

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری پایانی سوم

زمان آزمون: ۵ ساعت

یکشنبه ۱۶ شهریور ۱۳۹۳

پرومشی نخست. فرهاد هم رفت، ما موندیم و یه سری فیلسوف | : ۲۵ امتیاز

یک صفحه تصویری مرتبه n ($v = n^2 + n + 1, k = n + 1, \lambda = 1$) با مجموعه نقاط $X = \{1, 2, \dots, n^2 + n + 1\}$ داریم. اگر $A \subseteq X$ دارای این ویژگی باشد که برای هر بلوک B داشته باشیم $|A \cap B| \leq 2$ ، آن گاه:

(ا) ثابت کنید $|A| \leq n + 2$. (۱۲ امتیاز)

(ب) اگر n فرد و بزرگتر از ۱ باشد، ثابت کنید $|A| \leq n + 1$. (۱۳ امتیاز)

توجه: k اندازه‌ی بلوک‌هاست.

پرومشی دوم. آخر هفته‌ای تلخ، بدون فرهاد ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ داریم که در ابتدا در تمام خانه‌های آن، عدد ۰ نوشته شده است. خانه‌ی محل تلاقی سطر i -ام و ستون j -ام را با (i, j) نشان می‌دهیم.

q درخواست به ما داده می‌شود. هر درخواست، ۳ عدد طبیعی x, y, m به ما می‌دهد که $x + m - 1 \leq n$ و $y + m - 1 \leq n$ است. با این درخواست، باید به عدد هر خانه‌ی (a, b) که عضو مجموعه‌ی

$$\{(a, b) \mid x \leq a < x + m; y \leq b < y + m; a - x \geq b - y\}$$

باشد، یک واحد اضافه شود.

شما ابتدا q درخواست را دریافت می‌کنید و در انتها باید بگویید اعداد خانه‌های جدول چه خواهد بود. الگوریتمی از $O(n^2 + q)$ برای این کار ارائه کنید.

پروستش سومه هر که نامش از قلم افتاد امتیاز ۴۵

یک گراف ساده G داریم. می‌خواهیم به هر یال مانند e ، یک عدد حقیقی مانند $f(e)$ نسبت دهیم، طوری که شروط زیر برقرار باشد:

- برای هر یال مانند e داشته باشیم: $0 \leq f(e) \leq 1$

- مجموع اعداد یال‌های متصل به هر رأس، حداکثر ۱ باشد

بیشینه‌ی ممکن مجموع اعداد یال‌های G را، $\max(G)$ می‌نامیم. حال هر یک از قسمت‌های زیر را حل کنید.

(ا) ثابت کنید اگر گراف داده شده، دوبخشی باشد، می‌توان به هر یال، یکی از اعداد ۰ و ۱ را نسبت داد، طوری که مجموع اعداد یال‌های G ، برابر $\max(G)$ شود. (۷ امتیاز)

(ب) ثابت کنید اگر گراف داده شده، دور زوج نداشته باشد، می‌توان به هر یال، یکی از اعداد ۰ و $\frac{1}{2}$ را نسبت داد، طوری که مجموع اعداد یال‌های G ، برابر $\max(G)$ شود. (۱۸ امتیاز)

(پ) ثابت کنید برای هر گراف داده شده، می‌توان به هر یال، یکی از اعداد ۰ و $\frac{1}{3}$ را نسبت داد، مجموع اعداد یال‌های G ، برابر $\max(G)$ شود. (۲۰ امتیاز)