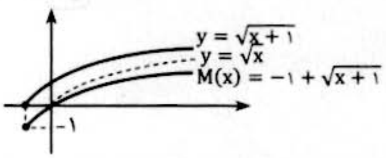
ث)



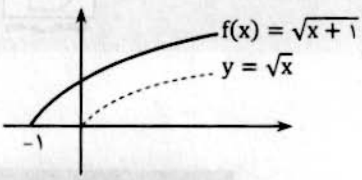
-۹

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{۹\}$

ب) $۴ - x \geq ۰ \Rightarrow ۴ \geq x \Rightarrow D_g = (-\infty , ۴]$

پ) $۴ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{-۲ , ۲\}$

-۱۰



الف) $f(۰) = ۱ \Rightarrow ۱ = \sqrt{۰ + b} \Rightarrow b = ۱$

$f(۳) = ۲ \Rightarrow ۰ = \sqrt{۳a + b} \Rightarrow \sqrt{۳a + b} \Rightarrow \sqrt{۳a + ۱} = ۲ \Rightarrow ۳a + ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۱$

$f(x) = \sqrt{x + ۱}$

$D_f = [-۱ , +\infty)$

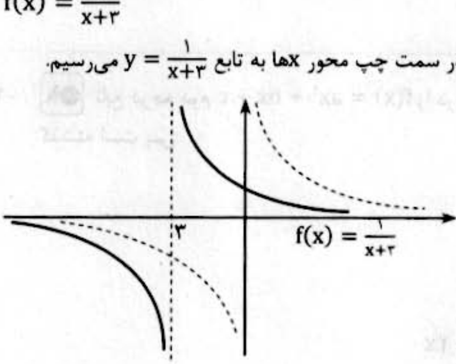
$R_f = [۰ , +\infty)$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a}{-b+۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲a = -b + ۳ \\ f(۱) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{a}{b+۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴a = b + ۳ \end{array}\right. \Rightarrow a = ۱ , b = ۱$$

$f(x) = \frac{۱}{x+۳}$

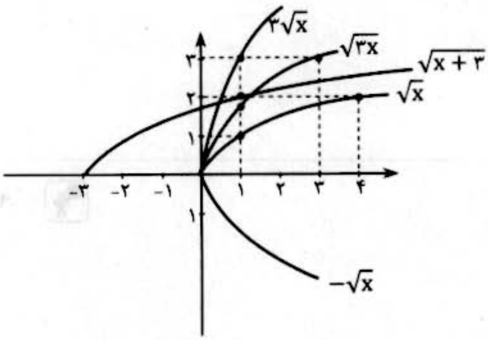
برای رسم تابع از روی رسم تابع $y = \frac{۱}{x}$ و انتقال آن به اندازهٔ ۳ در سمت چپ محور xها به تابع $y = \frac{۱}{x+۳}$ می‌رسیم.



$D_f = \mathbb{R} - \{-۳\}$

$R_f = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱۱-



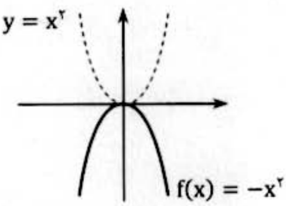
هدف از این سؤال علاوه بر مهارت رسم نمودار، یافتن مشابهت‌ها و تفاوت‌ها در رفتار توابع رادیکالی می‌باشد.

یادداشتی برای همکار

پاسخ کتاب کار و تمرین

مجموعه تمرینات

۱- برای آن‌که f یک به یک باشد باید دامنهٔ تابع $[0,+\infty)$ و یا $(-\infty,0]$ در نظر گرفته شود.



۲- تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم منحنی این تابع از دو نقطهٔ $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(2,0)$ گذشته است پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \,,\ b = 2 \ \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x$$

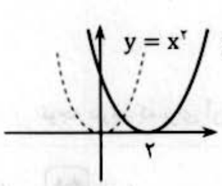
۳- اگر n نفر بلیط تهیه کنند بهای بلیط هر نفر به صورت $4100 - 100n$ می‌باشد. لذا مبلغ پرداختی به صورت $C(x) = (4100 - 100n)n$ خواهد بود که پس از ساده شدن داریم:

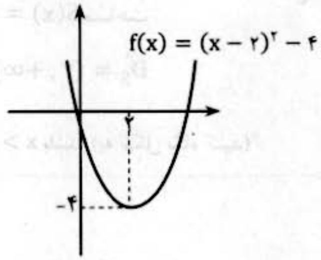
$$C(x) = -100n^2 + 4100n$$

تابع یک تابع چند جمله‌ای از درجه دوم است.

۴-

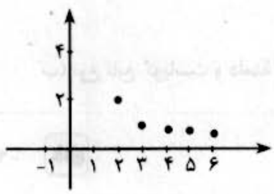
$$f(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$





$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4, +\infty)$

۵- الف)



نمودار از ۵ نقطه تشکیل می‌شود $f(1)$ تعریف نمی‌شود زیرا مخرج کسر برابر صفر می‌شود.

ب) برد تابع $= \{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\}$

۶- الف)

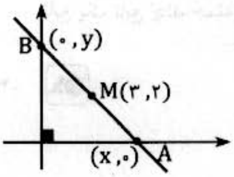
$$\left.\begin{array}{r} \text{مساحت دایره } S = \pi R^2 \text{ , محیط دایره } P = 2\pi R \\ R^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \end{array}\right\} \Rightarrow P(S) = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$$

$D_P = (0, +\infty)$

ب)

$$\text{مساحت کره} = S = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}} \Rightarrow R(S) = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}} \qquad D_R = (0, +\infty)$$

۷-



$$S = \frac{۱}{۲} x \times y$$

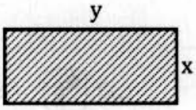
$$\left.\begin{array}{l} \text{MB شیب خط} = \frac{۲-y}{۳-۰} = \frac{۲-y}{۳} \\ \text{MA شیب خط} = \frac{۰-۲}{x-۳} = \frac{-۲}{x-۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲-y}{۳} = \frac{-۲}{x-۳} \Rightarrow y = \frac{-۲x}{-x+۳} \Rightarrow y = \frac{۲x}{x-۳}$$

$$\text{مساحت} \; S(x) = \frac{۱}{۲} x\left(\frac{۲x}{x-۳}\right) = \frac{x^۲}{x-۳}$$

$$D_S = (۳, +\infty)$$

توجه دارید که برای آن که خط با محورها مثلث بسازید باید $x > ۳$ باشد. (به شکل نگاه کنید)

۸- الف)



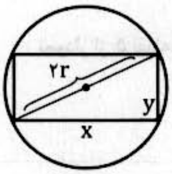
$$S = xy = ۱۴۴ \Rightarrow y = \frac{۱۴۴}{x}$$

$$\text{محیط مستطیل} \; P = ۲x + ۲y = ۲x + ۲\left(\frac{۱۴۴}{x}\right)$$

$$P(x) = \frac{۲x^۲ + ۲۸۸}{x}$$

ب) نوع تابع گویاست و دامنهٔ آن $D_P = (۰, +\infty)$ می‌باشد.

۹-



$$\left.\begin{array}{l} \text{مستطیل} \; S = x \times y \\ x^۲ + y^۲ = (۲r)^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۴r^۲ - x^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) = x\sqrt{۴r^۲ - x^۲}$$

$$D_S = (۰, ۲r) \; \text{دامنه تابع}$$

۱۰-

الف) $\frac{۱}{x-۲} > ۰ \Rightarrow x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \Rightarrow D_f = (۲, +\infty)$

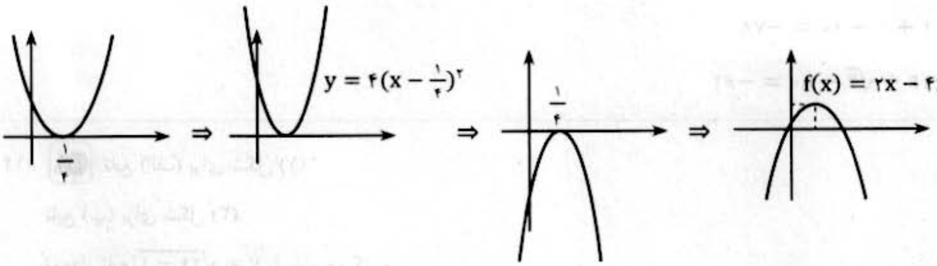
ب) $x > ۰$, مخرج مخالف صفر $\Rightarrow D_g = (۰, +\infty)$

پ) $x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow D_t = \mathbb{R} - \{۴\}$

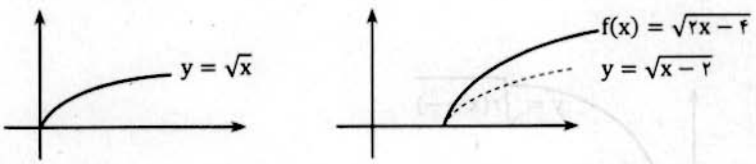
ت) تابع چندجمله‌ای $\Rightarrow D_N = \mathbb{R}$

-۱۱

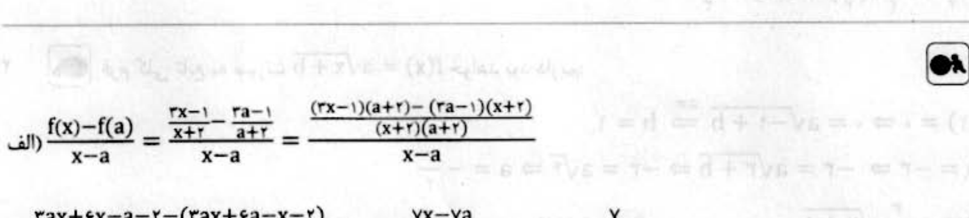
الف) $f(x) = -4x^2 + 2x = -4(x^2 - \frac{x}{2}) = -4((x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}) = -4(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}$



ب) $f(x) = \sqrt{2(x-2)} = \sqrt{2}\,\sqrt{x-2}$



پ) $f(x) = -2 + 3\sqrt{x-1}$



-۱۲

الف) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{3x-1}{x+2} - \frac{3a-1}{a+2}}{x-a} = \frac{\frac{(3x-1)(a+2)-(3a-1)(x+2)}{(x+2)(a+2)}}{x-a}$

$= \frac{3ax+6x-a-2-(3ax+6a-x-2)}{(x-a)(x+2)(a+2)} = \frac{7x-7a}{(x-a)(x+2)(a+2)} = \frac{7}{(x+2)(a+2)}$

ب) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{3(1+h)-1}{1+h+2} - \frac{2}{3}}{h} = \frac{9(1+h)-3-2(h+3)}{3h(h+3)} = \frac{7h}{3h(h+3)} = \frac{7}{3h+9}$

۱۳-

$$f^{-1}(4) = 9 \Rightarrow f(9) = 4 \Rightarrow 81 + \sqrt{9} + a = 4 \Rightarrow a = -80$$

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 80$$

$$f(1) = 1 + 1 - 80 = -78$$

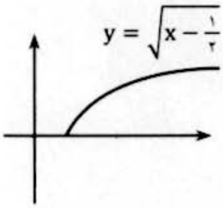
$$f(4) = 16 + \sqrt{4} - 80 = -62$$

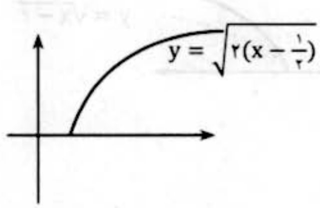
۱۴- تابع (الف) برای شکل (۱)

تابع (پ) برای شکل (۲)

نمودار تابع $y = \sqrt{2x - 1}$ را رسم می‌کنیم.

$$y = \sqrt{2(x - \frac{1}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{x - \frac{1}{2}}$$





■ ویژهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند

۱-

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow 4f(2) + f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{4}{3} \\ x = \tfrac{1}{2} &\Rightarrow \tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{2}) + f(2) = \tfrac{5}{3} \end{aligned} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} f(2) = -\frac{1}{2}$$

۲- فرم کلی تابع به صورت $f(x) = a\sqrt{x + b}$ خواهد بود داریم:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = a\sqrt{-1 + b} \overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} b = 1$$

$$f(3) = -3 \Rightarrow -3 = a\sqrt{3 + b} \Rightarrow -3 = a\sqrt{4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x + 1}$$

فرم کلی تابع و به صورت $g(x) = a(x - 2)^2 + b$ از طرفی $g(2) = 1$ پس:

$$g(2) = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = a(x - 2)^2 + 1$$

همچنین داریم $g(0) = 3$ پس:

$$4a + 1 = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

-۳

$8-8x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]$

چون تابع رادیکال نامنفی است پس $R_f=[0,+\infty)$

$4-x^2\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow D_g=[-2,2]$

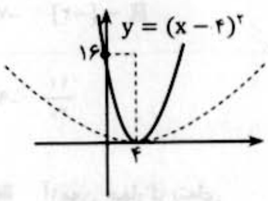
$4-x^2\leq 4 \Rightarrow 0\leq \sqrt{4-x^2}\leq 2 \Rightarrow 1\leq \sqrt{4-x^2}+1\leq 3 \Rightarrow R_g=[1,3]$

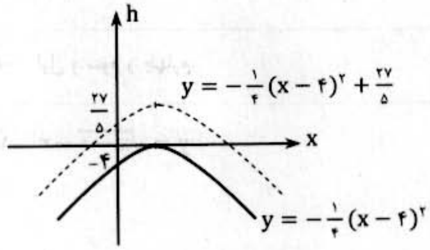
چون $x^2+6\neq 0$ پس $D_t=\mathbb{R}$ از طرفی:

$x^2+6\geq 6 \Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+6}\leq\frac{1}{6} \Rightarrow 0<\frac{6}{x^2+6}\leq 1 \Rightarrow R_t=(0,1]$

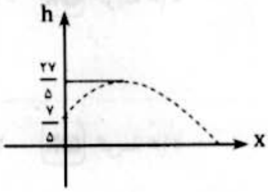
-۴

الف) $h(x)=-\frac{1}{4}(x^2-8x)+\frac{7}{5}=-\frac{1}{4}[(x-4)^2-16]+\frac{7}{5}=-\frac{1}{4}(x-4)^2+\frac{27}{5}$





از آن‌جا که مسأله در یک محیط واقعی است پس محدودیت‌هایی دارد. لذا نمودار مسأله به صورت زیر خواهد بود.



ب) کودک توپ را از فاصلهٔ $\frac{7}{5}$ متری سطح زمین پرتاب کرده و تا ارتفاع $\frac{27}{5}$ بالا رفته است.

-۵

الف) $D_f=[-4,5]\ ,\ R_f=[-2,4]$

ب) (a) برای دامنهٔ تابع $y_1=\frac{1}{f(x)}$ باید $f(x)\neq 0$ باشد، لذا:

$D_{y_1}=D_f-\{-2,1,3\}=[-4,5]-\{-2,1,3\}$

(b) برای دامنهٔ $y_2=\sqrt{f(x)}$ باید $f(x)>0$ لذا، ناحیهٔ بالای محور xها مورد قبول است، در این ناحیه $D_{y_2}=[-2,1]\cup[3,5]$

(c) برای دامنهٔ $y_3=\sqrt{f(x)+1}$ باید داشته باشیم $f(x)+1\geq 0$ پس $f(x)\geq -1$ با توجه به این محدودیت $D_{y_3}=[-3,5]$

۶- الف) معادلهٔ تابع به صورت $y = a(x-\alpha)^۲$ است که نقطهٔ $(۲,۰)$ در آن صدق می‌کنـد پـس معادلـه بـه صـورت $y = a(x-۲)^۲$ خواهد شد از طرفی نقطهٔ $(۰,۲)$ نیز در معادلهٔ آن صدق می‌کند پس داریم $۲ = a(۰-۲)^۲$ و از آن‌جا $a = \frac{۱}{۲}$ معادله جبری تابع به صورت $y = \frac{۱}{۲}(x-۲)^۲$ خواهد شد.

ب)

$$x = ۰/۲ \Rightarrow y_A = \frac{۱}{۲}(۰/۲-۲)^۲ = \frac{۱}{۲}(-۱/۸)^۲ = ۱/۶۲$$

دورهٔ سریع مطالب

۱- نادرست

۲- درست

۳- درست

۴- نادرست

۵- نادرست

۶- درست

۷- $\mathbb{R} - \{-۲\}$

۸- اول و سوم و چهارم.

۹- $\frac{۱۱}{۲۰}$

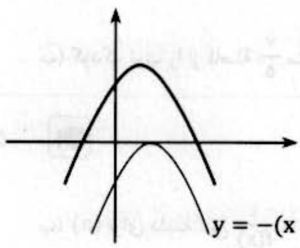
۱۰- $y = \sqrt{x-۲} - ۳$

آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ «۱»

$$\left.\begin{array}{l} A = D_f = [۲, +\infty) \\ B = R_f = [۰, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow B - A = [۰, ۲)$$

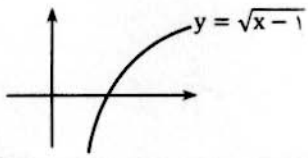
۲- گزینهٔ «۱»

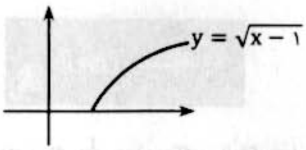


$$f(x) = -x^۲ + x + ۲ = -(x^۲ - x) + ۲ = -[(x-\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}] + ۲ = -(x-\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۹}{۴}$$

۳- گزینهٔ «۳»، باید $f(x) \geq ۰$ باشد در نتیجه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ به ازای مقادیر بازهٔ $[-۶, ۰]$ و یـا $[۳, +\infty)$ تعریـف شده است. لذا پاسخ $[-۶, ۰] \cup [۳, +\infty)$ خواهد بود.

۴- گزینهٔ «۱»





۵- گزینهٔ «۳»

$$(۴۰۰۰ + ۰/۲۵n) \times (۵۰۰ - ۲n) =$$ تعداد بلیط × قیمت هر بلیط = درآمد

۶- گزینهٔ «۲»

$$f(x) = -۱ \Rightarrow \frac{۲x}{x+۱} = -۱ \Rightarrow ۲x = -x - ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$$

۷- گزینهٔ «۴»، مخرج کسر همواره مخالف صفر است از طرفی برای آن‌که $\sqrt{x}$ بـا معنـی باشـد بایـد $x \geq ۰$ در نتیجـه $D_f = [۰, +\infty)$

۸- گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} x = -۱ \Rightarrow -f(۱) - ۲f(-۱) = ۰ \\ x = ۱ \Rightarrow f(-۱) - ۲f(۱) = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۵f(-۱) = ۱ \Rightarrow f(-۱) = \frac{۱}{۵}$$

۹- گزینهٔ «۱»

$$f(x) = \frac{x(x-۱)}{x-۱} = x \qquad D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$$

منحنی $y = \frac{x^۲ - x}{x-۱}$ بخشی از منحنی تابع $y = x$ است.

۱۰- گزینهٔ «۲»

$$-۱ \leq x \leq ۳ \Rightarrow ۰ \leq x^۲ \leq ۹ \Rightarrow -۲۷ \leq -۳x^۲ \leq ۰ \Rightarrow -۲۷ \leq f(x) \leq ۰$$

$$R_f = [-۲۷, ۰]$$

پاسخ ایستگاه فکر ۱

به هر یک از ۵ نفر اول یک تخم مرغ می‌دهیم. به نفر ششم سبد و تخم‌مرغ داخل آن را تقدیم می‌کنیم. به این ترتیـب در آخـر کار یک تخم‌مرغ داخل سبد است. (این معما از نوع کلامی است.)

پاسخ ایستگاه فکر ۲

$$۱۰۱ - ۱۰^۲ = ۱$$

آزمون پیشنهادی

۱- اگر $xf(x) - f(-x) = \frac{۲}{x}$ ضابطهٔ تابع $f(x)$ را بیابید.

۲- نمودار توابع زیر را با استفاده از انتقال رسم کنید.

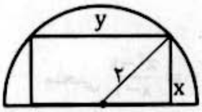
الف) $y = \sqrt{۴x - ۸}$

ب) $y = -x^۲ + ۶x$

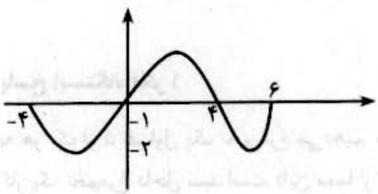
پ) $y = \frac{۲x^۲ - x}{۲x - ۱}$

ت) $y = \sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱}$

۳- مستطیلی در نیم‌دایره‌ای مطابق شکل زیر محاط شده است تابع مساحت مستطیل را برحسب x (عرض مستطیل) بنویسید.



۴- دامنهٔ توابع زیر را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر بیابید.



۱) $y = \frac{۱}{f(x)}$

۲) $y = \sqrt{-f(x)}$