-۶

الف) $-۳x^۲ + ۱۲x - ۱۲ \geq ۰$

$-۳x^۲ + ۱۲x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

x		۲	
$P = -۳x^۲ + ۱۲x - ۱۲$	−	۰	−
$P \geq ۰$		ج	

مجموعه جواب = $\{۲\}$

ب) $۷x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۲۸ < ۰ \Rightarrow$ علامت همواره مثبت

$$۴x^۳ - ۳۶x = ۰ \Rightarrow ۴x(x^۲ - ۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۳ \\ ۴x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = ۰ \end{cases}$$

x		−۳		۰		۳	
$۷x^۲ - ۴x + ۱$	+		+		+		+
$۴x$	−		−	۰	+	۰	+
$x^۲ - ۹$	+	۰	−		−	۰	+
$P = \frac{۷x^۲ - ۴x + ۱}{۴x(x^۲ - ۹)}$	−	ت ن	+	ت ن	−	ت ن	+
$P > ۰$			ج				ج

مجموعه جواب = $(-۳, ۰) \cup (۳, +\infty)$

پاسخ کتاب کار و تمرین

■ مجموعه تمرینات

-۱ الف)

x		−۳		۲		۵		۶	
f			−		+		−		+

ب) برای تعیین دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{۲ + f(x)}$ باید داشته باشیم $۲ + f(x) \geq ۰$ و از آن‌جا $f(x) \geq -۲$ مطابق شکل نواحی که در آن $f(x) \geq -۲$ است را تعیین می‌کنیم. لذا:

$D_g = [-۴, ۶]$

۲- الف)

x		0		2	
P	+		−		+

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'') = a(x - 0)(x - 2) = ax(x - 2)$$

از طرفی $P(1) = -1$ در نتیجه:

$$-1 = a(1)(1 - 2) \Rightarrow a = 1$$

بنابراین: $P(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$

ب)

x		−2		3	
P	−	0	+	0	−

$$P(x) = a(x + 2)(x - 3)$$

$$P(0) = 2 \Rightarrow 2 = a(2)(-3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$P(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)(x - 3) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$$

۳- علامت $f(x)$ همواره باید مثبت باشد، لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ 1 - a > 0 \end{cases}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 1 - 4(1 + a)(1 - a) < 0 \Rightarrow 1 - 4 + 4a^2 < 0 \Rightarrow 4a^2 - 3 < 0$$

a		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
$4a^2 - 3$	+	0	−	0	+		+
$4a^2 - 3 < 0$			ج				
$1 - a$	+		+		+	0	−
$1 - a > 0$	ج		ج		ج		
ناحیه مشترک			ج				

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

-۴

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 ,\ x = 1$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5 , x = 2$

x		-5		1		2	
$x^2 - 2x + 1$	+		+	0	+		+
$x^2 + 3x - 10$	+	0	−		−	0	+
$P = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-10}$	+	ت ن	−	0	−	ت ن	+
$P \geq 0$	ج			ج			ج

مجموعه جواب $= (-\infty , -5) \cup (2, +\infty) \cup \{1\}$

-۵

$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5$

علامت عبارت $2\sqrt{x} + 3$ همواره مثبت است و برای xهای منفی تعریف نمی‌شود.

x		-5		0		5	
$x^2 - 25$	+	0	−		−	0	+
$2\sqrt{x} + 3$					+		+
$P = \frac{x^2-25}{2\sqrt{x}+3}$					−	0	+
$P < 0$				ج	ج		

مجموعه جواب $= [0 , 5)$

-۶

$\frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-8x+16-(x^2+8x+16)}{x^2-16} \geq 0 \Rightarrow \frac{-16x}{x^2-16} \geq 0$

x		-4		0		4	
$-16x$	+		+		−		−
$x^2 - 16$	+	0	−		−	0	+
$P = \frac{-16x}{x^2-16}$	+	ت ن	−		+	ت ن	−
$P \geq 0$	ج			ج	ج		

مجموعه جواب $= (-\infty , -4) \cup [0 , 4)$

-۷

$$\frac{2x^2+4}{x+1}-3\le 0 \Rightarrow \frac{2x^2+4-3x-3}{x+1}\le 0 \Rightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x+1}\le 0$$

$$2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$2x^2-3x+1$	+		+	0	−	0	+
$x+1$	−	0	+		+		+
$P=\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$	−	ت ن	+	0	−	0	+
$P\le 0$	ج			ج	ج	ج	

مجموعه جواب $= (-\infty,-1)\cup[\frac{1}{2},1]$

-۸

مجموع جواب‌ها > حاصل‌ضرب جواب‌ها $\Rightarrow \frac{3m}{m+1}<\frac{1-m}{m+1} \Rightarrow \frac{3m}{m+1}-\frac{1-m}{m+1}<0$

$$\frac{3m-1+m}{m+1}<0 \Rightarrow \frac{4m-1}{m+1}<0$$

m		-1		$\frac{1}{4}$	
$4m-1$	−		−	0	+
$m+1$	−	0	+		+
$P=\frac{4m-1}{m+1}$	+	ت ن	−	0	+
$P<0$			ج		

مجموعه جواب $= (-1,\frac{1}{4})$

-۹ باید داشته باشیم $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ در نتیجه:

$\Delta=4a^2-4a<0$

$a>0$

$(0<a<1)$

a		0		1	
$4a^2-4a$	+	0	−	0	+
$4a^2-4a<0$			ج		
$a>0$			ج		ج
جواب مشترک			ج		

-۱۰

$$f(x) > 3 \Rightarrow x^2 + 2x + m^2 - 1 > 3 \Rightarrow x^2 + 2x + m^2 - 4 > 0$$

برای آن‌که عبارت فوق همواره مثبت باشد، باید $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد، لذا:

$$\Delta = 4 - 4(m^2 - 4) > 0 \Rightarrow -4m^2 + 20 > 0$$

m		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$-4m^2 + 20$	$-$	0	$+$	0	$-$
$-4m^2 + 20 > 0$			ج		

جواب: $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$

-۱۱ الف) برای آن‌که نمودار تابع بالای محور xها باشد باید $f(x) > 0$ لذا:

$$m(x^2 + 5x + 4) - x > 0 \Rightarrow mx^2 + (5m - 1)x + 4m > 0$$

باید داشته باشیم $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$ در نتیجه:

$$(5m - 1)^2 - 16m^2 < 0 \Rightarrow 9m^2 - 10m + 1 < 0$$

m		0		$\frac{1}{9}$		1	
$9m^2 - 10m + 1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$9m^2 - 10m + 1 < 0$					ج		
$m > 0$			ج		ج		ج
جواب مشترک					ج		

$(\frac{1}{9} < m < 1)$

ب) نمودار تابع درجه دوم وقتی بر محور xها مماس است که $\Delta = 0$

$$\Delta = (5m - 1)^2 - 16m^2 = 0 \Rightarrow 9m^2 - 10m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{9} \\ m = 1 \end{cases}$$

-۱۲ برای رابطهٔ اول باید داشته باشیم $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$ و برای رابطه دوم نیز باید $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases}$ در نتیجه باید در محدودهٔ $0 < m < 1$، Δی هر دو عبارت منفی شود.

رابطهٔ اول $\Delta = 4(m - 1)^2 - 4(2m - 5)(m - 1) = 4m^2 - 8m + 4 - 8m^2 + 28m - 20$

$= -8m^2 + 20m - 16 < 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m + 4 > 0 \Rightarrow$ (همواره مثبت)

رابطهٔ دوم $\Delta = (m+1)^2 - 12m < 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 1 < 0$

m		0	$5-2\sqrt{6}$	$5+2\sqrt{6}$
$2m^2-5m+4$	+	+	+	+
$m^2-10m+1$	+	+	−	+
$2m^2-5m+4>0$	ج	ج	ج	ج
$m^2-10m+1<0$			ج	
ناحیه مشترک			ج	

از اشتراک دو ناحیهٔ $5-2\sqrt{6} < m < 5+2\sqrt{6}$ و $0 < m < 1$ داریم: $5-2\sqrt{6} < m < 1$

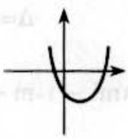
۱۳-

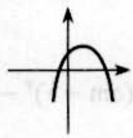
$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ 3m - 3 < 0 \end{matrix}$$

m		1	3
m^2-4m+3	+	−	+
$3m-3$	−	+	+
$m^2-4m+3>0$	ج		ج
$3m-3<0$	ج		
جواب دستگاه	ج		

$(m < 1)$

۱۴- برای آن‌که نمودار از هر چهار ناحیهٔ مختصات بگذرد باید $x'x'' < 0$ (دو جواب هم‌علامت نباشند) (یکی از دو شکل مقابل)





m		-2	0	2
$-m^2+4$	−	+	+	−
m	−	−	+	+
$P = \frac{-m^2+4}{m}$	+	−	ت ن +	−
$P < 0$		ج		ج

$x'x'' = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-m^2+4}{m} < 0$

$(-2 < m < 0$ یا $m > 2)$

-۱۵ گزینه «۴»

$x^۲ + x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow$ علامت همواره مثبت است.

$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$

x		-۲		۲	
$x^۲ + x + ۱$	+		+		+
$x^۲ - ۴$	+	۰	−	۰	+
P	+	ت ن	−	ت ن	+

علامت $\|x\|$ همواره مثبت است به جز ریشهٔ قدر مطلق که در این حالت مقدار آن صفر می‌شود.

$x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow$ عبارت همواره مثبت است.

$x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ , x = ۱$

x		۰		۱	
$\|x\|$	+	۰	+		+
$x^۲ + ۱$	+		+		+
$x^۲ - ۲x + ۱$	+		+	۰	+
q	+	۰	+	ت ن	+

-۱۶ گزینه «۴»

$f(x) = ۲x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۱۶ < ۰ \Rightarrow$ علامت همواره مثبت

$g(x) = (۲x - ۱)^۲ \Rightarrow$ علامت همواره مثبت و در $x = \frac{۱}{۲}$ مقدار آن صفر است.

$h(x) = x^۲ + ۳x - ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ + ۲۰ = ۲۹ \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

الف) $h(x)$ ب) $f(x)$ پ) $g(x)$ ت) $f(x)$ و $g(x)$

تذکر: در قسمت (ت) تابع $h(x)$ شرایط لازم را ندارد، زیرا:

		$\frac{-۳-\sqrt{۲۹}}{۲}$		$\frac{-۳+\sqrt{۲۹}}{۲}$	
$h(x)$	+		−		+

تابع h به ازای مقادیر $(\frac{-۳-\sqrt{۲۹}}{۲}, ۰)$ همواره منفی است.

-۱۷

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x + ۱ > -x^۲ + ۳ \Rightarrow ۴x^۲ - ۲x - ۲ > ۰$$

$$۴x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ + ۳۲ = ۳۶ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۲}$		۱	
$P = ۴x^۲ - ۲x - ۲$	+	○	−	○	+
$P > ۰$	ج	○		○	ج

مجموعه جواب $= (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$

ویژهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند

-۱

$$\begin{cases} x' < ۱ \\ x'' > ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ۱ - x' > ۰ \\ x'' - ۱ > ۰ \end{matrix} \Rightarrow (۱ - x')(x'' - ۱) > ۰ \Rightarrow x'' - ۱ - x'x'' + x' > ۰$$

$$\Rightarrow (x'' + x') - xx'' - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{m+۱}{m+۲} - \frac{m}{m+۲} - ۱ > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱-m-۲}{m+۲} > ۰ \Rightarrow \frac{-m-۱}{m+۲} > ۰$$

m		-۲		-۱	
$-m-۱$	+		+	○	−
$m+۲$	−	○	+		+
$P = \frac{-m-۱}{m+۲}$	−	ت ن	+	○	−
$P > ۰$			ج		

$(-۲ < m < -۱)$

-۲

$$(x-۱)^۲ = x^۲ - ۲x + ۱ \geq ۰ \xrightarrow[x>۰]{\text{تقسیم بر } x} x - ۲ + \frac{۱}{x} \geq ۰ \Rightarrow x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

چون a و b مثبتند پس $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ مثبت و عکس یکدیگرند پس $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$

-۳

$$(x-y)^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \Rightarrow (x+y)^۲ - ۴xy \geq ۰$$
$$(x+y)^۲ \geq ۴xy$$

چون طرفین عبارت نامنفی‌اند از طرفین جذر می‌گیریم.

$$x + y \geq ۲\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

۴- بازوهای شاهین ترازو را x و y می‌گیریم $(x \neq y)$. کالایی را در نظر می‌گیریم که وزن واقعی آن برابر ۲a کیلوگرم باشد. در کفهٔ مجاور بازوی به طول x (نصف کالا = a کیلوگرم) را می‌گذاریم فرض کنید برای تعادل ترازو لازم باشد در کفهٔ دیگر وزنهٔ $a_۱$ کیلوگرم را قرار دهیم باید داشته باشیم:

$$a \times x = a_۱ \times y$$

در نتیجه:

$$a_۱ = a\frac{x}{y} \qquad (۱)$$

اکنون نصف دیگر کالا را در کفهٔ دوم قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم برای تعادل ترازو در کفهٔ دیگر $a_۲$ کیلوگرم گذاشته باشیم:

$$a \times y = a_۲ \times x \Rightarrow a_۲ = a\frac{y}{x} \qquad (۲)$$

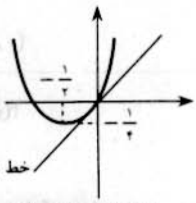
آیا $a_۱ + a_۲ = ۲a$ ؟ اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم داریم:

$$a_۱ + a_۲ = a(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) > a \times ۲ = ۲a$$

با توجه به مثبت بودن مقدارهای x و y $(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > ۲)$ (چون $x \neq y$ پس حالت تساوی رخ نمی‌دهد) یعنی $a_۱ + a_۲ > ۲a$ لذا وزن واقعی کالا از $a_۱ + a_۲$ کم‌تر است. لذا بازرگان درستکار ضرر می‌کند!

۵-

$$f(x) = (x + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}$$



فرض کنیم معادلهٔ خط مماس در مبداء به صورت $y = mx$ باشد. این خط باید منحنی را فقط در یک نقطه قطع کند لذا تعداد جواب دستگاه $\begin{cases} y = x^۲ + x \\ y = mx \end{cases}$ یک جواب است.

پس معادلهٔ $x^۲ + x = mx$ و در نتیجه $x^۲ + (۱ - m)x = ۰$ باید یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد. $\Delta = ۰$ درنتیجه $(۱ - m)^۲ - ۰ = ۰$ و در نتیجه $m = ۱$ و معادله خط مماس به صورت $y = x$ خواهد بود.

۶-

$$\frac{x\sqrt{(x-۲)^۲}}{x^۲-۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x|x-۲|}{x^۲-۱} > ۰$$

عبارت $|x - ۲|$ همواره مثبت است (به استثنای $x = ۲$ که مقدار آن صفر است.)

x		−۱		۰		۱		۲	
x	−		−	۰	+		+		+
$\|x - ۲\|$	+		+		+		+	۰	+
$x^۲ - ۱$	+	۰	−		−	۰	+		+
$P = \frac{x\|x-۲\|}{x^۲-۱}$	−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	۰	+
$p > ۰$			ج				ج		ج

$$\text{مجموعه جواب} = (-۱ , ۰) \cup (۱ , +\infty) - \{۲\}$$

۷-

x		۱		۳	
$a'x + b'$	$-$	○	$+$		$+$
$ax^۲ + bx + c$	$-$	○	$+$	○	$-$
$(a'x + b)(ax^۲ + bx + c)$	$+$	○	$+$	○	$-$

■ دورهٔ سریع مطالب

۱- درست　　۲- درست

۳- نادرست　　۴- درست

۵- درست　　۶- $\varnothing$

۷- بازهٔ $(۰ , ۱)$　　۸- $a > ۰$ و $\Delta < ۰$

۹- $f(\alpha) < ۰$　　۱۰- $(۲ , ۳)$

■ آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ «۲»

$$\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱} < ۰ \xRightarrow{x^۲+۱>۰} x^۲ - ۱ < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

۲- گزینهٔ «۳»

$$-x^۲ + ۲x + ۱۱ \geq ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴۸}}{-۲} = ۱ \pm ۲\sqrt{۳}$$

x		$۱ - ۲\sqrt{۳}$		$۱ + ۲\sqrt{۳}$	
$-x^۲ + ۲x + ۱۱$	$-$	○	$+$	○	$-$
$-x^۲ + ۲x + ۱۱ \geq ۰$		ج	ج	ج	

تعداد اعداد صحیحی که در محدودهٔ $[۱ - ۲\sqrt{۳} , ۱ + ۲\sqrt{۳}]$ هستند مورد جواب است که عبارتند از:

$-۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ \Rightarrow$ ۷ عدد صحیح

۳- گزینهٔ «۱»

$$\frac{3x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - 1 > 0 \xRightarrow{\text{با فرض } x\neq 1} \frac{3x-(x^2+x+1)}{x^2+x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x-1}{x^2+x+1} > 0$$

x		1	
$-x^2+2x-1$	$-$	0	$-$
x^2+x+1	$+$		$+$
$P = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+x+1}$	$-$	ت ن	$-$
$P > 0$			

$\varnothing$ = مجموعه جواب

۴- گزینهٔ «۲»

$$\Delta > 0 \Rightarrow (k^2+1)^2 - 4(-k^2-2) > 0 \Rightarrow k^4 + 2k^2 + 1 + 4k^2 + 8 > 0$$

$\underbrace{4k^2 + 6k^2 + 9}_{\text{ی این عبارت منفی است}\Delta} > 0 \Rightarrow$ علامت عبارت همواره مثبت است. $\Rightarrow k \in \mathbb{R}$

۵- گزینهٔ «۱»

$$(x+1)(x^2 - x + 6m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - x + 6m = 0 \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب دو جواب} = 6m \end{cases}$$

$= (-1) \times 6m = -6 \Rightarrow m = 1$ حاصل‌ضرب سه جواب

۶- گزینهٔ «۲». از روی نمودار واضح است که ناحیه جواب در محدودهٔ بازهٔ $(-1, 2)$ می‌باشد.

۷- گزینهٔ «۴»

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x^2 - x + 1 > 2x^2 + 1 \Rightarrow -x^2 - x > 0$$

x		-1		0	
$-x^2-x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$-x^2-x>0$			ج		

$(-1, 0)$ = جواب

۸- گزینهٔ «۱»

$$f(x) = a(x-x')(x-x'') = a(x-0)(x-3) = ax(x-3)$$

$$f(-2) = -5 \Rightarrow -5 = a(-2)(-2-3) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۹- گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}\Delta < 0 \\ a > 0\end{cases} \Rightarrow 4 - 16a^2 < 0$$

	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
$4 - 16a^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
a	$-$	$-$	$+$	$+$
$4 - 16a^2 < 0$	ج			ج
$a > 0$			ج	ج
جواب مشترک				ج

$a > \frac{1}{2}$

۱۰- گزینهٔ «۴»، باید داشته باشیم $f(x) \geq 0$ با توجه به نمودار $D_g = [-3, 2] \cup [4, +\infty)$

پاسخ ایستگاه فکر

A

۹	۳	۶

B

۴
۵

C

۱	۲
۷	۸