بسم الله الرحمن الرحیم

سلام دوستان. ایام به کام!

این PDF شامل نمونه سؤالاتی راجع به قدرمطلق و جزءصحیح و چندجمله‌ای‌ها و مثلثات است.

واحد جزوه و نمونه سؤال وبلاگ کلاس ۳۰۵

دبیرستان علامه حلی تهران

محمدرضا طیبی سمنانی

Helli305.ir ۱۰/ دی ماه / ۹۳

• • • • • • • • • •

• • • • • • • • • •

• • • قدر مطلق

{1*}

برای اعداد حقیقی و دلخواه x, y, z نابرابری مقابل را ثابت کنید؛

و تعیین کنید حالت تساوی به ازای چه مقادیری از این سه عدد رخ می دهد :

$$\frac{|x-(y+z)|+|y-(z+x)|}{2} \geq |x+y| - |z-(x+y)|$$

{2}

اگر نمودار $f(x) = \log(5x + \sqrt{1+ax^2})$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشند؛

a و b را طوری به دست آورید که $y = |x+a| + |x+b|$ زوج باشد.

{3**}

تمام اعداد حقیقی مانند $x_1, x_2, \dots, x_{1393}$ را چنان بیابید که

الف) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1393} = 1393$

ب) $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \cdots = |x_{1393} - x_1|$

{4}

معادلات و نامعادلات روبرو را حل کنید:

- $|2x-3| \leq 6$
- $\frac{3}{|2x-1|} \geq 4$
- $\sqrt{(x^2-5x+6)^2} = x^2-5x+6$
- $\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6$
- $|3x^2+2x| = x|3x+2|$

{5**}

مقدار عبارت مقابل را محاسبه نمایید : $|2a^3 - 3a^2 - 3a - 2009| - |2a^3 - 3a^2 - 2a + 1|$

که در آن مقدار a برابر است با 2009.

پاسخ نهایی : 4019.

{6**}

a, b, c اعدادی حقیقی باشند به طوری که $|a|, |b|, |c|$ هر سه اعدادی کم تر اکید از 1 باشند.

حکم مقابل را ثابت کنید: $ab + bc + ca + 1 > 0$.

{7*}

در مورد اعداد حقیقی a و b می دانیم $x + y = s, xy = p$ مقدار $|x| + |y|$ را بر حسب s و p محاسبه نمایید.

{8}

تمام جواب های حقیقی از معادله ی مقابل را بیابید:

$$\left|2 - \left||x| + 3\right|\right| = 1$$

{9*}

معادله ی زیر را در مجموعه ی اعداد حقیقی حل کنید:

$$|x| + \lfloor x \rfloor^2 = x^2$$

{10}

الف) $\lfloor x \rfloor \le x \le |x|$

ب) $\lceil x \rceil \ge x \ge -|x|$

{11*}

کم ترین مقدار تابع که در آن $a < b < c$ را بیابید .

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$$

راهنمایی : $\min f = f(b)$.

{12**}

معادله ی مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی حل نمایید :

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$$

{13**}

دستگاه معادلات مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی حل کنید.

$$\begin{cases} |a-2b| = 1 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases}$$

{14**}

دستگاه مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی حل کنید.

$$\begin{cases} |x-y| = x+y-2 \\ |x+y| = x+2 \end{cases}$$

{15●●}

مقدار m را چنان پیدا کنید که این معادله فقط و فقط سه جواب در مجموعه ی اعداد صحیح داشته باشد.

$$\left||x-2|-1\right| = m$$

جزءِ صحيح

{1}

به ازای تمام اعداد حقیقی مثل x نشان دهید : $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$.

{2*}

تمام اعداد حقیقی مثل x و y را چنان بیابید که $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor = 70$

راهنمایی : 141 = 2*70+1 ... سپس از اتحاد جمله مشترک استفاده کنید.

{3*}

الف) معادله ی مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی حل نمایید : $\lfloor x^2 \rfloor + 3\lceil x \rceil + 2 = 0$.

راهنمایی : از تغییر متغیر x=-a برای راحت تر نوشتن معادلات استفاده کنید.

ب) معادله ی مقابل را نیز حل کنید (!)

$$\lfloor x^2 - 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$$

{4**}

فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه ی شامل تمام زوج های مرتب از اعداد حقیقی مثبت مثل (x,y) باشد که دارای خاصیت زیر هستند:

الف) $x + y \leq 2013$

ب) $\lfloor x \rfloor \lceil y \rceil = \lceil x \rceil \lfloor y \rfloor$

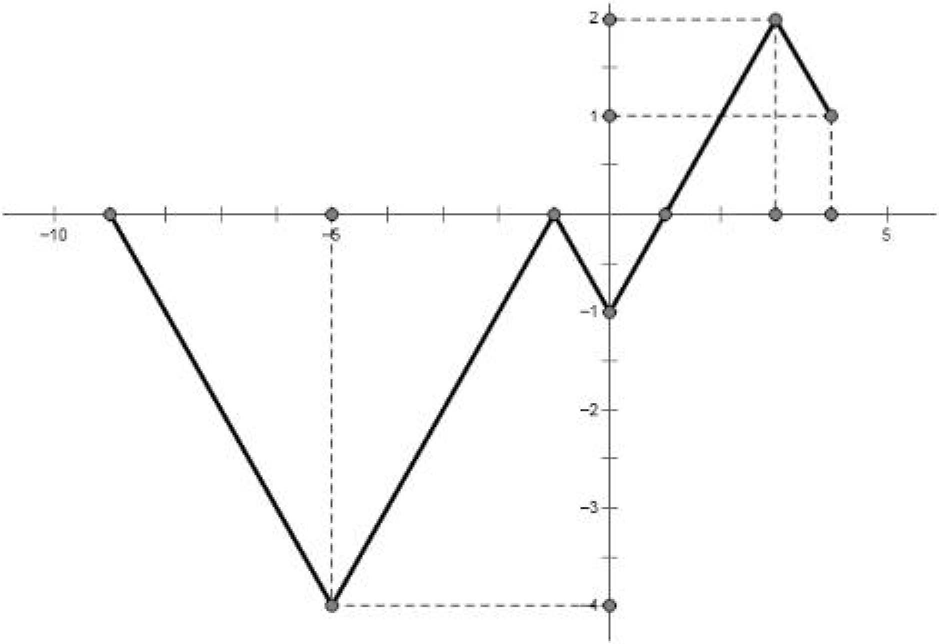
مطلوب است محاسبه ی مساحت شکلی که از رسم رابطه ی $\mathcal{M}$ در صفحه ی دکارتی حاصل می شود.

راهنمایی: واضح است رابطه ی ب برای اعداد طبیعی x درست است. برای اعداد غیر طبیعی با توجه به مثبت بودن x نتیجه بگیرید: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

پاسخ نهایی : 1006.5

{5}

نمودار تابع y=f(x) در شکل مقابل رسم شده است.



نمودار های زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(\lfloor x \rfloor - 2)$

ب) $\lfloor y \rfloor = f(|3 - x)|)$

راهنمایی (مهم!!) تعریف کنید : $g(x) = |3 + x|$ بنابراین باید $y = fog(x)$ را رسم کنیم. حال اگر تعریف کنیم $h(x) = fog(x)$ به این معنی است که باید نمودار تابع $y = h(x)$ را رسم کنیم. **ولی می دانیم نمودار $y = h(-x)$ همان نمودار $y = h(x)$ است که نسبت به محور y ها قرینه شده است.** حال $h(-x) = f(|3 + x|)$ که نمودار آن را بلدیم رسم کنیم.

ج) $y = [f(x)]$

❄❄د) $x + y \leq 1$ (با توجه به این که $y = f(x)$)

{6*}

می دانیم $\left\lfloor r+\frac{19}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{20}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{21}{100}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor r+\frac{91}{100}\right\rfloor=546$

مطلوب است محاسبه ی $\lfloor 100r\rfloor$.

راهنمایی : نشان دهید $\frac{743}{100}\le r<\frac{744}{100}$

{7}

تابع f با ظابطه $f(x)=x^2+\left\lfloor\frac{1}{1-\lfloor x^2\rfloor}\right\rfloor$ و دامنه ی R تعریف شده است.

ظابطه ی f^{-1} را در بازه ی $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ تعیین کنید.

{8}یک لم کاربردی

الف) نشان دهید $\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor=2\lfloor x\rfloor$.

ب) با استفاده از استقرا نشان دهید: $\forall n\in N:\ \underbrace{\left\lfloor x+\left\lfloor x+\left\lfloor x+\lfloor \ldots+\lfloor x\rfloor\rfloor\right\rfloor\right\rfloor\right\rfloor}_{n\ \text{مرتبه}}=n.\lfloor x\rfloor$.

{9}

فرض کنید x عددی مثبت باشد.

نشان دهید : $\lfloor 2x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$.

*نشان دهید $\lfloor nx\rfloor=\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{2}{n}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor$.

{10**}

چند عدد متمایز در دنباله ی مقابل یافت می شود؟

$$\left\lfloor\frac{1^2}{1393}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{2^2}{1393}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{3^2}{1393}\right\rfloor,\ldots,\left\lfloor\frac{1393^2}{1393}\right\rfloor$$

{11●●}

جواب های معادله ی مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید :

$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10!} \right\rfloor = 1001$$

{12}

اگر بدانیم $\frac{x-\lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil} \le 0$ آنگاه x چه اعدادی می تواند باشد؟

{13}

دامنه ی توابع زیر را بیابید

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lfloor x^2 \rfloor - |x|}}, f(x) = \sqrt{(2 - \lfloor x \rfloor)(\lfloor x \rfloor - 5)}$$

برد تابع مقابل را هم حساب کنید

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$$

{14}

اگر $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = 5$ مقدار $\left\lfloor \frac{2x+7y}{9} \right\rfloor$ را محاسبه کنید.

{15●●●}

برای هر عدد طبیعی مثل $n \ge 2$ نشان دهید:

$$\sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{n^2}{k} \right\rfloor = \sum_{k=n+1}^{n^2} \left\lfloor \frac{n^2}{k} \right\rfloor$$

چندجمله‌ای‌ها

{1}

چند جمله ای $f(x)$ بر چند جمله ای های $g(x)$ و $(x-a)$ بخش پذیز است. چنان چه بدانیم $g(a) \neq 0$ نشان دهید چند جمله ای $Q(x)$ موجود است به طوری که $f(x) = g(x)(x-a)Q(x)$.

(آیا اگر به جای $(x-a)$ چند جمله ای $l(x)$ را قرار دهیم به طوری که $l(x)$ و $g(x)$ ریشه مشترکی نداشته باشند مسئله هم چنان درست خواهد ماند؟)

{2●●}

نشان دهید چند جمله ای $(x+y)^n - (x^n + y^n)$ به ازای $n = 6k \pm 1$ بر $x^2 + xy + y^2$ بخش پذیر است.

{ نکته } قضیه ی اساسی جبر می گوید ریشه های یک چند جمله ای از درجه n ، حداکثر n تا است.

با استفاده از این مطلب اگر دو چند جمله ای مثل $P(x)$ و $Q(x)$ به ازای بیشتر از n عدد حقیقی با هم مساوی شوند ضرایب این دو چند جمله ای یکسان اند. زیرا اگر چند جمله ای $H(x) = P(x) - Q(x)$ را در نظر بگیرید، دارای بیشتر از n ریشه است و بنابراین تنها حالت ممکن این است که $H(x) \equiv 0$ یعنی ضرایب توان های یکسان x در P و Q با هم برابرند.

{3●}

- اگر برای چند جمله ای $P(x)$ داشته باشیم :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ P\big(2P(x)\big) = 2P\big(P(x)\big) + 2\big(P(x)\big)^2$$

الف) مطلوب است محاسبه ی $\deg\big(P(x)\big)$.

ب) با استفاده از قسمت الف و نکته ی قبلی ضرایب $P(x)$ را تعیین کنید و تمام چند جمله ای ها مثل $P(x)$ را بیابید که در شرایط مسئله صدق کنند.

{4●}

تمام چند جمله ای ها مثل $P(x)$ را چنان بیابید که $P\big(P(x)\big) = p(x^2)$.

{5*}

اگر $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1999}$، باقی مانده ی تقسیم $P(x^5)$ را بر کثیر الجمله ای $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ حساب نمایید.

{6**}

برای هر عدد طبیعی n نشان دهید کثیرالجمله ای $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ بر $2x^3 + 3x^2 + x$ بخش پذیر می باشد.

{7}

چند جمله ای $P(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 - kx + 11$ بر $x + 3$ بخش پذیر است؛ مقدار k را بیابید.

{8*}

چند جمله ای $P(x) = x^4 - ax^2 - bx + 2$ بر $(x+1)(x+2)$ بخش پذیر است. مقادیر a و b را پیدا کنید.

{9*}

مقادیر α, β را چنان پیدا نمایید که $x^5 - 5\alpha x + 4\beta$ بر کثیر الجمله ای $(x-2)^2$ بخش پذیر باشد.

{10***}

الف) اگر برای هر عدد حقیقی x بدانیم $a(cx+d)^2 + b = c(ax+b)^2 + d$ نشان دهید $a = b$ و $c = d$.

ب) در مورد دو چند جمله ای $P(x)$ و $Q(x)$ از درجه ی دوم می دانیم :

$$\forall\, x : P(Q(x)^2) = Q(P(x)^2)$$

نشان دهید $P = Q$

ج) در مورد دو چند جمله ای $P(x)$ و $Q(x)$ با درجات یکسان می دانیم :

$$\forall\, x : P(Q(x)^2) = Q(P(x)^2)$$

نشان دهید $P = Q$.

{11*}

مطلوب است محاسبه ی باقی مانده ی تقسیم کثیر الجمله ای $x^{47} + x^{28}$ بر $x^2 - x + 1$.

{12**}

اگر کثیر الجمله ای $x^3 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر باشد نشان دهید $a + 2b = -8$.

{13*}

فرض کنید $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ، نشان دهید باقی مانده ی تقسیم $P(x^{12})$ در تقسیم بر $P(x)$ برابر است با 6.

{14**}

اگر چند جمله ای $P(x) = ax^3 + bx + c$ بر $x^2 + tx + 1$ بخش پذیر باشد

ثابت کنید که : $a^2 - c^2 = ab$.

راهنمایی : شما باید ثابت کنید $at^2 + b - a = at + c = 0$ حل مسئله را با مقدار جدید t حل کنید.

{15****}

تمام چند جمله ای ها مثل $P(x)$ را چنان پیدا کنید که شرایط زیر را برآورده کند.

الف) $x^2 + 1 | P(x)$

ب) $x^3 + x^2 + 1 | P(x) + 1$

پاسخ پایانی : $P(x) = (x^2+1)(x^3+x^2+1)Q(x) + x^4 + x^3 + x - 1$

مثلّثات

{1}

مقدار عددی عبارت مقابل را بیابید:

الف) مطلوب است محاسبه ی :

$$\frac{\sin 40^0 + \sin 80^0}{\sin 110^0}$$

ب) مطلوب است محاسبه ی :

$$\frac{\sin 40^0 + \sin 80^0}{\sin 70^0}$$

{2*}

ثابت کنید

$$\sin 10^0 . \sin 20^0 . \sin 30^0 . \sin 40^0 . \sin 50^0 . \sin 60^0 . \sin 70^0 . \sin 80^0 . \sin 90^0 = \frac{3}{4}$$

{3*}

ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x}}} = \cos x$$

{4*}

برای دو عدد حقیقی x و y می دانیم:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1 \end{cases}$$

نشان دهید : $\cos 2x = cos\ 2y$

{5}

مطلوب است ساده شده ی عبارت :

$$\tan 1^0 . \tan 2^0 + \tan 2^0 . \tan 3^0 + \cdots + \tan 1392^0 . \tan 1393^0$$

{6*}

نشان دهید

$$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{n\pi}{n} = -1$$

{7**}

مطلوب است محاسبه ی عبارت های مقابل

الف) $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

ب) $1 + \tan 10^0 . \tan 20^0$

ج) $\sin 15^0 , \sin 18^0 , \sin 36^0 , \sin 54^0$

د) $\tan 15^0 + \cot 5^0$ ه) $\sin\left(Arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

و) $\sin(2Arcsin(x))$ (پاسخ $2x.\sqrt{1-x^2}$)

ز) $Arcsin\left(\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)\right)$

{8**}

تمام جواب های معادله ی $Arcsin(\sin(x)) + Arccos(\cos(x)) = 0$ را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید. (برد های Arcsin و Arccos به ترتیب بازه های $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $[0,\pi]$ می باشند.

پاسخ : $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$

{9*}

تمام جواب های معادله ی $\sin x + \cos x - \sin x \,.\, \cos x = -1$ را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید.

{10*}

به ازای هر عدد حقیقی x نشان دهید $\cos(\sin(x)) > \sin(cos(x))$

{11}

تمام اعداد حقیقی مثل x را چنان بیابید که : $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$.

{12}

تمام جواب های معادله ی $4\sin x + \ 3\cos x = 0$ را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید.

{13*}

تمام جواب های معادله ی $4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$ را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید.

راهنمایی : چند جمله ای بر حسب $\sin x$ را تجزیه کنید.

{14}

تمام جواب های معادله ی مقابل را در مجموعه ی اعداد حقیقی بیابید:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=4$$

{15***}

مطلوب است محاسبه ی عبارت مقابل : $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

{16*}

نشان دهید $\sin\left(\frac{1}{2}Arcsin\, x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$.

{17*}

نشان دهید $2Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{4}=Arctan\frac{32}{43}$.

{18*}

مطلوب است محاسبه ی عبارت مقابل

$$Arctan\, x+Arctan\frac{1-x}{1+x}$$

{19}

معادله ی مقابل را حل کنید:

$$Arcsin\, 2x+Arcsin\, x=\frac{\pi}{3}$$

{20***}

مطلوب است محاسبه ی $f=\frac{\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}}{\text{arccot}\frac{1}{2}+\text{arccot}\frac{1}{3}}$.

راهنمایی :