omega)^r} \right] = \frac{\sin \omega a}{1 - \omega^r}$$

$$\textcircled{\text{II}} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \pi \sin \omega a}{1 - \omega^r} d\omega = \begin{cases} \pi/r \sin a & ; 0 < a < \pi \\ 0 & ; a > \pi \end{cases}$$

$$J_{\text{شماره}} = \int_0^\infty \frac{\sin^r \omega \pi}{1 - \omega^r} d\omega \quad \text{اگر } \pi < a < 2\pi$$

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin \omega \pi \sin \omega \pi}{1 - \omega^r} d\omega = 0$$

$$\sin z = ri \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = ri \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -r$$

$$\omega = e^{iz} \rightarrow \omega - \frac{1}{\omega} = -r \rightarrow \omega^r + r\omega - 1 = 0$$

$$\rightarrow \omega = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4}}{2} = -r \pm \sqrt{1 + r^2} = e^{iz}$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 + \frac{z-1}{r}} \right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z-1}{r} + \left(\frac{z-1}{r} \right)^2 + \dots \right)$$

• اگر $|z-1| < r$ پس $\frac{1}{1+z}$ بسط می‌دهیم

$$\frac{1}{1-z^r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{z-1} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1+z} \right)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} \quad \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{z-1} \right) \\ \textcircled{\text{II}} \quad \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z-1}{r} + \left(\frac{z-1}{r} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\dots + 0 + \frac{-1/r}{z-1} + \frac{1/r}{r} - \frac{z-1}{r^2} + \left(\frac{z-1}{r^3} \right)^2 + \dots$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi \omega \sin \omega a}{1 - \omega^r} d\omega = \begin{cases} \pi/r \sin a & ; 0 < a < \pi \\ 0 & ; a > \pi \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^\infty f(a) \sin \omega a da \quad \textcircled{\text{I}} \\ f(a) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega a da \quad \textcircled{\text{II}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} \rightarrow B(\omega) &= \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{r} \sin a \sin \omega a da = \int_0^\pi \sin a \sin \omega a da \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos(1-\omega)a - \cos(1+\omega)a] da \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1-\omega)} \sin(1-\omega)a - \frac{1}{(1+\omega)} \sin(1+\omega)a \right]_0^\pi \end{aligned}$$

$$e^{iz} = \alpha = |\alpha| e^{i\pi} \rightarrow \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix}$$

$$\rightarrow iz = \begin{cases} \ln \alpha + i r k \pi \rightarrow \cos \alpha \\ \ln |\alpha| + i (\pi + r k \pi) \rightarrow \sin \alpha \end{cases}$$

$$e^{iz} = -r \pm \sqrt{\omega} \rightarrow \begin{cases} -r + \sqrt{\omega} \rightarrow \cos \\ -r - \sqrt{\omega} \rightarrow \sin \end{cases}$$

$$\rightarrow iz = \begin{cases} \ln(-r + \sqrt{\omega}) + i r k \pi \\ \ln(-r - \sqrt{\omega}) + i (\pi + r k \pi) \end{cases}$$

$$\rightarrow z = \begin{cases} r k \pi - i \ln(-r + \sqrt{\omega}) \\ \pi + r k \pi - i \ln(-r - \sqrt{\omega}) \end{cases}$$