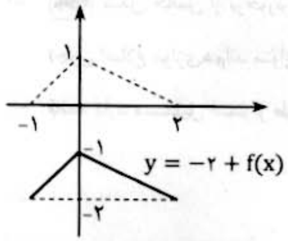
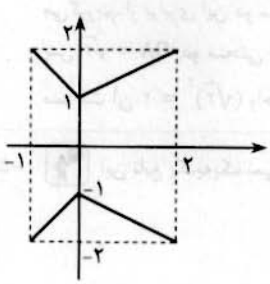
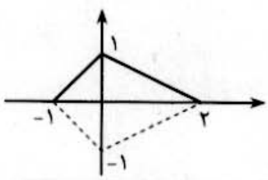
ب) نمودار $y = f(x)$ دو واحد به سمت پایین در امتداد محور yها منتقل شده است.



پ) ابتدا تابع $y = f(x)$ دو واحد به سمت پایین منتقل شده سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها به‌دست می‌آید.



ت) نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.



پاسخ کتاب کار و تمرین

مجموعه تمرینات

۱- الف) تابع ثابت ب) تابع چند جمله‌ای پ) تابع قدرمطلقی

ت) تابع همانی ث) تابع ثابت ج) تابع همانی

۲- الف) $f(x) = |x|$ دامنهٔ $\mathbb{R}$ و برد $[۰, +\infty)$ ب) $g(x) = x^۳$ دامنهٔ $\mathbb{R}$ و برد $\mathbb{R}$

پ) $h(x) = x$ دامنهٔ مجموعه اعداد صحیح و برد مجموعهٔ اعداد صحیح

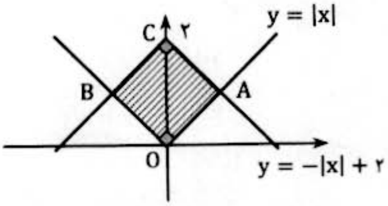
ت) $t(x) = ۵$ دامنه $\mathbb{R}$ و برد $\{۵\}$

۳-

$$\begin{aligned} f(۱) = ۰ &\Rightarrow ۱ - (a + ۱) - b + ۵ = ۰ \\ f(-۱) = b &\Rightarrow -۱ + (a + ۱) + b + ۵ = b \end{aligned} \xrightarrow{\text{جمع}} b = ۱۰$$

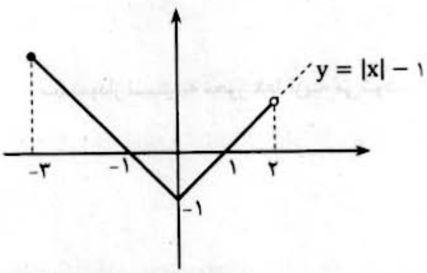
$$۱ - (a + ۱) - ۱۰ + ۵ = ۰ \Rightarrow a + ۱ = -۴ \Rightarrow a = -۵$$

۴- شکل حاصل از برخورد دو منحنی یک مربع است (چون اضلاع موازی‌هم‌اند متوازی‌الاضلاع و چون یک زاویهٔ قائمه دارد مستطیل است از طرفی طول اضلاع برابرند.)



در ربع اول دو منحنی در نقطهٔ A متقاطع‌اند چون x در این ربع مثبت است. پس $y = x$ و $y = -x + 2$ را در نظر می‌گیریم. از برابری این دو معادله داریم $x = 1$ و $y = 1$ در نتیجه $A(1,1)$
پس $OA = \sqrt{2}$، دو منحنی از طرفی $AC = \sqrt{2}$ پس اضلاع متوازی‌الاضلاع برابرند. پس شکل حاصل مربع است و مساحت آن $(\sqrt{2})^2 = 2$ واحد مربع خواهد بود.

۵- این تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد. زیرا خط $y = 0$ منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند.



۶- الف) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \{3\}$

ب) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{R}$ (نمودار یک خط است.)

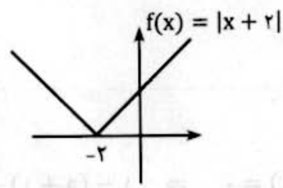
پ)

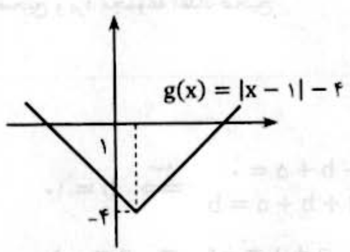
$$f(x) = (x-2)^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [0, +\infty)$$

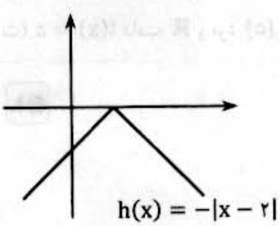
ت)

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \{-5, 5\}$$

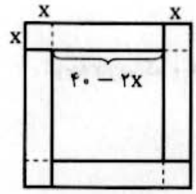
۷-







۸- مقوا باید به صورت مقابل برش بخورد مطابق شکل طول و عرض جعبه $۴۰ - ۲۰x$ و ارتفاع آن x خواهد شد در نتیجه:



ارتفاع × عرض × طول = حجم جعبه

$$V(x) = (۴۰ - ۲x)^۲ \times x$$
$$V(x) = (۱۶۰۰ - ۱۶۰x + ۴x^۲) \times x$$
$$V(x) = ۱۶۰۰x - ۱۶۰x^۲ + ۴x^۳$$

۹-

$$x - ۱ = t \Rightarrow x = t + ۱$$

$$f(t) = ۲(t+۱)^۳ - (t+۱) \qquad f(x) = ۲(x+۱)^۳ - (x+۱)$$

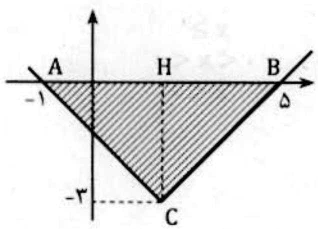
۱۰-

$$\begin{cases} f(۲) = ۰ & ۸a + ۲b + c = ۰ \\ f(-۱) = ۰ & -a - b + c = ۰ \\ f(۰) = ۳ \Rightarrow c = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ۸a + ۲b = -۳ \\ -a - b = -۳ \end{matrix} \Rightarrow ۶a = -۹$$

$$a = \frac{-۳}{۲} \ , \ b = \frac{۹}{۲}$$

■ **ویژهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند**

۱- الف)



ب)

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times AB \times CH = \frac{۱}{۲}(۶) \times |y_c| = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ = ۹ \ \text{واحد مربع}$$

پ) نمودار تابع $f(x)$ محور xها را در نقاط $x = ۵$ و $x = -۱$ قطع کرده است. بنابراین $f(۵) = ۰$ و $f(-۱) = ۰$ در نیمه نقطه‌هایی با طول‌های ۵ و ۱ جواب معادله $f(x) = ۰$ است.

۲- چند نقطه از منحنی $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$f(۱) = ۲ \ , \ f(-۱) = -۲$$

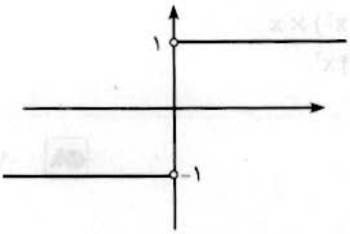
بنابراین نمودار منحنی باید از ربع اول و ربع سوم بگذرد لذا شکل (۱) رد می‌شود.

از طرفی $f(۳) = ۳۰$ بنابراین کشیدگی شاخه- منحنی به سمت محور yها بیش‌تر است وشکل (۲) به نمودار $y = f^{-۱}$ نزدیک‌تر است.

۳- الف)

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

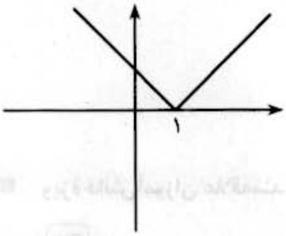
توجه داریم که $x = 0$ جزء دامنهٔ تابع نمی‌باشد.



ب)

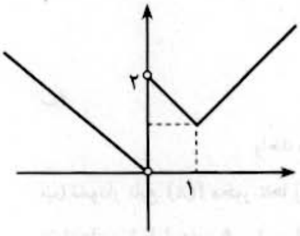
$$g(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

نمودار $y = |x|$ یک واحد به سمت راست انتقال پیدا می‌کند.



پ)

$$h(x) = |x-1| + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x - 1 + \frac{x}{x} & x \geq 1 \\ -(x-1) + \frac{x}{x} & 0 < x < 1 \\ -(x-1) + \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq \\ -x + 2 & 0 < x < 1 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



■ دورهٔ سریع مطالب

۱- نادرست ۲- درست

۳- نادرست ۴- نادرست

۵- نادرست ۶- درست

۷- $(-\infty, 2]$

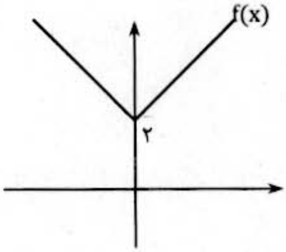
۸- $f(2) = -2$

۹- $D_f = (0, +\infty)$

۱۰- یک

آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ «۱»، همانطور که در نمودار تابع مشخص است، نمودار آن از ربع اول و دوم می‌گذرد.



۲- گزینهٔ «۱»

$$y = x|x| - x^2 + 1 = \begin{cases} x^2 - x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 - x^2 + 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -2x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به شاخهٔ $x \geq 0$ یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) قابل قبول است از آنجا که $f(-1) = -1$ پس شاخهٔ دیگر منحنی از ربع سوم می‌گذرد لذا پاسخ گزینهٔ (۱) است.

۳- گزینهٔ «۳»

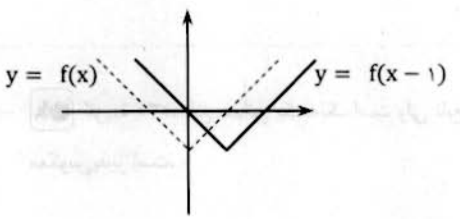
$$x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow y \geq -1$$

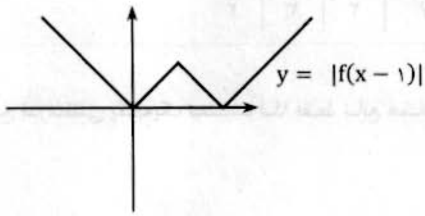
علاوه بر روش بالا می‌توان به روش نقطه‌یابی عمل کرد مثلاً $f(0) = -1$ لذا گزینهٔ (۴) رد می‌شود. $f(4) = 7$ لذا گزینه‌های (۱) و (۲) هم رد می‌شوند و تنها گزینهٔ (۳) که پاسخ سؤال است باقی می‌ماند.

۴- گزینهٔ «۴»

۵- گزینهٔ «۳»، توابع ثابت یک‌به‌یک نیستند.

۶- گزینهٔ «۴»

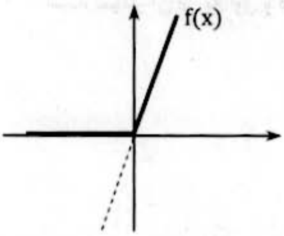




۷- گزینهٔ «۴»، نمودار توابع را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

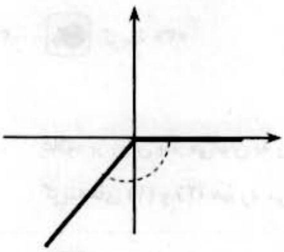
نمودار تابع $y = f(x)$ شاخه‌ای دارد که منطبق بر بخشی از تابع $g(x) = ۲x$ می‌شود. لذا در بی‌شمار نقاط (در ربع اول) دو نمودار تلاقی دارند.



۸- گزینهٔ «۱»

$$f(x) = \frac{x-|x|}{۲} = \begin{cases} ۰ & x \geq ۰ \\ x & x < ۰ \end{cases}$$

پس از رسم نمودار تابع مشاهده می‌شود که دو شاخهٔ منحنی با هم زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد.



۹- گزینهٔ «۳»، در ساعات مختلف شبانه‌روز دمای بدن بیمار می‌تواند چند عدد مختلف را نشان دهد. در ضمن گزینهٔ (۴) به صورت زیر خواهد شد که تابع ثابت است.

x	۳	۴	۵
y	۲	۲	۲

۱۰- گزینهٔ «۳»، تابع همانی یک‌به‌یک است ولی تابع ثابت و تابع قدرمطلقی یک‌به‌یک نیستند لذا فقط تابع همانی معکوس‌پذیر است.