

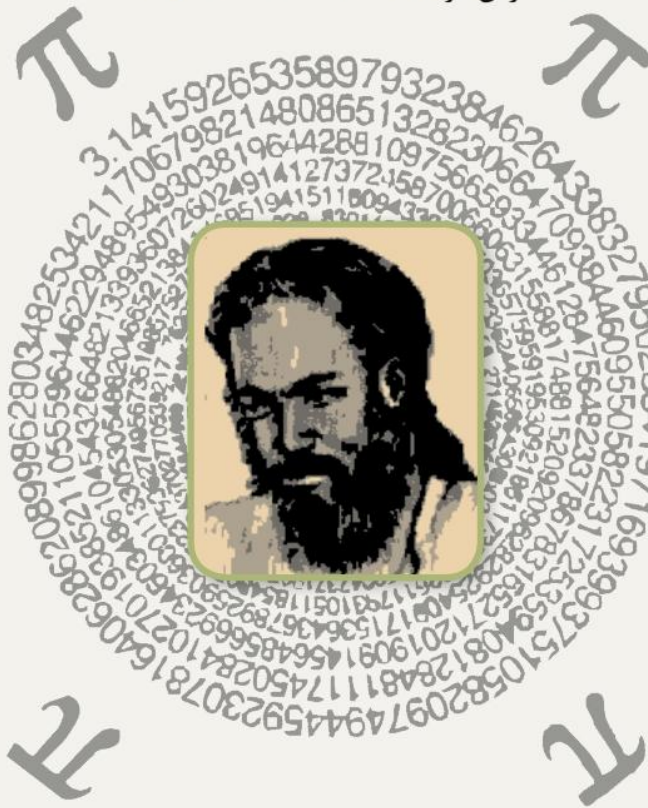


## عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد

شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد  $\pi$  که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:  
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N}   x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچکتر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W}   x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z}   -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگتر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z}   x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی  $x \geq 3$  برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ اعداد ۳، ۴ و ۵  
 نادرست  $1 > 3$ ، نادرست  $2 > 3$ ،  $3 \geq 3$ ،  $4 \geq 3$ ،  $5 \geq 3$

۲- می‌خواهیم بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

۱- ابتدا هر دو کسر را همخرج کرده و بسین اعداد  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  را روی محور مشخص کرده است

۲- برای نسبت آوردن یک عدد بین این دو عدد هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، لذا یک واحد

به دوازده قسمت مساوی تقسیم می شود بنابراین  $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  می باشد و کسر  $\frac{5}{12}$  طبق

شکل بین این دو عدد قرار می گیرد

۳- در این مرحله به جای تقسیم هر کدام از قسمت های کوچک به ۲ قسمت مساوی، هر کدام از آن ها

را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می کند؛ لذا واحد به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم می شود

بنابراین  $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$  می باشد و دو کسر  $\frac{7}{18}$  و  $\frac{8}{18}$  بین این دو عدد قرار می گیرد

پهار دقیقاً کار مريم را انجام داده است ولی عدد رسم نکرده است. روش مريم مفهومی تر

ولی روش چهار سریع تر می باشد

می توانیم بگوییم روش چهار نتیجه ی روش مريم می باشد

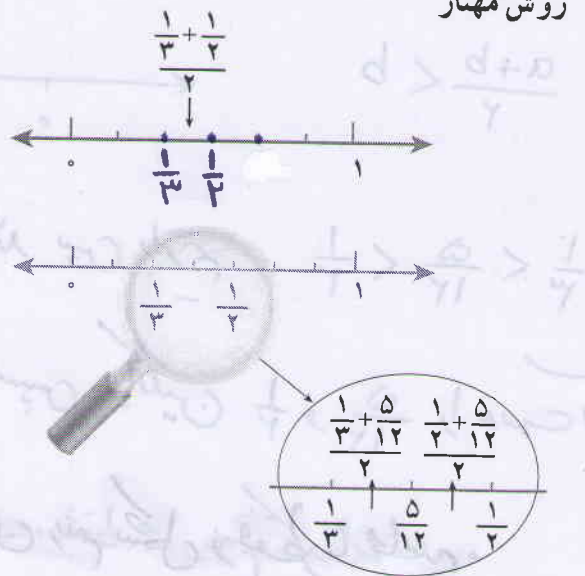
### روش عطیه

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

### روش مهناز



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار، کسر پیدا کرد. **صفحه ۲۰/۱**

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن اعضا نشان داد؟ چرا؟ **خیر، چون بین دو عدد گویا**

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ **خیر، بی شمار عدد گویا وجود دارد**

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

### کار در کلاس

**صفحه ۲۰/۱**

۱- بین  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲- بین  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$  دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

**روش دوم**

**صفحه ۲۰/۲**

$$-1 = -\frac{2}{2} = -\frac{2 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6} < -\frac{1}{2} = -\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{3}{6}$$

### فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{5}{9}$  را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

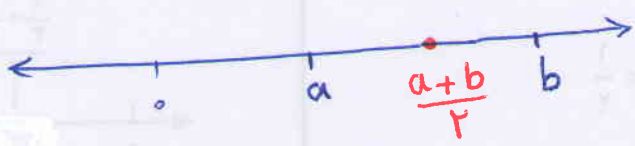
روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.

فعالیت

مختار پس از مشخص کردن جای دو عدد روی محور از خاصیت میانگین دو عدد نگرفته است

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$



میانگین دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  برابر  $\frac{5}{12}$  می باشد پس داریم  $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{4}$

در مرحله ی دوم ابتدا میانگین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12}$  و سپس میانگین  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{5}{12}$  را بدست آورده است

عطیه هم دقیقاً آموزش مختار استفاده کرده است، فقط محور رسم نکرده است.

الف) روشن مردم تعداد زیادی مردم می تواند یک واحد را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کند و تعداد زیادی کسری این دو عدد بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{300}{600} \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{200}{600}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{1}{4}$$

اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{3000}{6000} \quad , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{2000}{6000}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{2001}{6000}, \frac{2002}{6000}, \frac{2003}{6000}, \dots, \frac{2999}{6000} < \frac{1}{4}$$

در روش مختار نیز می توانیم به دفعات زیادی میانگین دو عدد را محاسبه کنیم نتیجه این دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad , \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$$

کاربرد کلاس

دو کسر را هم مخرج می کنیم پس  $\frac{8}{20}$  و  $\frac{15}{20}$  کسرهایی  $\frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \dots, \frac{14}{20}$  را می توانیم

کاردرکلاس 1:

می دانیم  $a < \frac{a+b}{2} < b$  لذا داریم

$$\text{کسر سه} \quad \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{24}{20} + \frac{15}{20}}{2} = \frac{\frac{39}{20}}{2} = \frac{39}{40} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{39}{40} < \frac{3}{4} \quad (1)$$

با اعدادی روش بالا داریم

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{39}{40}}{2} = \frac{\frac{49}{40}}{2} = \frac{49}{80} \quad , \quad \frac{\frac{39}{40} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{53}{40}}{2} = \frac{53}{80} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{49}{80} < \frac{39}{40} < \frac{53}{80} < \frac{3}{4}$$

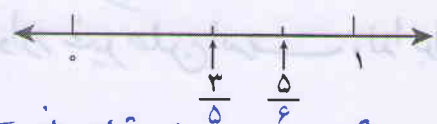
کاردرکلاس 2:

$$\text{کسر سه} \quad \frac{-\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{-1 + (-\frac{3}{4})}{2} = \frac{-\frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{8} \quad , \quad \frac{-\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{-\frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -1 < -\frac{7}{8} < -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$$

روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسره‌های  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده



از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ **خیر، این روش مناسبی برای مقایسه نیست**

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را

مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید:  $[9, 8, 4, 5] = 360$

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360} \quad \frac{7}{8} = \frac{315}{360} \quad \frac{5}{6} = \frac{300}{360} \quad \frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار

نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55 \quad \frac{7}{8} = 0.875 \quad \frac{5}{6} = 0.83 \quad \frac{3}{5} = 0.6$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید. **صغری ۲۱/۱**

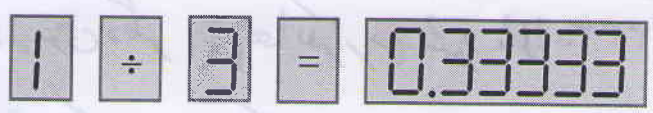
۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسره‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{7} = 0.14 \quad \frac{1}{9} = 0.11 \quad \frac{7}{6} = 1.17$$

$$\frac{1}{5} = 0.20 \quad \frac{1}{3} = 0.33 \quad \frac{3}{8} = 0.37$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می‌دهد؟ **پاسخ یاز - ۸ رقم**

ب) بین مقادیر اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ **صغری ۲۱/۱**



در نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{5}$  متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.3\bar{3} \quad \frac{7}{6} = 1.1666\dots = 1.1\bar{6}$$

**فعالیت 1** برای مقایسه‌ی اعداد گویا با مخارج‌های مساوی و کوچک استفاده از محور روشن

مناسبی است. در صورتی که مخارج‌ها بزرگ باشد تقسیم یک واحد به قسمت‌های مساوی کار دشوار و حتی در خیلی موارد غیر ممکن است. لذا برای این سؤال روشن شاهد روشن مناسبی نیست

\* یکی از روش‌های مناسب برای مقایسه‌ی کسرها هم مخارج کردن آن‌ها می‌باشد ولی این روش نیز به نوبه‌ی خود محدودیت‌های دارد و در صورتی که مخارج کسرها بزرگ باشد

بدست آوردن «ک.م.م» آن‌ها بسیار وقت‌گیر است

\* مجید از ابزار استفاده کرده است و ابتدا صورت را بر مخارج تقسیم کرده و بعد اعشاری آن‌ها

را بدست آورده و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کرده، استفاده از ماشین حساب در زندگی روزمره و کسرهای واقعی بسیار مناسب‌تر از دو روش بالاست

این روش هم محدودیت‌هایی دارد چون ممکن است ماشین حساب نداشته باشیم

نتیجه: برای شروع کار روشن شاهد مناسب‌ترین روش است و در انتها روش مجید در

صورت داشتن ماشین حساب بسیار مناسب‌تر است

**فعالیت 2** بی) برخی اعداد تعداد رقم‌های اعشاری محدودی دارند مثلا  $\frac{1}{5} = 0.2$  که فقط

یک رقم اعشاری دارد. در برخی دیگر رقم‌ها تکرار می‌شود مثلا  $\frac{1}{3} = 0.3333...$  که رقم ۳ تکرار می‌شود

و برخی از آن‌ها برخی ارقام تکرار و برخی تکرار نشده‌اند مثلا  $\frac{1}{6} = 0.1666...$



## کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0,45$$

$$\frac{7}{9} = 0,7$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

$$\frac{7}{22} = 0,31\bar{8}$$

$$\frac{3}{20} = 0,15$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

## تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

$$1 + \frac{3}{2} = 2,5$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -0,25$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24} = 0,291\bar{6}$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1,6\bar{6}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{3}{5} = -0,6$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \div \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{4/5}{4}}{-\frac{1}{4}} \times \frac{3}{14} = -\frac{5}{14} = -0,357\bar{1}$$

صفر ۲۲/۱  $\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} = -2\frac{4}{12} - 3\frac{4}{12} + 4\frac{7}{12} = -1\frac{3}{12} = -1,25$$

صفر ۲۲/۱  $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \left(2 \div \frac{-6}{5}\right)$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{-1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف)  $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب)  $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف)  $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}$

ب)  $0, -\frac{1}{3}$  صفر ۲۲/۱

$$\frac{10}{11} = \frac{130 \times 2}{143 \times 2} = \frac{260}{286} < \frac{271}{286}, \frac{272}{286}, \frac{273}{286} < \frac{12}{13} = \frac{132 \times 2}{143 \times 2} = \frac{264}{286}$$

۲۲

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{14} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = -0.33$$

نکته: ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق اولویت دارد ولی چون تقسیم ابتدا آمده مرحله اول تقسیم و سپس ضرب و در مرحله سوم جمع و تفریق را باید انجام دهیم

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \div \frac{-4}{5}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \times \frac{-5}{4}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (-\frac{5}{2})$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \times (-\frac{2}{5}) = \frac{5}{6} + \frac{7}{20} = \frac{143}{120} = 1.1916$$

سؤال ۳ قسمت الف)

$$[1, 3, 4, 1, 2] = 24, \quad -\frac{35}{6} = -\frac{23}{6}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{21}{24}, \quad -\frac{2}{3} = -\frac{14}{24}, \quad \frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{2}{1} = \frac{48}{24}, \quad -\frac{23}{9} = -\frac{92}{24}$$

$$\Rightarrow -\frac{92}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{48}{24} \Rightarrow -\frac{35}{6} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2$$

قسمت ب)

$$\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}, \quad -\frac{5}{9} = -\frac{10}{18}, \quad -\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}, \quad \frac{54}{13} = 4\frac{4}{13} = \frac{54}{13}$$

$$4\frac{3}{5} = 4\frac{39}{65}, \quad 2,75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4} = 2\frac{21}{28}$$

$$-\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < 2\frac{4}{5} < 2\frac{21}{28} < 4\frac{4}{13} < 4\frac{39}{65} \Rightarrow -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{14}{5} < 2,75 < \frac{54}{13} < 4\frac{3}{5}$$

روش دوم استفاده از ماشین حساب

سؤال ۴

$$-\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots < 0$$

$$-\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{4}{12} < \frac{0}{12} \Rightarrow -\frac{4}{12} < -\frac{3}{12}, -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12} < \frac{0}{12} = 0$$



فعالیت



$A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{3}, D = \frac{1}{2}, E = \frac{2}{3}$

- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.
- با توجه به اینکه مقدار تقریبی  $\sqrt{2}$  مساوی  $1/4$  است، آن را روی محور نشان دهید.
- معلم از دانش آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد  $\sqrt{2}$  را بنویسند. با توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب های مختلف استفاده می کردند، تعداد رقم هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب ها را در زیر می بینید. با توجه به آنها به سؤال های زیر پاسخ دهید:

1.4142136      1.414213562

1.41421356237

- چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد. *بررسی*
- چرا این تفاوت در ماشین حساب های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی شود؟ *بررسی*
- با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم های اعشاری دیده می شود؟ *خیر*
- مقدار تقریبی  $\sqrt{2}$ ، تا رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان داده شده برای  $\sqrt{2}$ ، تناوبی می بینید؟ *خیر*

اعداد گنگ

عددهایی مانند  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{10}$ ،  $\pi$  و  $e$ ، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می گوئیم. مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را با  $Q'$  یا  $Q^c$  نمایش می دهیم.

$\sqrt{2}$  عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال های آینده می خوانید. *صفحه ۲۳/۱*

★ با توجه به اینکه رقم نهم ۶ می باشد وقتی این رقم حذف می شود یک واحد به رقم هشتم یعنی عدد ۵ اضافه می شود (چون ۹ > ۵ است)  $\rightarrow$

$$1,4142135\boxed{6} \rightarrow 1,4142136$$

★ چون رقم یازدهم برابر ۳ می باشد وقتی این رقم حذف می شود رقم قبلی تغییر نمی کند (چون ۳ < ۵ است)

$$1,41421356\boxed{3} \rightarrow 1,414213563$$

اثبات کنید چرا  $\sqrt{2}$  گنگ است

اثبات: فرض می کنیم  $\sqrt{2}$  گویا باشد پس وجود دارد کسری مانند  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ )

به طوری که دارم  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  و  $\frac{a}{b}$  یک کسر ساده شده است یعنی  $(a, b) = 1$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ عددی زوج است}$$

چون  $a^2$  زوج است لذا  $a$  عددی زوج است پس  $a = 2k$  (۱)  $(k$  عددی طبیعی است)

$$a^2 = 2b^2 \xrightarrow{a=2k} (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

بنابراین  $b^2$  عددی زوج است پس  $b$  هم عددی زوج است (۲)

از (۱) و (۲) داریم  $(a, b) \neq 1$  چون هر دو زوج می باشند پس کسر  $\frac{a}{b}$  یک کسر ساده شده

است. چون فرض گرفته بودیم  $\frac{a}{b}$  ساده شده است پس فرض مان باطل است

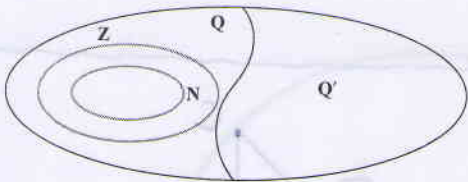
یعنی کسر ساده شده نمی داریم که  $\sqrt{2}$  یا آن برابر باشد پس  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است

عدد  $\pi$  نیز گنگ است. در زیر عدد  $\pi$  تا  $30$  رقم اعشار نوشته شده است؛ اما در محاسبات، معمولاً تا

دو رقم اعشار  $\pi$  استفاده می شود:  $\pi \approx 3/141592653589793238462643383279$  **دقیق**

به طور کلی جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است؛ مانند  $\sqrt{15}$ ،  $\sqrt{6}$ ، ... (عددهایی

مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.)



مثال: مجموعه های  $\mathbb{N}$  و  $\mathbb{Z}$  و  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q}'$  به کمک

نمودار ون، مشخص شده است.

مثال:  $0 \in \mathbb{Q}$ ،  $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}'$ ،  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$ ،  $-\frac{2}{4} \notin \mathbb{Q}'$ ،  $0/2000200002000002000002000002000002... \in \mathbb{Q}'$

### کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}'$$

( $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  است)

درست

نادرست

درست

نادرست است

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$$

### فعالیت

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟ **بی شمار عدد گویا می توان نوشت**

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور

می توان پیدا کرد؟ **متناظر با هر عدد فقط یک نقطه وجود دارد در کل بی شمار نقطه داریم**

ج) روی محور نقطه نمایش  $\sqrt{2}$

را پیدا کنید.

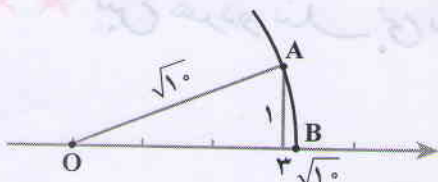


د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ

می شود؟ آیا  $\sqrt{2}$  نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط

به وجود می آورد؟ **چرا؟ خیر زیرا این هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا داریم که رنگ نمی شود**

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ  $\sqrt{10}$  روی محور به صورت زیر است:



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می کنیم. نقطه B

روی محور عدد  $\sqrt{10}$  را نمایش می دهد.

$$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

الف) بین هر دو عدد گویا بیشتر عدد گویا وجود دارد

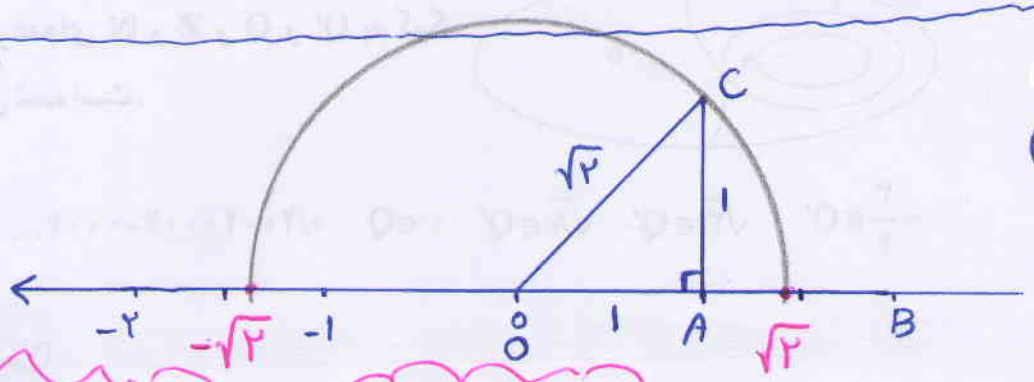
$$1 < \frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{5} < \frac{1}{6} < \dots < \frac{1}{n} < 1$$

$$1 < \frac{3}{2} < \frac{4}{3} < \frac{5}{4} < \frac{6}{5} < \frac{7}{6} < \dots < \frac{n+1}{n} < 2$$

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$$OC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$OC = \sqrt{2}$$



ج)

$\Rightarrow -1,5 < -\sqrt{2} < -1$  ,  $1 < \sqrt{2} < 1,5$

د) بین دو عدد 1 و 2 بیشتر عدد گویا وجود دارد. و بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد. وقتی نقاط متناسط با اعداد گویا بین 1 و 2 را زنجیر می‌کنیم نقاط متناسط با اعداد گویا زنجیر شده باقی می‌ماند در نتیجه این نقاط نمی‌توانند با خط بوجود آورند.

نتیجه

- ★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد
- ★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد
- ★★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد
- ★★★★ بین هر دو عدد گویای بی شمار عدد گویا وجود دارد

مثال:  $\sqrt{7}$  بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

### کار در کلاس

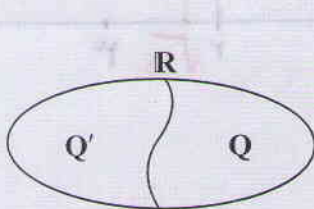
- ۱- بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.  
 ۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳- الف) مجموعه A به صورت  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به



صورت زیر درست است؟ **خیر صفر ۲۵/۱**

ب) نقطه نمایش  $\sqrt{5}$  را روی محور مشخص کنید.



عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته بندی می شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می نامیم و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش می دهیم. تساوی  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$  بین سه مجموعه Q و Q' و  $\mathbb{R}$  برقرار است.

مثال:

$$\begin{aligned} 0 \in \mathbb{R} & \quad \sqrt{10} \in \mathbb{R} & -\frac{5}{6} \in \mathbb{Q} & \quad 0.75 \in \mathbb{R} \\ 0.2022022202222... \in \mathbb{R} & \quad \pi \in \mathbb{R} & \quad \frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### کار در کلاس

۱- داخل  $\circ$  علامت  $\in$  یا  $\notin$  بگذارید:

$$\begin{aligned} 2 \in \mathbb{Z} & \quad 0.2 \in \mathbb{Q} & \quad \sqrt{18} \in \mathbb{R} & \quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \\ -5 \in \mathbb{R} & \quad -\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z} & \quad 5 = \sqrt{25} \notin \mathbb{Q}' & \quad \frac{0}{6} \in \mathbb{R} \\ \sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}' & \quad \sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}' & \quad \sqrt{0/9} \in \mathbb{Q} & \quad \frac{9}{-1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

۲۵

$$\sqrt{0/9} = 0/3$$

(۱)

کار در کلاس

$$\sqrt{5} < \sqrt{5,1}, \sqrt{5,2}, \sqrt{5,3}, \dots, \sqrt{9}, \sqrt{9,1}, \dots, \sqrt{9,9}, \sqrt{9,1}, \sqrt{9,2}, \dots < 10$$

تذکره:  $\sqrt{9}$  گنگ نیست

این سوال پاسخ باز است

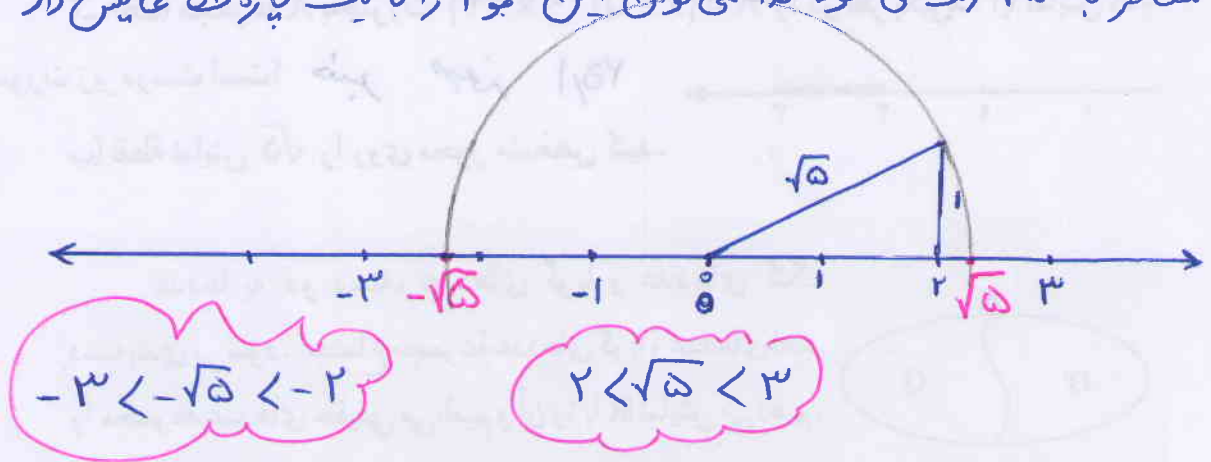
۲

این سوال پاسخ باز است

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4,1}, \sqrt{4,2}, \sqrt{4,3}, \sqrt{4,4} < \sqrt{9} = 3$$

۳

مجموعه  $A$  شامل تمام اعداد گویا از ۲ تا ۳ می باشد (دو سره، اینز شامل می شود) و می شامل اعداد گنگ نمی شود مثلا  $2 < \sqrt{5} < 3$  یک عدد گنگ است و نقطه‌ی متناظر با  $\sqrt{5}$  رنگ نمی شود لذا می توان این مجموع را با یک پارو خط نمایش داد



نتیجه

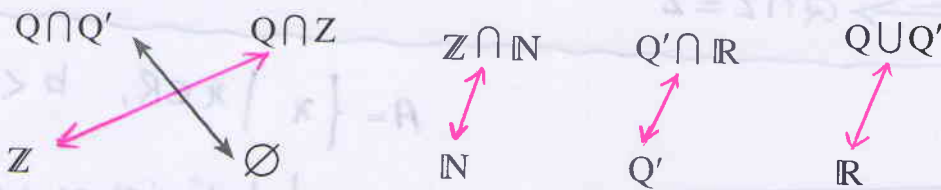
۱- دو مجموعه  $Q$  و  $Q'$  جدا از هم می باشند زیرا  $Q \cap Q' = \emptyset$

۲-  $R - Q' = Q$  و  $R - Q = Q'$

۳- اجتماع این دو مجموعه، مجموعه اعداد حقیقی را درست می کند یعنی:  $Q \cup Q' = R$



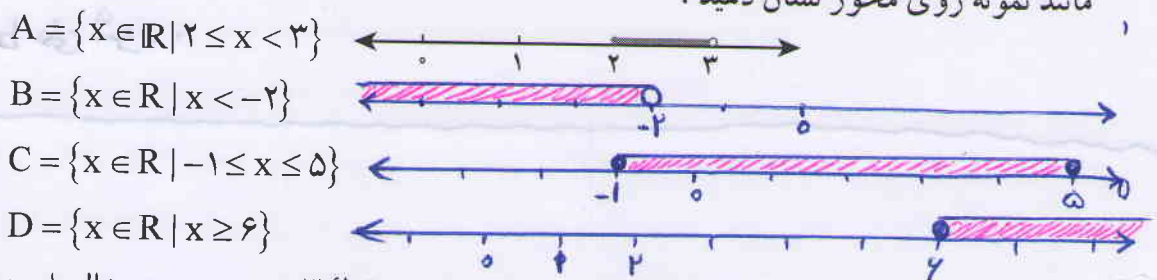
۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



### فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را

مانند نمونه روی محور نشان دهید:

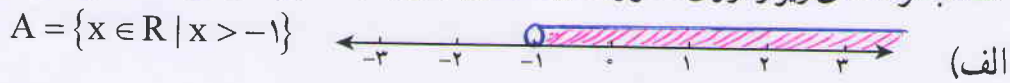


با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

نامساوی  $x < 3$  به این معنی است که  $x$  باید از ۳ کم تر باشد و مجموع شامل عدد ۳ نمی‌باشد و نامساوی  $x \leq 2$  یعنی مجموع شامل ۲ و اعداد بزرگ از آن می‌باشد

### کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:



۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

- $0.75 \in A$
- $0.252552555... \in B$
- $\sqrt{3} \in A$
- $\sqrt{7} \in C$
- $\sqrt{1} \in A$
- $-1000 \in C$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



مجموعه‌ی مشخص شده شامل تمام نقاط بین -۲ و ۳ است  
یعنی تمام اعداد حقیقی بزرگ تر از -۲ و کوچک تر از ۳.

نکته: اگر  $A \subseteq B$  باشد نگاه داریم:  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$

$$Q' \subseteq R \implies Q' \cap R = Q'$$

$$N \subseteq Z \implies Z \cap N = N$$

$$Z \subseteq Q \implies Q \cap Z = Z$$

نکته:  $A = \{x \mid x \in R, b < x \leq a\}$



نامساوی  $x \leq a$  یعنی تمام اعداد

کوچک تر و مساوی  $a$ ، پس اینج

مجموعه شامل عدد  $a$  نیز می شود و نامساوی  $b < x$  به این معنی است که  $x$  بزرگ تر از  $b$  است

و شامل عدد  $b$  نمی شود.



Handwritten notes and diagrams illustrating set operations and intervals. Includes several number line diagrams with shaded regions and some boxed checkmarks.

## تمرین

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pi$	$-\frac{3}{4}$	0.292292229.....	$-1^{\circ}$	$\frac{6}{2}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی	x	x	✓	x	x	x	x	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	x	x	✓	x	x	x	✓	✓
$\mathbb{Q}$ گویا	x	✓	✓	x	✓	x	✓	✓
$\mathbb{Q}'$ گنگ	✓	x	x	✓	x	✓	x	x
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب)  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$       ۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$       ۳)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$        $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد  $1 + \sqrt{5}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟  $2, 3$

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- (الف) ۷ و ۶ (ب)  $\sqrt{3}, 6$  (ج)  $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$  (د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بنویسید.

۱) ✓ عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. تمام اعداد صحیح گویا هستند.

۲) ✗ عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳) ✓ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.  $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

۴) ✓ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. تمام اعداد طبیعی حقیقی هستند.  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

۷- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  و عدد  $\frac{3}{11}$  چه تفاوتی هست؟

$\frac{3}{11} = 0.272727...$  و  $\sqrt{10} = 3.162277660148379...$

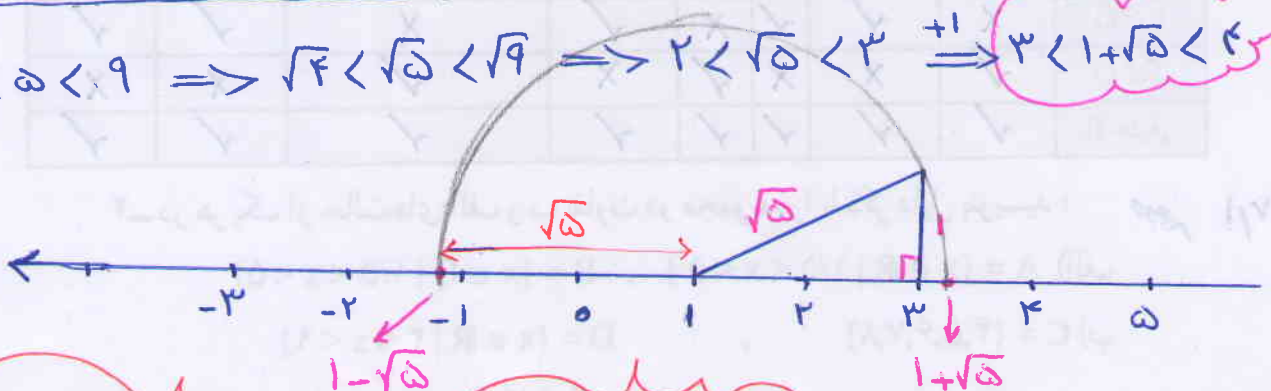
در نمایش اعشاری  $\frac{3}{11}$  دوره‌ی تناوب وجود دارد و ۲۷ تکرار می‌شود.

ولی در نمایش اعشاری  $\sqrt{10}$  دوره‌ی تناوب وجود ندارد.

تمرین الف) مجموعه A شامل همه اعداد بین ۱،۵ و ۵ است (اعداد گویا و گنگ) ولی مجموعه B فقط شامل اعداد گویای بین این دو عدد می باشد  
 ب) مجموعه D شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۳ و ۹ می باشد ولی مجموعه C فقط شامل اعداد طبیعی بین ۳ و ۹ می باشد

۳  
 $N \subseteq Z \Rightarrow \begin{cases} N \cup Z = Z \\ N \cap Z = N \end{cases}, \quad Q' \subseteq R \Rightarrow R \cap Q' = Q'$   
 $R \begin{array}{|c|} \hline Q / Q' \\ \hline \end{array} \Rightarrow R - Q' = Q$

۴  
 $4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \xrightarrow{+1} 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$



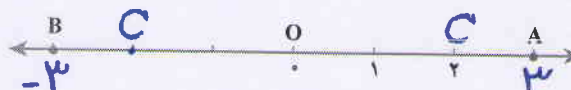
$-2 < 1 - \sqrt{5} < -1$  و  $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$

- ۵
- الف)  $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3} < \sqrt{25} = 5$
  - ب)  $4 = \sqrt{34} < \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \dots, \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$
  - ج)  $\sqrt{3} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12} < \sqrt{34} = 6$
  - د)  $\sqrt{2} < \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{24} < \sqrt{41}$

۷ نکته مهم

مقادیر اعشاری هر عدد گویا یکی از دو حالت زیر می باشد  
 ۱- اعشاری تحقیق (مختوم) ۲- اعشاری متناوب (ساده و مرکب)

فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:  
 نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهد؟  


فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟  $OA = 3$

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟  $OB = 3$

می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر 2 باشد.

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر 2 باشد؛ چند نقطه می توان

یافت؟ دو نقطه

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می توان نوشت:  $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  تا مبدأ برابر  $\frac{2}{3}$  است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق  $-\sqrt{5}$  را به صورت  $|\sqrt{5}|$  نشان می دهیم که مساوی  $\sqrt{5}$  است. قدر مطلق

$0.04$  را به صورت  $|0.04|$  نشان می دهیم که مساوی  $0.04$  است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

$a > 0 \Rightarrow |a| = a$

$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$       اگر  $a = -3 \Rightarrow |-3| = -(-3)$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

## کار در کلاس

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- الف) دو عدد  $a$  و  $b$  مثبت است.  $۱) a > ۰, b < ۰$
- ب) عدد  $a$  نامنفی است.  $۲) a > ۰, b > ۰$
- ج) دو عدد  $a$  و  $b$  منفی است.  $۳) a \geq ۰$
- د) عدد  $a$  مثبت و عدد  $b$  منفی است.  $۴) a < ۰, b < ۰$
- ه) عدد  $a$  نامثبت است.  $۵) a \leq ۰$

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف)  $a > ۰, b > ۰$   $۱) ab < ۰$
- ب)  $a < ۰, b < ۰$   $۲) ab > ۰, a + b > ۰$
- ج)  $a < ۰, b > ۰$   $۳) ab > ۰, a + b < ۰$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف)  $a > ۰$   $۱) |a| = -a$
- ب)  $a > ۰, b > ۰$   $۲) |a| = a$
- ج)  $a < ۰$   $۳) |a + b| = a + b$
- د)  $a < ۰, b < ۰$   $۴) |a + b| = -(a + b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست. **صفحه ۲۹۱**
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

## فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} = ۱/۴ \quad \sqrt{3} = ۱/۷ \quad \sqrt{5} = ۲/۲ \quad \sqrt{6} = ۲/۴ \quad \sqrt{7} = ۲/۶ \quad \sqrt{8} = ۲/۸$$

۱)  $|ab| = |a||b|$

$|(-2) \times (-5)| = |-2| \times |-5|$  ,  $|(-3) \times 4| = |-3| \times |4|$

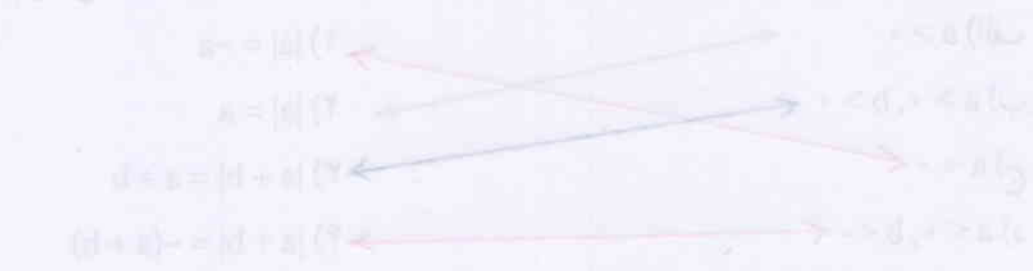
$\Rightarrow |10| = 2 \times 5 \Rightarrow |-12| = 3 \times 4$   
 $10 = 10 \checkmark$   $12 = 12 \checkmark$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

مثال ۱  
 $|3+4| \leq |3|+|4|$   
 $7 \leq 3+4$   
 $7 \leq 7 \checkmark$

مثال ۲  
 $|(-15)+20| \leq |-15|+|20|$   
 $|5| \leq 15+20$   
 $5 \leq 35 \checkmark$

مثال ۳  
 $| -17+7 | \leq |-17|+|7|$   
 $| -10 | \leq 17+7$   
 $10 \leq 24 \checkmark$



تساوی در آنجا برقرار است که هر دو عدد هم‌علامه باشند.  
 ۱) تساوی در آنجا برقرار است که هر دو عدد مثبت باشند.  
 ۲) تساوی در آنجا برقرار است که هر دو عدد منفی باشند.

مثال ۴

تساوی در آنجا برقرار است که هر دو عدد هم‌علامه باشند:

$12 = 12$   $12 = 12$   $12 = 12$   $12 = 12$   $12 = 12$   $12 = 12$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید:

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل:  $\sqrt{2} = 1/4$  پس  $1 - \sqrt{2}$  عددی منفی می شود:

دلیل:  $\sqrt{3} = 1/7$  پس  $2 - \sqrt{3}$  مثبت می شود ۱)  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

دلیل: چون  $\sqrt{7} < \sqrt{8}$  است ۲)  $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$  هر دو عدد  $\sqrt{7} < \sqrt{8}$  است

دلیل: ۳)  $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

دلیل: ۴)  $|-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$   $-4 - \sqrt{3} < 0$

هر دو عدد  $-4$  و  $-\sqrt{3}$  منفی است پس  $-4 - \sqrt{3} < 0$  است  
مثال: اگر  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \sqrt{2}$  و  $c = -3$  باشد، حاصل عبارت  $|a+b+c|$  را به دست می آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -\frac{2}{5} + \sqrt{2} \right|$$

چون  $-\frac{2}{5} + \sqrt{2}$  عددی منفی است ( $\sqrt{2} = 1/4$ )، پس حاصل عبارت مساوی با  $-( -\frac{2}{5} + \sqrt{2} )$  یعنی  $\frac{2}{5} - \sqrt{2}$  است.

مثال:  $|\underbrace{3 - \sqrt{5}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{-2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}}| = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل  $\sqrt{a^2}$  همیشه مثبت و بر  $|a|$  می باشد

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم:  $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$  خواهیم داشت:

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$



$$0 < a < 1 \Rightarrow a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n$$

$$0 < \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^4} < \dots < \frac{1}{a^n}$$

### کار در کلاس

۱- عبارات‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف)  $|(-7)^2| \oplus |-7|^2$       $| -7^2 | = |-49| = 49$  ,  $| -7 |^2 = (7)^2 = 49$   
 ب)  $|-8+5| \otimes |-8|+|5|$       $| -8+5 | = |-3| = 3$  ,  $| -8 | + | 5 | = 8+5=13$   
 ج)  $|3-9| \otimes |3|-|9|$       $| 3-9 | = |-6| = 6$       $| 3 | - | 9 | = 3-9 = -6$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

$$|0| = 0 \quad |-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3} \quad |7^2 - 7^2| = 0 \quad |0/25 - 0/26| = 0/25 - 0/26 = \frac{0}{25} - \frac{0}{26} = 0$$

نتیجه:  $|7^2 - 7^2| = -(7^2 - 7^2) = 7^2 - 7^2$

الف)  $\sqrt{(-2595)^2} = |-2595| = 2595$      ب)  $\sqrt{(1394)^2} = 1394$   
 ج)  $\sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} = |-3+\sqrt{10}| = \sqrt{10}-3$      د)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5} = \sqrt{5}-2$

### تمرین

۱- اگر  $a=0/25$ ,  $b=-1/4$ ,  $c=2/3$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

الف)  $|-3\sqrt{5}|$      ب)  $|7-5\sqrt{3}|$      ج)  $|0+\sqrt{5}|$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$$|5-12| > 1 + \square$$

۴- مقدار عددی عبارت  $|a|+a$  را به ازای  $a=-2$ ,  $a=0$  و  $a=2$  به دست آورید. آیا می‌توانید

عدد حقیقی به جای  $a$  قرار دهید که حاصل  $|a|+a$  منفی باشد؟ **خیر**

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی  $\sqrt{a^2} = a$  را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید :

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \quad \sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$$

تمرین ۱

$$|a+b| + 2|a-b-c| = \left| \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) \right| + 2 \left| \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) - 2 \frac{1}{4} \right| = 0 + 2 \left| \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right| = 2|-2| = 2 \times 2 = 4$$

۲

$$|-3\sqrt{5}| = -(-3\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} \quad , \quad |v - 5\sqrt{3}| = |\sqrt{49} - \sqrt{20 \times 3}|$$

منفی

$$= |\sqrt{49} - \sqrt{75}| = -(\sqrt{49} - \sqrt{75}) = \sqrt{75} - \sqrt{49} = 5\sqrt{3} - 7$$

منفی

$$v = \sqrt{49} \quad , \quad 5\sqrt{3} = \sqrt{20} \times \sqrt{3} = \sqrt{75} \Rightarrow v < 5\sqrt{3} \Rightarrow |v - 5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - v$$

ج)  $|0 + \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

۳

هر عدد کوچکتر از ۹ نمی تواند باشد  $\square$  پس  $\square$

$$|5 - 12| > 1 + \square \Rightarrow v > 1 + \square \Rightarrow 9 > \square$$

۴

a	-۲	۰	۲
$ a+a $	$2+(-2)=0$	۰	$2+2=4$

$$a < 0 \Rightarrow |a| + a = -a + a = 0 \Rightarrow |a| + a \geq 0$$

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| + a = a + a = 2a$$

۵

$$\sqrt{a^2} = a \xrightarrow{a=v} \begin{cases} \sqrt{(-v)^2} = \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{(-v)^2} = -v \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2} \neq a$$

۶

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \quad \text{زیرا } \sqrt{2} > 1 \text{ پس } \sqrt{2}-1 > 0$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = -|1-\sqrt{10}| = -1 + \sqrt{10} = \sqrt{10} - 1$$

زیرا  $\sqrt{10} > 1$  پس  $1 - \sqrt{10} < 0$