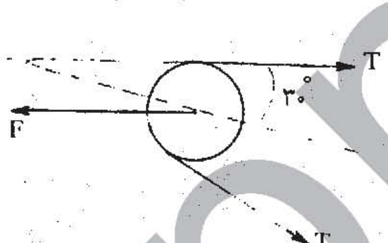
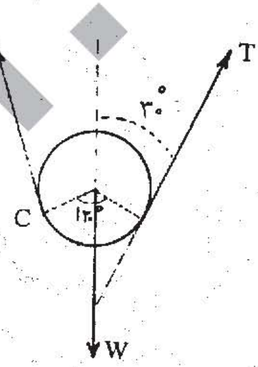
پاسخ مسئله‌ها

۱ ـ در شکل (۶ ـ ۶) قرقرهٔ پائینی که وزنهٔ W به آن آویخته شده، نشان داده شده است. چون نخ بدون جرم است، نیروی کشش نخ در همهٔ نقاط آن یکسان است. (به توضیحات سؤال چهارگزینه‌ای شمارهٔ ۱ اولین المپیاد، صفحهٔ ۲۶ مراجعه شود). چون قرقرهٔ C در حال تعادل است، باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد. پس داریم:



شکل (٦ ـ ٧)



شکل (٦ ـ ٦)

$$2T\cos 30^\circ = W$$

در شکل (۶ ـ ۷) قرقرهٔ بالایی A نشان داده شده است. از مشابهت دو شکل (۶ ـ ۶) و (۶ـ۷) پیداست که برآیند نیروهای کشش نخ در این حالت نیز برابر با W است و روی نیمساز زاویهٔ میان دو نخ قرار دارد. با آویختن وزنهٔ W به قرقرهٔ C، این قرقره پائین می‌آید و دو قرقرهٔ A و B به طرف هم می‌روند و در نتیجه فنر فشرده می‌شود. نیروی F در شکل (۶ ـ ۷) نیرویی است که فنر فشرده بر قرقرهٔ A وارد کرده است. چون این قرقره نیز در حال تعادل است، پس

باید نیروی F با مؤلفهٔ افقی نیروهای کشش نخ برابر باشد. پس داریم:

$$F = W\cos ۳۰ = ۱۰۰\sqrt{\frac{۳}{۲}} = ۵۰\sqrt{۳}$$

با توجه به قانون هوک برای کاهش طول فنر داریم:

$$\Delta l = \frac{F}{k} = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{۲۰۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۰/۴۲۵\,\text{cm}$$

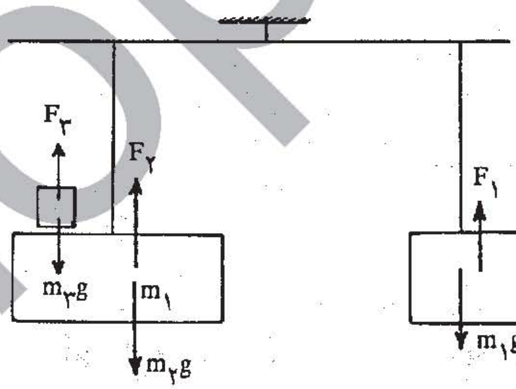
اگر هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را l بنامیم داریم:

$$l = l_{\circ} - \Delta l = ۶۰ - ۰/۴۲۵ = ۵۹/۵۷۵$$

از شکل (۶ ـ ۶) پیداست که $\frac{۱}{۳}$ محیط هر قرقره به توسط طناب پوشیده شده است. بنابر این طول طناب مجموع سه ضلع مثلث، به علاوه یک محیط قرقره خواهد بود.

$$L = ۳l + ۲\pi r = ۱۷۸/۷۲۵ + ۳/۱۴ \times ۱۰ = ۲۱۰/۱۲۵\,\text{cm}$$

۲ ـ در شکل (۶ ـ ۸) نیروهای وارد بر هر کدام از وزنه‌ها در آب نشان داده شده است.



شکل (٦ ـ ٨)

برآیند نیروهای وارد بر m_1 چنین است:

$$W'_1 = m_1 g - F_1 = m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1}\rho' g$$

برآیند نیروهای وارد بر وزنه‌های m_2 و m_3 به ترتیب برابر است با:

$$W'_2 = m_2 g - F_2 = m_2 g - \frac{m_2}{\rho_2}\rho' g$$

$$W_3 = m_3 g - F_3 = m_3 g - \frac{m_3}{\rho_1}\rho' g$$

چون ریسمان به وسط میله بسته شده و میله در حال تعادل است، پس باید برآیند نیروهای وارد سه میله برابر باشد. داریم:

$$m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1}\rho' g = (m_2 g - \frac{m_2}{\rho_2}\rho' g) + (m_3 g - \frac{m_3}{\rho_3}\rho' g)$$

$$۱۹/۵ + \frac{۱۹/۵}{۷/۸} \times ۱ = (۱۹/۵ - \frac{۱۹/۵}{\rho_2} \times ۱) + (\frac{۱۱۷}{۱۳۶} - \frac{۱۱۷}{۱۳۶ \times ۷/۸} \times ۱)$$

$$(۱۹/۵ - \frac{۱۱۷}{۱۳۶})(۱ - \frac{۱}{۷/۸}) = ۱۹/۵(۱ - \frac{۱}{\rho_2})$$

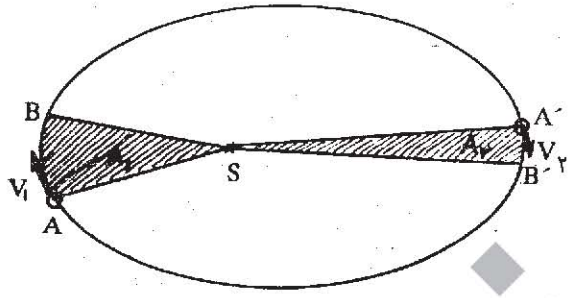
$$۱۶/۲۵ = \frac{۱۹/۵\rho_2 - ۱۹/۵}{\rho_2}$$

$$۳/۲۵\,\rho_2 = ۱۹/۵$$

$$\rho_2 = ۶ \text{ g/cm}^3$$

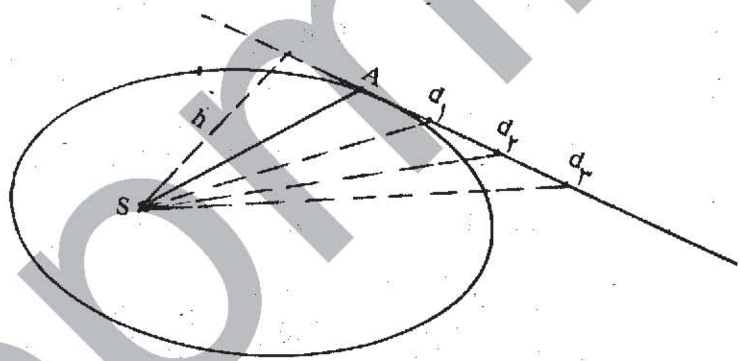
۳ـ در شکل (۶ـ۹) سیاره در دو قسمت از مسیر بیضی شکل نشان داده شده است.

الف ـ اگر مساحت دو قسمت هاشورخوردهٔ A_1 و A_2 مساوی باشد، طبق قانون دوم کپلر، سیاره دو کمان AB و A′B′ را در زمانهای مساوی می‌پیماید. چون طول کمان AB از طول کمان A′B′ بیشتر است، سرعت پیمودن کمان AB از سرعت پیمودن کمان A′B′ بیشتر است. بنابر این هنگامی که سیاره کمترین فاصله را با خورشید دارد، سرعت آن حداکثر است.



شکل (۶ ـ ۹)

ب ـ اگر نیروی گرانش خورشید بر سیاره صفر شود، شتاب سیاره از میان می‌رود و طبق قانون اول نیوتون، باید سیاره با سرعت ثابت روی یک خط راست حرکت کند.



شکل (۶ ـ ۱۰)

ج – مسیر حرکت سیاره از این پس در شکل (۶ – ۱۰) نشان داده شده است.

نیروی خورشید بر سیاره در نقطهٔ A از مسیرش، از میان رفته است. از این پس سیاره در فاصله‌های زمانی مساوی فاصله‌های مساوی d_1 و d_2 و d_3، ... را می‌پیماید. در این حالت شعاع حامل سیاره، مثلث‌هایی را می‌پیماید، که قاعدهٔ آنها طولهای مساوی d_1، d_2، d_3، ... و ارتفاع همهٔ آنها مقدار ثابت h است. آشکار است که چون مساحت همهٔ مثلثها با هم برابر است، پس شعاع حامل سیاره در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی جاروب می‌کند. بنابراین پس از صفرشدن نیروی گرانش خورشید بر سیاره نیز قانون دوم کپلر درست است.

۴ ـ چون ظرف دارای دیواره‌های عایق حرارتی است و انرژی کل دستگاه تغییر نمی‌کند، انرژی گرمایی که یک قسمت از دست داده است، با انرژی گرمایی که قسمت دیگر دریافت کرده است، برابر است. دمای نهایی گاز را T و جرم آنها را m_A و m_B فرض می‌کنیم. داریم:

$$m_A C (T - T_A) = m_B C (T_B - T) \qquad (۱ـ۶)$$

اگر جرم مولکولی گاز را M فرض کنیم، تعداد مولهای موجود در هر قسمت چنین است:

$$n_A = \frac{m_A}{M} \qquad n_B = \frac{m_B}{M} \qquad (۲ـ۶)$$

در رابطه‌های بالا، تعداد مولهای گاز در دو قسمت با n_A و n_B نشان داده شده است.
با استفاده از رابطه‌های (۶ ـ ۱) و (۶ ـ ۲) داریم:

$$\frac{n_A}{n_B} = - \frac{T - T_B}{T - T_A}$$

$$n_A T - n_A T_A = - n_B T + n_B T_B$$

$$T = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} \qquad (۳ـ۶)$$

برای یک گاز کامل داریم:

$$\frac{PV}{T} = \text{مقدار ثابت} \qquad (۴ـ۶)$$

چون مقدار ثابت در رابطهٔ (۶ ـ ۴) با تعداد مولهای گاز متناسب است، می‌توان رابطهٔ رابطهٔ (۶ ـ ۴) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{PV}{T} = nR \qquad (۵ـ۶)$$

در رابطهٔ (۶ ـ ۵)، n تعداد مولهای گاز و R یک ضریب ثابت است. اگر رابطهٔ (۶ ـ ۵) را

برای دو قسمت گاز بنویسیم داریم:

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = n_A R \longrightarrow n_A = \frac{P_A V_A}{T_A R} \qquad (۶-۶)$$

$$\frac{P_B V_B}{T_B} = n_B R \qquad n_B = \frac{P_B V_B}{T_B R} \qquad (۷-۶)$$

اگر n_A و n_B را از رابطه‌های (۶-۶) و (۶-۷) در رابطهٔ (۶-۳) قرار دهیم داریم:

$$T = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{\frac{P_A V_A}{T_A} + \frac{P_B V_B}{T_B}} = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{P_A V_A T_B + P_B V_B T_A} T_A T_B$$

اگر فشار نهایی گاز را پس از برداشتن دیوارهٔ P فرض کنیم، داریم:

$$\frac{PV}{T} = nR$$

که در آن $V = V_A + V_B$ و $n = n_A + n_B$ خواهد بود. پس برای فشار نهایی گاز داریم:

$$P = \frac{n_A + n_B}{V_A + V_B} TR \qquad (۸-۶)$$

اگر T را از رابطهٔ (۶-۳) در رابطه (۶-۸) قرار دهیم داریم:

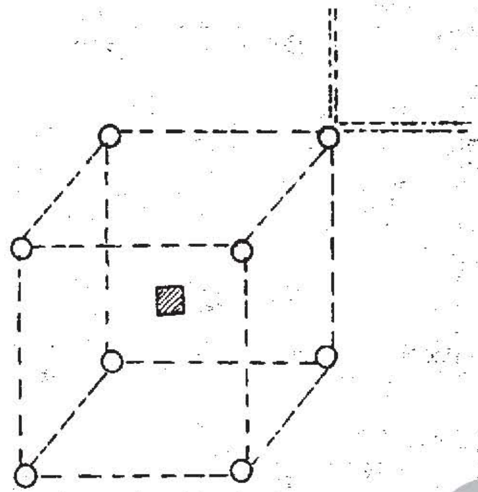
$$P = \frac{n_A + n_B}{V_A + V_B} \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} R = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{V_A + V_B} R \qquad (۹-۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶-۶) و (۶-۷)، فشار نهایی گاز به صورت زیر خواهد شد.

$$P = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{V_A + V_B}$$

۵- در شکل (۶-۱۱) یک مکعب وضوح بیشتر اتمی که در مرکز مکعب قرار دارد، با علامت

دیگری نشان داده شده است.



شکل (۶ ـ ۱۱)

یکی از اتمهایی را که در یک رأس مکعب قرار دارد در نظر می‌گیریم. این اتم میان ۸ مکعب که یک رأس از هر کدام در آن محل قرار دارد مشترک است. بنابراین می‌توان گفت به طور متوسط سهم هر مکعب از یک اتم آهنی که در یک رأس قرار دارد، $\frac{1}{8}$ است. چون هر مکعب ۸ رأس دارد، بنابراین به طور متوسط از اتمهای آهن که در رأسهای هر مکعب قرار دارند، یک اتم ($8 \times \frac{1}{8} = 1$) آهن به هر مکعب تعلق دارد. علاوه بر آن یک اتم آهن نیز در مرکز مکعب است و به این ترتیب به هر مکعب ۲ اتم آهن تعلق دارد. جرم هر اتم آهن چنین است:

$$m_A = \frac{M}{N_A} = \frac{56}{6 \times 10^{23}}$$

اگر ضلع هر مکعب را a cm فرض کنیم، تعداد مکعب‌های موجود در هر سانتیمترمکعب چنین است:

$$n = \frac{1}{a^3}$$

جرم اتمهای موجود در هر سانتیمتر مکعب که همان چگالی است، چنین است:

$$\rho = n \times 2 \times m_A = \frac{1}{a^3} \times 2 \times \frac{56}{6 \times 10^{23}}$$

$$a^3 = \frac{2 \times 56}{7/9 \times 6 \times 10^{23}} = 23/628 \times 10^{-24}$$

$$a = 2/87 \times 10^{-8}\,\text{cm}$$

۶ - در شکل (۶-۱۲) خورشید و مریخ به فاصلهٔ d از آن، نشان داده شده است. توان تابش شده از واحد سطح خورشید را P_1 می‌نامیم. داریم

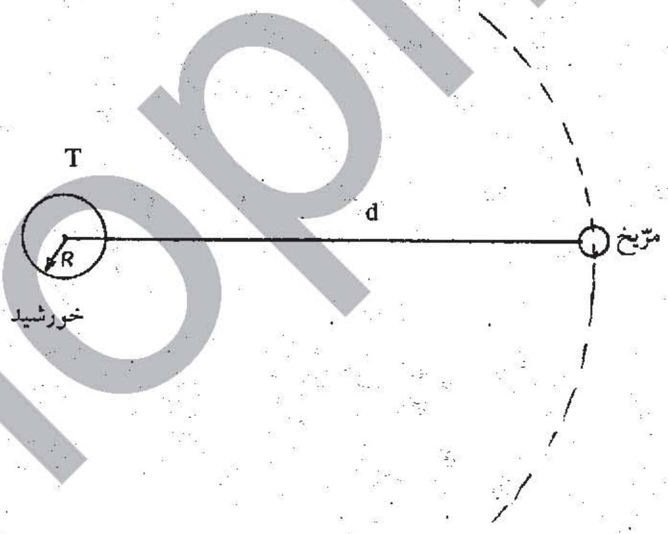
$$P_{1s} = \sigma T^4$$

توان تابش شده توسط کل سطح خورشید که کره‌ای به شعاع R است، چنین است.

$$P_s = 4\pi R^2 P_{1s} = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

این انرژی در واحد زمان، در محل مریخ، روی کره‌ای به شعاع d توزیع شده است. بنابراین توانی که به واحد سطح این کره می‌رسد، چنین است.

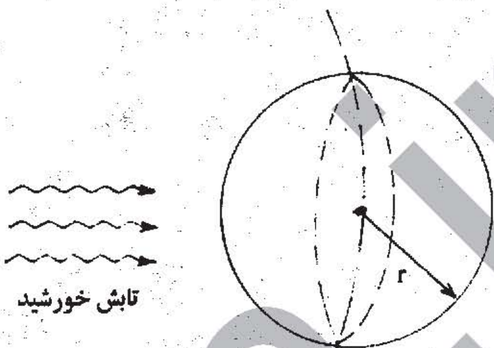
$$P_{1M} = \frac{P_s}{4\pi d^2} = \frac{R^2 \sigma T^4}{d^2}$$



شکل (۶-۱۲)

چون مریخ از خورشید فاصلهٔ زیادی دارد، می‌توان فرض کرد که یک نیمکره از مریخ در

معرض تابش خورشید قرار دارد. توانی که این نیمکره جذب می‌کند، با توانی که دایرهٔ عظیمهٔ مریخ جذب می‌کند، برابر است، زیرا مساحت موثر نیمکره در برابر تابش خورشید، با مساحت دایرهٔ عظیمه آن برابر است. (به شکل (۶ – ۱۳) نگاه کنید)



شکل (۶ – ۱۳)

اگر شعاع مریخ را r فرض کنیم، توان تابیده به سطح مریخ چنین است.

$$P_M = \pi r^2 P_{1M} = \frac{\pi r^2 R^2 \sigma T^4}{d^2} \qquad (۶\text{ـ}۱۰)$$

چون مریخ را جسم سیاه فرض کرده‌ایم، تمام توان تابیده به مریخ توسط آن جذب می‌شود. بنابراین توان جذب شده توسط مریخ همان P_M است.

اگر دمای مریخ را که در تمام سطح آن یکسان است T' فرض کنیم، از تمام سطح کره‌ای به شعاع r انرژی تابش می‌شود. توان تابش شده از واحد سطح این کره چنین است.

$$P'_{1M} = \sigma T'^4$$

توان تابش شده از تمام سطح مریخ چنین است.

$$P'_M = 4 \pi r^2 P'_{1M} = 4 \sigma r^2 \sigma T'^4 \qquad (۶\text{ـ}۱۱)$$

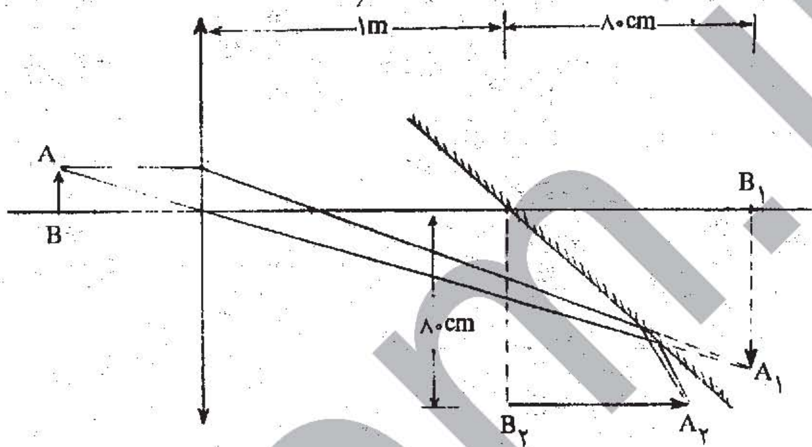
در حالت تعادل توان تابش شده و توان جذب شده برابر است. با برابر قرار دادن رابطه‌های (۶ ـ ۱۰) و (۶ ـ ۱۱) داریم:

$$4 \pi r^2 \sigma T'^4 = \frac{\pi r^2 R^2 \sigma T^4}{d^2}$$

$$T'^{4} = \frac{R^{2} T^{4}}{4 d^{2}}$$

$$T' = T \sqrt[4]{\frac{R^{2}}{4 d^{2}}} = 5880 \sqrt[4]{\frac{49 \times 10^{16}}{4 \times 484 \times 10^{20}}} = 234^{\circ}k$$

۷ - ابتدا فرض می‌کنیم آینهٔ تخت وجود ندارد. عدسی از جسم تصویری حقیقی می‌دهد، داریم:



شکل (۶ ـ ۱۴)

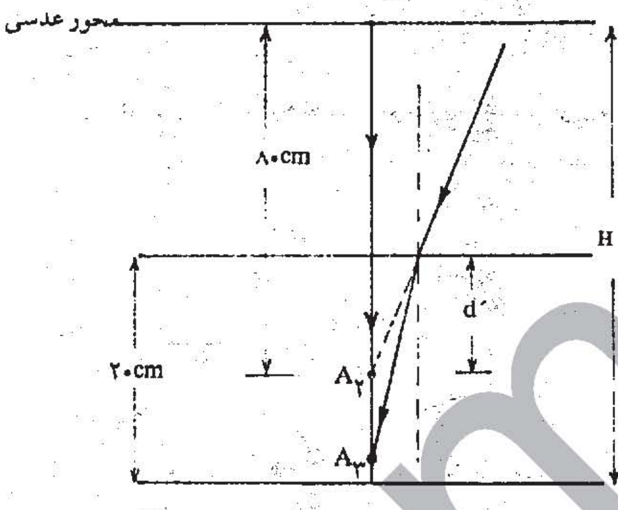
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{q} = \frac{1}{30}$$

$$q = \frac{36 \times 30}{36 - 30} = 180 \text{ cm}$$

چون آینهٔ تخت به فاصلهٔ 1 m از عدسی قرار دارد، آینه مانع از تشکیل تصویر حقیقی می‌شود و نورها پیش از آن‌که در نقطهٔ A به هم برسند، از آینه باز می‌تابند. تصویر $A_1 B_1$ در پشت آینهٔ تخت مانند یک جسم مجازی، در آینهٔ تخت تصویر حقیقی می‌دهد. از شکل (۶-۱۴) پیداست که تصویر حقیقی $A_2 B_2$ به فاصلهٔ 80 cm از محور عدسی تشکیل می‌شود. اکنون ظرف آب را زیر آینه در نظر می‌گیریم. نورهایی که از آینه باز تابیده و در نقطهٔ

$A_۲$ یکدیگر را قطع می‌کردند، با وارد شدن به آب تغییر مسیر داده و در نقطهٔ $A_۳$ ته ظرف یکدیگر را قطع می‌کنند و آخرین تصویر در ته ظرف تشکیل می‌شود. اگر نورها نزدیک به خط عمود باشند داریم:



شکل (۶-۱۵)

$$\frac{d}{d'} = n$$

$$\frac{۲۰}{d'} = \frac{۴}{۳} \longrightarrow d' = ۱۵\ cm$$

با استفاده از شکل (۶-۱۵) داریم:

$$H = ۸۰ + ۵ = ۸۵\ cm$$

۸ - به علت افزایش دما طول و در نتیجه سطح حلقه افزایش می‌یابد. اگر میدان مغناطیسی وجود نداشت، تغییر مساحت حلقه تأثیری نداشت و نیروی محرکهٔ لازم برای گذراندن جریان I از حلقه از قانون اهم برابر R I به دست می‌آمد.

چون حلقه در میدان مغناطیسی قرار دارد، از سطح آن شار مغناطیسی می‌گذرد که با تغییر مساحت حلقه، شار مغناطیسی نیز تغییر می‌کند. تغییر شار مغناطیسی نیروی محرکه‌ای در حلقه ایجاد می‌کند که با عامل مولد آن که همان نیروی محرکهٔ ایجاد کننده جریان I است مخالفت می‌کند. بنابراین نیروی محرکهٔ مدار جمع جبری نیروی محرکهٔ خارجی (مثلاً باتری) و نیروی محرکه القایی است و مجموع نیروی محرکه، جریان I در مدار ایجاد می‌کند. داریم:

$$E - \frac{d\varphi}{dt} = R\,I \qquad (۱۲-۶)$$

شار مغناطیسی که در هر لحظه از مدار می‌گذرد چنین است.

$$\varphi = B\,A = B\,A_۰\,(۱ + ۲\lambda\,\Delta\theta)$$

انرژی گرمایی تولید شده در مدار، دمای آن را بالا می‌برد و داریم:

$$R\,I^۲\,t = m\,C\,\Delta\theta \longrightarrow \Delta\theta = \frac{R\,I^۲\,t}{mC} \qquad (۱۳-۶)$$

اگر $\Delta\theta$ را از رابطه (۶ ـ ۱۳) در رابطه (۶ ـ ۱۲) قرار دهیم، داریم:

$$\varphi = B\pi\left(\frac{L_0}{2\pi}\right)^2 \left(1 + 2\lambda\frac{RI^2 t}{mC}\right)$$

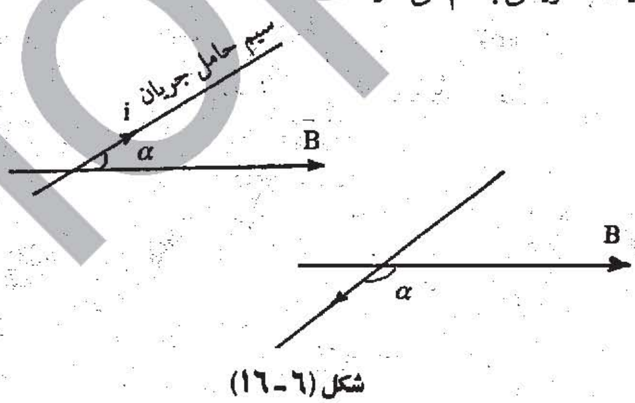
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{BL_0^2\lambda RI^2}{2\pi mC}$$

$$E = RI + \frac{d\varphi}{dt} = RI\left(1 + \frac{BL_0^2\lambda I}{2\pi mC}\right)$$

۹ ـ در فضای داخلی سیم‌پیچ میدان مغناطیسی یکنواخت تولید می‌شود که راستای آن بر محور سیم‌پیچ منطبق است. نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی B بر یک سیم به طول l که جریان i از آن می‌گذرد، چنین است

$$F = i\,l\,B\sin\alpha \qquad (۱۴ـ۶)$$

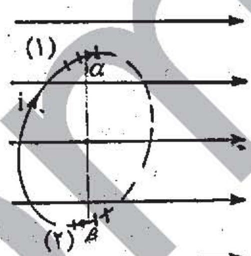
که در آن α زاویهٔ میان میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی است. در شکل (۶ ـ ۱۶) یک سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی برای دو حالت جریان نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل (۶ ـ ۱۶) پیداست، زاویهٔ میان میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی، زاویهٔ میان سیم و میدان مغناطیسی نیست، بلکه زاویه‌ای است که دو جهت مثبت میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی با هم می‌سازند.



شکل (۶ ـ ۱۶)

در شکل (۶ ـ ۱۷) حلقهٔ دارای جریان i در میدان مغناطیسی یکنواخت حاصل از سیم‌پیچ نشان داده شده است. در اینجا نمی‌توان نیروی وارد بر حلقه را با استفاده از رابطهٔ (۶ ـ ۱۴)

یکسره به دست آورد، زیرا زاویهٔ میان میدان مغناطیسی و جریان حلقه در نقاط مختلف حلقه متفاوت است. راه ساده برای محاسبهٔ نیروی وارد بر حلقهٔ آن است که حلقه را به تعداد زیادی قطعهٔ کوچک تقسیم کنیم و نیروی وارد بر هر قطعه را پیدا کرده و سپس برآیند نیروها را به دست آوریم. فرض کنید نیروی وارد بر قطعهٔ (۱) f_1 باشد. نیروی وارد بر قطعهٔ (۲)، f_2، که درست مقابل آن است (خطی که دو قطعه را به هم وصل می‌کند، از مرکز حلقه می‌گذرد) با نیروی f_1 هم اندازه است زیرا طول دو قطعه با هم برابر است و دو زاویهٔ α و β مکمل یکدیگرند و در نتیجه سینوس آنها با هم برابر است. ولی با استفاده از قانونِ دست راست جهت دو نیروی f_1 و f_2 خلاف یکدیگر است. بنابراین برآیند دو نیروی f_1 و f_2 صفر است. اگر همین استدلال رادربارهٔ هر دو قطعهٔ روبه‌روی هم به کار بریم، به این نتیجه می‌رسیم که نیروی وارد بر کل حلقه صفر است.



شکل (۶ ـ ۱۷)

۱۰ ـ پس از گذشت مدت زمان طولانی از بستن کلید، خازن پر شده و جریان در مدار متوقف می‌شود. در این حالت اختلاف پتانسیل خازن با بار q، برابر با $\frac{q}{c}$ خواهد بود. اگر مدار را مطابق با شکل (۶ ـ ۱۸) در یک جهت دور بزنیم، داریم:

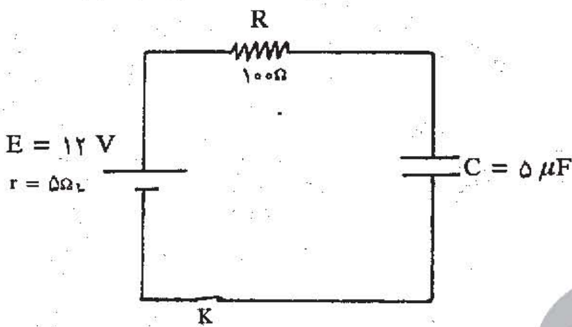
$$E = I\,(R + r) + \frac{q}{c} = ۰\,(۱۰۰ + ۵) + \frac{q}{c} = \frac{q}{c}$$

$$q = E\,C = ۱۲ \times ۵ \times ۱۰^{-۶} = ۶۰ \times ۱۰^{-۶}\ \text{Coul}$$

انرژی ذخیره شده در خازن U_c چنین است.

$$U_c = \frac{q^۲}{۲\,c} = \frac{۳۶ \times ۱۰^{-۱۰}}{۲ \times ۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۳/۶ \times ۱۰^{-۴}\ \text{J}$$

قبل از بستن کلید، هر دو صفحهٔ خازن بدون بار الکتریکي است. آنچه در عمل اتفاق می‌افتد این است که الکترونهای صفحهٔ متصل به قطب مثبت آن را ترک کرده و پس از عبور از باتری روی صفحهٔ متصل به قطب منفی جمع می‌شوند. به این ترتیب تمام q کولن بار الکتریکی که در خازن ذخیره شده است، از باتری عبور کرده است. با توجه به تعریف نیروی محرکه، هر کولن بار الکتریکی که از باتری عبور می‌کند، به اندازهٔ E ژول انرژی از باتری می‌گیرد. بنابراین انرژی مصرف شده توسط باتری در مدتی که خازن پر شده است، برابر است با:



شکل (۶ـ۱۸)

$$U = Eq = ۱۲ \times ۶۰ \times ۱۰^{-۶} = ۷/۲ \times ۱۰^{-۴}\ J$$

از این مقدار انرژی U_c در خازن ذخیره شده و بقیه در دو مقاومت R و r به گرما تبدیل شده است.

$$U_t = U - U_c = ۷/۲ \times ۱۰^{-۴} - ۳/۶ \times ۱۰^{-۴} = ۳/۶ \times ۱۰^{-۴}\ J$$

چون انرژی گرمایی در رسانا با مقاومت آن متناسب است $(U_R = R I^۲ t)$، پس انرژی گرمایی تولید شده در دو مقاومت، متناسب با R و r است. پس داریم:

$$U_{tR} = U_t \frac{R}{r R} + = ۳/۶ \times ۱۰^{-۴} \frac{۱۰۰}{۱۰۰ + ۵} = ۳/۴۲ \times ۱۰^{-۴}\ J$$