۱۰۱

$2/39 ,\ 2/399 ,\ 2/3999 ,\ \ldots \longrightarrow 2/4$

دنباله تفاضل: $2/4-2/39 ,\ 2/4-2/399 ,\ 2/4-2/3999 ,\ \ldots \Longrightarrow 0/01 ,\ 0/001 ,\ 0/0001 ,\ \ldots$

$\longrightarrow 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots \longrightarrow$ جمله دهم $\boxed{= 10^{-11}}$

گزینه ۱ ✓

۱۰۲

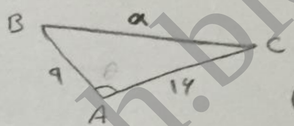
$D_f:\ ax+b>0 \longrightarrow x > -\frac{b}{a} \longrightarrow x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right) \Longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

$f\left(-\frac{4}{9}\right) = \log_3\left(2\left(-\frac{4}{9}\right)+1\right) = \log_3 \frac{1}{9} \boxed{= -2}$

گزينه ۱ ✓

۱۰۳

$S = \frac{1}{2} AB\times AC\times \sin\hat{A}$



$\longrightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2}\times 9\times 16\times \sin\hat{A}$

گزینه ۳ ✓

$\longrightarrow \sin\hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ & $\sin^2\hat{A}+\cos^2\hat{A}=1 \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\cos^2\hat{A}=1$

$\longrightarrow \frac{5}{9}+\cos^2\hat{A}=1 \Longrightarrow \cos^2\hat{A}=\frac{4}{9}$

$\cos\hat{A}=\frac{2}{3}$ ✗

$\cos\hat{A}=-\frac{2}{3}$ ✓

قانون کسینوس‌ها: $a^2=9^2+16^2-2\times 9\times 16\times \cos\hat{A}$

زاویه $\hat{A}$ منفرجه است.

$\longrightarrow a^2=81+256-\cancel{18}^{6}\times 16\times\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right) = 337+192 = 529 \longrightarrow \boxed{a=\sqrt{529}=23}$

(راه تستی)

۱۰۵ یک دنباله هندسی مانند a_1, a_2 را در نظر می‌گیریم؛

a_1, a_2 : (مثال: دنباله دو جمله‌ای)

$a_1+a_2=3a_1$

$\longrightarrow a_2=2a_1 \longrightarrow a_1q=2a_1 \longrightarrow \boxed{q=2}$

گزینه ۳ ✓

راه تشریحی این سؤال طولانی و خارج از حوصله دانش‌آموز برای حل یک تست است.

۱۰۴

$\binom{4}{2}\binom{5}{3}\,5! = 6\times 10\times 120 = 7200$

گزینه ۲ ✓

۱۰۶

$f(-2)=0 \longrightarrow 0=(-2)^4+a(-2)^3-8(-2) \longrightarrow 32=8a \longrightarrow \boxed{a=4}$

$f(x) = x^4+4x^3-8x = x(x+2)(x^2+2x-4)$

گزینه ۴ ✓

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^3-8x & x^2+2x \\ \cline{2-2} -x^4-2x^3 & x^2+2x-4 \\ \hline 2x^3-8x & \\ -2x^3-4x^2 & \\ \hline -4x^2-8x & \\ +4x^2+8x & \end{array}$$

$x^2+2x-4=0 \longrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$

$\Delta'=(1)^2-(1)(-4)=5$

کوچکترین ریشه $\boxed{=-1-\sqrt{5}}$

۱۰۷

$$A = x^2+4x+3 \longrightarrow A = \sqrt{A+2} \xrightarrow[A>0]{A>-2} A^2 = A+2 \longrightarrow A^2-A-2=0$$

گزینه (۲)

$$\longrightarrow \begin{cases} A=-1 & \text{غ ق ق } (A>0) \\ A=2 \longrightarrow x^2+4x+3=2 \longrightarrow x^2+4x+1=0 \longrightarrow \boxed{P=\frac{c}{a}=1} \end{cases}$$

۱۰۸

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$

$$y = \begin{cases} 2x-6-(x+4)+x & x>3 \\ -2x+6-(x+4)+x & -4<x<3 \\ -2x-6-(-x-4)+x & x<-4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = \begin{cases} 2x-10 & x>3 \\ -2x+2 \quad \text{بازه مورد نظر} & -4<x<3 \\ -2 & x<-4 \end{cases}$$

$$y=-2x+2 \longrightarrow 2x=-y+2$$

$$\longrightarrow x = -\frac{1}{2}y+1 \quad \text{(I)}$$

$$-4<x<+3 \longrightarrow -4<-\frac{1}{2}y+1<3 \longrightarrow -5<-\frac{1}{2}y<2 \longrightarrow 10>y>-4 \quad \text{(II)}$$

$$\text{(II)},\text{(I)} \longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+1 \quad ; \quad -4<x<10$$

گزینه (۴)

۱۰۹

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x \longrightarrow \frac{2\sin(\frac{3x}{2})\cos(-\frac{x}{2})}{2\cos(\frac{3x}{2})\cos(-\frac{x}{2})} = \cot x$$

$$\xrightarrow{\cos(-\frac{x}{2})\neq 0} \tan\left(\frac{3x}{2}\right) = \cot x \longrightarrow \tan\left(\frac{3x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\longrightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \longrightarrow \frac{5x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow 5x = 2k\pi+\pi$$

$$\longrightarrow 5x = \pi(2k+1) \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}(2k+1)\pi}$$

گزینه (۴)

(راه تستی)

البته با بررسی عدد صفر که در گزینه های ۱، ۲، ۳ صدق می کند ولی در گزینه ۴ صدق نمی کند نیز می توان به جواب درست یعنی گزینه ۴ رسید.

۱۱۰

$$f(x) = \sin^{-1}(x) \longrightarrow D_f = [-1,1]$$

گزینه (۱)

$$y = \sin^{-1}(U(x)) \longrightarrow -1 \leq U(x) \leq 1 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} U(-1) = -1 \\ U(3) = 1 \end{cases}$$

این شرایط فقط در گزینه ۱ صدق می کند.

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی
Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

۱۱۱

$\alpha = \cos^{-1}(-\frac{5}{13})$ $\qquad 169\sin(2\alpha) = 169\times 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\longrightarrow$ عبارت $= 169\times 2\times \sin(\cos^{-1}(-\frac{5}{13}))\times\cos(\cos^{-1}(-\frac{5}{13}))$ $\qquad$ گزینه ۱

$= 169\times 2\times\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}\times(-\frac{5}{13}) = 169\times 2\times\frac{12}{13}\times(-\frac{5}{13}) = \boxed{-120}$

۱۱۲ $\qquad$ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})\times(1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(x^2-2x)\times(1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} = \lim_{x\to 2^+}\frac{a(\overbrace{1+1-x}^{(2-x)\ \to\ -1})}{x(\cancel{x-2})(1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} = -\frac{a}{6}$$

$\lim_{x\to 2^-} x-a = 2-a$ $\qquad -\frac{a}{6} = 2-a \longrightarrow \frac{5a}{6} = 2 \longrightarrow a = \frac{12}{5} = \boxed{2.4}$

۱۱۳

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3} = e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1}-1)\times(2n+3)} = e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1})\times(2n+3)}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}} = e^{2}$$

گزینه ۲

۱۱۴

$f(x) = [2x]+[-2x] = \begin{cases} -1 & 2x\notin\mathbb{Z} \\ 0 & 2x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{+3\cos^2 x\times\sin x}{\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{\sin x}{x}\right)\times 3\cos^2 x\times\sqrt{1+x^2}$$

$= -3$ $\qquad$ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0}([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} = (-1)\times(-3) = \boxed{+3}$$

۱۱۵

$f(-\frac{1}{2})\times f(-\frac{3}{4}) < 0 \longrightarrow (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ $\qquad$ گزینه ۱

۱۱۶

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty}|x+1|-|x-1| = \begin{cases} +\infty: & y=2 \\ -\infty: & y=-2\end{cases}$$ افقی

گزینه ۲

نیمساز ناحیه اول و سوم : $y = x$

$-2 = x \longrightarrow x=-2,\ y=-2 \Longrightarrow A(-2,-2)$

$2 = x \longrightarrow x=2,\ y=2 \Longrightarrow B(2,2)$

$AB = \sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com
پاسخ به سوالات: مهندس اسعیلی

۱۱۷

چون این تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته نیست پس این تابع دارای مماس چپ و مماس راست به شکل " " نیست که بتوان زاویه بین مماس راست و مماس چپ را محاسبه نمود؛ ولی اگر $f'_+(\frac{1}{2})$ را بعنوان مماس راست و $f'_-(\frac{1}{2})$ را بعنوان مماس چپ در نظر بگیریم (مدنظر طراح) می‌توان گفت این تابع در حوالی $\frac{1}{2}^+$ دارای ضابطه‌ی $f(x)=x+x^2$ و در حوالی $\frac{1}{2}^-$ ضابطه $f(x)=x^2$ خواهد بود که به این ترتیب داریم:

$$f'_+(\tfrac{1}{2})=1+2x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2 \quad , \quad f'_-(\tfrac{1}{2})=2x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1$$

و برای $\tan\theta$ داریم:

$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{2-1}{1+2\times1}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

که گزینه ۲ پاسخ صحیح خواهد بود.

۱۱۸

گزینه ۴

$$x^2y-y^2-2\sqrt{x}+4=0$$

$$\to 2xy+x^2y'-2yy'-2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \quad \text{I}$$

$$\to 2y+2xy'+2xy'+x^2y''-2y'^2-2yy''+\frac{1}{2x\sqrt{x}}=0 \quad \text{II}$$

$$\text{I} \to 2(1)(2)+(1)^2y'-2(2)y'-\frac{1}{\sqrt{1}}=0 \to y'\Big|_{(1,2)}=1$$

$$\text{II} \to 2(2)+2(1)(1)+2(1)(1)+(1)^2y''-2(1)^2-2(2)y''+\frac{1}{2(1)\sqrt{1}}=0$$

$$\to y''\Big|_{(1,2)}=\boxed{\frac{13}{6}}$$

۱۱۹

$$A(2,a)\in f^{-1} \to A'(a,2)\in f \Longrightarrow 2=a^3-a^2+2a \to a=1$$

گزینه ۱

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3(1)^2-2(1)+2}=\frac{1}{3}$$ شیب خط مماس

شیب خط قائم $=\boxed{-3}$

تنها گزینه‌ای که شیب خط قائم را (۳-) نشان می‌دهد گزینه ۱ است.

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی

۱۲۰

$$y = |x|e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ -xe^{-x} & x < 0 \end{cases} \longrightarrow y' = \begin{cases} e^{-x} - xe^{-x} & x > 0 \\ -e^{-x} + xe^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} & x > 0 \\ e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} & x < 0 \end{cases} \longrightarrow y'' = \begin{cases} -2e^{-x} + xe^{-x} & x > 0 \\ 2e^{-x} - xe^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

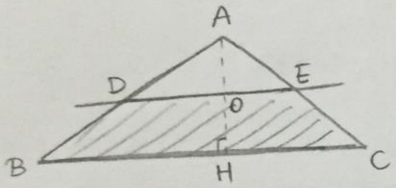
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0 $-$	$-$	
y''	$+$	$-$	$-$	0 $+$	

ج.م

$x \in (1,2)$

گزینه ۳

۱۲۱



$AO = h$

$DE = b$ $\longrightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}BC \times AH - \frac{1}{2}bh$

طبق تالس: $\frac{h}{AH} = \frac{b}{BC} \longrightarrow \frac{h}{12} = \frac{b}{20} \longrightarrow \boxed{b = \frac{5}{3}h}$

$$\Longrightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2} \times 20 \times 12 - \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}h \times h \longrightarrow S = 120 - \frac{5}{6}h^2$$

گزینه ۴

شیب نسبت به زمان $\Longrightarrow \frac{dS}{dt} = -2 \times \frac{5}{6}\overset{(AH-OH)}{h} \times \frac{dh}{dt} = -2 \times \frac{5}{6} \times (12-9) \times (-0.12) = 1$

علامت منفی به خاطر این است که اگر فاصله دو خط موازی زیاد شود فاصله A از O (h) کم خواهد شد.

۱۲۲ با توجه به شکل داده شده تابع $f'(x)$ باید دارای یک ریشه ساده $x=0$ و یک ریشه مضاعف باشد. پس:

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = 0$$

$$\longrightarrow -2x(2x^2 - 12x - a) = 0 \longrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \longrightarrow x = 0 \quad \checkmark \\ 2x^2 - 12x - a = 0 \end{cases}$$

این معادله باید یک ریشه مضاعف داشته باشد

$$\Delta' = 0 \longrightarrow (-6)^2 - (2)(-a) = 0 \longrightarrow 36 + 2a = 0 \longrightarrow \boxed{a = -18}$$

گزینه ۱

۱۲۳ گزینه ۳

$$G'(x) = 2x \times \underbrace{\int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2}}_{0} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{x}$$

$= 2\ln 2$

$$\longrightarrow G'(4) = 2(4)\int_2^{\sqrt{4}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} + (4)^2 \times \frac{1}{2\sqrt{4}} \times \frac{\ln(\sqrt{4}+2)}{4} = 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{\ln 4}{4} = \ln 4$$

۱۲۴

$$\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}\,dx = \int_0^2 0\times\cancel{\frac{\sqrt{x}-1}{x}}\,dx + \int_2^4 1\times\frac{\sqrt{x}-1}{x}\,dx$$

$$= \int_2^4 \left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,x^{-\frac{1}{2}+1} - \ln x\,\Big|_2^4$$

$$= 2\sqrt{x} - \ln x\,\Big|_2^4 = (2\sqrt{4}-\ln 4)-(2\sqrt{2}-\ln 2)$$

$$= 4 - 2\ln 2 - 2\sqrt{2} + \ln 2 = \boxed{4 - 2\sqrt{2} - \ln 2}$$

گزینه ۱