«به نام خدا»

ریاضی :

فصل ۱: اعداد اول

اعداد اول : اعداد طبیعی که فقط ۲ مقسوم علیه داشته باشند.

اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ :

۲, ۳, ۵, ۷ _ ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ _ ۲۳ , ۲۹ _ ۳۱ , ۳۷ _ ۴۱ , ۴۳ , ۴۷ _ ۵۳ ,

۵۹ _ ۶۱ , ۶۷ _ ۷۱ , ۷۳ , ۷۹ _ ۸۳ , ۸۹ _ ۹۷

اعداد مرکب : اعداد طبیعی که بیشتر از ۲ مقسوم علیه داشته باشند.

دسته بندی اعداد طبیعی:
- ۱
- اعداد اول
- اعداد مرکب

خواص دسته بندی:
- نباید عضو مشترک داشته باشند.
- باید جامع باشند (هر عضو حتماً در یک دسته باشد)

GNOTE

مثال: صحت جمله زیر را بررسی کنید.

«هر عدد طبیعی حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.»

غلط است (فقط به خاطر ۱)

مثال: مجموع دو عدد اول ۸۱ است. تفاضل آنها را بیابید.

زوج + فرد = فرد $\Leftarrow$ $2+79=81$ $\qquad$ $79-2=\boxed{77}$

نتیجه: اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول، فرد بشود، حتماً یکی از آنها ۲ است.

اگر حاصل ضرب دو عدد اول زوج بشود، یکی از آنها حتماً ۲ است.

مثال: مجموع مکعبات دو عدد اول ۲۲۰۵ است. مکعب مجموع آنرا بیابید.

$$x^3+y^3=2205 \Rightarrow x^3+2^3=2205 \Rightarrow x^3=2197 \Rightarrow x=13$$

مکعب مجموع $=(2+13)^2=\boxed{3375}$

مثال: اویلر ادعا کرد که حاصل عبارت n^2+n+41 به ازای هر n طبیعی اول است.

بررسی کنید که او درست گفته یا چرت گفته.

n	n^2+n+41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
40	$40^2+40+41=40(40+1)+41=40\times41+41=41\times41$ ✗

۱. ب.ب.ک اعدادی از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ که فرمول بالا را نقض می‌کنند بیاوریم (اگر تعداد زیاد بود، اعداد کوچکتر از ۱۰۰۰ را بیاوریم)

۲. ب.ب.ک بیشترین فاصله بین دو عدد اول از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ را به همراه دو عدد بیاورید.

مثال: ۱۰۰۰ عدد متوالی مرکب پیدا کنید.

$1001!+2$

$1001!+3$

$1001!+4$

$\vdots$

$1001!+1001$

قضیه: تعداد اعداد اول نامحدود است.

بزرگترین عدد اول

$A=2\times3\times5\times\dots\times P+1 \rightarrow$ یا اول است زیرا باقی مانده بر همه اعداد اول ۱ است

یا مرکب است پس بر عدد اول دیگری جز اینها بخش‌پذیر است دی

GNOTE

GNOTE

۱. ب.م.ک: تعداد: ۶۸۰۱۹

۱۰ عدد اول: ۴۰، ۴۱، ۴۴، ۴۹، ۵۶، ۶۵، ۷۶، ۸۱، ۸۲، ۸۴

۲. ب.م.ک: اختلاف: ۱۱۴ ۴۹۲۲۲۷، ۴۹۲۱۱۳

تمرین سری ۱: اعداد اول

۱. چند عدد اول داریم که مجموع ارقامشان ۴۳ باشد؟ صفر عدد. زیرا مجموع ارقام

آنها بر ۳ هم بخش‌پذیر خواهد بود پس بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود و اول نخواهد بود.

۲. اعداد زیر اول هستند یا مرکب؟ دلیل بیاورید. چون زوج است ← مرکب → $۲۳^{۳۱} + ۷^{۱۷}$

یکان: ۰ + ۱ + ۴ = ۵ ← پس بر ۵ بخش‌پذیر است ← مرکب → $۲۰^{۱۹} + ۲۹^{۸۰} + ۳۴^{۱۷}$

$۲۹! - ۱۹ = (۲۹ \times ۲۸ \times \dots \times ۲۰ \times ۱۸ \times ۱۷ \times \dots \times ۲ \times ۱)۱۹ - ۱۹ = ۱۹(۲۹ \times \dots \times ۱) \rightarrow$ مرکب

$۳۸^{۱۱} - ۵۷ \Rightarrow (۱۹^{۱۱} \times ۲^{۱۱}) - (۱۹ \times ۳) = ۱۹(۱۹^{۱۰} \times ۲^{۱۱} - ۳) \rightarrow$ مرکب

۳. اگر p عددی اول باشد چند عدد اول به صورت $۹۵p+۱$ داریم؟ حاصل $۹۵p+۱$ باید

فرد باشد پس $۹۵p$ زوج است پس p ۲ است. یک جواب داریم.

$p =$ فرد $\rightarrow ۹۵p+۱ =$ زوج X ، $p = ۲ \rightarrow ۹۵p+۱ = \boxed{۱۹۱}$

ENOTE

۴. p، q، r و s اعداد اول هستند و در رابطه‌ی $p(qrs-۱) = ۲۰۰۰$ صدق می‌کنند.

$p+q+r+s$ را بیابید. $۲، ۷، ۱۱، ۱۳ \rightarrow \boxed{۳۳}$

۵. چه رقمی به جای x قرار دهیم تا $\overline{۱۹۷۰۰۱۹x}$ اول باشد؟ $\overline{۱۹۷۰۰۱۹x}$ به ازای هر x ای مرکب است.

۶. اگر p و q اعداد اول متوالی باشند و $p = ۲x - q$ ، در مورد اول یا مرکب بودن x چه می‌توان

گفت؟ اگر x اول باشد $۲x = p+q$ و از آنجایی که x اول است پس $x = p = q$ است

که غلط است پس باید $p \neq q$ باشد که در آن صورت عدد اول x بین p و q خواهد

بود! پس x مرکب است. چون $x = \frac{p+q}{۲}$ عددی بین p و q است و بین p و q عدد اولی نیست.

جواب ۴: $p(qrs - ۱)$

اگر ۵ باشد: $۵(\overset{۴۰۱}{\overline{qrs}} - ۱) \rightarrow ۴۰۱ \Rightarrow$ اول است $\Rightarrow$ پس نمی‌شود

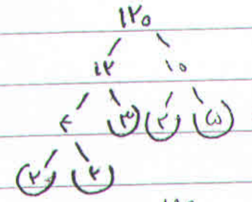
اگر ۲ باشد: $۲(\overset{۱۰۰۱}{\overline{qrs}} - ۱) \rightarrow ۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \rightarrow ۲، ۷، ۱۱، ۱۳$

ENOTE

* تجزیه یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول :

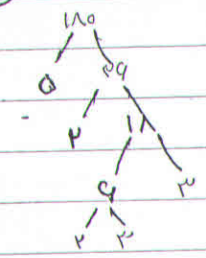
یعنی نوشتن آن به صورت ضرب اعداد اول.

۱) روش درختی :



$\to 120 = 2^3 \times 3 \times 5$

مثال : نمودار درختی زیر را کامل کنید.



۲) روش خطی :

	اعداد اول
۱۲۰۰	2×5
۱۲۰	2×5
۱۲	$2^2 \times 3$
۱	

$\to 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$

مثال امتیازی : عدد $24^5 \times 180^3$ را تجزیه کنید.

$(2^3 \times 3)^5 \times (2^2 \times 3^2 \times 5)^3 = 2^{21} \times 3^{11} \times 5^3$

مثال : مقسوم علیه های اول ۲۴۰۰۰ را بیابید.

$2^6 \times 3 \times 5^3 = 24000$

مقسوم علیه های اول : ۲ ، ۳ ، ۵

مثال امتیازی : حاصل ضرب مقسوم علیه های 2^{50} را بیابید.

$1 \times 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{50} = 2^{(51)25} = 2^{1275}$

مثال امتیازی : حاصل جمع مقسوم علیه های 2^{50} را بنویسید.

$+1 + 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50} - 1 = 2^{51} - 1$

$2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^{51}$

مثال امتیازی : حاصل جمع مقسوم علیه های 3^{50} را بیابید.

$A = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{50}$

$\times 3$

$3A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{51}$

تفریق

$\Rightarrow 2A = 3^{51} - 1 \Rightarrow A = \dfrac{3^{51} - 1}{2}$

مثال امتیازی : چند عدد طبیعی ۳ رقمی داریم که تنها عامل اول آنها ۳ باشد؟

$3^5 , 3^6 \to \boxed{2}$ تا

مثال امتیازی : اعداد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را بیابید که تنها عامل های اول آنها ۲ یا ۳ باشد.

۱۲۸ ، ۱۹۲ ، ۱۴۴ ، ۱۰۸ ، ۱۶۲

* تعداد مقسوم علیه‌ها

قضیه: اگر تجزیه‌ی عددی به صورت $p^a \times q^b \times r^c \times \dots$ باشد تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی آن مساوی است با: $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$

اثبات: برای نوشتن مقسوم علیه‌ها ابتدا به سراغ پایه‌ی p می‌رویم. در مقسوم علیه‌های این عدد پایه p، $a+1$ حالت دارد (از p^0 تا p^a می‌تواند باشد) سپس به سراغ پایه می‌رویم که $b+1$ حالت دارد و همین طور تا آخر. طبق اصل ضرب تعداد کل حالات (مقسوم علیه‌ها) مساوی است با: $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$

مثال اساسی: عدد $18^3 \times 24^5$ چند مقسوم علیه دارد؟

$$18^3 \times 24^5 = 2^3 \times 3^6 \times 2^{15} \times 3^5 = 2^{18} \times 3^{11}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 19 \times 12 = \boxed{228}$$

مثال اساسی: اعداد $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$ چند مقسوم علیه دارد؟

$$\Rightarrow 9 \times 5 \times 3 \times 2 = \boxed{270}$$

مثال اساسی: عدد $1\underbrace{000\dots0}_{\text{۱۳۹۴ تا}}64$ چند عامل ۲ دارد؟ $\boxed{\text{۶تا}}$

$$\text{عدد} = \overbrace{100\dots00}^{\text{۱۳۹۶ تا}} + 64 = 2^6(\overbrace{5^{1396} \times 2^{1390} + 1}^{\text{فرد}})$$

GNOTE

مثال امتیازی: اگر x دارای ۱۳ مقسوم علیه اول دارد، x^3 چند مقسوم علیه اول دارد؟ ۱۳

در تجزیه x ۱۳ تا مقسوم علیه اول داریم در تجزیه‌ی x^3 همین ۱۳ تا عامل اول را داریم.

مثال امتیازی: اگر x دارای ۱۳ مقسوم علیه باشد x^3 چند مقسوم علیه دارد؟

$x = (\text{عدد اول})^{12} \to x^3 = (\text{عدد اول})^{36} \xrightarrow{\text{مقسوم علیه‌ها}} \boxed{37 \text{ تا}}$

مثال: الف) کوچکترین عدد طبیعی که ۱۱ مقسوم علیه دارد چند است؟ $2^{10} = 1024$

ب) کوچکترین عدد طبیعی که ۱۲ مقسوم علیه دارد چند است؟

$12 \to 2^{11} = 2048$

12:

$3 \times 4 \to 2^3 \times 3^2 = 72$

$2 \times 6 \to 2^5 \times 3 = 96$

$2 \times 2 \times 3 \to 2^2 \times 3 \times 5 = \boxed{60}$

مثال: الف) ۷۲۰ چند مقسوم علیه مرکب دارد؟

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \to 5 \times 3 \times 2 = 30$ ، $1, 2, 3, 5$ ، $30 - 4 = \boxed{26}$

ب) ۷۲۰ چند مقسوم علیه زوج دارد؟ $4 \times 3 \times 2 = \boxed{24}$

ج) ۷۲۰ چند مقسوم علیه فرد دارد؟ روش اول: $30 - 24 = \boxed{6}$

روش دوم: $3 \times 2 = \boxed{6}$

قضیه: حاصل ضرب مقسوم علیه‌های n مساوی است با n به توان $\frac{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}}{2}$

اثبات: مقسوم علیه‌ها جفت هستند و حاصل ضرب هر جفت n است پس موقع حساب کردن حاصل ضرب آنها می‌توانیم تمام مقسوم علیه‌ها را مساوی $\sqrt{n}$ بگیریم. (اگر مقسوم علیه تکی هم داشتیم خود آن مقسوم علیه $\sqrt{n}$ است و مشکلی پیش نمی‌یاد)

بنابراین حاصل ضرب کل مقسوم علیه‌ها مساوی است با:

$(\sqrt{n})^{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}} = (n^{\frac{1}{2}})^{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}}$

مثال: الف) حاصل ضرب مقسوم علیه‌های ۷۲۰ چند است؟ $720^{\frac{30}{2}} = 720^{15}$

ب) حاصل ضرب مقسوم علیه‌های ۹۰۰ چند است؟ $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

تعداد مقسوم علیه‌ها: $3 \times 3 \times 3 = 27$ ، $900^{\frac{27}{2}} = \boxed{30^{27}}$

* ب.م.م و ک.م.م:

ب.م.م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) دو عدد a و b را با علامت (a,b) یا $a \sqcap b$ نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن ب.م.م، اعداد را تجزیه کرده و پایه‌های مشترک را با کمترین توان را انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) دو عدد a و b را با علامت $[a,b]$ یا $a \sqcup b$ نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن ک.م.م اعداد را تجزیه کرده و تمام پایه‌ها را با بیشترین توان انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

① اگر a بر b بخش پذیر باشد داریم: $[a,b] = a$ $\quad (a,b) = b$

② اگر $(a,b)=1$ باشد (یعنی عامل مشترکی نداشته باشند) می‌گوییم a و b متباین (نسبت به هم اول) هستند.

③ دو عدد اول مختلف، متباین هستند.

④ دو عدد متوالی متباین هستند.

اثبات: اگر دو عدد هر دو بر x بخش پذیر باشند فاصله‌ی آنها مضرب x است.

(و) فقط مضرب x است. پس تنها عدد یکسانی که دو عدد ما می‌توانند بر آن بخش پذیر باشند ۱ است.

⑤ برای دو عدد: $(a,b) \times [a,b] = ab$ ؛ (a,b) ← مشترک با توان کم
$[a,b]$ ← مشترک با توان زیاد و غیر مشترک را

⑥ اگر a و b متباین باشند داریم: $[a,b] = ab$

⑦ $\cancel{[ak,bk]}$ $(a,b) = d \Rightarrow (ak, bk) = dk$

$(a,b) = d \Rightarrow (a^n, b^n) = d^n$ و به همین ترتیب برای ک.م.م

⑧ اگر عددی بر a و b بخش پذیر باشد، بر $[a,b]$ هم بخش پذیر است.

⑨ اگر a و b بر عددی بخش پذیر باشند، (a,b) هم بر آن بخش پذیر است.

مثال: کوچکترین عدد سه رقمی که باقی مانده آن بر ۳ و ۶ و ۱۰ مساوی ۱ می شود، چند است؟

$[3,6,10]=30 \qquad 30\times 4+1=\boxed{121}$

مثال: کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بر ۷ بخش پذیر باشد و در تقسیم بر ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ به ترتیب باقی مانده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ داشته باشد.

$[2,3,4,5,6]=60 \qquad 60\times 2=120 \xrightarrow{-1} \boxed{119}$

* غربال اراتستن (برای یافتن اعداد اول ۱ تا n)

~~۱~~ ۲ ۳ ~~۴~~ ۵ ~~۶~~ ۷ ~~۸~~ ~~۹~~ ~~۱۰~~

۱۱	۱۳	~~۱۵~~	۱۷	۱۹
~~۲۱~~	۲۳	~~۲۵~~	~~۲۷~~	۲۹
۳۱	~~۳۳~~	~~۳۵~~	۳۷	~~۳۹~~
۴۱	۴۳	~~۴۵~~	۴۷	~~۴۹~~
~~۵۱~~	۵۳	~~۵۵~~	~~۵۷~~	۵۹
۶۱	~~۶۳~~	~~۶۵~~	۶۷	~~۶۹~~
۷۱	۷۳	~~۷۵~~	~~۷۷~~	۷۹
~~۸۱~~	۸۳	~~۸۵~~	~~۸۷~~	۸۹
~~۹۱~~	~~۹۳~~	~~۹۵~~	۹۷	~~۹۹~~

شروع ← اعداد ۱ تا n را بنویس ← ۱ را خط بزن ← عدد خط نخورده بعدی اول است

آیا این عدد کوچکتر یا مساوی n است؟

مثال: در روش غربال اراتستن برای یافتن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰، ۴۲مین عددی که خط می‌خورد چند است؟

(۱)

(۴۹) $\xrightarrow{-1}$ ۵۰ = ۱۰۰/۲ : مضارب ۲

۷۵ = ۹+۱۱×۶ = ؟ ، ۹، ۱۵، ۲۱، ...، ؟ ← ۱۳مین عدد : مضارب ۳

مثال: در غربال ۱ تا ۱۰۰، ۶۵ چندمین عددی است که خط می‌خورد؟

(۴۹) $\xrightarrow{-1}$ ۵۰ = ۱۰۰/۲ : مضارب ۲

(۱۶) $\xrightarrow{\div 2}$ ۳۲ $\xrightarrow{-1}$ ۳۳ = ۱۰۰/۳ : مضارب ۳

۷۰مین ← ۶۵، ۵۵، ۳۵، ۲۵ : مضارب ۵

* تشخیص اول یا مرکب بودن یک عدد

از ۱ تا √آن عدد را در ذهنمان می‌نویسیم و غربال را روی آنها اجرا می‌کنیم. اگر عدد خط خورد مرکب و در غیر این صورت اول است.

مثال: ۲۰۳ اول است یا مرکب؟ ۲۰۳ | ۷ ، ۲۹ — ۲۰۳ | ۵ ✗ — ۲۰۳ | ۳ ✗ — ۲۰۳ | ۲ ✗ ← مرکب است.

نتیجه: عددمان را بر تمام اعداد اولی که مربعشان کوچک‌تر یا مساوی عدد است تقسیم می‌کنیم.

اگر بر هیچ کدام بخش‌پذیر نبود اول و در غیر اینصورت مرکب است.

فصل ۲: ترکیبیات

* شمارش منظم

مثال ۱: در یک تورنومنت ۸ تیم شرکت کرده‌اند. هر تیم با تمام تیم‌های دیگر مسابقه می‌دهند. در این تورنومنت چند مسابقه انجام می‌شود؟

روش دوم: ۲۸ = ۸×۷/۲

روش اول: ۲۸ = ۸×۷/۲ = ۷+...+۲+۱

مثال ۲: به چند طریق می‌توان یک اسکناس ۱۰۰ تومانی را به سکه‌های ۱۰ و ۲۵ و ۵۰ تومانی خرد کرد؟ ۶ طریق

۵۰ تومانی	۲۵ تومانی	۱۰ تومانی
۲	۰	۰
۱	۲	۰
۱	۰	۵
۰	۴	۰
۰	۲	۵
۰	۰	۱۰

مثال ۳: جدولی ۳×۳ داریم. به چند طریق می‌توانیم در ۳ خانه از این جدول علامت * قرار دهیم به شرطی که در هر سطر و هر ستون فقط یک * وجود داشته باشد؟

۶ = ۱×۲×۳

ستون اول — ستون دوم — ستون سوم

* اصل ضرب

مثال ۱: یک تولیدی در اندازه‌های کوچک، متوسط و بزرگ و در رنگ‌های سفید، آبی و قرمز لباس تولید می‌کند. این تولیدی چند نوع لباس مختلف تولید می‌کند؟ $\boxed{۳ \times ۲ = ۶}$

مثال ۲: الف) چند عدد دو رقمی داریم؟ $\boxed{۹}\boxed{۱۰} = ۹ \times ۱۰ = \boxed{۹۰}$

ب) چند عدد دو رقمی با ارقام فرد داریم؟ $\boxed{۵}\boxed{۵} = \boxed{۲۵}$

ج) چند عدد دو رقمی با ارقام متمایز داریم؟ $\boxed{۹}\boxed{۹} = \boxed{۸۱}$

مثال ۳: با استفاده از رنگ‌های آبی، زرد، قرمز، سبز می‌خواهیم خانه‌های جدول زیر را رنگ آمیزی کنیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = \boxed{۲۵۶}$

ب) اگر بخواهیم رنگ خانه‌ها متمایز باشد چطور؟ $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = \boxed{۲۴}$

اصل ضرب: هرگاه انجام عملی متشکل از دو جزء مختلف (دو مرحله مستقل) باشد به طوری که عمل اول به m روش مختلف قابل انجام باشد و به ازای هر کدام از این روش‌ها عمل دوم به n روش مختلف قابل انجام باشد، کل عمل به mn روش قابل انجام است.

این اصل برای بیش از دو جزء مختلف هم قابل تعمیم است.

مثال ۴: از حیاط به طبقه‌ی اول ۶ پله وجود دارد. اصغر می‌خواهد از حیاط به طبقه اول برسد. او در هر قدم می‌تواند ۱ یا ۲ پله طی کند. اصغر به چند طریق می‌تواند از حیاط به طبقه‌ی اول برسد؟

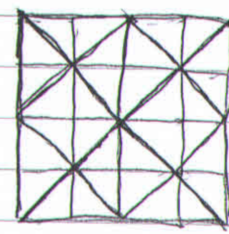
تعداد قدم‌های ۱ پله‌ای	تعداد قدم‌های ۲ پله‌ای
۰ -> ۲۲۲	۳
۲ -> ۲۲۱۱ - ۲۱۲۱ - ۲۱۱۲ - ۱۱۲۲ - ۱۲۱۲ - ۱۲۲۱	۲
۴ -> ۲۱۱۱۱ - ۱۲۱۱۱ - ۱۱۲۱۱ - ۱۱۱۲۱ - ۱۱۱۱۲	۱
۶ -> ۱۱۱۱۱۱	۰

مثال ۵: به چند طریق می‌توان جدول ۴×۴ مقابل را با اعداد ۱ تا ۴ طوری پر کرد که در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری نداشته باشیم؟

X	✓	۲	۱
✓	۲	۱	X
۲	۱	X	✓
۱	X	✓	۲

جای X و ✓ می‌توانیم ۳ یا ۴ بگذاریم. پس ۲ حالت وجود دارد

مثال ۶: در شکل مقابل چند مثلث داریم؟



$۱۶ + ۱۶ + ۸ + ۴ = ۴۴$

۱ خانه‌ای، ۲ خانه‌ای، ۴ خانه‌ای، ۸ خانه‌ای

GNOTE GNOTE

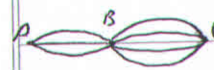
مثال ۴: یک امتحان که شامل ۶ سؤال ۴ گزینه‌ای است را می‌توان پاسخ داد اگر:

الف) در هر سؤال می‌بایست دقیقاً یک گزینه انتخاب شود؟ $4^6 = \boxed{4096}$

ب) در هر سؤال می‌بایست حداکثر یک گزینه انتخاب شود. $(4+1)^6 = \boxed{5^6}$

مثال ۵: در یک صفحه ۵×۶ چند مربع ۳×۳ داریم؟ $3\times4 = \boxed{12}$

مثال ۶: با توجه به نقشه‌ی مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) برای رفتن از شهر A به C چند مسیر وجود دارد؟ $3\times4 = \boxed{12}$

ب) برای رفتن از A به C و برگشت دوباره به A، چند مسیر وجود دارد؟ $3\times4\times4\times3 = \boxed{144}$

ج) قسمت ب را با این شرط حل کنید که در طی مسافرت از هیچ جاده‌ای دو بار نگذریم.

$3\times4\times3\times2 = \boxed{72}$

د) " " " " که مسیر رفت و برگشت متفاوت باشد. $\underbrace{12}_{\text{رفت}}\times\underbrace{11}_{\text{برگشت}} = \boxed{132}$

مثال ۷: به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنج ۸×۸ قرار داد، به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

$\underbrace{64}_{8\times8}\times\overset{7\times7}{49} = 3136$

مثال ۸: الف) به چند طریق می‌توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟ $5\times5\times5 = \boxed{125}$

ب) اگر قرار باشد به هر نفر حداکثر ۱ میوه برسد چطور؟ $\overset{\text{اول}}{5}\times\overset{\text{دوم}}{4}\times\overset{\text{سوم}}{3} = \boxed{60}$

مثال ۹: عدد $7\times9^2\times3\times2^4\times5$ چند مقسوم علیه با رقم یکان صفر دارد؟ $1\times4\times4\times2 = \boxed{32}$

اصل جمع

مثال ۱: فرض کنید از تهران به یزد ۳ راه زمینی، ۲ راه هوایی و ۲ راه دریایی وجود داشته باشد. به چند طریق می‌توان از تهران به یزد رسید؟ $3+2+2 = \boxed{7}$

مثال ۲: چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟ $256+72 = \boxed{328}$

یکان غیر صفر: $\boxed{8}\boxed{8}\boxed{4} = 256$ ، یکان صفر: $\boxed{9}\boxed{8}\boxed{1} = 72$

مثال ۳: در صفحه‌ی شطرنج ۸×۸ چند مستطیل با مساحت ۱۶ داریم؟

$8\times2 \rightarrow 7\times2 = 14$ ، $4\times4 \rightarrow 5\times5 = 25$ ، کل: $25+14 = \boxed{39}$

مثال ۴: با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۸ چند عدد طبیعی با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟

$\underbrace{4\times3\times2\times1}_{\text{چهار}}+\underbrace{4\times3\times2}_{\text{سه}}+\underbrace{4\times3}_{\text{دو}}+\underbrace{4}_{\text{یک}} = \boxed{64}$

GNOTE

مثال ۴: یک امتحان که شامل ۶ سؤال ۴ گزینه‌ای است را می‌توان پاسخ داد اگر:

الف) در هر سؤال می‌بایست دقیقاً یک گزینه انتخاب شود؟ $4^6 = \boxed{4096}$

ب) در هر سؤال می‌بایست حداکثر یک گزینه انتخاب شود. $(4+1)^6 = \boxed{5^6}$

مثال ۵: در یک صفحه ۵×۶ چند مربع ۳×۳ داریم؟ $3\times4=\boxed{12}$

مثال ۶: با توجه به نقشه‌ی مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) برای رفتن از شهر A به C چند مسیر وجود دارد؟ $3\times4=\boxed{12}$

ب) برای رفتن از A به C و برگشت دوباره به A چند مسیر وجود دارد؟ $3\times4\times4\times3=\boxed{144}$

ج) قسمت ب را با این شرط حل کنید که در طی مسافت از هیچ جاده‌ای دوبار نگذریم.

$3\times4\times3\times2=\boxed{72}$

د) " " " " " که مسیر رفت و برگشت متفاوت باشد. $\underbrace{12}_{\text{رفت}}\times\underbrace{11}_{\text{برگشت}}=\boxed{132}$

مثال ۷: به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنج ۸×۸ قرار داد، به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

$\underbrace{64}_{8\times8}\times\overset{7\times7}{49}=3136$

مثال ۸: الف) به چند طریق می‌توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟ $5\times5\times5=\boxed{125}$

ب) اگر قرار باشد به هر نفر حداکثر ۱ میوه برسد، چطور؟ $\overset{\text{اول}}{5}\times\overset{\text{دوم}}{4}\times\overset{\text{سوم}}{3}=\boxed{60}$

مثال ۹: عدد $5\times2^2\times3\times6^2\times7$ چند مقسوم علیه با یکان صفر دارد؟ $1\times4\times4\times2=\boxed{32}$

اصل جمع

مثال ۱: فرض کنید از تهران به یزد ۳ راه زمینی، ۲ راه هوایی و ۲ راه دریایی وجود داشته باشد. به چند طریق می‌توان از تهران به یزد رسید؟ $3+2+2=\boxed{7}$

مثال ۲: چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟ $256+72=\boxed{328}$

یکان غیر صفر: $\overset{2}{\boxed{8}}\overset{3}{\boxed{8}}\overset{1}{\boxed{4}}=256$

یکان صفر: $\overset{2}{\boxed{9}}\overset{3}{\boxed{8}}\overset{1}{\boxed{1}}=72$

مثال ۳: در صفحه‌ی شطرنج ۸×۸ چند مستطیل با مساحت ۱۶ داریم؟

$8\times2 \rightsquigarrow 7\times2=14$ ، $4\times4 \rightsquigarrow 5\times5=25$ ، کل: $25+14=\boxed{39}$

مثال ۴: با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۸ چند عدد طبیعی با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟

$\underbrace{4\times3\times2\times1}_{\text{چهار}}+\underbrace{4\times3\times2}_{\text{سه}}+\underbrace{4\times3}_{\text{دو}}+\underbrace{4}_{\text{یک}}=\boxed{64}$

مثال ۵: بین شهرهای A و B سه جاده، بین A و C چهار جاده و بین B و C سه جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداکثر دو جاده از A به B رفت؟

$AB: 3$ مسیر $ACB: 4\times 3 = 12$ مسیر   کل: $\boxed{15}$

اصل جمع: فرض کنید عمل اول به m طریق و عمل دوم به n طریق قابل انجام باشد، اگر بخواهیم فقط یکی از این دو عمل را انجام دهیم $m+n$ طریق داریم.

* اصل متمم

مثال ۱: چند عدد دو رقمی داریم که بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟

$99 \div 7 \simeq 14 \quad 9 \div 7 \simeq 1 \quad 14 - 1 = 13 \quad 90 - 13 = \boxed{77}$

مثال ۲: در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟ $9000 - \overbrace{8\times 9\times 9\times 9}^{\text{۵ ندارد}} = 9000 - 5832 = \boxed{3168}$

مثال ۳: چند عدد ۳ رقمی بر حداقل یکی از عدد ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

$\frac{999}{6} = 166 \quad \frac{99}{6} = 16 \quad 166 - 16 = 150 \quad 900 - 150 = \boxed{750}$

* شمار فاکتوریل

تعریف: $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1$ (n طبیعی)

قرارداد: $0! = 1$

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720

نکته: $(a+b)! \neq a! + b!$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\frac{7!}{4!} = 7\times 6\times 5 = 210$

ب) $\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\times 6\times 5}{3!} = 35$

ج) $7! - 5\times 5! = 5!(7\times 6 - 5) = 5!\times 37 = 4440$

د) $\frac{6!}{2^4} = \frac{\cancel{6}^{3}\times 5\times\cancel{4}\times 3\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 45$

ه) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = (n+2)(n+1)n$

مثال: ثابت کنید.

$n(n! + (n-1)!) = (n+1)!$

مستقیم: $n((n+1)(n-1)!) = (n+1)!$

*جایگشت

مثال: قلی و کاظم و ناخیک به چند طریق می‌توانند یک صف تشکیل دهند؟

$3\times2\times1 = 3! = 6$

به روش قرار گرفتن n شیء در یک ردیف را یک جایگشت آن n شیء می‌نامیم.

قضیه: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر !n است.

اثبات: $n(n-1)(n-2)\dots\times1 = n!$

مثال ۱: چند جایگشت از حروف کلمه table با حرف t شروع می‌شود؟ $\overset{t}{1}\times4! = 24$

مثال ۲: چند جایگشت از حروف کلمه nature به حروف صدادار ختم می‌شوند؟

a و u و e

$\boxed{5!}\boxed{3} = 360$

مثال ۳: ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به طوری که هیچ دو معلمی مجاور نباشند؟

$\underset{4}{م}\ \overset{3}{د}\ \underset{3}{م}\ \overset{2}{د}\ \underset{2}{م}\ \overset{1}{د}\ \underset{1}{م} \rightarrow 4!3! = 144$

مثال ۴: در چند جایگشت از حروف کلمه logarithm عبارت log دیده می‌شود؟

$7\times6! = 7! = 5040$

مثال ۵: در چند جایگشت از حروف کلمه triangle حروف صدادار مجاورند؟

حالت‌های i و a و e

$3! \times 6! = 6\times720 = 4320$

مثال ۶: در چند جایگشت از حروف کلمه talking بین دو حرف t و k دقیقا ۲ حرف وجود دارد؟

جابجایی t و k — بقیه حروف

$2\times4\times5!$

محل قرارگیری در کلمه

* جایگشت ناقص

مثال: تعداد جایگشت دو حرفی A و B و C و D چند تاست؟ $4\times3=12$

مثال: ۱۰ دانش آموز در یک مسابقه آشپزی شرکت کرده اند به چند طریق ممکن است برندگان مدال طلا، نقره و برنز مشخص شوند؟ $10\times9\times8=720$

قضیه: هرگاه از بین n شیء متمایز تنها بخواهیم k شیء را انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم تعداد حالات برابر می شود با: $\frac{n!}{(n-k)!}$

اثبات: $\underbrace{\boxed{n}\boxed{n-1}\boxed{n-2}\boxed{\cdots}\boxed{n-(k-1)}}_{k\text{ تا}}=\frac{n!}{(n-k)!}$

مثال ۱: در چند جایگشت ۵ حرفی از حروف کلمه triangle، حرف اول بی صدا است؟

$5\times\frac{7!}{(7-4)!}=5\times7\times6\times5\times4=4200$

مثال ۲: در چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز رقم های اول و آخر فرد و بقیه زوج است؟

$5\times5\times4\times3\times4=1200$

مثال ۳: با حروف a، b، c، d، e و f و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه چهار حرفی فاقد d می توان نوشت؟ $5\times4\times3\times2\times1=120$

ب) چند کلمه سه حرفی شامل c می توان نوشت؟ $\underset{\text{تعیین جای c}}{3}\times\overbrace{5\times4}^{\text{دو حرف دیگر}}=60$

روش دوم: $\overbrace{6\times5\times4}^{\text{تمام کلمات ۳ حرفی}}-\overbrace{5\times4\times3}^{\text{کلمات فاقد c}}=5\times4(6-3)=60$

مثال ۴: به چند طریق می توان ۹ کتاب متمایز را بین ۱۵ نفر توزیع کرد به طوری که:

الف) شرط خاصی نداشته باشد؟ $15\times15\times\dots\times15=15^9$

ب) به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟ $15\times14\times13\times\dots\times7$ یا $\frac{15!}{(15-9)!}$

۱ حالت ← چیدن کتاب ها: کار اول

انتخاب دانش آموزها: کار دوم ← $\frac{15!}{(15-9)!}$

مثال ۵: ۱۱ خنگ و ۱۴ گاگول به چند طریق می توانند:

۱ حالت ← چیدن خنگ ها: کار اول

الف) ۱۱ زوج تشکیل دهند؟

انتخاب ۱۱ گاگول: کار دوم ← $\frac{14!}{(14-11)!}$

ب) ۱۰ زوج تشکیل دهند؟

۱۱ حالت ← انتخاب و حذف یک خنگ: کار اول

انتخاب ۱۰ گاگول: کار دوم ← $\frac{14!}{(14-10)!}$

جواب: $11\times\frac{14!}{4!}$

GNOTE

مثال ۶: در چند جایگشت به صورت $a_1a_2\dots a_9$ از ارقام ۱ تا ۹ داریم $a_1<a_2<a_3$

$$\frac{9!}{(9-6)!}=\frac{9!}{3!}$$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{کار دوم}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{کار اول}}$$

کار اول: $\frac{9!}{(9-6)!}$ — کار دوم: ۱ حالت

مثال ۷: در چند جایگشت ۴ حرفی حروف کلمه profile حرف f وجود دارد؟

حالت‌های با f = تمام حالت‌ها − حالت‌های بدون f

روش اول: $\frac{7!}{(7-4)!}-\frac{6!}{(6-4)!}=\overbrace{7\times6\times5\times4-6\times5\times4\times3}^{6\times5\times4(7-3)}=480$

روش دوم: $\underbrace{4}_{\text{تعیین جای f}}\times6\times5\times4=480$

* انتخاب (ترکیب)

انتخاب r شیء از n شیء متمایز را ترکیب r شیء از n شیء می‌نامیم و با علامت $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم. در این حالت ترتیب اشیای انتخاب شده مهم نیست (قرار نیست آنها را کنار هم بچینیم)

قضیه: تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز $(0\leq r\leq n)$ برابر است با:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

اثبات: تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\text{روش اول}: \dfrac{n!}{(n-r)!}\\ \text{روش دوم}: \binom{n}{r}\times r!\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{n!}{(n-r)!}=\binom{n}{r}\times r!\Rightarrow\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال ۱: از بین ۱۰ دانش‌آموز به چند طریق می‌توان دو نفر را انتخاب کرد، به طوری که:

الف) نفر اول نماینده و نفر دوم آبدارچی کلاس بشود؟ $\frac{10!}{8!}=90$

ب) هر دو نفر را به اردو ببریم؟ $\binom{10}{2}=\frac{10!}{8!\times2!}=45$

مثال ۲: ۸ کتاب با ابعاد متفاوت داریم. به چند طریق می‌توان ۳ تا از آنها را انتخاب کرد، به طوری که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم؟ $\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!\times3!}=\frac{8\times7\times6}{3!}=56$

ب) اولی را قرمز دومی را آبی کنیم و سومی را بخوریم؟ $\frac{8!}{5!}=8\times7\times6=336$

ج) بزرگترین طلب انتخاب شود؟ $\binom{7}{2}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times6}{2!}=21$

مثال ۳: ۱۰ چراغ در یک ردیف داریم.

الف) به چند طریق می‌توان ۳ تا از آنها را روشن کرد؟ $\binom{10}{3}=120$

ب) به چند طریق می‌توان ۷ تا از آنها را روشن کرد؟ $\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!3!}=120$

ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

مثال ۴: در یک آپارتمان ۱۱ خانواده زندگی می‌کنند. قرار است یک شورای ۴ نفره تشکیل شود. از هر خانواده تنها پدر یا مادر می‌تواند انتخاب شود. به چند طریق ممکن است شورای ۴ نفره تشکیل شود؟

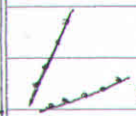
روش اول: $\frac{22\times20\times18\times16}{4!}=5280$

روش دوم: $\underbrace{\binom{11}{4}}_{\text{انتخاب ۴ خانواده از ۱۱ تا}}\times 2^4 \rightarrow$ انتخاب پدر یا مادر از هر خانواده انتخاب شده

مثال ۵: به چند طریق می‌توان یک گروه چهار نفری از بین ۳ معلم و ۵ دانش‌آموز انتخاب کرد به طوری که حداقل ۱ معلم در گروه باشد؟

روش دوم (اصل متمم): $\overbrace{\binom{8}{4}}^{\text{کل حالات}}-\overbrace{\binom{5}{4}}^{\text{حالات بدون معلم}}$

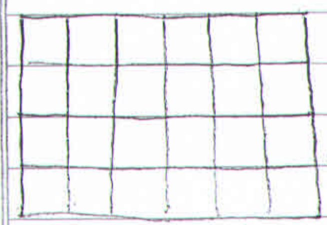
روش اول (اصل جمع): $\underbrace{\binom{3}{1}\times\binom{5}{3}}_{\text{یک معلم}}+\underbrace{\binom{3}{2}\times\binom{5}{2}}_{\text{دو معلم}}+\underbrace{\binom{3}{3}\times\binom{5}{1}}_{\text{سه معلم}}=65$



مثال ۶: با نقاط مشخص شده روی شکل مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟

روش اول (اصل متمم): کل حالات ـ حالات هر سه نقطه روی یک خط $=\binom{9}{3}-\binom{4}{3}-\binom{5}{3}=70$

روش دوم (اصل جمع): $\binom{4}{1}\times\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\times\binom{5}{1}=40+30=70$



مثال ۷: در یک جدول ۴×۶ چند مستطیل دیده می‌شود؟

انتخاب اضلاع افقی × انتخاب اضلاع عمودی $=\binom{5}{2}\times\binom{7}{2}=10\times21=210$

مثال ۸: الف) ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۴ و ۶ نفره تقسیم کرد؟ $\binom{10}{6}$ یا $\binom{10}{4}$

ب) ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟ $\binom{10}{5}\div2$

ج) ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره با نام‌های پرسپولیس و استقلال تقسیم کرد؟ $\binom{10}{5}$

مثال ۱: چند کلمه‌ی ۹ حرفی با حروف کلمه‌ی barbapapa می‌توان نوشت؟ $\frac{9!}{2!4!2!}$

مثال ۲: در یک کیسه ۵ سکه‌ی ۵ تومانی ۷ سکه‌ی ده تومانی و ۸ سکه‌ی ۲۵ تومانی وجود دارد. هر بار از این کیسه یک سکه بیرون می‌آوریم تا همه سکه‌ها بیرون آیند به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ $\frac{20!}{5!\times 7!\times 8!}$

مثال ۳: یک زمین مستطیل شکل ۷×۱ را به چند طریق می‌توان با دو موزاییک ۳×۱ و یک موزاییک ۲×۱ و دو موزاییک ۱×۱ پوشاند؟ $\frac{5!}{2!\times 2!}$

مثال ۴: چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی با حروف a و b و c هر یک از این حروف حداکثر ۴ بار ظاهر شوند؟

حالت‌های ممکن:

$$\left.\begin{array}{l} 4,4,2 \rightarrow \frac{10!}{4!\times 4!\times 2!}\times 3 \\ 4,3,3 \rightarrow \frac{10!}{4!\times 3!\times 3!}\times 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} \frac{3\times 10!}{4!}\left(\frac{1}{4!2!}+\frac{1}{3!3!}\right)$$

مثال ۵: چند عدد ۷ رقمی با ارقام ۴ و ۵ و ۵ و ۶ و ۶ و ۷ و ۷ می‌توان نوشت که اعداد فرد در جایگاه فرد قرار می‌گیرند؟

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times 3=18$$

د) ۱۵ نفر را به چند طریق می‌توان به ۳ تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟ $\frac{\binom{15}{5}\times\binom{10}{5}}{3!}$

مثال ۶: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی gallery حروف l غیر مجاورند؟

روش اول: $\frac{7!}{2!}-6!$

انتخاب ۲ جا از ۶ جا برای قرار دادن l ؛ چیدن حروف به جز l

روش دوم: ○g○a○e○r○y○ $\longrightarrow 5!\times\binom{6}{2}$

*جایگشت با تکرار

مثال: چند کلمه ۴ حرفی با حروف کلمه call می‌توان نوشت؟ $\frac{4!}{2!}$

مثال: چند عدد ۵ رقمی شامل ۳ رقم ۱ و ۲ رقم ۲ وجود دارد؟ $\frac{5!}{3!2!}$

فرض می‌کنیم n شیء به صورت زیر داریم:

$$\underbrace{\square\square\ldots\square}_{\text{تا } a}\underbrace{\triangle\triangle\ldots\triangle}_{\text{تا } b}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\ldots\bigcirc}_{\text{تا } c}\ldots\underbrace{**\ldots*}_{\text{تا } k}$$

تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با: $\frac{n!}{a!b!c!\ldots k!}$

فصل ۳: آمار و احتمال

علم آمار علم جمع‌آوری، بررسی (پردازش) و نتیجه‌گیری از اطلاعات (داده‌ها) است.

جمع‌آوری اطلاعات به دو روش انجام می‌شود:

۱) سرشماری: در این روش تمام اعضای جامعه آماری مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این روش دقیق ولی وقتگیر و پرهزینه است.

۲) نمونه‌گیری: در این روش تعدادی از اعضای جامعه آماری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این روش سریع و کم‌هزینه ولی نادقیق است. برای کم شدن خطا در این روش نمونه باید پراکندگی داشته باشد.

* دامنه تغییرات داده‌ها: یعنی اختلاف بزرگترین و کوچکترین داده

مثال: اگر دامنه تغییرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مساوی ۱۷ باشد، دامنه تغییرات $3x_1-2, 3x_2-2, \ldots, 3x_n-2$ چند است؟

حالت اولیه $\begin{cases} \min = x_a \\ \max = x_b \end{cases}$ $\quad x_b - x_a = 17$

حالت نهایی $\begin{cases} \min = 3x_a - 2 \\ \max = 3x_b - 2 \end{cases}$ $\quad (3x_b - 2) - (3x_a - 2) = 3(x_b - x_a) = 51$

ENOTE

* میانگین (معمول):

$$\bar{x} = \frac{S}{n} \rightarrow S = \bar{x}n \quad \text{با } x$$

جمع، تعداد

مثال: میانگین قد چند نفر ۱۴۷cm است. اگر قد بلندترین آنها که ۲۱۰cm است را حذف کنیم، میانگین قد بقیه ۱۴۰cm می‌شود. تعداد افراد چند نفر بوده است؟ n: تعداد افراد

$$\frac{147n - 210}{n-1} = 140 \rightarrow 147n - 210 = 140n - 140 \rightarrow 7n = 70 \rightarrow \boxed{n = 10}$$

مثال: اگر میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ مساوی 100 باشد، میانگین $x_1+1, x_2+2, \ldots, x_{20}+20$ چند است؟

$$\left(100 \times 20 + \frac{20 \times 21}{2}\right)\frac{1}{20} = \frac{2210}{20} = 110.5$$

* تعمیم: اگر به تمام داده‌ها مقدار یکسانی را اضافه (کم) کنیم به میانگین هم همان مقدار اضافه (کم) می‌شود. اثبات:

داده‌ها: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

میانگین: $\bar{x}$

$$\text{میانگین جدید} = \frac{(x_1+t)+(x_2+t)+\cdots+(x_n+t)}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{nt}{n} = \bar{x}+t$$

* تعمیم: اگر تمام داده‌ها را در مقدار یکسانی ضرب (تقسیم) کنیم میانگین هم در همان مقدار ضرب (تقسیم) می‌شود. اثبات:

$$\text{میانگین جدید} = \frac{tx_1+\cdots+tx_n}{n} = \frac{t(x_1+\cdots+x_n)}{n} = t\bar{x}$$

ENOTE

مثال: اگر میانگین $2x_1-3, 2x_2-3, \dots, 2x_n-3$ مساوی ۱۷ باشد میانگین $3x_1+2, 3x_2+2, \dots, 3x_n+2$ چند است؟

$2x_1-3 \xrightarrow{+3 \quad \div 2 \quad \times 3 \quad +2} 3x_1+2$

$17 \xrightarrow{+3 \quad \div 2 \quad \times 3 \quad +2} 32$

* دسته‌بندی داده‌ها

مثال: فرض کنید نمره ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر باشد:

17.5 _ 4 _ 11 _ 13.5 _ 20   0 _ 1.5 _ 9.5 _ 3 _ 19   12.5 _ 15 _ 3 _ 18.5 _ 2

7 _ 8.5 _ 5.5 _ 0 _ 1   3.5 _ 7.5 _ 11 _ 14 _ 20   10.5 _ 17 _ 18 _ 19 _ 20

3.5 _ 3.5 _ 4 _ 6.5 _ 0   1.5 _ 13 _ 7.75 _ 15.5 _ 1.25

فرض کنید این داده‌ها را در ۵ دسته طبقه‌بندی کنیم.

طول دسته‌ها $= \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{20-0}{5} = 4$

حدود دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	میانگین دسته	میانگین دسته × فراوانی
$0 \le x < 4$	$\cancel{||||}\ \cancel{||||}\ |||$	13	2	26
$4 \le x < 8$	$\cancel{||||}\ ||$	7	6	42
$8 \le x < 12$	$||||$	4	10	40
$12 \le x < 16$	$||||$	4	14	56
$16 \le x \le 20$	$\cancel{||||}\ \cancel{||||}\ ||$	12	18	216
مجموع		40		380

$\frac{380}{40} = 9.5$

* میانگین اعداد دنباله منظم (تصاعد عددی) $= \frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{2}$

اثبات: مجموع $= \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد}}{2} \Rightarrow$ میانگین $= \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow$

عدد وسط $= \frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{2}$

مثال: مجموع ۲۰ عدد زوج متوالی ۶۲۰ است. عدد سوم چند است؟

$\frac{620}{20} = 31 \longrightarrow$ عدد دهم: 30 ؛ عدد یازدهم: 32 $\longrightarrow$ عدد سوم: $30 - 7 \times 2 = 16$

مثال: میانگین n عدد برابر ۹ شده است. اگر P را حذف کنیم میانگین بقیه ۲ واحد افزایش می‌یابد. P را برحسب بقیه متغیرها بیابید.

$\frac{n9-P}{n-1} = 9+2 \Rightarrow n9-P = 9n-9+2n-2 \Rightarrow P = 9+2-2n$

* احتمال

آزمایش تصادفی: یعنی آزمایشی که نتیجه آن از قبل معلوم نباشد.

فضای نمونه (S): یعنی مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی.

مثلاً در آزمایش پرتاب سکه: $S = \{$خط ، شیر$\}$

GNOTE

در پرتاب یک سکه و یک تاس فضای نمونه چند عضو دارد $۲\times۶=۱۲$

یعنی مجموعه‌ای متشکل از تعدادی از فضای نمونه

مثلاً پیشامد «به دنیا آمدن دو پسر و یک دختر» در آزمایش تصادفی به دنیا آمدن سه نوزاد

$A=\{$ پ پ د ، پ د پ ، د پ پ $\}$

احتمال یک پیشامد یعنی میزان انتظار (باور) ما به رخ دادن آن پیشامد

احتمال رخ دادن یک پیشامد مساوی نسبت تعداد اعضای آن پیشامد به تعداد اعضای فضای نمونه است

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad ۰\leqslant P(A)\leqslant ۱$$

شرط استفاده از این رابطه این است که اعضای فضای نمونه هم شانس باشند

دو سکه را پرتاب کنیم احتمال اینکه متفاوت بیایند چقدر است $\frac{۱}{۲}=۵۰\%$

سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید

A ۲ بار شیر و ۱ بار خط بیاید $P(A)=\frac{۳}{۸}$

B بار اول و دوم شیر و بار سوم خط بیاید $P(A)=\frac{۱}{۸}$

C حداقل ۲ بار شیر بیاید $P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

مثال: احتمال اینکه دو نفر در روز یکسانی از هفته به دنیا آمده باشند چقدر است؟

روش اول: $n(S)=۷\times۷=۴۹ \quad n(A)=۷ \quad P(A)=\frac{۷}{۴۹}=\frac{۱}{۷}$

روش دوم: $\frac{۷\times۱}{۷\times۷}=\frac{۱}{۷}$

مثال: دو سکه را می‌اندازیم. می‌دانیم که یکی از آنها خط آمده است. احتمال اینکه دیگری شیر آمده باشد؟ $\frac{۲}{۳}$

خ	خ
ش	خ
خ	ش
~~ش~~	~~ش~~